МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.917

ВОРОНЕЦКАЯ МАРИНА АЛЕКСАНДРОВНА

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НА МНОЖЕСТВЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
кандидат физико-математических наук,
доцент А.Г. Иванов

Ижевск — 2006 г.

Оглавление

Обозначения

$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n с нормой $|x| \doteq \sqrt{x^* x}$;

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных операторов $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с нормой $|A| \doteq \max\limits_{|x|=1} |Ax|$;

$O_r[0]$ — замкнутый (в $\mathbb{R}^n$) шар с центром в 0 и радиусом r;

$C\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ — пространство непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$;

$L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — пространство ограниченных в существенном на $\mathbb{R}$ функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_\infty \doteq \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$;

$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — пространство локально суммируемых функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$;

mes — мера Лебега на $\mathbb{R}$;

$\mathrm{comp}(X)$ — совокупность компактных подмножеств метрического пространства X;

$f_\tau(\cdot) \doteq f(\cdot + \tau)$ — сдвиг функции f на τ;

$\overline{\mathrm{orb}}(f)$ — замыкание (в $\mathbb{R}^n$) множества $\{f(t),\ t \in \mathbb{R}\}$;

$\omega_\gamma[f,U] \doteq \sup\big\{|f(x_1) - f(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in U, \quad |x_1 - x_2| \leqslant \gamma\big\}$ — γ - колебание функции f на множестве $U \in \mathrm{comp}(R^n)$;

$M\{f(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)\,dt$ — среднее значение функции f.

Введение

Почти периодические (п. п.) функции широко используются в различных областях математики и ее приложениях. Одной из важных областей применения теории п. п. функций является теория колебаний, описывающая колебательные процессы физических систем, рассматриваемых, например, в механике, теоретической физике, небесной механике, теории электрических цепей, электро- и радиотехнике.

Важной сферой применения п. п. функций является теория систем дифференциальных уравнений с п. п. коэффициентами. К настоящему времени число работ в этом направлении стало трудно обозримым. Поэтому отметим лишь работы [1]-[13] монографического характера, в которых приведены основные методы исследования п. п. решений таких систем, и содержащих комментарии работ, посвященных теории дифференциальных уравнений с п. п. коэффициентами и ее приложениям. Отметим также работы [14]-[21], в которых на основании вариационного принципа Лагранжа получены необходимые и достаточные условия существования п. п. (по Бору) решений уравнения Эйлера-Лагранжа с функцией $L \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

В работе [14] Blot J. указал, что множество п. п. решений этого уравнения совпадает с совокупностью стационарных точек функционала

$$x(\cdot) \mapsto J\bigl(x(\cdot)\bigr) = M\{L\bigl(x(t), \dot{x}(t)\bigr)\} \doteq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T L\bigl(x(t), \dot{x}(t)\bigr)\, dt,$$

определенного на множестве $B^1 \doteq B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, состоящем из функций, принадлежащих вместе со своей производной пространству $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ п. п. по Бору [8, 9] отображений. В этой и последующих своих работах, основываясь на этом утверждении, для задачи $J\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in B^1$, названной им *простейшей задачей вариационного исчисления в среднем*, он указал необходимые условия первого и второго порядков решения в слабом смысле (то есть по норме $\|\cdot\|_{B^1}$ пространства B^1) этой задачи. Эти результаты, а также доказанные им утверждения о свойствах среднего значения квадратичной формы, отвечающей второй производной (по Фреше) функционала J, позволили указать необходимые, а также достаточные условия существования п. п. решения уравнения Эйлера-Лагранжа, и привести ряд утверждений о структуре множества таких решений.

В работах [19]-[21], также используя вариационный принцип, авторы указали достаточные условия существования п. п. (по Бору) решений уравнения Эйлера-Лагранжа, отвечающих неавтономной функции Лагранжа специального вида, и которая по временной переменной является п. п. по Бору функцией. Сказанное определяет актуальность исследования вариационных задач, определенных на множестве п. п. функций.

Целью работы является изучение ряда экстремальных задач с функционалами, определенными на множестве п. п. по Бору функций, производная которых принадлежит пространству ограниченных (в существенном) п. п. по Степанову отображений.

* * *

Диссертация состоит из введения, трех глав, 11 параграфов (нумерация параграфов сквозная), и списка литературы.

В первом параграфе приведены определения и используемые в дальнейшем свойства банаховых пространств $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ и $S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ п. п. по Бору и, соответственно, по Степанову функций [8], а также пространства $S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ — пространства ограниченных (в существенном) п. п. по Степанову функций.

Напомним [8], что каждой п. п. по Степанову функции f можно поставить в соответствие ряд Фурье $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda,f)e^{i\lambda t}$.

В первом параграфе доказана следующая

Теорема 0.1. *Если ряд Фурье* $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda,f)e^{i\lambda t}$, *отвечающий функции* $f\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *совпадает с формально продифференцированным рядом Фурье* $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda,g)e^{i\lambda t}$ *для функции* $g\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *то функция* g *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *и при почти всех (п. в.)* $t\in\mathbb{R}$ *имеет место равенство* $\dot g(t)=f(t)$.

Результаты второго параграфа носят вспомогательный характер. В нем введено в рассмотрение пространство $B(\mathbb{R}\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{U}\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из непрерывных отображений $(t,u)\mapsto f(t,u)$, которые п. п. по $t\in\mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u\in\mathbb{U}$ [13], а также пространство $S\big(\mathbb{R},C(\mathbb{U},\mathbb{R}^n)\big)$ п. п. по Степанову функций, состоящее из таких отображений $(t,u)\mapsto f(t,u)$, что для любого множества $[a,b]\times\mathbb{U}$ это отображение удовлетворяет условиям Каратеодори (см. [23], с. 212), и для любого $\varepsilon>0$ множество $E_S(f,\varepsilon)\doteq\bigcap\limits_{u\in\mathbb{U}}E_S\big(f(\cdot\,,u),\varepsilon\big)$ относительно плотно.

Обоснована корректность определения на множестве $S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{U})$ функционала $u(\cdot)\mapsto\mathfrak{I}\big(u(\cdot)\big)\doteq M\{g\big(t,u(t)\big)\}$, отвечающего заданной функции $g\in S\big(\mathbb{R},C(\mathbb{U},\mathbb{R})\big)$, и указан ряд свойств этого функционала, используемых далее.

В третьем параграфе вводится в рассмотрение отображение

$(t,x,u)\mapsto L(t,x,u)\in\mathbb{R}$, $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$, ($\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющее условию:

A) для любых фиксированных множеств $V\in\mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $U\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ отображение L принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R})\big)$.

Показано, что на множестве $\mathcal{B}\doteq\{x\in\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\,\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset\mathcal{V}\}$, где $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\doteq\{x\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\,:\,\dot{x}\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\}$ — нормированное пространство с нормой $\|x\|_{\mathfrak{B}}\doteq\|x\|_B+\|\dot{x}\|_S,\quad x\in\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, корректно определен функционал

$$x(\cdot)\mapsto I\big(x(\cdot)\big)\doteq M\{L\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\},\quad x(\cdot)\in\mathcal{B}. \tag{0.1}$$

Заметим, что в случае, когда рассматривается отображение, принадлежащее при любых $V,U\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ пространству $B(\mathbb{R}\times V\times U,\mathbb{R})$, то для каждой функции $x\in\mathcal{B}^1\doteq\{x\in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\,:\,\overline{\mathrm{orb}}(x)\subset\mathcal{V}\}$ отображение $t\mapsto L\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)$ будет п. п. по Бору, и, стало быть, на этом множестве функционал I определен. В рассматриваемом же случае, возможность определения функционала (0.1) требует, вообще говоря, обоснования.

В начале параграфа доказан ряд свойств функционала (0.1), и обоснована целесообразность рассмотрения следующей задачи:

$$I\big(x(\cdot)\big)\to\inf,\quad x(\cdot)\in\mathcal{B}, \tag{0.2}$$

которая называется *простейшей задачей вариационного исчисления, определенной на множестве п. п. функций*. В этой задаче функция $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ называется решением в *сильном* (*слабом*) *смысле*, если для всех x из множества $\mathcal{B}$ таких, что $\|\widehat{x}-x\|_B<\gamma$ (соответственно, $\|\widehat{x}-x\|_{\mathfrak{B}}<\gamma$) выполнено неравенство $I\big(x(\cdot)\big)\geqslant I\big(\widehat{x}(\cdot)\big)$.

Если функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ доставляет сильный минимум в задаче (0.2), и при этом $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}^1$, то эта функция будет решением в слабом смысле. Поэтому необходимые условия решения в слабом смысле являются необходимыми условиями решения и для сильного минимума. При этом, если $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}^1$, то (в силу утверждения, доказанного в начале параграфа) $\widehat{x}(\cdot)$ будет решением в слабом смысле задачи $I\big(x(\cdot)\big) \to \inf$, $x(\cdot) \in \mathcal{B}^1$. Следовательно, необходимые условия решения задачи (0.2) будут также необходимыми для решения в слабом смысле задачи, рассмотренной в работе [14]. В диссертации при рассмотрении задач вариационного исчисления и в более общей постановке, определенных на множестве $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, исследуются необходимые условия решения в сильном и слабом смысле.

Отметим также, что задача (0.2) может быть переписана в виде задачи оптимального управления п. п. движениями (см., например [24, 25]). Вместе с тем, как показано в [24], при получении необходимых условий оптимальности допустимого процесса (в виде принципа максимума Понтрягина) в задаче оптимального управления п. п. движениями существенно, что однородная система уравнений в вариациях, отвечающая этому оптимальному процессу, должна обладать свойством экспоненциальной дихотомичности. В задаче оптимального управления п. п. движениями, отвечающая задаче (0.2), однородная система уравнений в вариациях для уравнения $\dot{x} = \widehat{u}(t)$ имеет вид: $\dot{x} = 0$, и, очевидно, не является экспоненциально дихотомичной. Следовательно, при получении необходимых условий решения в сильном смысле задачи (0.2), вообще говоря, нельзя воспользоваться необходимыми условиями оптимальности допустимого процесса, приведенными в [24].

Поэтому при получении необходимых условий решения в сильном смысле вариационных задач, определенных на множестве $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, используются другие методы, отличные от методов, применяемых при изучении задач оптимального управления п. п. движениями, и которые представляют самостоятельный интерес.

Основным утверждением третьего параграфа является следующая теорема, в которой $AC\big([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n\big)$ — пространство абсолютно непрерывных функций. заданных на отрезке $[\alpha,\alpha+T]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 0.2. *Пусть отображение* $L:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* A) *и ограничено. Функция* $\widehat{x}$ *является решением задачи* (0.2) *в сильном смысле тогда и только тогда, когда для любого* $T>0$ *найдется такое* $\gamma\doteq\gamma(T)>0$, *что для всякого* $\alpha\in\mathbb{R}$ *и всякой функции* x *из пространства* $AC\big([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n\big)$ *такой, что* $\|x-\widehat{x}\|_{C\left([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n\right)}<\gamma$, *будет выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\,dt\geqslant\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt$$

В четвертом параграфе рассматривается функция $L:\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) в каждой точке $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$ существуют производные L'_x, L'_u по переменным x и, соответственно, u;

2) для любых фиксированных множеств $V\in\mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $U\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ $L\in S\big(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R})\big)$, и L'_x, $L'_u\in S\big(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R}^{n*})\big)$.

Всюду далее будем использовать обозначения: $\widehat{L}'_x(t)\doteq L'_x\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)$,

$\widehat{L}'_u(t) \doteq L'_u\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big), \ t \in \mathbb{R}.$

В силу результатов о дифференцируемости, приведенных во втором параграфе, функционал I (см. (0.1)) будет иметь в каждой точке $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ первую вариацию по Лагранжу $\delta I(x(\cdot);\cdot)$.

Теорема 0.3. *Пусть функция* $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ *такова, что* $\delta I(\widehat{x}(\cdot);\cdot) = 0$. *Тогда если п. п. по Степанову функции* $t \mapsto \widehat{L}'_x(t) \quad t \mapsto \widehat{L}'_u(t)$ *ограничены в существенном, то отображение* $t \mapsto \widehat{L}'_u(t)$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}'_u(t) + \widehat{L}'_x(t) = 0. \tag{0.3}$$

Далее рассмотрим функции $L_j : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 0,\ldots,k+m$, удовлетворяющие условию, аналогичному условию A), и определим следующую задачу

$$I_0\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in D, \tag{0.4}$$

где $D \doteq \{x \in \mathcal{B} : I_j\big(x(\cdot)\big) \leqslant 0, \ j=1,\ldots,k, \ I_j\big(x(\cdot)\big)=0, \ j = k+1,\ldots,k+m\}$.

Эта задача называется *п. п. задачей с ограничениями на средние значения типа равенств и неравенств*, в которой функция $\widehat{x}(\cdot)$ называется решением *в слабом смысле*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $I_0\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant I_0\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x(\cdot) \in D$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$.

Теорема 0.4. *Пусть в задаче* (0.4) *отображения* $L_j : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, k+m$, *удовлетворяют условиям, аналогичным условиям* 1), 2) *для лагранжиана* L, *и функция* $\widehat{x}(\cdot) \in D$ *является решением в слабом* *смысле задачи* (0.4). *Тогда найдутся такие числа* $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0,\ \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{k+m},$ *не равные нулю одновременно, что будут выполнены соотношения:* $\widehat{\lambda}_j \geqslant 0,$ $\widehat{\lambda}_j I_j\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = 0,\ j = 1, \ldots, k.$ *Кроме того, если п. п. по Степанову функции* $t \mapsto \widehat{L}'_{jx}(t) \doteq L'_{jx}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big), \quad t \mapsto \widehat{L}'_{ju}(t) \doteq L'_{ju}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$ *ограничены на* $\mathbb{R}$ *в существенном, то функция* $t \mapsto \sum\limits_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*}),$ *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство:*

$$-\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)\Big) + \sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{jx}(t) = 0.$$

В параграфах 5-7 исследуется *п. п. задача Больца.* Для постановки этой задачи наряду с функцией $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$ удовлетворяющей условию А), фиксируются константа $a > 0$ и п. п. последовательность [32] $\{t_m\}_{m \in \mathbb{Z}},$ а также отображение $(t, x) \mapsto g(t, x) \in \mathbb{R}, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V},$ удовлетворяющее условиям:

I) в каждой точке $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$ существует $g'_x(t, x)$,

II) для всякого $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ функции $(t, x) \mapsto g(t, x)$ и $(t, x) \mapsto g'_x(t, x)$ принадлежат пространствам $B(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R})$ и $B(\mathbb{R} \times V, \mathbb{R}^{n*}),$ соответственно.

Показано, что в этом случае на множестве $\mathcal{B}$ корректно определен функционал

$$x(\cdot) \mapsto G\big(x(\cdot)\big) \doteq \lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} g\big(t_m, x(ma)\big),$$

а также показано, что он будет непрерывно дифференцируемым по Фреше на $\mathcal{B}$.

Сказанное выше позволяет рассмотреть задачу, которая называется *п. п.*

задачей Больца

$$\mathbb{I}\big(x(\cdot)\big) \doteq I\big(x(\cdot)\big) + G\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}, \tag{0.5}$$

и функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ называется (локальным) *решением в слабом (сильном) смысле*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant \mathbb{I}\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x(\cdot) \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$ (соответственно $\|\widehat{x} - x\|_{B} \leqslant \gamma$).

Основным утверждением параграфа 5 является следующая

Теорема 0.4. *Пусть функции* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $g : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* 1), 2) *и* I), II), *соответственно, и функция* $\widehat{x}$ *из множества* $\mathcal{B}$ *является решением в слабом смысле задачи* (0.5). *Тогда, если функция* $t \mapsto \widehat{p}(t) \doteq \int\limits_0^t \widehat{L}'_x(s)\, ds \in \mathbb{R}^{n*}$, $t \in \mathbb{R}$, *п. п. по Бору, то*

а) *отображение* $\widehat{L}'_u$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$;

б) $\widehat{x}(t)$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет системе уравнений* (0.3);

в) *имеет место равенство* $\lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{1}{q} \sum\limits_{m=0}^{q-1} g'_x\big(t_m, \widehat{x}(ma)\big) = 0.$

Шестой параграф посвящен получению необходимых условий решения в сильном смысле задачи (0.5). Для получения этих условий введены в рассмотрение *п. п. иголки Вейерштрасса*, которые определяются следующим образом. С фиксированной точкой $\theta \in (0, a)$ ($a > 0$) связывается множество $\Lambda \doteq \{\lambda > 0 \,:\, \vartheta + \varepsilon < a\}$, где $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) \doteq \lambda + \sqrt{\lambda}$, и по заданной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$ строится функция $x(\cdot, \lambda) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ($\lambda \in \Lambda$), определенная на каждом полуинтервале $[ma, (m+1)a), \quad m \in \mathbb{Z}$

равенством

$$x(t,\lambda) \doteq \begin{cases} 0,\ t \in \big[ma,(m+1)a\big) \setminus [ma+\vartheta, ma+\vartheta+\varepsilon), \\ (t-ma-\vartheta)\, v_m,\ t \in [ma+\vartheta, ma+\vartheta+\lambda), \\ \lambda v_m - \sqrt{\lambda}(t-ma-\vartheta-\lambda) v_m,\ t \in [ma+\vartheta+\lambda, ma+\vartheta+\varepsilon), \end{cases}$$

Показано, что множество функций $\{x(\,\cdot\,,\lambda),\ \ \lambda\ \in\ \Lambda\}$, которое названо семейством *п. п. иголок Вейерштрасса*, принадлежит пространству $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, ограничено по норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$, и является равностепенно почти периодичным.

Для функции Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(t,x,u,v) \doteq L(t,x,v) - L(t,x,u) - (v-u)\cdot L'_u(t,x,u)$$

доказано следующее утверждение:

Лемма 0.1. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *помимо условий* 1), 2) *удовлетворяет условию:*

3) *для любых* $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ *и* $U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}(\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \omega_\gamma[L'_u(t,\cdot,\cdot), V\times U]) = 0.$$

Тогда, если функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет уравнению* (0.3)*, то для каждого компакта* $U \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}}) + O_N[0]$, $N \in \mathbb{N}$, *найдутся такие последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty} q_l = \infty$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,a)$, $\lim\limits_{j\to\infty} \eta_j = 0$, *и измеримое множество* $\Xi \subset [0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi = a$, *что в каждой точке* $\vartheta \in \Xi$ *и для любой фиксированной п. п. последовательности* $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$ *будет иметь место предельное равенство*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\eta_j}\big(\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot,\eta_j)\big) - \mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)\big)\big) =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \mathcal{E}(ma+\vartheta, \widehat{x}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta)+v_m).$$

Лемма 0.1 используется при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 0.5. *Пусть функции* $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и* $g : \mathbb{R}\times\mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* 1)–3) *и* I), II), *соответственно, и функция* $\widehat{x}$ *из множества* $\mathcal{B}$ *является решением задачи* (0.5). *Тогда*

а) *если функция* $t \mapsto \widehat{p}(t) \doteq \int\limits_0^t \widehat{L}'_x(s)\,ds \in \mathbb{R}^{n*}$, $t\in\mathbb{R}$, *п. п. по Бору, то для каждой функции* u *из* $S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ *выполнено неравенство*

$$M\{\mathcal{E}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t)+u(t)\big)\} \geqslant 0, \tag{0.6}$$

б) *если функция* L *дополнительно удовлетворяет условию: для любой ограниченной области* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, *содержащей* $\overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$, $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} l(t) < \infty$, *где* $l(t) \doteq \max_{u\in U} |L'_u(t,\widehat{x}(t),u)|$, $U \doteq \overline{\mathcal{U}}$, *то неравенство* (0.6) *выполнено в том и только том случае, если при п. в.* $t\in\mathbb{R}$ *и каждом* $v\in\mathbb{R}^n$ $\mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t)+v) \geqslant 0$.

В седьмом параграфе указаны при некоторых ограничениях на функции L и g необходимые условия второго порядка решения в сильном смысле задачи (0.5): если функция $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ является решением в сильном смысле этой задачи, то при п. в. $t\in\mathbb{R}$ и всяком $v\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $v^* L''_{uu}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, v \geqslant 0$.

Восьмом параграф посвящен необходимым и достаточным условиям неотрицательности среднего значения п. п. квадратичной формы. В этом параграфе фиксируются отображения $P, Q, R \in S_\infty\big(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\quad P(t) = P^*(t),\ R(t) = R^*(t);$

2) $v^*P(t)v > 0$ для всех отличных от нуля $v \in \mathbb{R}^n$ и п. в. $t \in \mathbb{R}$.

Указанным отображениям P, Q, R ставится в соответствие оператор $\mathbb{K} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, определенный следующим равенством:

$$\mathbb{K}[x](t) \doteq \dot{x}(t)^* P(t) \dot{x}(t) + 2\dot{x}(t)^* Q(t) x(t) + x(t)^* R(t) x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

по которому определятся функционал

$$x(\cdot) \mapsto \mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \doteq M\big\{\mathbb{K}[x](t)\big\}, \quad x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

который называется *неотрицательным*, если $\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \geqslant 0$ для всех функций $x(\cdot)$, принадлежащих $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

В следующем утверждении используется понятие отсутствия сопряженных точек у линейной (п. п. по Степанову) системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\big(P(t)\dot{x} + Q^*(t)x\big) = Q(t)\dot{x} + R(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{0.7}$$

Следуя определению, приведенному в [31] стр. 454, будем говорить, что система уравнений (0.7) является *системой без сопряженных точек на интервале* $\mathbb{J}$, если каждое нетривиальное (не обязательно почти периодическое) решение не более одного раза обращается в нуль на этом интервале.

В этом параграфе доказана следующая

Теорема 0.6. *Для неотрицательности функционала* $\mathcal{K}$ *необходимо, чтобы система уравнений* (0.7) *не имела сопряженных точек на* $\mathbb{R}$, *и достаточно, чтобы эта система не имела сопряженных точек на интервале* $(0, +\infty)$.

Девятый параграф посвящен необходимым условиям строгой положительности функционала $\mathcal{K}$. Этот функционал называется *строго положительным*, если найдется такая константа $\varkappa > 0$, что для всех $x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ будет выполнено неравенство $\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \geqslant \varkappa\, M\big\{|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2\big\}$.

Теорема 0.7. *Пусть функционал $\mathcal{K}$ строго положителен. Тогда система уравнений* (0.7) *не имеет ограниченных решений.*

Отметим далее, что система уравнений (0.7) может быть записана в виде линейной системы уравнений $\dot{z}(t) = F(t)z(t)$, в которой

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^*(t) \end{pmatrix},$$

где $A(t) = P^{-1}(t)R(t), \quad B(t) = P^{-1}(t), \quad C(t) = Q(t) - R^*(t)P^{-1}(t)R(t)$.

Утверждение 0.1. *Если функционал $\mathcal{K}$ строго положителен, то система уравнений $\dot{z}(t) = F(t)z(t)$, отвечающая системе уравнений* (0.7), *является экспоненциально дихотомичной.*

В десятом параграфе при рассмотрении условий строгой положительности квадратичной формы в одномерном случае функционал $\mathcal{K}$ записывается в виде

$$\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) = M\{p(t)\dot{x}^2(t) + 2q(t)\dot{x}(t)x(t) + r(t)x^2(t)\},$$

и предполагается что функции p, q принадлежат пространству $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, и $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} p(t) > 0$, а функция r принадлежит пространству $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

На множестве $\mathfrak{B}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \doteq \big\{x \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ddot{x} \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\big\}$ рассмотрим оператор $\mathbb{L} : \mathfrak{B}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определенный равенством

$$\mathbb{L}[x](t) \doteq \ddot{x}(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\dot{x}(t) + \frac{\dot{q}(t) - r(t)}{p(t)}x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 0.8. *Функционал* $\mathcal{K}$, *определенный на множестве* $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *строго положителен тогда и только тогда, когда найдется функция* $z \in \mathfrak{B}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *что* $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} z(t) > 0$, *и для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ $\mathbb{L}[z](t) \leqslant 0$, при этом $\mathbb{L}[z](t) \not\equiv 0$.

В начале одиннадцатого параграфа указаны необходимые условия второго порядка решения в слабом смысле задачи (0.2), полученные из теоремы 0.6.

Теорема 0.9. *Пусть функция* $\widehat{x} \in \mathcal{B}$ *является решением задачи* (0.2) *в слабом смысле, и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и всяком* $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$ *выполнено неравенство* $v^* \widehat{L}''_{uu}(t) v > 0$. *Тогда система дифференциальных уравнений* (0.7) *при* $P(t) \doteq \widehat{L}''_{uu}(t), \quad Q(t) \doteq \widehat{L}''_{ux}(t), \quad R(t) \doteq \widehat{L}''_{xx}(t)$, *не имеет сопряженных точек на* $\mathbb{R}$.

Приведен также пример, показывающий, что в отличие от достаточных условий решения в слабом смысле простейшей задачи вариационного исчисления, аналогичные по формулировке условия для экстремали $\widehat{x}$ не являются достаточными.

В заключение параграфа приведены достаточные условия решения задачи (0.2) в одномерном случае.

Теорема 0.10. *Пусть функция* $\widehat{x} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *удовлетворяет следующим условиям:*

a) *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство* (0.3)*;*

b) $\widehat{L}''_{uu}, \widehat{L}''_{xu} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и* $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} \widehat{L}''_{uu}(t) > 0$;

c) *найдется такая функция* $z \in \mathfrak{B}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *что* $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} z(t) > 0$, *и для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *оператор* $\mathbb{L}$, *отвечающий лагранжиану задачи* (0.2), удовлетворяет неравенству $\mathbb{L}[z](t) \leqslant 0$ (при этом $\mathbb{L}[z](t) \not\equiv 0$).

Тогда функция $\widehat{x}$ *является решением задачи* (0.2) *в слабом смысле.*

Основные результаты диссертации докладывались на городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления (Ижевск, 1998-2006 годы), научной конференции молодых ученых (МГУ, Мехмат, май 1998 года), семинаре кафедры прикладной математики УрГУ (Екатеринбург, 2003 год), конференции "Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям", (Минск, 2005 год), научной конференции "теория управления и математическое моделирование", посвященная 50-ти летию Ижевского государственного технического университета и 30-ти летию кафедры прикладной математики информатики ИжГТУ (Ижевск, 2006 год), научной конференции "теория управления и математическое моделирование", посвященная 75-ти летию Удмуртского государственного университета (Ижевск, 2006 год), и опубликованы в [43] - [47].

Выражаю глубокую признательность Иванову А. Г. за постановку интересных задач, внимание и помощь в работе.

Глава 1

Основные свойства среднего значения почти периодического лагранжиана

§1 Основные свойства почти периодических функций.

Приведем основные определения, а также ряд свойств почти периодических (п. п.) функций.

Напомним [8], что функция $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ называется *п. п. по Бору*, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_B(f, \varepsilon) \doteq \Big\{ \tau \in \mathbb{R} \,:\, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| \leqslant \varepsilon \Big\} \tag{1.1}$$

— ее ε-почти периодов (ε-п. п.) относительно плотно [1].

Совокупность п. п. по Бору функций обозначим $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. На этом множестве определена норма $\|f\|_B \doteq \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Полученное нормированное пространство $\big(B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_B\big)$ является банаховым (см. [8]).

На множестве $L_1^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ определено [8] d_l- расстояние ($l > 0$)

$$d_l(f, g) \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int\limits_t^{t+l} |f(s) - g(s)|\, ds, \quad f, g \in L^{\rm loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

[1] напомним, что множество называется *относительно плотным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $l > 0$, что для любого $t \in \mathbb{R}$ на отрезке $[t, t+l]$ будет находиться по крайней мере один элемент множества

Поскольку [8] для всех $l > 0$ все d_l- расстояния топологически эквивалентны, то в достаточно ограничиться рассмотрением $d \doteq d_1$- расстояния.

Напомним, что функция $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ принадлежит множеству $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *п. п. по Степанову функций* [8, 9], если для каждого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_S(f, \varepsilon) \doteq \big\{\tau \in \mathbb{R} \ : \ d(f_\tau, f) \leqslant \varepsilon\big\} \tag{1.3}$$

ε-п. п. функции f относительно плотно. Отметим, что отображение

$$f \mapsto \|f\|_S \doteq d(f, 0)$$

является нормой, и пространство $\big(S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\| \cdot \|_S\big)$ является банаховым.

В пространстве $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ выделим подмножество

$$S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \doteq \big\{f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_\infty \doteq \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < \infty\big\} \tag{1.4}$$

ограниченных в существенном п. п. в смысле Степанова функций.

Отметим, что имеют место следующие включения:

$$B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subset S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Далее, для каждой п. п. (как по Бору, так и по Степанову) функции f существует среднее значение (см., например, [8])

$$M\{f(t)\} \doteq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t)\, dt, \tag{1.5}$$

и каждой такой функции соответствует ряд Фурье (см. [8])

$$f(t) \sim \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} c(\lambda) e^{i\lambda t} \quad (i^2 = -1),$$

в котором

$$c(\lambda) = c(\lambda; f) \doteq M\{f(t)e^{-i\lambda t}\}.$$

При этом множество $\Lambda(f) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ |c(\lambda)| > 0\}$ показателей Фурье п. п. функции f является не более чем счетным [8].

Каждой функции $f \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, зафиксировав в $\Lambda(f)$ рациональный базис $b_1, b_2, \ldots,$ можно поставить [8] в соответствие последовательность тригонометрических многочленов Бохнера-Фейера $\{p_m\}_{m=1}^\infty \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$:

$$p_m(t) = p_m(t; f) \doteq$$

$$\doteq \sum_{\substack{|k_1| \leqslant (m!)^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ |k_m| \leqslant (m!)^2}} \boldsymbol{k}_{m;k_1,k_2,\ldots,k_m} c\left(\frac{k_1}{m!}b_1 + \ldots + \frac{k_m}{m!}b_m\right) e^{i\left(\frac{k_1}{m!}b_1 + \ldots + \frac{k_m}{m!}b_m\right)t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$\boldsymbol{k}_{m;k_1,k_2,\ldots,k_m} \doteq \left(1 - \frac{|k_1|}{(m!)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{|k_m|}{(m!)^2}\right),$$

а $c\left(\frac{k_1}{m!}b_1 + \ldots + \frac{k_m}{m!}b_m\right)$ — коэффициент Фурье функции f для показателя $\frac{k_1}{m!}b_1 + \ldots + \frac{k_m}{m!}b_m$. В [9] показано, что $\lim\limits_{m\to\infty} d(f, p_m) = 0$, и это предельное равенство будет использовано при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Если ряд Фурье* $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} c(\lambda, f)e^{i\lambda t}$, *отвечающий функции* f *из пространства* $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *совпадает с формально продифференцированным рядом Фурье* $\sum\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} c(\lambda, g)e^{i\lambda t}$ *для функции* $g \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *то* g *принадлежит пространству* $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *является дифференцируемой, и* $\dot{g}(t) = f(t)$.

Доказательство. По условию $c(\lambda, f) = i\lambda c(\lambda, g)$. Поэтому $M\{f(t)\} = 0$, и, если $p_m(t; f)$ и $p_m(t; g)$ — суть многочлены Бохнера-

Фейера, аппроксимирующие п. п по Степанову функции f и g, соответственно, то (см. приведенный выше вид таких полиномов) при всех $m \in \mathbb{N}$ и каждом $t \in \mathbb{R}$ $\quad p_m(t; f) = \dot{p}_m(t; g)$, а значит (см. [8], с. 245) $\lim\limits_{m\to\infty} d(\dot{p}_m(\cdot; g), f(\cdot)) = 0$. Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ найдется такое $m_t \in \mathbb{N}$, что выполнено неравенство $d(\dot{p}_{m_t}(\cdot; g), f(\cdot)) \leqslant \varkappa^{-1}(t)$, где $\varkappa(t) = \chi_{[-1,1]}(t) + 2|t|\chi_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]}(t)$ (χ_F — характеристическая функция множества $F \subset \mathbb{R}$). Далее, т.к. при каждом $m \in \mathbb{Z}$ и всех $t \in \mathbb{R}$

$p_m(t; g) = M_s\{g(s+t)K_{m;\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_m}(s)\}$, где $K_{m;\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_m}(\cdot)$ — составное ядро Бохнера – Фейера [8], то, принимая во внимание равенство $M\{K_{m;\mathfrak{b}_1,\ldots,\mathfrak{b}_m}(t)\} = 1$, $m \in \mathbb{Z}$, получаем, что $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |p_m(t; g)| \leqslant \|g\|_\infty$, $m \in \mathbb{Z}$. Поэтому, в силу топологической эквивалентности d_l-расстояний имеем следующие соотношения:

$$|\int_0^t f(s)\,ds| \leqslant \int_0^t |f(s) - \dot{p}_{m_t}(s; g)|\,ds + |p_{m_t}(0; g)| + |p_{m_t}(t; g)| \leqslant$$
$$\leqslant \varkappa(t) d(\dot{p}_{m_t}(\cdot; g), f(\cdot)) + 2\|g\|_\infty \leqslant 1 + 2\|g\|_\infty.$$

Из которых вытекает, что отображение $t \mapsto \mathcal{F}(t) \doteq \int\limits_0^t f(s)\,ds$ ограничено на $\mathbb{R}$, а т.к. $\|f\|_\infty < \infty$, то и равномерно непрерывно на $\mathbb{R}$. Следовательно ([8], с. 206), $\mathcal{F} \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Откуда (напомним, что $M\{f(t)\} = 0$), в свою очередь, по теореме о ряде Фурье для интеграла от п. п. по Степанову функции [8] и условий теоремы 1 имеем следующее соответствие:

$$\mathcal{F}(t) \sim M\{\mathcal{F}(t)\} + \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{R}\\ \lambda\neq 0}} \frac{c(\lambda, f)}{i\lambda} e^{i\lambda t} = \sum_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, g) e^{i\lambda t} - C,$$

где вектор $C \doteq M\{g(t)\} - M\{\mathcal{F}(t)\}$. Поскольку ряд $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} c(\lambda, g) e^{i\lambda t} - C$ является рядом Фурье для п. п. по Степанову функции $t \mapsto g(t) - C$, то в силу теоремы единственности о разложении в ряд Фурье п. п. функции получаем равенство: $g(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds+C,\ t\in\mathbb{R}$, из которого вытекают все утверждения теоремы 1 . $\triangle$

§2 Свойства среднего значения почти периодических функций.

В дальнейшем $\mathbb{U}$ - компактное множество в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим [13] через $B(\mathbb{R}\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$ — совокупность непрерывных отображений $(t,u)\mapsto f(t,u)$, которые *почти периодичны по* $t\in\mathbb{R}$ *в смысле Бора равномерно по* $u\in\mathbb{U}$, т. е. $f\in B(\mathbb{R}\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$, если для любого $\varepsilon>0$ множество

$$\bigcap_{u\in\mathbb{U}} E_B\big(f(\cdot\,,u),\varepsilon\big)$$

относительно плотно. Отметим [13], что $f\in B(\mathbb{R}\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$ в том и только том случае, если f удовлетворяет следующим условиям: для любого $u\in\mathbb{U}$ отображение $t\mapsto f(t,u)$ п. п. в смысле Бора, и $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\omega_\gamma[f(t,\,\cdot\,),\mathbb{U}]\big)=0$, где $\omega_\gamma[f(t,\,\cdot\,),\mathbb{U}]$ — γ - колебание на $\mathbb{U}$ непрерывной функции $u\mapsto f(t,u)$.

Пусть T — отрезок прямой. Через $\Phi(T\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$ обозначим линейное пространство таких функций $f\,:\,T\times\mathbb{U}\to\mathbb{R}^n$, что $f(t,\cdot)\in C(\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$ при п. в. $t\in T$, для каждого $u\in\mathbb{U}$ отображение $t\mapsto f(t,u)\in\mathbb{R}^n$ измеримо (по Лебегу), и существует такая функция $\psi_f\in L_1(T,\mathbb{R}_+)$, что при п. в. $t\in T\quad \max\limits_{u\in U}|f(t,u)|\leqslant\psi_f(t)$. Через $\Phi^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность отображений $(t,u)\mapsto f(t,u)\in\mathbb{R}^n$, $(t,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{U}$, принадлежащих для каждого отрезка $T\subset\mathbb{R}$ пространству $\Phi(T\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$. Поскольку (см. [23]) для каждого отрезка $T\subset\mathbb{R}\quad\Phi(T\times\mathbb{U},\mathbb{R}^n)$ алгебраически изоморфно $L_1\big(T,C(\mathbb{U},\mathbb{R}^n)\big)$, то в дальнейшем каждую функцию из пространства $L_1^{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$ представляем в виде отображения

$$(t,u) \mapsto f(t,u) \in \mathbb{R}^n, \quad (t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}.$$

Обозначим, далее, через $S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$ — совокупность таких функций f из $L_1^{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$, что для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$E_S(f,\varepsilon) \doteq \Big\{\tau \in \mathbb{R} \,:\, \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max_{u\in\mathbb{U}} |f(s+\tau,u) - f(s,u)|\, ds \leqslant \varepsilon\Big\} \qquad (2.1)$$

относительно плотно.

В приведенных ниже двух леммах укажем необходимые в дальнейшем свойства функций из $S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$, доказанные в [28, 29].

Лемма 1. *Если* $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$, *то для каждой функции* u *из множества* $S(\mathbb{R}, \mathbb{U})$ *отображение* $t \mapsto f\big(t, u(t)\big)$, $\quad t \in \mathbb{R}$, *принадлежит пространству* $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Лемма 2. *Если* $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$, *то*

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \omega_\gamma\big[f(s,\,\cdot),\mathbb{U}\big]\, ds\Big) = 0. \qquad (2.2)$$

Далее в силу свойств стекловских усреднений для п. п. по Степанову функций со значениями в банаховом пространстве получаем, что для каждой п. п. по Степанову функции $t \mapsto \mathfrak{f}(t)(\cdot) \in C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)$ найдется такая п. п. по Бору функция $t \mapsto \mathfrak{f}_h[t](\cdot) \in C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)$ ($h > 0$), для которой $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \|\mathfrak{f}[s](\cdot) - \mathfrak{f}_h[s](\cdot)\|_{C(\mathbb{U},\mathbb{R}^n)}\, ds = 0$. Соответствующий результат справедлив в силу выше сказанного и при представлении функции из пространства $S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$ в виде отображения $(t,u) \mapsto f(t,u) \in \mathbb{R}^n$, $(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{U}$.

Для удобства ссылок приведем это утверждение, доказательство которого в методических целях приведено в [28].

Теорема 2. Пусть $f \in S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$. Тогда при каждом $h > 0$ стекловское усреднение функции f

$$(t,u) \mapsto f(t,u\,;h) \doteq \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} f(s,u)\,ds \tag{2.3}$$

принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)$, и

$$\lim_{h\downarrow 0}\Big(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\max_{u\in\mathbb{U}}\big|f(s,u) - f(s,u\,;h)\big|\,ds\Big) = 0.$$

Лемма 3. Пусть функция f принадлежит множеству $S\big(\mathbb{R}, C(\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)\big)$. Тогда отображение $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}, \mathbb{U}) \to S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, определенное равенством

$$\mathcal{F}[u(\cdot)](t) \doteq f\big(t, u(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}$$

равномерно непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим для каждого фиксированного $h > 0$ отображение $(t,u) \mapsto f(t,u\,;h)$, заданное равенством (2.3). Поскольку это отображение принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathbb{U}, \mathbb{R}^n)$, то (см. [13]) $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\big(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\omega_\gamma\big[f(t,\,\cdot\,;h), \mathbb{U}\big]\big) = 0$ и $\mathfrak{f}(h) \doteq \sup\limits_{(t,u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{U}}\big|f(t,u\,;h)\big| < \infty$. Сейчас для заданного $\varepsilon > 0$ зафиксируем такое $h_\varepsilon > 0$ (см. теорему 2 в [28]), что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\max_{u\in\mathbb{U}}\big|f(s,u) - f(s,u\,;h_\varepsilon)\big|\,ds < \frac{\varepsilon}{6},$$

и пусть $\gamma_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\omega_{\gamma_\varepsilon}\big[f(t,\,\cdot\,;h_\varepsilon), \mathbb{U}\big] < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для любых функций $u_1, u_2 \in S(\mathbb{R}, \mathbb{U})$, удовлетворяющих неравенству

$$d(u_1, u_2) < \delta \doteq \frac{\varepsilon \gamma_\varepsilon}{6\mathfrak{f}(h_\varepsilon)},$$

обозначив

$$T_{\gamma_\varepsilon}(t) \doteq \bigl\{ s \in [t, t+1] \,:\, \bigl|u_1(s) - u_2(s)\bigr| < \gamma_\varepsilon \bigr\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

имеем при каждом $t \in \mathbb{R}$ следующие соотношения:

$$\int\limits_t^{t+1} \bigl| f\bigl(s, u_1(s)\bigr) - f\bigl(s, u_2(s)\bigr)\bigr|\, ds \leqslant 2 \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \max_{u\in\mathbb{U}} \bigl| f(s,u) - f(s, u\,; h_\varepsilon)\bigr|\, ds +$$

$$+ \int\limits_{T_{\gamma_\varepsilon}(t)} \bigl| f(s, u_1(s)\,; h_\varepsilon) - f(s, u_2(s)\,; h_\varepsilon)\bigr|\, ds + 2\mathfrak{f}(h_\varepsilon)\mathrm{mes}\bigl([t, t+1] \setminus T_{\gamma_\varepsilon}(t)\bigr) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \omega_{\gamma_\varepsilon}\bigl[f(t,\,\cdot\,; h_\varepsilon), \mathbb{U}\bigr] + 2\frac{\mathfrak{f}(h_\varepsilon)}{\gamma_\varepsilon} d(u_1, u_2) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, $d\bigl(\mathcal{F}[u_1(\cdot)], \mathcal{F}[u_2(\cdot)]\bigr) \leqslant \varepsilon$. $\triangle$

Пусть далее отображение $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такое, что для любого компактного множества U из $\mathbb{R}^n$ оно принадлежит пространству $S\bigl(\mathbb{R}, C(U, \mathbb{R})\bigr)$. Тогда для всякой функции $u(\cdot) \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ определен функционал

$$u(\cdot) \mapsto \mathfrak{I}\bigl(u(\cdot)\bigr) \doteq M\{g\bigl(t, u(t)\bigr)\}. \tag{2.4}$$

Поскольку в пространстве $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ определены две нормы: $\|\cdot\|_S$ и $\|\cdot\|_\infty$, то далее рассматриваются свойства функционала $\mathfrak{I}$ относительно нормированных пространств

$$\mathfrak{B}_1 \doteq \bigl(S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_S\bigr), \quad \mathfrak{B}_2 \doteq \bigl(S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty\bigr). \tag{2.5}$$

Лемма 4. *Пусть отображение* $(t,u) \mapsto g(t,u) \in \mathbb{R}$ *является дифференцируемым по* u *в каждой точке* $(t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *и для любого* $U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) \quad g \in S\big(\mathbb{R}, C(U,\mathbb{R})\big)$, $g'_u \in S\big(\mathbb{R}, C(U,\mathbb{R}^{n*})\big)$. *Тогда*

1) *отображение* $\mathfrak{I} : \mathfrak{B}_1 \to \mathbb{R}$ *имеет первую вариацию по Лагранжу в каждой точке* $u(\cdot) \in \mathfrak{B}_1$. *При этом для всякой функции* $h(\cdot) \in \mathfrak{B}_1$

$$\delta\mathfrak{I}\big(u(\cdot); h(\cdot)\big) = M\{g'_u\big(t, u(t)\big)\, h(t)\}.$$

Кроме того, если для каждого $U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n) \quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}(\max_{u\in U} |g'_u(t,u)|) < \infty$, *то это отображение дифференцируемо по Гато на* $\mathfrak{B}_1$.

2) *Отображение* $\mathfrak{I} : \mathfrak{B}_2 \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемо по Фреше в каждой точке* $u(\cdot) \in \mathfrak{B}_2$, *и при всех* $h(\cdot) \in \mathfrak{B}_2$

$$\mathfrak{I}'[u(\cdot)]\big(h(\cdot)\big) = M\{g'_u\big(t, u(t)\big)\, h(t)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольную функцию $\widehat{u}(\cdot)$ из пространства $S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Поскольку (см. (1.4)) $\widehat{u}(\cdot)$ ограничена в существенном, то без ограничения общности можно считать, что $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{u})$ является компактным множеством в $\mathbb{R}^n$. Для произвольно фиксированного $r > 0$ полагаем

$$U \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{u}) + O_r[0].$$

Далее, для любой функции $u \in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ ($\|u\|_\infty > 0$) множество значений функции $t \mapsto \widehat{u}(t) + \lambda u(t)$ содержится в U для п. в. $t \in \mathbb{R}$ и всяком $\lambda \in (-r/\|u\|_\infty, r/\|u\|_\infty)$. По теореме Лагранжа (см. [36], с. 150)

$$\frac{1}{\lambda}\left(\mathfrak{I}\big(\widehat{u}(\cdot) + \lambda u(\cdot)\big) - \mathfrak{I}\big(\widehat{u}(\cdot)\big)\right) = M\{g'_u\big(t, \widehat{u}(t)\big)\, u(t) + w(t,\lambda)\, u(t)\}, \quad (2.6)$$

где

$$w(t,\lambda) \doteq \int\limits_0^1 \Big(g'_u\big(t,\widehat{u}(t)+\theta\lambda u(t)\big) - g'_u\big(t,\widehat{u}(t)\big)\Big)\,d\theta.$$

Поскольку функция $(t,u)\mapsto g'_u(t,u)$ непрерывна по второму аргументу, и функция u ограничена в существенном, то

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \big|w(s,\lambda)\big|\,ds \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} \omega_{\gamma(\lambda)}\big[g'_u(s,\,\cdot\,),U\big]\,ds,$$

где $\gamma(\lambda)\doteq|\lambda|\cdot\|u\|_\infty$, откуда следует, что существует первая вариация по Лагранжу функционала $\mathfrak{I}$, определенная при каждом $u(\cdot)\in\mathfrak{B}_1$ равенством $\delta\mathfrak{I}\big(\widehat{u}(\cdot);u(\cdot)\big)=M\{g'_u\big(t,\widehat{u}(t)\big)\,u(t)\}$.

Если $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\big(\max_{u\in U}|g'_u(t,u)|\big)<\infty$, то функционал $u(\cdot)\mapsto\delta\mathfrak{I}\big(\widehat{u}(\cdot);u(\cdot)\big)$ ограничен, поскольку

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |g'_u\big(s,\widehat{u}(s)\big)\cdot u(s)|\,ds \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}\big(\max_{u\in U}|g'_u(t,u)|\big)\cdot\|u\|_S.$$

Поэтому отображение $u(\cdot)\to\mathfrak{I}\big(u(\cdot)\big)$ дифференцируемо по Гато в точке $\widehat{u}(\cdot)\in\mathfrak{B}_1$, и при всех $u(\cdot)\in\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{I}'_\Gamma[\widehat{u}(\cdot)]\big(u(\cdot)\big)=\delta\mathfrak{I}\big(\widehat{u}(\cdot);u(\cdot)\big)$.

Далее докажем, что функционал (2.4) является непрерывно дифференцируемым по Фреше на $\mathfrak{B}_2$. В силу неравенства

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |g'_u\big(s,\widehat{u}(s)\big)\cdot u(s)|\,ds \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+1} |g'_u(s,\widehat{u}(s)|\,ds\cdot\|u\|_\infty,$$

отображение $u(\cdot)\to\mathfrak{I}\big(u(\cdot)\big)$ дифференцируемо по Гато в точке $\widehat{u}(\cdot)\in\mathfrak{B}_2$. Отображение g'_u принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R}^{n*})\big)$, и в силу леммы 3 и неравенства $\|\cdot\|_S\leqslant\|\cdot\|_\infty$ получаем, что для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$, что для всякой функции $u\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ такой, что $\|u-\widehat{u}\|_\infty<\delta$, будет выполнено неравенство $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\bigl(\int\limits_t^{t+1}|g'_u(s,u(s))-g'_u(s,\widehat{u}(s))|\,ds\bigr)<\varepsilon$. Следовательно, для всякой функции $h\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ имеют место следующие соотношения:

$$|M\{g'_u(t,u(t))h(t)\}-M\{g'_u(t,\widehat{u}(t))h(t)\}|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\Bigl(\int\limits_t^{t+1}|g'_u(s,u(s))-g'_u(s,\widehat{u}(s))|\,ds\Bigr)\|h(t)\|_\infty\leqslant\varepsilon\|h(t)\|_\infty,$$

откуда, в свою очередь, следует, что производная Гато функционала $\mathfrak{I}$ непрерывна в точке $\widehat{u}(\cdot)$. Поэтому ([36], с. 149) функционал $\mathfrak{I}:\mathfrak{B}_2\to\mathbb{R}$ будет непрерывно дифференцируем по Фреше. $\triangle$

З а м е ч а н и е 1. Поскольку для всех функций $u\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ норма $\|u\|_B$ совпадает с $\|u\|_\infty$, то функционал $\mathfrak{I}$ будет непрерывно дифференцируемым по Фреше в пространстве $\bigl(B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_B\bigr)$. $\triangle$

Пусть $\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$, и функция f такая, что для каждых $V\in\operatorname{comp}(\mathcal{V})$ и $U\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\quad f\in S\bigl(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R})\bigr)$. Тогда (см. [29]) для всякой функции $u\in S(\mathbb{R},V)$ отображение $t\mapsto f\bigl(t,x,u(t)\bigr)$ $(x\in V)$ принадлежит пространству $S\bigl(\mathbb{R},C(V,\mathbb{R})\bigr)$, откуда (см. лемму 1) следует, что на множестве $\mathcal{D}\doteq\bigl\{\bigl(x(\cdot),u(\cdot)\bigr)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\,:\,\overline{\operatorname{orb}}(x)\subset\mathcal{V}\bigr\}$ определен функционал $\mathcal{I}$, заданный для каждой пары $\bigl(x(\cdot),u(\cdot)\bigr)\in\mathcal{D}$ равенством $\mathcal{I}\bigl(x(\cdot),u(\cdot)\bigr)\doteq M\bigl\{f\bigl(t,x(t),u(t)\bigr)\bigr\}$. Отметим, что на множестве $\mathcal{D}$ определены две метрики $\varrho_{B,S}$ и $\varrho_{B,\infty}$, индуцированные нормами $\|\cdot\|_B+\|\cdot\|_S$ и $\|\cdot\|_B+\|\cdot\|_\infty$ на пространстве $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Следствие 1. *Пусть функция* $(t,x,u)\mapsto f(t,x,u)\in\mathbb{R}$ *в каждой точке* $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$ *имеет частные производные* f'_x, f'_u, *и для любых фиксированных* $V\in\operatorname{comp}(\mathcal{V})$ *и* $U\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\quad f\in S\big(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R})\big)$, $f'_x,\ f'_u\in S\big(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R}^{n*})\big)$. *Тогда в каждой точке* $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)$ *из множества* $(\mathcal{D},\varrho_{B,S})$ *функционал* $\mathcal{I}$ *имеет первую вариацию по Лагранжу*

$$\delta\mathcal{I}\big((\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot));(x(\cdot),u(\cdot))\big)=M\{f'_x\big((t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)x(t)+f'_u\big((t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)u(t)\},$$

и функционал $\mathcal{I}$ *будет непрерывно дифференцируемым по Фреше в каждой точке* $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)$ *из множества* $(\mathcal{D},\varrho_{B,\infty})$, *при этом*

$$\mathcal{I}'[\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)]\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)\big)=M\{f'_x\big((t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)x(t)+f'_u\big((t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)u(t)\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, для произвольно фиксированной пары $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)$ из множества $(\mathcal{D},\varrho_{B,\infty})$ рассмотрим функционалы

$$x(\cdot)\mapsto\mathcal{I}_1\big(x(\cdot)\big)\doteq M\{f\big(t,x(t),\widehat{u}(t)\big)\},\quad u(\cdot)\mapsto\mathcal{I}_2\big(u(\cdot)\big)\doteq M\{f\big(t,\widehat{x}(t),u(t)\big)\},$$

определенные на открытом подмножестве $z(\cdot)\in\big(B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\,:\,\overline{\operatorname{orb}}(z)\subset\mathcal{V}\big)$ пространства $\big(B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_B\big)$ и на пространстве $\big(S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_\infty\big)$ соответственно. Принимая во внимание замечание 1 по теореме о полном дифференциале получаем, что функционал $\mathfrak{I}$ будет непрерывно диференцируем по Фреше на $(\mathcal{D},\varrho_{B,\infty})$. При этом в силу леммы 4 производная этого функционала будет иметь вид, указанный в утверждении следствия 1.

По лемме 4 отображение $u(\cdot)\mapsto\mathfrak{I}_2\big(u(\cdot)\big)$, $\quad u(\cdot)\in\big(S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_S\big)$ имеет первую вариацию по Лагранжу. Поэтому, учитывая дифференцируемость по Фреше функционала $\mathfrak{I}_1$, получаем, что для каждой пары

$\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)\in(\mathcal{D},\varrho_{B,S})$ функция

$$\lambda\mapsto\varphi(\lambda)\doteq M\{f\big(t,\widehat{x}(t)+\lambda x(t),\widehat{u}(t)+\lambda u(t)\big)\}$$

дифференцирума в нуле, причем $\varphi'(0)=\mathfrak{I}_1'[\widehat{x}(\cdot)]\big(x(\cdot)\big)+\delta\mathfrak{I}_2\big(\widehat{u}(\cdot);u(\cdot)\big)$. Теперь осталось заметить, что $\varphi'(0)=\delta\mathfrak{I}\big((\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot));(x(\cdot),u(\cdot))\big)$, и воспользоваться утверждением леммы 4. $\triangle$

З а м е ч а н и е 2. Из определения второй вариации по Лагранжу и второй производной Фреше [36], следуя схеме доказательства леммы 4, получаем, что если функция f удовлетворяет условиям, приведенным в следствии 1, и кроме того имеет непрерывные вторые частные производные по переменным x, u, такие, что для каждого $V\in\mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $U\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ отображения f''_{xx}, f''_{xu}, f''_{ux}, f''_{uu} принадлежат пространству $S\big(\mathbb{R},C\big(V\times U,\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)\big)$, то на множестве $(\mathcal{D},\varrho_{B,S})$ функционал $\mathcal{I}$ будет иметь вторую вариацию по Лагранжу. При этом для каждой пары $\big(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot)\big)\in(\mathcal{D},\varrho_{B,S})$ и при всех $\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\times S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}\delta^2\mathcal{I}\big((\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot));(x(\cdot),u(\cdot))\big)&=M\{x^*(t)f''_{xx}\big(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)x(t)+\\&+2x^*(t)f''_{xu}\big(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)u(t)+u^*(t)f''_{uu}\big(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t)\big)u(t)\}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Кроме того (см. [44]), на множестве $(\mathcal{D},\varrho_{B,\infty})$ этот функционал будет дважды непрерывно дифференцируемым по Фреше.

§3 Свойства минимума функционала в виде среднего значения.

Всюду далее предполагаем, что отображение $(t,x,u)\mapsto L(t,x,u)\in\mathbb{R}^n$, $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$, ($\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$) удовлетворяет условию:

A) для любых фиксированных множеств V из $\operatorname{comp}(\mathcal{V})$ и U из $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ отображение L принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R})\big)$.

Выделим в $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ линейное многообразие

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\doteq\{x\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n):\,\dot{x}\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\}. \tag{3.1}$$

Отображения (см. §1)

$$x\mapsto\|x\|_{\mathfrak{B}}\doteq\|x\|_B+\|\dot{x}\|_S,\quad x\mapsto|||x|||_{\mathfrak{B}}\doteq\|x\|_B+\|\dot{x}\|_\infty \tag{3.2}$$

являются нормами на $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Для каждой функции x из множества

$$\mathcal{B}\doteq\{x\in\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\,:\,\overline{\operatorname{orb}}(x)\subset\mathcal{V}\} \tag{3.3}$$

отображение (см. [29] и лемму 1) $t\mapsto L\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, поэтому на множестве $\mathcal{B}$ корректно определен функционал

$$x(\cdot)\mapsto I\big(x(\cdot)\big)\doteq M\big\{L\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\big\}. \tag{3.4}$$

Отметим, далее, что линейное многообразие

$$B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\doteq\big\{x\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n):\dot{x}\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)\big\} \tag{3.5}$$

содержится в $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, отображение

$$x\mapsto\|x\|_{B^1}\doteq\|x\|_B+\|\dot{x}\|_B \tag{3.6}$$

задает в нем норму, пространство $\big(B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{B^1}\big)$ банахово [8], и, множество

$$\mathcal{B}^1 \doteq \{x \in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \,:\, \overline{\mathrm{orb}}(x) \subset \mathcal{V}\} \tag{3.7}$$

является подмножеством множества $\mathcal{B}$ (см. (3.3)).

Лемма 5. *Пусть функция* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* A). *Тогда*

$$\inf_{x(\cdot)\in\mathcal{B}} I\big(x(\cdot)\big) = \inf_{x(\cdot)\in\mathcal{B}^1} I\big(x(\cdot)\big). \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}$, и функционал I непрерывен на $\mathcal{B} \subset \big(\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}}\big)$, то для доказательства равенства (3.8) достаточно показать, что $\mathcal{B}^1$ всюду плотно в $\mathcal{B}$. Действительно, фиксируем произвольную функцию $x \in \mathcal{B}$. Из определения множества $\mathcal{B}$ следует, что найдется такое $r_1 > 0$, при котором компактное множество $V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x) + O_{r_1}[0] \subset \mathcal{V}$. Кроме того, в силу определения множества $\mathcal{B}$ можно считать, что $\dot{x}(t) \in U$ для всех $t \in \mathbb{R}$ для некоторого множества $U \subset \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим при каждом $h > 0$ стекловское усреднение $\big($см. (2.3)$\big)$ $t \mapsto x_h(t)$ функции x. Учитывая, что $x_h \in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, и (см. [8]) $\lim\limits_{h\downarrow 0} \|x_h - x\|_B = 0$, получаем, что найдется такое $h_0 > 0$, что $\overline{\mathrm{orb}}(x_h) \subset V$ при всех $h \in (0, h_0]$.

Далее, в силу теоремы о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом при каждом h и всяком $t \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$\dot{x}_h(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

С другой стороны, из определения множества $\mathcal{B}$ следует, что функция x

локально абсолютно непрерывна. Поэтому

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=\frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h}\dot{x}(s)\,ds,\ t\in\mathbb{R}.$$

Из последних двух равенств получаем, что

$$\dot{x}_h(t)=\frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h}\dot{x}(s)\,ds,\ t\in\mathbb{R},$$

т. е. функция $\dot{x}_h$ — суть стекловское усреднение для $\dot{x}\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, и отображение $t\mapsto\dot{x}_h(t)$ ограничено, т.к. $|\dot{x}_h(t)|\leqslant\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}|\dot{x}(t)|$. Поэтому $\dot{x}_h(\cdot)$ принадлежит $B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, значит функция $x_h\in\mathcal{B}^1$. Кроме того (см. [8]) $\lim\limits_{h\downarrow 0}\|\dot{x}_h-\dot{x}\|_S=0$. Таким образом, $\|x-x_h\|_{\mathfrak{B}}\to 0$ при $h\to 0$. △

Приведем пример функционала, для которого точная нижняя грань достигается на функции $x\in\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})\setminus B^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Пример 1. Фиксируем лагранжиан $L(t,x,\dot{x})=\frac{1}{2}\dot{x}^2+f(t)x$, где $f(t)\doteq\operatorname{sign}(\sin\omega_1 t)+\operatorname{sign}(\sin\omega_2 t)$, и заданные положительные числа ω_1,ω_2 несоизмеримы. Каждая функция из семейства п. п. по Бору функций $t\mapsto x(t,C)=\widehat{x}_1(t)+\widehat{x}_2(t)+C$, $C\in\mathbb{R}$, где $\frac{2\pi}{\omega_j}$-периодические функции $\widehat{x}_j\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j=1,2$ заданы равенством

$$x_j(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{2}-\frac{\pi}{2\omega_j}t, & 0\leqslant t<\frac{\pi}{\omega_j},\\ -\frac{t^2}{2}+\frac{3\pi}{2\omega_j}t-\frac{\pi^2}{\omega_j^2}, & \frac{\pi}{\omega_j}\leqslant t<\frac{2\pi}{\omega_j},\end{cases}$$

в точках $\frac{\pi}{\omega_j}+\frac{2k\pi}{\omega_j}$, $k\in\mathbb{Z}$, $j=1,2$, не является дифференцируемой. Поэтому $x(\cdot,C)\in\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})\setminus B^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Теперь рассмотрим задачу

$$I(x(\cdot))\doteq M\{\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)+f(t)x(t)\}\to\inf,\ x(\cdot)\in\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Далее при каждом фиксированном $C \in \mathbb{R}$ и любом $h(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ справедиво неравенство

$$I\big(x(\cdot, C) + h(\cdot)\big) - I\big(x(\cdot, C)\big) \geqslant M\{\dot{x}(t, C)\dot{h}(t) + f(t)h(t)\} =$$

$$= M\{(\ddot{x}(t, C) - f(t))h(t)\} = 0,$$

откуда следует, что точная нижняя грань функционала достигается на функциях $x(\cdot, C)$, принадлежащих пространству $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\triangle$

Обозначим далее

$$\mathbb{P}_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \doteq \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : x(t) = x(t + \omega),\ t \in \mathbb{R} \text{ и } \dot{x} \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\},$$

и пусть

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \doteq \bigcup_{\omega > 0} \mathbb{P}_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

В $\mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ выделим подмножество

$$\mathcal{P} \doteq \{x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \overline{\mathrm{orb}}(x) \subset \mathcal{V}\},$$

и для функции $L \in C(\mathcal{V} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ определим функционал

$$x(\cdot) \mapsto I\big(x(\cdot)\big) \doteq M\big\{L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\big\}, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}. \tag{3.9}$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{V}$ —область в $\mathbb{R}^n$, и $L \in C(\mathcal{V} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тогда для функционала $x(\cdot) \mapsto I\big(x(\cdot)\big)$ (см. (3.9)) выполнено равенство*

$$\inf_{x(\cdot) \in \mathcal{P}} I\big(x(\cdot)\big) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{B}} I\big(x(\cdot)\big). \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равенства (3.8), где $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^1$ заданы равенствами (3.3), (3.7), достаточно показать, что для каждого $x(\cdot) \in \mathcal{B}^1$

и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\widetilde{x}(\cdot) \in \mathcal{P}$, что $\bigl|I\bigl(x(\cdot)\bigr) - I\bigl(\widetilde{x}(\cdot)\bigr)\bigr| \leqslant \varepsilon$. Действительно, найдется такое $r > 0$, что $V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(x) + O_r[0] \subset \mathcal{V}$. Обозначим

$$K \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{x}) + O_r[0], \quad \varkappa \doteq \max_{(x,u)\in V\times K} \bigl|L(x,u)\bigr|.$$

Поскольку $x \in \mathcal{B}^1$, то [8] справедливы следующие предельные равенства:

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{x(t)-x(t-h)}{h} - \dot{x}(t)\right|\right) = 0, \quad \lim_{h\downarrow 0}\bigl(\omega_h[x,\mathbb{R}]\bigr) = 0.$$

Стало быть, найдется такое $h \in (0,r)$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{x(t)-x(t-h)}{h} - \dot{x}(t)\right| < r/3, \quad \omega_h[x,\mathbb{R}] < r/3.$$

Далее, фиксируем последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, где t_j — $1/j$ -п. п. функции x, и $t_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Тогда

$$\lim_{j\to\infty} |x(0) - x(t_j)| = 0.$$

При этом в силу свойств среднего значения будет выполнено равенство

$$M\bigl\{L\bigl(x(t),\dot{x}(t)\bigr)\bigr\} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{t_j}\int\limits_0^{t_j} L\bigl(x(t),\dot{x}(t)\bigr)dt.$$

Сейчас зафиксируем такое $j \in \mathbb{N}$, что при $\omega \doteq t_j$ выполнялись одновременно неравенства:

$$\bigl|x(0) - x(\omega)\bigr| < \min(rh/6, r/3),$$

$$\Bigl|I\bigl(x(\cdot)\bigr) - \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} L\bigl(x(t),\dot{x}(t)\bigr)dt\Bigr| < \varepsilon/2, \quad 2\varkappa h/\omega < \varepsilon/2,$$

и на $[\omega - h, \omega]$ рассмотрим линейную функцию

$$t \mapsto l(t) \doteq \frac{x(0) - x(\omega - h)}{h}(t - \omega + h) - x(\omega - h) \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $x(\omega-h)\in \operatorname{orb}(x)$ и при всех $t\in[\omega-h,\omega]$

$$\Big|\frac{x(0)-x(\omega-h)}{h}(t-\omega+h)\Big| \leqslant \big|x(0)-x(\omega-h)\big| \leqslant$$

$$\leqslant \big|x(0)-x(\omega)\big|+\big|x(\omega)-x(\omega-h)\big| \leqslant \big|x(0)-x(\omega)\big|+\omega_h[x,\mathbb{R}] < r/3+r/3 < r,$$

то для всех $t\in[\omega-h,\omega]$ $\quad l(t)\in K$. Поэтому, если ω-периодическая функция $\widetilde{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ определена на $[0,\omega]$ равенством

$$\widetilde{x}(t)\doteq\begin{cases} x(t), & t\in[0,\omega-h],\\ l(t), & t\in[\omega-h,\omega],\end{cases}$$

то, во-первых, она будет непрерывной на $\mathbb{R}$, и во-вторых, $\overline{\operatorname{orb}}(\widetilde{x})\subset V$. Далее, т.к.

$$\dot{\widetilde{x}}(t)\doteq\begin{cases} \dot{x}(t), & t\in[0,\omega-h),\\ \dfrac{x(0)-x(\omega-h)}{h}, & t\in(\omega-h,\omega],\end{cases}$$

и

$$\left|\frac{x(0)-x(\omega-h)}{h}-\dot{x}(\omega)\right| \leqslant \left|\frac{x(0)-x(\omega)}{h}\right|+\left|\frac{x(\omega-h)-x(\omega)}{h}-\dot{x}(\omega)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_h[x,\mathbb{R}]}{h}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{x(t)-x(t-h)}{h}-\dot{x}(t)\right| < r/3+r/3<r,$$

то $\overline{\operatorname{orb}}(\dot{\widetilde{x}})\subset K$, и при этом $\widetilde{x}\in\mathcal{P}$. Теперь из соотношений

$$\big|I\big(x(\cdot)\big)-I\big(\widetilde{x}(\cdot)\big)\big| \doteq \big|M\big\{L\big(x(t),\dot{x}(t)\big)\big\}-M\big\{L\big(\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t)\big)\big\}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \big|M\big\{L\big(x(t),\dot{x}(t)\big)\big\}-\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega L\big(x(t),\dot{x}(t)\big)dt\big|+$$

$$+\big|\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega L\big(x(t),\dot{x}(t)\big)dt-\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega L\big(\widetilde{x}(t),\dot{\widetilde{x}}(t)\big)dt\big| < \varepsilon/2+2\varkappa h/\omega<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

вытекает, что требуемая функция построена. $\triangle$

Следующий пример иллюстрирует возможность ситуации, в которой несмотря на совпадение точных нижних граней функционала I $\big($см. (3.9)$\big)$ на пространствах $\mathcal{P}$ и $\mathcal{B}$ (см. (3.10)), минимальное значение функционала I достигается на функции из множества $\mathcal{B}$, не являющейся периодической.

П р и м е р 2. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим область

$$G \doteq \big\{x \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 < \rho(x, \mathbb{S}) < a/2\big\} \quad (a > 0),$$

где

$$\mathbb{S} \doteq \{x = (x_j)_{j=1}^3 \in \mathbb{R}^3 : \quad r^2(x) \doteq x_1^2 + x_2^2 = a^2, \quad x_3 = 0\},$$

а также отображение $(x, y) \mapsto l(x, y) \in \mathbb{R}^3$, где $x = (x_j)_{j=1}^3$ принадлежит G и $y = (y_j)_{j=1}^3$ из $\mathbb{R}^3$, в котором функции $l_j(x, y)$, $j = 1, 2, 3$ в его координатном представлении имеют вид:

$$\begin{cases} l_1(x, y) \doteq \dfrac{1}{x_2}\left(y_1 + \dfrac{x_1 x_3}{r(x)}\right), \\ l_2(x, y) \doteq \dfrac{1}{x_1}\left(y_2 + \dfrac{x_2 x_3}{r(x)}\right), \\ l_3(x, y) \doteq \dfrac{y_3}{r(x) - a}. \end{cases}$$

Далее, фиксированному $\omega > 0$, несоизмеримому с единицей, поставим в соответствие вектор $v = [1, \omega, \omega]^* \in \mathbb{R}^3$. Покажем, что для функционала

$$I\big(x(\cdot)\big) = M\left\{\frac{v^*\, l\big(x(t), \dot{x}(t)\big)}{|v| \cdot \big|l\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\big|}\right\}, \quad x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, G)$$

точная нижняя грань достигается на функции из множества $\mathfrak{B}$, которая не является периодической. Действительно, поскольку

$$L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) \doteq \frac{v^*\, l\big(x(t), \dot{x}(t)\big)}{|v| \cdot \big|l\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\big|}$$

при каждом $t \in \mathbb{R}$ совпадает с $\cos\measuredangle\big(v, l\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\big)$, то при всех $x(\cdot)$ из пространства $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, G)$ будут выполнены следующие неравенства:

$$-1 \leqslant L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Стало быть, решением данной задачи будет такая функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, G)$, при которой $I\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = -1$. Для нахождения такой функции рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 + \dfrac{x_1 x_3}{r(x)}, \\ \dot{x}_2 = \omega x_1 + \dfrac{x_2 x_3}{r(x)}, \\ \dot{x}_3 = a - r(x), \end{cases}$$

для которой каждая из функций $\widehat{x}(\cdot) = \widehat{x}(\cdot\,, b) = (\widehat{x}_j(\cdot))_{j=1}^3, \quad b \in (0, a/2)$, где

$$\widehat{x}_1(t) = (a + b\cos t)\cos\omega t, \quad \widehat{x}_2(t) = (a + b\cos t)\sin\omega t, \quad \widehat{x}_3(t) = b\sin t,$$

является решением. Поскольку $L\big(\widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big) \equiv -1$, то указанная функция $\widehat{x}(\cdot)$ является решением рассматриваемой задачи и принадлежит $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, G)$. Отметим далее, что в виду несоизмеримости ω с единицей, не найдется периодической функции x, такой, что $L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) \equiv -1, \quad t \in \mathbb{R}$, и значит, для каждой периодической функции $x(\cdot) \quad I\big(x(\cdot)\big) > -1$. $\triangle$

Задачу

$$I\big(x(\cdot)\big) \doteq M\{L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\} \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}, \tag{3.11}$$

назовем *простейшей задачей вариационного исчисления, определенной на множестве п. п. функций*. Скажем, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ является ее *решением в слабом* (соответственно *сильном*) *смысле*, если найдется $\gamma > 0$, что для всех $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ таких, что $\|\widehat{x}-x\|_{\mathfrak{B}} < \gamma$ (соответственно $\|\widehat{x}-x\|_{B} < \gamma$) выполнено неравенство $I\big(x(\cdot)\big) \geqslant I\big(\widehat{x}(\cdot)\big)$.

В следующем утверждении $\mathrm{AC}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$ — пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию* А) *и ограничено. Функция* $\widehat{x}$ *является решением задачи* (3.11) *в сильном смысле тогда и только тогда, когда для любого* $T>0$ *найдется такое* $\gamma \doteq \gamma(T) > 0$, *что для всякого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и всякой функции* x *из пространства* $AC\big([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n\big)$ *такой, что* $\|x-\widehat{x}\|_{C\left([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n\right)} < \gamma$, *будет выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\,dt \geqslant \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное, т. е. найдется такое $T>0$, что для всякого $\gamma>0$ (выберем γ достаточно малым, т. е. чтобы множество $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_{\gamma}[0]$ содержалось в области $\mathcal{V}$), найдется $\alpha\in\mathbb{R}$ и функция $x \in AC\big([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n\big)$, что $\|x-\widehat{x}\|_{C([\alpha,\alpha+T],\mathbb{R}^n)} < \gamma$, и

$$\mathfrak{d} \doteq \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt - \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\,dt > 0.$$

Построим такую функцию $y\in\mathcal{B}$, что $\|\widehat{x}-y\|_{\mathfrak{B}} < \gamma$ и $I\big(y(\cdot)\big) < I\big(\widehat{x}(\cdot)\big)$. Поскольку функционал I непрерывен на множестве $\mathcal{B}\subset\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ а множество $B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ является всюду плотным в $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, то можно считать, что функции $\widehat{x}\in B^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, и $x\in C^1([\alpha,\alpha+T])$.

Для произвольного $h > 0$ построим функцию y_h, определенную на отрезке $[\alpha - h, \alpha + T + h]$ равенством:

$$y_h(t) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{h}(t - \alpha + h)\big(x(\alpha) - \widehat{x}(\alpha)\big), \quad t \in [\alpha - h, \alpha), \\ x(t) - \widehat{x}(t), \quad t \in [\alpha, \alpha + T], \\ \dfrac{1}{h}(\alpha + T + h - t)\big(x(\alpha + T) - \widehat{x}(\alpha + T)\big), \quad t \in (\alpha + T, \alpha + T + h]. \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{\alpha-h}^{\alpha+T+h} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt - \int\limits_{\alpha-h}^{\alpha+T+h} L\big(t, \widehat{x}(t) + y_h(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \dot{y}_h(t)\big)\, dt = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{\alpha-h}^{\alpha} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt - \int\limits_{\alpha-h}^{\alpha} L\big(t, \widehat{x}(t) + y_h(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \dot{y}_h(t)\big)\, dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt - \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\alpha+T}^{\alpha+T+h} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt - \int\limits_{\alpha+T}^{\alpha+T+h} L\big(t, \widehat{x}(t) + y_h(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \dot{y}_h(t)\big)\, dt.$$

Полагаем далее

$$\varkappa \doteq \sup_{(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n} |L(t, x, u)|.$$

Теперь получаем следующие оценки:

$$I_1 + I_2 + I_3 \geqslant \mathfrak{d} - 2\varkappa \cdot h - 2\varkappa \cdot h > \mathfrak{d}/2$$

при всех $h < \mathfrak{d}/4\varkappa$.

Фиксируем теперь такое h, и определим далее функцию $\widetilde{y}(t)$, заданную при $t \in [\alpha - 2h, \alpha + T + 2h]$ следующим равенством:

$$\widetilde{y}(t) \doteq \begin{cases} y_h(t), \quad t \in [\alpha - h, \alpha + T + h] \\ 0, \quad t \in [\alpha - 2h, \alpha - h) \cup (\alpha + T + h, \alpha + T + 2h], \end{cases}$$

Обозначим далее через $[a, b]$ отрезок $[\alpha - 3h/2, \alpha + T + 3h/2]$. Выберем далее $v \in (0, h/2)$ настолько малым, чтобы для непрерывно дифференцируемой функции

$$t \mapsto \widetilde{x}(t) \doteq \frac{1}{v} \int\limits_t^{t+v} \widetilde{y}(s)\, ds,$$

заданной на отрезке $[a, b]$ было выполнено неравенство:

$$\int\limits_a^b L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt - \int\limits_a^b L\big(t, \widehat{x}(t) + \widetilde{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \dot{\widetilde{x}}(t)\big)\, dt > \mathfrak{d}/4.$$

Отметим, что $\widetilde{x}(a) = \widetilde{x}(b) = 0$.

Обозначим далее

$$r_1 \doteq \|\widetilde{x}\|_{C([a,b])}, \quad r_2 \doteq \|\dot{\widetilde{x}}\|_{C([a,b])}$$

$$X \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_{r_1}[0], \quad U \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}}) + O_{r_2}[0].$$

В силу леммы 2 (и эквивалентности d_l - расстояний для всех $l > 0$) найдется $\gamma_2 > 0$ такое, что для константы $\gamma_1 \doteq \frac{3\mathfrak{d}}{64}$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int\limits_{a+t}^{b+t} \omega_{\gamma_2}[L(t, \cdot, \cdot), X \times U]\, dt < \gamma_1. \tag{3.12}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon \in \big(0, \min(\gamma_1, \gamma_2)\big)$. Поскольку отображение $(t, x, u) \mapsto L(t, x, u)$ принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R}, C(X \times U, \mathbb{R})\big)$, то для указанного выше $\varepsilon > 0$ множество

$$\bigcap_{(x,u)\in X\times U} E_S\big(L(\cdot,x,u),\varepsilon\big)$$

относительно плотно. Используя теорему о существовании общих ε-п. п. для двух п. п. функций [8], получаем, что для указанного выше $\varepsilon > 0$ множество

$$E \doteq E_B(\widehat{x},\varepsilon)\bigcap\Big(\bigcap_{(x,u)\in X\times U} E_S\big(L(\cdot,x,u),\varepsilon\big)\Big)$$

относительно плотно, т. е. найдется такое $l = l(\varepsilon) > |b-a|$, что для всякого $m \in \mathbb{Z}$ на отрезке $[lm, l(m+1)]$ существует хотя бы один общий ε-п. п. $\tau_m \in E$. Фиксируем далее последовательность таких почти периодов, и введем в рассмотрение последовательность функций $\{\widetilde{x}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, каждая из которых определена на отрезке $[a+lm, a+l(m+1)]$:

$$\widetilde{x}_m(t) = \begin{cases} \widetilde{x}(t-\tau_m), & t\in[a+\tau_m, b+\tau_m],\\ 0, & t\in[a+lm, a+\tau_m]\cup[b+\tau_m, a+l(m+1)],\end{cases} \qquad m\in\mathbb{Z}.$$

Теперь для каждого $m \in \mathbb{Z}$ имеем следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_{a+\tau_m}^{b+\tau_m} L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt - \int\limits_a^b L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt\right| < \varepsilon,$$

и поскольку для всякого $m \in \mathbb{Z}$ τ_m является ε - п. п. отображения $t \mapsto L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)$, то в силу выбора ε, γ_2 и неравенства (3.12) для всякого $m \in \mathbb{Z}$ имеем следующие соотношения

$$|\int\limits_{a+\tau_m}^{b+\tau_m} L\big(t,\widehat{x}(t)+\widetilde{x}_m(t),\dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}_m(t)\big)\,dt - \int\limits_a^b L\big(t,\widehat{x}(t)+\widetilde{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}(t)\big)\,dt| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_a^b L\big(t+\tau_m, \widehat{x}(t+\tau_m)+\widetilde{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t+\tau_m)+\dot{\widetilde{x}}(t)\big)\,dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_a^b L\big(t+\tau_m, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}(t)\big)\,dt \right| +$$

$$+\left| \int\limits_a^b L\big(t+\tau_m, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}(t)\big) - L\big(t, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}(t)\big)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_1 + \varepsilon.$$

Поэтому для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выполняются следующие неравенства:

$$\int\limits_a^{a+kl} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt - \sum_{m=0}^{k-1} \int\limits_{a+lm}^{a+l(m+1)} L\big(t, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}_m(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}_m(t)\big)\,dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} \int\limits_{a+lm}^{a+l(m+1)} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big) - L\big(t, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}_m(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}_m(t)\big)\,dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} \int\limits_{a+\tau_m}^{b+\tau_m} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt - \int\limits_a^b L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt -$$

$$- \sum_{m=0}^{k-1} \int\limits_{a+\tau_m}^{b+\tau_m} L\big(t, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}_m(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}_m(t)\big)\,dt - \int\limits_a^b L\big(t, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}(t)\big)\,dt +$$

$$+ \sum_{m=0}^{k-1} \int\limits_a^b L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt - \int\limits_a^b L\big(t, \widehat{x}(t)+\widetilde{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}(t)\big)\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \mathfrak{d}k/4 - 2k\varepsilon = \frac{5k}{32}\mathfrak{d} > 0.$$

Поскольку $\widehat{x} \in \mathcal{B}^1$, то [8]

$$\lim_{h\downarrow 0}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{\widehat{x}(t)-\widehat{x}(t-h)}{h} - \dot{\widehat{x}}(t) \right| \right) = 0, \quad \lim_{h\downarrow 0}\big(\omega_h[\widehat{x}, \mathbb{R}]\big) = 0.$$

Стало быть, найдется такое $h>0$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{\widehat{x}(t)-\widehat{x}(t-h)}{h}-\dot{\widehat{x}}(t)\right|<r_2/3,\quad \omega_h[\widehat{x},\mathbb{R}]<r_1/3. \tag{3.13}$$

Найдется $\widehat{m}\in\mathbb{Z}$, что для всех $T>\widehat{m}l$ равномерно по всем $a\in\mathbb{R}$ будет выполнено следующее неравенство (см. [4]):

$$|M\{L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\}-\frac{1}{T}\int\limits_a^T L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\,dt|<\frac{3\mathfrak{d}}{64l}.$$

Далее, поскольку каждая точка орбиты почти периодического движения является ω -предельной точкой [33], то найдется последовательность точек $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ (считаем, что каждая точка ω_j находится на некотором соответствующем отрезке $[m_jl,(m_j+1)l]$ и $m_j>\widehat{m}$ для всех $j\in\mathbb{N}$), что

$$\lim_{j\to\infty}|\widehat{x}(a)-\widehat{x}(a+\omega_j)|=0.$$

Поскольку $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{m_j}{\omega_j}=\dfrac{1}{l}$, то зафиксируем такое $j\in\mathbb{N}$, что при $\omega\doteq a+\omega_j$ выполнялись одновременно неравенства:

$$\big|\widehat{x}(a)-\widehat{x}(\omega)\big|<\min(r_1h/6,r_1/3),$$

$$\big|I(\widehat{x})-\frac{1}{\omega}\int\limits_a^{\omega} L\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big)dt\big|<\frac{3\mathfrak{d}}{64l},\quad 2\varkappa h/\omega<\frac{\mathfrak{d}}{64l},\quad \frac{m_j}{\omega}>\frac{4}{5l}.$$

В дальнейшем проводим рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3. На $[\omega-h,\omega]$ рассмотрим линейную функцию

$$t\mapsto l(t)\doteq\frac{x(a)-x(\omega-h)}{h}(t-\omega+h)-x(\omega-h)\in\mathbb{R}^n.$$

Так как $x(\omega-h)\in\operatorname{orb}(x)$ и при всех $t\in[\omega-h,\omega]$

$$\Big|\frac{x(a)-x(\omega-h)}{h}(t-\omega+h)\Big|\leqslant\big|x(a)-x(\omega-h)\big|\leqslant$$

$$\leqslant \bigl|x(a)-x(\omega)\bigr|+\bigl|x(\omega)-x(\omega-h)\bigr| \leqslant \bigl|x(a)-x(\omega)\bigr|+\omega_h[x,\mathbb{R}] < r_1/3+r_1/3 < r_1,$$

то для всех $t \in [\omega - h, \omega]$ $\quad l(t) \in X$. Поэтому, если ω-периодическая функция $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ определена на $[0,\omega]$ равенством

$$y(t) \doteq \begin{cases} \widehat{x}(t) + \widetilde{x}_m(t), & t \in [a+ml, a+(m+1)l], \quad m = 0,\dots,m_j-1 \\ \widehat{x}(t), & t \in [a+m_jl, \omega-h], \\ l(t), & t \in [\omega-h,\omega], \end{cases}$$

то, во-первых, она будет непрерывной на $\mathbb{R}$, и во-вторых, $\overline{\mathrm{orb}}(y) \subset X$. Из соотношений (3.13) следует, что $\overline{\mathrm{orb}}(\dot{y}) \subset U$. Теперь из соотношений

$$I\bigl(\widehat{x}(\cdot)\bigr) - M\{L\bigl(t, y(t), \dot{y}(t)\bigr)\} >$$

$$> \frac{1}{\omega}\int\limits_a^\omega L\bigl(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\bigr)\,dt - \frac{1}{\omega}\int\limits_a^\omega L\bigl(t,y(t),\dot{y}(t)\bigr)\,dt - \frac{3\mathfrak{d}}{64l} =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left(\sum_{m=0}^{m_j-1}\int\limits_{a+ml}^{a+(m+1)l} L\bigl(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\bigr)\,dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{m=0}^{m_j-1}\int\limits_{a+ml}^{a+(m+1)l} L\bigl(t,\widehat{x}(t)+\widetilde{x}_m(t),\dot{\widehat{x}}(t)+\dot{\widetilde{x}}_m(t)\bigr)\,dt\right) - \frac{3\mathfrak{d}}{64l} +$$

$$+\frac{1}{\omega}\left(\int\limits_{\omega-h}^{\omega} L\bigl(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\bigr)\,dt - \int\limits_{\omega-h}^{\omega} L\bigl(t,l(t),\dot{l}(t)\bigr)\,dt\right) >$$

$$> \frac{1}{\omega}m_j\frac{5}{32}\mathfrak{d} - \frac{2}{\omega}h\varkappa - \frac{3\mathfrak{d}}{64l} > \frac{5\mathfrak{d}}{32l} - \frac{\mathfrak{d}}{64l} - \frac{3\mathfrak{d}}{64l} = \frac{3\mathfrak{d}}{32l} > 0,$$

вытекает, что требуемая функция построена, что противоречит предположению, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ является решением задачи (3.11).

Обратно, пусть функция $\widehat{x} \in \mathcal{B}$ такова, что для $T = 1$ нашлась $\gamma > 0$, что для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех функций $y \in AC([\alpha, \alpha + 1])$ выполняется неравенство $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} L\big(t, y(t), \dot{y}(t)\big)\, dt \geqslant \int\limits_{\alpha}^{\alpha+1} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt$. Тогда для всякой функции $x \in \mathcal{B}$

$$M\{L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\} - M\{L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{q=0}^{N-1} \int\limits_{q}^{q+1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt - \int\limits_{q}^{q+1} L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)\, dt \geqslant 0,$$

таким образом, функция $\widehat{x}$ является решением задачи (3.11). $\triangle$.

Глава 2

Некоторые вариационные задачи, определенные на множестве почти периодических функций.

§4 Задача с ограничениями в виде равенств и неравенств.

Фиксируем отображение

$$(t,x,u) \mapsto L(t,x,u) \in \mathbb{R}, \quad (t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n,$$

где $\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям:

1) в каждой точке $(t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$ существуют производные по переменным x, u,

2) для любых фиксированных $V \in \operatorname{comp}(\mathcal{V})$ и $U \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ функция L принадлежит множеству $S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R})\big)$, и частные производные L'_x, L'_u принадлежат $S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R}^{n*})\big)$.

Для всякой функции x из $\mathcal{B}$ $\big($см. (3.3)$\big)$ согласно лемме 2 отображения $t \mapsto L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$, и $t \mapsto L_x\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$, $t \mapsto L_u\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$ принадлежат пространствам $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ и $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$ соответственно. Поэтому на множестве $\mathcal{B}$ имеется возможность задания функционала I $\big($см. (3.4)$\big)$, который будет иметь (см. следствие 1) первую вариацию по Лагранжу $\delta I\big(x(\cdot); \cdot\big)$ в каждой точке $x(\cdot) \in \mathcal{B} \subset \big(\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}}\big)$, определенную для всякой функции $h \in \mathfrak{B}$ следующим равенством:

$$\delta I\big(x(\cdot); h(\cdot)\big) = M\{L'_x\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)h(t) + L'_u\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\dot{h}(t)\}. \qquad (4.1)$$

Теорема 5. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2), *и функция* $\widehat{x}(\cdot)\in\mathcal{B}$ *такова, что* $\delta I\big(\widehat{x}(\cdot);\,\cdot\big)=0$. *Тогда если п. п. по Степанову функции*

$$t\mapsto \widehat{L}'_x(t)\doteq L'_x\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big),\quad t\mapsto \widehat{L}'_u(t)\doteq L'_u\big(t,\widehat{x}(t),\dot{\widehat{x}}(t)\big) \tag{4.2}$$

ограничены в существенном, то отображение $t\mapsto \widehat{L}'_u(t)$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, *и при п. в.* $t\in\mathbb{R}$ *справедливо равенство*

$$-\frac{d}{dt}\widehat{L}'_u(t)+\widehat{L}'_x(t)=0. \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим равенство (4.3) покоординатно. Для этого при каждом $\lambda\in\mathbb{R}$ рассмотрим отображения

$$t\mapsto h_1(t)=e_j\cos\lambda t,\quad t\mapsto h_2(t)=e_j\sin\lambda t,\quad t\in\mathbb{R}$$

где e_j — j-й вектор стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Из вида первой вариации по Лагранжу функционала I (см. (4.1)) получаем, что

$$M\{\widehat{L}_x(t)e^{i\lambda t}\}=i\lambda M\{\widehat{L}_u(t)e^{i\lambda t}\}$$

при всех $\lambda\in\mathbb{R}$ ($i^2=-1$). Откуда, в свою очередь, вытекает, что ряд Фурье для функции $\widehat{L}_x\in S(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n*})$ совпадает с формально продифференцированным рядом Фурье, отвечающим функции $\widehat{L}_u\in S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n*})$, причем функции $\widehat{L}_x$ и $\widehat{L}_u$ ограничены в существенном, а значит, по теореме 1 отображение $t\mapsto\widehat{L}_u(t)$ принадлежит $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, и при этом выполнено равенство (4.3). △

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что если выполнено равенство (4.3), то $\delta I\big(\widehat{x}(\cdot);\,\cdot\big)=0$. △

З а м е ч а н и е 4. Пусть отображение $L \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, тогда для всякой функции $x(\cdot) \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ отображения

$$t \mapsto L\big(x(t), \dot{x}(t)\big), \quad t \mapsto L'_x\big(x(t), \dot{x}(t)\big), \quad t \mapsto L'_u\big(x(t), \dot{x}(t)\big)$$

будут п. п. в смысле Бора [13]. Принимая во внимание замечание 1, получаем, что функционал

$$x(\cdot) \mapsto J\big(x(\cdot)\big) \doteq M\{L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\} \tag{4.4}$$

будет непрерывно дифференцируем по Фреше на $B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Поэтому из теоремы 5 вытекает один из основных результатов работы [14]: если функция $\widehat{x}(\cdot) \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ такова, что $J'\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = 0$, то $\widehat{x}(\cdot)$ является решением уравнения (4.3). $\triangle$

Рассмотрим, далее, экстремальную задачу, определенную на множестве $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ при наличии ограничений на средние значения в виде равенств и неравенств.

Пусть функции $L_j : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, k+m$ удовлетворяют условию, аналогичному условию А) для отображения L (см. §2). В этом случае на множестве $\mathcal{B}$ (3.3) корректно определены функционалы

$$x(\cdot) \mapsto I_j\big(x(\cdot)\big) \doteq M\{L_j\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\}, \quad j = 0, \dots, k+m. \tag{4.5}$$

Введем, далее, в рассмотрение множество

$$D \doteq \{x \in \mathcal{B} : I_j\big(x(\cdot)\big) \leqslant 0,\ j = 1, \dots, k, \quad I_j\big(x(\cdot)\big) = 0,\ j = k+1, \dots, k+m\},$$

и рассмотрим *п. п. задачу с ограничениями на средние значения в виде равенств и неравенств*:

$$I_0\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in D, \tag{4.6}$$

в которой функция $\widehat{x}(\cdot) \in D$ называется (локальным) *решением в слабом смысле*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $I_0\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant I_0\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x(\cdot) \in D$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$.

Теорема 6. *Пусть отображения* $L_j : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j = 0,\ldots,k{+}m,$ *удовлетворяют условиям, аналогичным условиям* 1), 2) *для лагранжиана* L, *и функция* $\widehat{x} \in D$ *является решением в слабом смысле задачи* (4.6). *Тогда найдутся такие числа* $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0,\ \widehat{\lambda}_1,\ldots,\widehat{\lambda}_{k+m},$ *не равные нулю одновременно, что будут выполнены соотношения:*

$$\widehat{\lambda}_j \geqslant 0, \quad \widehat{\lambda}_j I_j(\widehat{x}) = 0,\ j = 1,\ldots,k. \tag{4.7}$$

Кроме того, если п. п. по Степанову функции

$$t \mapsto \widehat{L}'_{jx}(t) \doteq L'_{jx}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big), \quad t \mapsto \widehat{L}'_{ju}(t) \doteq L'_{ju}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$$

ограничены на $\mathbb{R}$ *в существенном, то функция*

$$t \mapsto \sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)$$

принадлежит пространству $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n*})$, *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *имеет место равенство:*

$$-\frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)\Big) + \sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{jx}(t) = 0. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы найдется $\gamma > 0$, что $I_0\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant I_0\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x \in D$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x}(\cdot) - x(\cdot)\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$. Поскольку $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}} \leqslant |||\cdot|||_{\mathfrak{B}}$, то всякая функция x, принадлежащая открытому в банаховом пространстве $\big(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}}\big)$ множеству $\mathcal{U}_\gamma \doteq \{x \in \mathcal{B} : |||\cdot|||_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma\}$, удовлетворяет неравенству $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$, откуда для всех $x \in D \cap \mathcal{U}_\gamma \quad I_0\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant I_0\big(x(\cdot)\big),$ т.е. $\widehat{x}$ будет также решением в слабом смысле задачи (4.6), если в ней множество $\mathcal{B}$ рассматривать как подмножество пространства $\big(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}}\big).$ В силу ограничений, которым удовлетворяют функции $L_j,$ по следствию 1 каждый из функционалов (4.5) непрерывно дифференцируем по Фреше на $\mathcal{B} \subset \big(\mathfrak{B}, |||\cdot|||_{\mathfrak{B}}\big).$ Поэтому (см. [36] с. 252) найдутся такие числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0, \quad \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{k+m}$ не равные нулю одновременно, что будут выполняться соотношения (4.7) и равенство $\sum\limits_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j I_j'\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = 0,$ которое равносильно тому, что

$$M\left\{ \big(\sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}_{ju}'(t)\big) h(t) + \big(\sum_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}_{ju}'(t)\big) \dot{h}(t) \right\} = 0$$

для всех $h \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$ Отсюда по теореме 5 получаем равенство (4.8). $\triangle$

П р и м е р 3. Пусть $D \doteq \{x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})\colon M\{x(t)\sin^2\omega t\} = 1\}$ $(\omega \neq 0).$ Рассмотрим задачу $I(x(\cdot))\} \to \inf,$ $x(\cdot) \in D,$ с тем же функционалом, что и в примере 1. Как показано в этом примере, семейство функций $t \mapsto x(t, C) = \widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t) + C,$ принадлежащее $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$ является решением уравнения $\ddot{x}(t) = f(t),$ отвечающее функции Лагранжа данной задачи при $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 0.$ Условие $x(\cdot) \in D$ позволяет из указанного семейства функций выделить единственную допустимую функцию $\widehat{x}(\cdot),$ отвечающую $\widehat{C} = 2(1 - M\{(\widehat{x}_1(t) + \widehat{x}_2(t))\sin^2\omega t\}),$ подозрительную на решение. Также как и в примере 2.1 показываем, что для каждой функции $h(\cdot),$ такой, что $x(\cdot) + h(\cdot) \in D,$ выполнено неравенство $I\big(\widehat{x}(\cdot) + h(\cdot)\big) \geqslant I\big(\widehat{x}(\cdot)\big).$

$\triangle$

§5 Необходимые условия слабого минимума для задачи Больца.

Напомним [23], что последовательность $\{t_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ называется почти периодической (п. п.), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется относительно плотное множество почти периодов $k \in \mathbb{Z}$, т. е. для всякого такого k

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} |t_{m+k} - t_m| \leqslant \varepsilon.$$

Фиксируем константу $a > 0$, п. п. последовательность $\{t_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ и отображение $(t,x) \mapsto g(t,x) \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{V}$, удовлетворяющее условиям:

I) в каждой точке $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathcal{V}$ существует $g'_x(t,x)$,

II) для всякого $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ функции $(t,x) \mapsto g(t,x)$ и $(t,x) \mapsto g'_x(t,x)$ принадлежат пространствам $B(\mathbb{R}\times V,\mathbb{R})$ и $B(\mathbb{R}\times V,\mathbb{R}^{n*})$ соответственно.

Лемма 6. *Пусть $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $\{t_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$, $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset V$ — заданные почти периодические последовательности. Тогда для любых функций $x \in B(\mathbb{R},V)$ и $g \in B(\mathbb{R}\times V,\mathbb{R})$ последовательности*

$$\{x(t_m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}, \quad \{g(t_m,v_m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$$

являются п. п.

Утверждение леммы 6 есть следствие определения п. п. последовательности, свойства равномерной непрерывности функций из $B(\mathbb{R},\mathcal{V})$ и указанного в §2 свойства функций, принадлежащих $B(\mathbb{R}\times V,\mathbb{R})$.

Из леммы 6, учитывая, что каждая функция $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ограничена на $\mathbb{R}$, получаем, что на $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, а значит и на множестве $\mathcal{B}$ (см. (3.3)) корректно определен функционал

$$x(\cdot) \mapsto G\big(x(\cdot)\big) \doteq \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} g\big(t_m, x(ma)\big). \tag{5.1}$$

Используя ограничения на отображение $(t, x) \mapsto g(t, x)$, получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Пусть функция* $g \, : \, \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* I), II). *Тогда отображение* $G \; : \; \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, *заданное равенством* (5.1), *непрерывно дифференцируемо по Фреше на* $\mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$, *и в каждой точке* $x(\cdot) \in \mathcal{B}$ *при всех* $h(\cdot) \in \mathfrak{B}$

$$G'\big(x(\cdot)\big)[h(\cdot)] = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} g'_x\big(t_m, x(ma)\big)h(ma). \tag{5.2}$$

Далее задачу

$$\mathbb{I}\big(x(\cdot)\big) = I\big(x(\cdot)\big) + G\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x(\cdot) \in \mathcal{B}, \tag{5.3}$$

будем называть *п. п. задачей Больца*, и функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ называется (локальным) *решением в слабом* (*сильном*) *смысле*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant \mathbb{I}\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x(\cdot) \in \mathcal{B}$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$ (соответственно $\|\widehat{x} - x\|_B \leqslant \gamma$).

В следующей теореме и далее функции $\widehat{L}'_x$ и $\widehat{L}'_u$ определены равенствами (4.2).

Теорема 7. *Пусть функции* $L\ :\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *и* $g\ :\mathbb{R}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* 1), 2) *и* I), II), *соответственно, и функция* $\widehat{x}$ *из множества* $\mathcal{B}$ *является решением в слабом смысле задачи* (5.3). *Тогда, если функция*

$$t\mapsto\widehat{p}(t)\doteq\int_0^t\widehat{L}'_x(s)\,ds\in\mathbb{R}^{n*},\ t\in\mathbb{R},\tag{5.4}$$

п. п. по Бору, то

а) *отображение* $\widehat{L}'_u$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n*})$;

б) $\widehat{x}(t)$ *при п. в.* $t\in\mathbb{R}$ *удовлетворяет системе уравнений* (4.3);

в) *имеет место равенство*

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}g'_x\big(t_m,\widehat{x}(ma)\big)=0.\tag{5.5}$$

Для доказательства теоремы 7 введем вспомогательное семейство функций и рассмотрим его свойства. Фиксируем произвольную п. п. последовательность $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^n$, а также произвольные точки $\vartheta,\xi\in[0,a)$ (считаем для определенности, что $\vartheta<\xi$). В дальнейшем

$$v\doteq\sup_{m\in\mathbb{Z}}|v_m|.$$

Для произвольного α такого, что

$$0<\alpha<A\doteq\min\{\xi-\vartheta,a-\xi\},$$

определим отображение

$$t\mapsto u_\alpha(t)=u_\alpha(t;\vartheta,\xi)\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R},$$

заданное на каждом полуинтервале $[ma,(m+1)a), \quad m\in\mathbb{Z},$ равенством:

$$u_\alpha(t)\doteq\begin{cases} v_m, & t\in T_m(\vartheta)\doteq[ma+\vartheta,ma+\vartheta+\alpha),\\ -v_m, & t\in T_m(\xi)\doteq[ma+\xi,ma+\xi+\alpha),\\ 0, & t\in[ma,(m+1)a)\setminus\big(T_m(\vartheta)\cup T_m(\xi)\big).\end{cases} \tag{5.6}$$

Семейство функций $\{u_\alpha\}_{\alpha\in(0,A)}$ ограничено по норме $\|\cdot\|_\infty$ (поскольку для всякого $\alpha\in(0,A) \quad \|u_\alpha\|_\infty\leqslant v$), содержится в пространстве $\big(S_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_\infty\big)$, равностепенно почти периодично (т.к. для каждого $\tau\in E(\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}},\varepsilon/a)$ точка $a\tau$ в метрике d будет являться ε -п. п. для каждой функции u_α из рассматриваемого семейства), и $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\|u_\alpha\|_S=0$.

Для каждого $\alpha\in(0,A)$ определим функцию

$$t\mapsto x_\alpha(t)\doteq\int\limits_0^t u_\alpha(s)ds,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Поскольку при каждом $t\in[ma+\xi+\alpha,(m+1)a]$ ($m\in\mathbb{Z}$) выполняется неравенство $|x_\alpha(t)|\leqslant\alpha|v_m|\leqslant\alpha v$, то $x_\alpha(\cdot)\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ при любом α, и при $\alpha\to 0 \quad \|x_\alpha\|_B\to 0$. Кроме того, при всех достаточно малых α $\overline{\mathrm{orb}}(x_\alpha+\widehat{x})$ содержится в $\mathcal{V}$, поскольку [33] $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x})$ — компактное в области $\mathcal{V}$ множество.

Полагаем, далее,

$$I_1(\alpha)\doteq M\{\widehat{L}'_x(t)\frac{x_\alpha(t)}{\alpha}\},\quad I_2(\alpha)\doteq M\{\widehat{L}'_u(t)\frac{\dot{x}_\alpha(t)}{\alpha}\}, \tag{5.8}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение из [29].

Лемма 8. *Пусть $(Y,\|\cdot\|)$ — банахово пространство, и $f\in S(\mathbb{R},Y)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для каждого измери-*

мого множества $E\subset[0,1]$, $\mathrm{mes}E\leqslant\delta$ *выполняется неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_E \|f(s+t)\|_Y\,ds\leqslant\varepsilon.$$

Из (5.6), используя лемму 8 получаем, что

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} I_1(\alpha)=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}\int\limits_{ma+\vartheta}^{ma+\xi}\widehat{L}'_x(t)v_m dt. \tag{5.9}$$

Далее, из теоремы 1.5 [28] вытекает

Лемма 9. *Существуют такие последовательности*

$$\{q_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N},\quad \lim_{l\to\infty}q_l=\infty,\quad \{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}\subset(0,\infty),\quad \lim_{j\to\infty}\alpha_j=0,$$

и измеримое множество $\Xi\subset[0,a]$, $\mathrm{mes}\,\Xi=a$, *что для каждой точки* $\vartheta\in\Xi$ *выполнено равенство*

$$\lim_{j\to\infty}\left(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\alpha_j}\int\limits_0^{\alpha_j}\left|\widehat{L}'_u(t+\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma)\right|dt\right)=0. \tag{5.10}$$

Лемма 10. *Пусть точки* $\vartheta,\xi\in\Xi$ $(\xi\neq\vartheta)$, *где* Ξ *— множество указанное в лемме* 9. *Тогда для последовательностей* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$ *и* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ *из этой же леммы*

$$\lim_{j\to\infty}I_2(\alpha_j)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\big(\widehat{L}'_u(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\xi+ma)\big)v_m. \tag{5.11}$$

Равенство (5.11) есть следствие равенств (5.10) и (5.8) и, как уже отмечалось, того, что при п. в. $t\in\mathbb{R}$ $\quad\dot{x}_\alpha(t)=u_\alpha(t)$.

Доказательство теоремы 7. Из условий теоремы 7 по утверждению леммы 7 получаем, что для всех $h\in\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ выполнено равенство $\delta\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot);h(\cdot)\big)=\delta I\big(\widehat{x}(\cdot);h(\cdot)\big)+G'\big(\widehat{x}(\cdot)\big)[h(\cdot)]=0$, или иначе (см. (4.1) и (5.2))

$$M\{\widehat{L}'_u(t)\dot{h}(t)+\widehat{L}'_x(t)h(t)\}+\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1}g'_x\bigl(t_m,\widehat{x}(ma)\bigr)h(ma)=0. \qquad (5.12)$$

Далее, для функции $\widehat{x}\in\mathcal{B}$ рассмотрим отвечающее ей семейство п. п. функций (5.7): $\{x_\alpha(\cdot),\quad \alpha\in(0,A)\}$, где точки ϑ и ξ принадлежат множеству Ξ, указанному в лемме 9. Из (5.12) при $h=x_\alpha$, принимая во внимание равенство $x_\alpha(ma)=0$ и обозначение (5.8), получим, что $I_1(\alpha)+I_2(\alpha)=0$ при $\alpha\in(0,A)$. Откуда, рассмотрев последовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$ и $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, указанные в лемме 9, в силу (5.9) и (5.11) получаем равенство

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\bigl(\widehat{p}(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma)\bigr)v_m=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\bigl(\widehat{p}(\xi+ma)-\widehat{L}'_u(\xi+ma)\bigr)v_m,$$

справедливое для всех точек $\vartheta,\xi\in\Xi$ и любой фиксированной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^n$. В силу данного равенства для всех точек $\vartheta\in\Xi$ и каждой п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{R}^n$ при любой фиксированной константе C имеет место следующее предельное равенство

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\bigl(\widehat{p}(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma)-C\bigr)v_m=0.$$

Поэтому, если для произвольно фиксированной функции $x\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ рассмотреть отвечающую ей п. п. последовательность $\{x(\vartheta+ma)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, где $\vartheta\in[0,a]$, то из последнего равенства при $v_m=x(\vartheta+ma)$ вытекает равенство:

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\bigl(\widehat{p}(\vartheta+ma)-\widehat{L}'_u(\vartheta+ma)-C\bigr)x(\vartheta+ma)=0.$$

Проинтегрировав данное равенство по ϑ от 0 до a получим, что

$$M\{\bigl(\widehat{p}(t)-\widehat{L}'_u(t)-C\bigr)x(t)\}=0.$$

Поскольку это равенство справедливо для всех функций $x \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то рассматривая $x(t) = e_j e^{i\lambda t}$ (здесь e_j — j-й вектор стандартного базиса, $\lambda \in \mathbb{R}$), получим, что все коэффициенты ряда Фурье, отвечающего функции

$$t \mapsto \widehat{p}(t) - \widehat{L}'_u(t) - C, \quad t \in \mathbb{R},$$

равны нулю, а значит [8], эта функция тождественно равна нулю. Отсюда следует, что функция $t \mapsto \widehat{p}(t) - \widehat{L}'_u(t) - C$ является дифференцируемой, тем самым утверждения а) и б) теоремы 7 доказаны. Далее, из (5.12), полагая последовательно $h(t) \equiv \mathrm{e}_j, \quad j = 1, \dots, n$, получим, что

$$M\{\widehat{L}'_x(t)\} = -\lim_{l \to \infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q-1} g'_x\big(t_m, \widehat{x}(ma)\big),$$

а т.к. (см. (5.4)) $M\{\widehat{L}'_x(t)\} = M\{\dot{\widehat{p}}(t)\} = 0$, то равенство (5.5) доказано. $\triangle$

Пусть далее для набора индексов $j = 0, \dots, k+m$ функции L_j и g_j удовлетворяют условиям 1), 2) и I) ,II) соответственно. В этом случае на множестве $\mathcal{B}$ (см. (3.3)) корректно определены функционалы

$$x(\cdot) \mapsto \mathbb{I}_j\big(x(\cdot)\big) \doteq I_j\big(x(\cdot)\big) + G_j\big(x(\cdot)\big), \quad j = 0, \dots, k+m.$$

Определим теперь множество

$$D \doteq \{x \in \mathcal{B} \,:\, \mathbb{I}_j\big(x(\cdot)\big) \leqslant 0,\ j = 1, \dots, k, \quad \mathbb{I}_j\big(x(\cdot)\big) = 0,\ j = k+1, \dots, k+m\},$$

и рассмотрим *п. п. задачу с ограничениями на средние в виде равенств и неравенств*:

$$\mathbb{I}_0\big(x(\cdot)\big) \to \inf, \quad x \in D, \tag{5.13}$$

в которой функция $\widehat{x} \in D$ называется (локальным) *решением в слабом смысле*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\mathbb{I}_0\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant \mathbb{I}_0\big(x(\cdot)\big)$ для всякой функции $x \in D$, удовлетворяющей неравенству $\|\widehat{x} - x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$.

Утверждение 1. Пусть функция $\widehat{x} \in D$ является решением в слабом смысле задачи (5.13). Тогда найдутся такие числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{k+m}$, не равные нулю одновременно, что выполнены соотношения: $\widehat{\lambda}_j \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_j \mathbb{I}_j\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Кроме того, если п. п. по Степанову функции $t \mapsto \widehat{L}'_{jx}(t) \doteq L'_{jx}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, $\quad t \mapsto \widehat{L}'_{ju}(t) \doteq L'_{ju}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$ ограничены на $\mathbb{R}$ в существенном, то для функции $t \mapsto \mathcal{L}(t) \doteq \sum\limits_{j=0}^{k+m} \widehat{\lambda}_j \widehat{L}'_{ju}(t)$ выполнены утверждения а),б) теоремы 7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, повторяя рассуждения теоремы 6, и используя лемму 7, получаем, что функция $\widehat{x}$, являющаяся решением задачи (5.13), если D рассматривать как подмножество в пространстве $\big(\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathfrak{B}}\big)$, будет также решением в слабом смысле на множестве $\big(\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), |||\cdot|||_{\mathfrak{B}}\big)$.

Каждый из функционалов $\mathbb{I}_j$, $j = 0, \ldots k + m$, является непрерывно непрерывно дифференцируемым по Фреше на $\mathcal{B} \subset \big(\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), |||\cdot|||_{\mathfrak{B}}\big)$. Поэтому [36] найдутся такие числа $\widehat{\lambda}_0 \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{k+m}$, не равные нулю одновременно, что будут выполнены соотношения $\widehat{\lambda}_j \mathbb{I}_j\big(\widehat{x}(\cdot)\big) = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Далее из теоремы 6 получаем утверждения а) и б) теоремы 7. $\triangle$

§6 Необходимые условия решения в сильном смысле задачи Больца.

Для получения необходимых условий решения в сильном смысле задачи (5.3) понадобятся *п. п. игольчатые вариации Вейерштрасса.*

С фиксированной точкой $\vartheta \in [0, a) \quad (a > 0)$, свяжем множество

$$\Lambda \doteq \{\lambda > 0 \, : \, \vartheta + \varepsilon < a\},$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) \doteq \lambda + \sqrt{\lambda}$, и по заданной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^n$ построим функцию $x(\cdot, \lambda) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \quad (\lambda \in \Lambda)$, определенную на каждом полуинтервале $\big[ma, (m+1)a\big), \quad m \in \mathbb{Z}$ равенством

$$x(t,\lambda) \doteq \begin{cases} 0, \ t \in \big[ma, (m+1)a\big) \setminus [ma+\vartheta, ma+\vartheta+\varepsilon), \\ (t - ma - \vartheta)\, v_m, \ t \in [ma+\vartheta, ma+\vartheta+\lambda), \\ \lambda v_m - \sqrt{\lambda}(t - ma - \vartheta - \lambda) v_m, \ t \in [ma+\vartheta+\lambda, ma+\vartheta+\varepsilon), \end{cases} \tag{6.1}$$

которая п. в. дифференцируема на $\mathbb{R}$, и при каждом $m \in \mathbb{Z}$

$$\dot{x}(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & t \in [ma, (m+1)a) \setminus [ma+\vartheta, ma+\vartheta+\varepsilon), \\ v_m, & t \in [ma+\vartheta, ma+\vartheta+\lambda), \\ -\sqrt{\lambda}\, v_m, & t \in [ma+\vartheta+\lambda, ma+\vartheta+\varepsilon). \end{cases} \tag{6.2}$$

Поскольку

$$\|x(\cdot,\lambda)\|_B \leqslant 2\lambda v, \quad \|\dot{x}(\cdot,\lambda)\|_\infty \leqslant (1+\sqrt{\lambda})v, \tag{6.3}$$

и при каждом $m \in \mathbb{Z}$ выполняются неравенства $\big($см. (6.1), (6.2)$\big)$

$$\|x(\cdot + ma, \lambda) - x(\cdot, \lambda)\|_B \leqslant \lambda \sup_{q\in\mathbb{Z}} |v_{m+q} - v_q|,$$

$$d(\dot{x}(\cdot + ma, \lambda), \dot{x}\big(\cdot, \lambda)\big) \leqslant 4a\lambda \sup_{q \in \mathbb{Z}} |v_{m+q} - v_q|,$$

то множество функций $\{x(\cdot, \lambda), \quad \lambda \in \Lambda\}$ — *п. п. иголок Вейерштрасса* содержится в $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, является ограниченным по норме $||\cdot||_{\mathfrak{B}}$ и равностепенно почти периодическим.

В дальнейшем (см., например, [36])

$$\mathcal{E}(t, x, u, v) \doteq L(t, x, v) - L(t, x, u) - (v - u) \cdot L'_u(t, x, u)$$

— функция Вейерштрасса, отвечающая заданному лагранжиану L.

Лемма 11. *Пусть отображение* $L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *помимо условий* 1), 2) *удовлетворяет условию:*

3) *для любых* $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ *и* $U \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} (\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \omega_\gamma [L'_u(t, \cdot, \cdot), V \times U]) = 0. \tag{6.4}$$

Тогда, если функция $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{B}$ *при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *удовлетворяет уравнению* (4.3), *то для каждого компакта* $U \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}}) + O_N[0]$, $N \in \mathbb{N}$, *найдутся такие последовательности*

$$\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \quad \lim_{l \to \infty} q_l = \infty,$$

$$\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0, a) \quad \lim_{j \to \infty} \eta_j = 0$$

и измеримое множество $\Xi \subset [0, a]$, $\mathrm{mes}\, \Xi = a$, *что в каждой точке* $\vartheta \in \Xi$ *и для любой фиксированной п. п. последовательности* $\{v_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \subset O_N[0]$ *будет иметь место предельное равенство*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{\eta_j} \big(\mathbb{I}(\widehat{x} + x\big(\cdot, \eta_j)\big) - \mathbb{I}(\widehat{x})\big) =$$

$$= \lim_{l \to \infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l - 1} \mathcal{E}(ma + \vartheta, \widehat{x}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta) + v_m). \tag{6.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $r > 0$ так, что $V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset \mathcal{V}$. В дальнейшем, не оговаривая, считаем, что число $\widehat{\lambda} \in \Lambda$ такое, что при каждом $\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$ для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\widehat{x}(t) + x(t,\lambda) \in V, \quad \dot{\widehat{x}}(t) + \dot{x}(t,\lambda) \in U.$$

Введем далее в рассмотрение отображение

$$(t,u) \mapsto \mathcal{L}(t,u) \doteq L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u), \quad (t,u) \in \mathbb{R} \times O_N[0].$$

Так как $L \in S\big(\mathbb{R}, C(V \times U, \mathbb{R})\big)$, а функция $\widehat{x} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, V)$, то отображение $(t,u) \mapsto L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u)$ принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R}, C(O_N[0], \mathbb{R})\big)$. Поэтому, принимая во внимание, что функции $t \mapsto \widehat{L}(t) \doteq L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$ и $t \mapsto \widehat{L}'_u(t)$ п. п. по Степанову, по лемме 1.1 [45], а также лемме 1.9 и теореме 1.5 из [28], найдутся такие последовательности

$$\{q_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \quad \lim_{l\to\infty} q_l = \infty, \quad \{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \Lambda, \quad \lim_{j\to\infty} \eta_j = 0$$

и измеримое множество $\Xi \subset [0,a]$, $\operatorname{mes} \Xi = a$, что в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ и любой фиксированной п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$ существуют пределы

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \widehat{L}_m(\vartheta), \quad \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \widehat{L}'_{u,m}(\vartheta), \quad \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \mathcal{L}_m(\vartheta, v_m), \tag{6.6}$$

где

$$\widehat{L}_m(\vartheta) \doteq \widehat{L}(\vartheta + ma), \quad \widehat{L}'_{u,m}(\vartheta) \doteq \widehat{L}'_u(\vartheta + ma), \quad \mathcal{L}_m(\vartheta, v_m) \doteq \mathcal{L}(\vartheta + ma, v_m),$$

и при этом

$$\lim_{j\to\infty} \big(\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \frac{1}{\eta_j} \int_0^{\eta_j} \max_{u \in O_N[0]} |\mathcal{L}_m(t+\vartheta, u) - \mathcal{L}_m(\vartheta, u)| \, dt\big) = 0, \tag{6.7}$$

$$\lim_{j\to\infty}\Big(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_j}\int\limits_0^{\eta_j}|\widehat{L}_m(t+\vartheta)-\widehat{L}_m(\vartheta)|\,dt\Big)=0. \tag{6.8}$$

Далее, считаем что точка ϑ принадлежит указанному выше множеству Ξ. Для каждой пары $(\lambda,\vartheta)\in(0,\widehat{\lambda}]\times\Xi$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\lambda}\big(\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)+x(\cdot,\lambda)\big)-\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)\big)\big)=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{qa}\sum_{m=0}^{q-1}\big(I_m^{(1)}(\vartheta,\lambda)+I_m^{(2)}(\vartheta,\lambda)\big), \tag{6.9}$$

в котором

$$I_m^{(1)}(\vartheta,\lambda)\doteq r_m^{(1)}(\vartheta,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\lambda}\big(\mathcal{L}_m(t+\vartheta,v_m)-\widehat{L}_m(t)\big)dt, \tag{6.10}$$

$$I_m^{(2)}(\vartheta,\lambda)\doteq r_m^{(2)}(\vartheta,\lambda)+r_m^{(3)}(\vartheta,\lambda)+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon}\big(\widehat{L}'_u(t)\dot{x}(t,\lambda)+\widehat{L}'_x(t)x(t,\lambda)\big)\,dt, \tag{6.11}$$

и где, в свою очередь,

$$r_m^{(1)}(\vartheta,\lambda)\doteq\frac{1}{\lambda}\int\limits_{ma+\vartheta}^{ma+\vartheta+\lambda}\Big(\int_0^1 L'_x(t,\widehat{x}(t)+\vartheta x(t,\lambda),\dot{\widehat{x}}(t)+v_m)d\vartheta\Big)x(t,\lambda)\,dt,$$

$$r_m^{(2)}(\vartheta,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int\limits_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon}\Big(\int\limits_0^1 L'_x\big(t,\widehat{x}(t)+\vartheta x(t,\lambda),\dot{\widehat{x}}(t)\big)\,d\vartheta-\widehat{L}'_x(t)\Big)x(t,\lambda)dt,$$

$$r_m^{(3)}(\vartheta,\lambda)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon}\Big(\int\limits_0^1 L'_u(t,\widehat{x}(t)+x(t,\lambda),\dot{\widehat{x}}(t)-\vartheta\sqrt{\lambda}v_m)\,d\vartheta-\widehat{L}'_u(t)\Big)\,dt\cdot v_m.$$

Покажем, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\Big(\sup_{(\vartheta,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}}|r_m^{(k)}(\vartheta,\lambda)|\Big)=0,\quad k=1,2,3. \tag{6.12}$$

В самом деле, из (6.3) получаем неравенства

$$|r_m^{(1)}(\vartheta,\lambda)| \leqslant 2v \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\sqrt{\lambda}} l(s)\,ds, \quad |r_m^{(2)}(\vartheta,\lambda)| \leqslant 2v \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\sqrt{\lambda}} l(s)\,ds,$$

где $l(t) \doteq \max\limits_{(x,u)\in V\times U} |L'_x(t,x,u)|$. Поскольку $l \in S(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, то из указанных неравенств, в силу леммы 8 получаем равенства (6.12) при $k=1,2$. Далее, из соотношений

$$|r_m^{(3)}(\vartheta,\lambda)| \leqslant \frac{v}{\sqrt{\lambda}} \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\sqrt{\lambda}} \omega_{\gamma(\lambda)}[L'_u(s,\cdot,\cdot), V\times U]\,ds \leqslant$$

$$\leqslant v \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} \omega_{\gamma(\lambda)}[L'_u(t,\cdot,\cdot), V\times U],$$

где $\gamma(\lambda) \doteq \lambda v$, в силу условия (6.4) получаем равенство (6.12) при $k=3$.

Далее, т.к. $\widehat{x}(t)$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (4.3), и $x(\vartheta+ma+\varepsilon,\lambda)=0$, то при всех $(\lambda,\vartheta)\in(0,\widehat{\lambda}]\times\Xi$ имеем (здесь см. (6.1), (6.2)) следующую цепочку равенств:

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{ma+\vartheta+\lambda}^{ma+\vartheta+\varepsilon} \big(\widehat{L}'_u(t)\dot{x}(t,\lambda)+\widehat{L}'_x(t)x(t,\lambda)\big)\,dt = -\widehat{L}'_{u,m}(\vartheta+\lambda)v_m =$$

$$= -\left(\widehat{L}'_{u,m}(\vartheta) + \int\limits_{ma+\vartheta}^{ma+\vartheta+\lambda} \widehat{L}'_x(t)\,dt\right)\cdot v_m.$$

из которых, учитывая, что (см. лемму 8)

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_t^{t+\lambda} |\widehat{L}'_x(s)|\,ds) = 0,$$

равенства (6.10) и (6.11) при $\lambda=\eta_j$, в силу (6.12) и (6.7) — (6.9) получаем нужное равенство (6.5) при $\vartheta\in\Xi$ и всякой п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$. $\triangle$

Приведем еще одно необходимое условие решения для задачи (5.4).

Теорема 8. *Пусть функции*

$$L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \textit{и} \ g : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

удовлетворяют условиям 1)–3) *и* I), II), *соответственно, и функция* $\widehat{x}$ *из множества* $\mathcal{B}$ *является решением задачи* (5.3). *Тогда*

а) *если функция* (5.4) *п. п. по Бору, то для каждой функции* u *из* $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *выполнено неравенство*

$$M\{\mathcal{E}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u(t)\big)\} \geqslant 0, \tag{6.13}$$

б) *если функция* L *удовлетворяет также условию*

4) *для любой ограниченной области* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, *содержащей* $\overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} l(t) < \infty, \quad l(t) \doteq \max_{u \in U} |L'_u(t, \widehat{x}(t), u)|, \quad U \doteq \overline{\mathcal{U}}, \tag{6.14}$$

то неравенство (6.13) *выполнено в том и только том случае, если при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и каждом* $v \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + v) \geqslant 0. \tag{6.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем функцию $u \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, и для нее при $h > 0$ рассмотрим стекловское усреднение $u(\cdot, h)$, принадлежащее пространству $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, и для которого, в свою очередь, при каждом $t \in [0, a]$ рассмотрим п. п. последовательность $\{u_m(t, h)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, где

$$u_m(t, h) \doteq u(t + ma, h) \subset O_{N_1}[0], \qquad N_1 \doteq \|u\|_\infty.$$

Для компактного множества $U \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}}) + O_N[0]$ возьмем последовательности $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ и множество $\Xi \subset [0,a]$ из леммы 11. Согласно этой лемме в каждой точке $\vartheta \in \Xi$ для п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $v_m \doteq u_m(\vartheta,h)$, будет выполнено предельное равенство (6.5). С другой стороны, т.к. при $v_m \doteq u_m(\vartheta,h)$ (см. (6.1), (6.2)) $\|x(\cdot,\eta_j)\|_C \leqslant 2\eta_j N_1$, то при всех $j \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого j_0, будет справедливо неравенство $\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot\,,\eta_j)\big) \geqslant \mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)\big)$, или, т.к. $x(ma\,,\eta_j) = 0$, то

$$\frac{1}{\eta_j}\Big(I\big(\widehat{x}(\cdot) + x(\cdot\,,\eta_j)\big) - I\big(\widehat{x}(\cdot)\big)\Big) \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\mathcal{E}\big(ma+\vartheta, \widehat{x}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}_{ma}(\vartheta), \dot{\widehat{x}}(\vartheta) + u_m(\vartheta,h)\big) \geqslant 0.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по ϑ от 0 до a, получаем, что

$$M\{\mathcal{E}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u(t,h)\big)\} \geqslant 0. \tag{6.16}$$

Далее, т.к. отображение $(t,u) \mapsto L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u\big)$ принадлежит пространству $S\big(\mathbb{R}, C(O_{N_1}[0], \mathbb{R})\big)$, то функция

$$(t,u) \mapsto \mathcal{E}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u\big) \doteq L\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u\big) - \widehat{L}(t) - \widehat{L}'_u(t)u$$

также принадлежит $S\big(\mathbb{R}, C(O_N[0], \mathbb{R})\big)$. Поэтому в силу равенства $\lim\limits_{h\downarrow 0} d\big(u(\cdot,h), u\big) = 0$ и леммы 11, переходя в неравенстве (6.16) к пределу при $h \downarrow 0$ получаем неравенство (6.13). Тем самым утверждение а) доказано.

В утверждении б) достаточность условий очевидна. Докажем необходимость условий. С этой целью для произвольно фиксированного $v \in \mathbb{R}^n$

рассмотрим компактные множества $V \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$ и $U \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}}) + O_N[0]$, где $N \doteq |v|$, а также отображение

$$(t,u) \mapsto g(t,u) \doteq \mathcal{E}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + u),$$

принадлежащее, как показано при доказательстве теоремы 8, пространству $S\big(\mathbb{R}, C(O_N, \mathbb{R})\big)$. Покажем, что

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \omega_\gamma \big[g(t, \cdot), O_N[0] \big] \Big) = 0. \tag{6.17}$$

Действительно, если $u_1, u_2 \in O_N[0]$ и $|u_1 - u_2| \leqslant \gamma$, то при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеем следующие соотношения (см.(6.14)):

$$|g(t,u_1) - g(t,u_2)| \leqslant |u_1 - u_2| \cdot |\widehat{L}'_u(t)| +$$

$$+ \Big| \int_0^1 L'_u(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \vartheta u_1) d\vartheta \cdot u_1 - \int_0^1 L'_u(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + \vartheta u_2) d\vartheta \cdot u_2 \Big| \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma \|l\|_\infty + N \operatorname*{ess\,sup}_{t \in \mathbb{R}} \omega_\gamma [L'_u(t, \cdot, \cdot), V \times U],$$

из которых в силу (6.4) вытекает (6.17).

Теперь рассмотрим задачу

$$M\{g\big(t, u(t)\big)\} \to \inf, \ u \in S(\mathbb{R}, O_N[0]),$$

для которой функция $\widehat{u}(t) \equiv 0$ является решением. Поскольку функция $g \in S\big(\mathbb{R}, C(O_N[0], \mathbb{R})\big)$ и удовлетворяет условию (6.17), то по теореме 1.4, приведенной в [28] (см. ее доказательство и замечание 4.1 в работе [30]), при п. в. $t \in \mathbb{R}$

$$\min_{u \in O_N[0]} g(t,u) = g(t,0),$$

а поскольку

$$g(t,0) = \mathcal{E}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big) \equiv 0$$

и $v \in O_N[0]$, то неравенство (6.15) доказано. $\triangle$

З а м е ч а н и е 5. Если ввести отображение

$$(t,x,u,\psi) \mapsto H(t,x,u,\psi) \doteq \psi u - L(t,x,u),$$
$$(t,x,u,\psi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \quad (6.18)$$

и обозначить $\widehat{\psi}(t) = \widehat{L}'_u(t)$, то неравенство (6.15) равносильно тому, что

$$H\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{\psi}(t)\big) \geqslant H\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t) + v, \widehat{\psi}(t)\big) \qquad (6.19)$$

для всех $v \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 2. (условия Вейерштрасса-Эрдмана). *Пусть выполнены условия теоремы* 8. *Тогда для любой ограниченной области* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, *содержащей* $\overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$, *в точках* $\widehat{t} \in \mathbb{T}$, *являющихся точками равномерной по* $(x,u) \in \overline{\mathrm{orb}}(x) \times U$, $\quad U \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\dot{\widehat{x}})$, *непрерывности отображения* $(t,x,u) \mapsto L(t,x,u)$, *функция*

$$t \mapsto H\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), \widehat{\psi}(t)\big)$$

является непрерывной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$(t,u) \mapsto g(t,u) \doteq H\big(t, \widehat{x}(t), u, \widehat{\psi}(t)\big) = \widehat{\psi}(t)u - L(t, \widehat{x}(t), u), \quad (t,u) \in \mathbb{R} \times U.$$

По теореме 8 и замечанию 5 при $\widehat{t} \in \mathbb{T}$ выполнено равенство

$$H\big(\widehat{t}, \widehat{x}(\,\widehat{t}\,), \dot{\widehat{x}}(\,\widehat{t}\,), \widehat{\psi}(\,\widehat{t}\,)\big) = \max_{u \in U} g(\widehat{t}, u).$$

Поэтому для доказательства утверждения 2 достаточно показать непрерывность функции $t \mapsto \max\limits_{u\in U} g(t,u)$ в указанной в теореме точке $\widehat{t}$. Для этого отметим, что по утверждению а) теоремы 8 функция $\widehat{\psi}$ п. п. по Бору, а значит равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, и т.к. отображение $(t,u)\mapsto L(t,\widehat{x}(t),u)$ (см. ограничения на L) принадлежит $S\big(\mathbb{R}, C(U,\mathbb{R})\big)$, то из соотношений

$$|\max_{u\in U} g(\widehat{t}+\alpha,u) - \max_{u\in U} g(\widehat{t},u)| \leqslant \max_{u\in U}|g(\widehat{t}+\alpha,u)-g(\widehat{t},u)| \leqslant$$

$$\leqslant \|\widehat{\psi}(\cdot+\alpha)-\widehat{\psi}(\cdot)\|_B\cdot\max_{u\in U}|u| + \max_{(x,u)\in\ V\times U}|L(\widehat{t}+\alpha,x,u)-L(\widehat{t},x,u)| +$$
$$+\omega_{\gamma(\alpha)}[L(\widehat{t},\cdot,\cdot),V\times U],$$

где $\gamma(\alpha)\doteq\|\widehat{x}(\cdot+\alpha)-\widehat{x}(\cdot)\|_B$, получаем непрерывность отображения $t\mapsto \max\limits_{u\in U} g(t,u)$ в точке $\widehat{t}\in\mathbb{T}$. $\triangle$

§7 Необходимые условия второго порядка.

Укажем, сейчас, необходимые условия второго порядка сильного (слабого) минимума задачи (5.3) в предположении, что отображение

$$(t,x,u)\to L(t,x,u)\in\mathbb{R},\quad (t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$$

(напомним, что $\mathcal{V}$ — область в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющего помимо условий 1) и 2) следующим условиям:

5) в каждой точке $(t,x,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n$ существуют $L''_{xx}(t,x,u)$, $L''_{xu}(t,x,u)$, $L''_{ux}(t,x,u)$, $L''_{uu}(t,x,u)$;

6) для любых фиксированных $V\in\mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $U\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ отображения $L''_{xx}, L''_{ux}, L''_{xu}$ и L''_{uu} принадлежат пространству $S\big(\mathbb{R}, C\big(V\times U, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)\big)$.

При выполнении этих условий, в силу замечания 3 главы 1 в каждой точке $x \in \mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ функционал (3.4) имеет вторую вариацию по Лагранжу, которая определена при всяком $h \in \mathfrak{B}$ равенством:

$$\delta^2 I\bigl(x(\cdot); h(\cdot)\bigr) = M\{\dot{h}^*(t)A(t)\dot{h}(t) + 2\dot{h}^*(t)C(t)h(t) + h^*(t)B(t)h(t)\}, \quad (7.1)$$

где

$$\begin{cases} A(t) = L''_{uu}\bigl(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\bigr), \quad B(t) = L''_{uu}\bigl(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\bigr), \\ C(t) = L''_{xu}\bigl(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\bigr) = L''_{ux}\bigl(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\bigr). \end{cases} \quad (7.2)$$

Относительно функции $g : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ будем предполагать, что

I$'$) в каждой точке $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$ существуют $g''_{xx}(t, x)$;

II$'$) для всякого $V \in \mathrm{comp}(\mathcal{V})$ выполняется условие II), а также условие — отображение $(t, x) \mapsto g''_{xx}(t, x)$ принадлежит $B\bigl(\mathbb{R} \times V, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\bigr)$.

При выполнении этих условий утверждение леммы 7 дополняется следующим: в каждой точке $x \in \mathcal{B} \subset (\mathfrak{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ отображение (5.1) дважды дифференцируемо по Фреше, и для всех $h \in \mathfrak{B}$

$$G''\bigl(x(\cdot)\bigr)[h(\cdot)] = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \sum_{m=0}^{q-1} h^*(ma) g''_{xx}\bigl(t_m, x(ma)\bigr) h(ma). \quad (7.3)$$

Теорема 9. (условие Лежандра). *Пусть отображения*

$$L : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \textit{и} \quad g : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$$

удовлетворяют условиям 2), 5),6) *и* I'), II'), *соответственно. Тогда, если функция* $\widehat{x} \in \mathcal{B}$ *является решением задачи* (5.3) *в сильном смысле, и*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}} |L'_{xx}\bigl(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\bigr)| < \infty,$$

то при п. в. $t \in \mathbb{R}$ *и всяком* $v \in \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$v^* L''_{uu}\bigl(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\bigr)\, v \geqslant 0. \quad (7.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы 9 найдется такое $\gamma>0$, что $\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot)\big) \leqslant \mathbb{I}\big(x(\cdot)\big)$ для всех $x \in \mathcal{B}$, удовлетворяющих неравенству $\|\widehat{x}-x\|_C \leqslant \gamma$, в том числе и для всех $x\in\mathcal{B}$ таких, что $\|\widehat{x}-x\|_{\mathfrak{B}} \leqslant \gamma$. Откуда, в силу ограничений, которым удовлетворяют функции L и g, и сделанных выше дополнений к утверждению леммы 7, по теореме о необходимом условии локального минимума в нормированном пространстве [36] получаем, что для всех $x \in (\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ будет выполнено неравенство

$$\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \doteq \delta^2\mathbb{I}\big(\widehat{x}(\cdot);x(\cdot)\big) \geqslant 0,$$

или (см. (7.3))

$$\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) = M\{\mathbb{L}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)\}+ \\ +\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q}\sum_{m=0}^{q-1} x^*(ma)g''_{xx}\big(t_m,\widehat{x}(ma)\big)x(ma) \geqslant 0, \quad (7.5)$$

где (здесь см. (7.1) и обозначения (7.2) при $x=\widehat{x}$)

$$\mathbb{L}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) \doteq \dot{x}^*(t)A(t)\dot{x}(t)+2\dot{x}^*(t)C(t)x(t)+x^*(t)B(t)x(t). \qquad (7.6)$$

В силу условия 5) отображения A,B и C принадлежат пространству $S\big(\mathbb{R},\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)$, и для любых $V\in\mathrm{comp}(\mathcal{V})$ и $U\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ функции

$$(t,u)\mapsto u^*A(t)u, \quad (t,x,u)\mapsto u^*B(t)x, \quad (t,x)\mapsto x^*C(t)x$$

принадлежат пространствам $S\big(\mathbb{R},C(U,\mathbb{R})\big)$, $S\big(\mathbb{R},C(V\times U,\mathbb{R})\big)$ и $S\big(\mathbb{R},C(V,\mathbb{R})\big)$, соответственно. Далее, используя теорему 1.5 [28] для отображения

$$(t,u)\mapsto u^*A(t)u, \quad (t,u)\in\mathbb{R}\times O_N[0], \quad (N\in\mathbb{N}),$$

получим, что найдутся такие последовательности

$$\{q_l\}_{l=1}^{\infty}, \quad \lim_{l\to\infty} q_l = \infty, \quad \{\eta_j\}_{j=1}^{\infty} \subset (0,a] \ (a>0), \quad \lim_{j\to\infty}\eta_j = 0,$$

и измеримое множество $\Xi \subset [0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi = a$, такие, что для каждой точки $\vartheta \in \Xi$ и любой п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$ будет существовать предел:

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l}\sum_{m=0}^{q_l-1} v_m^* A(\vartheta+ma)v_m, \tag{7.7}$$

и выполняться равенство

$$\lim_{j\to\infty}\Bigl(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_j}\int\limits_0^{\eta_j}|A(t+\vartheta+ma)-A(\vartheta+ma)|\,dt)\Bigr)=0. \tag{7.8}$$

Далее, по п. п. последовательности $\{v_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset O_N[0]$, фиксированной точке $\vartheta\in\Xi$ рассмотрим совокупность (см. (6.1)) п. п. иголок Вейерштрасса — $\{x(\cdot,\lambda),\ \lambda\in\Lambda\}$. Так как $x(\cdot,\lambda)\in(\mathfrak{B},\|\cdot\|_{\mathfrak{B}})$ и $x(ma,\lambda)=0$ при всех $m\in\mathbb{Z}$ и каждом $\lambda\in\Lambda$, то из (7.5) получаем, что при всех $\lambda\in\Lambda$

$$\mathcal{K}\bigl(x(\cdot,\lambda)\bigr) = M\{\mathbb{L}\bigl(t,x(t,\lambda),\dot{x}(t,\lambda)\bigr)\} \geqslant 0.$$

С другой стороны, из (7.6) при $x=x(\cdot,\lambda)$ и (6.1), (6.2) получим равенство

$$M\{\mathbb{L}\bigl(t,x(t,\lambda),\dot{x}(t,\lambda)\bigr)\} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\Bigl(\int\limits_0^{\lambda} v_m^* A(t+\vartheta+ma)v_m\,dt + f_m(\vartheta,\lambda)\Bigr), \tag{7.9}$$

в котором $\{f_m(\theta,\lambda)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — такая п. п. последовательность, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\left(\operatorname*{supremum}_{(\vartheta,m)\in[0,a]\times\mathbb{Z}}\frac{|f_m(\vartheta,\lambda)|}{\lambda}\right)=0. \tag{7.10}$$

Поэтому из существования предела (7.7), равенства (7.8) из (7.10) и (7.9) при $\lambda = \eta_j$ получим, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\eta_j}\mathcal{K}\big(x(\cdot,\eta_j)\big) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1} v_m^* A(\vartheta + ma)v_m \geqslant 0.$$

Рассуждая далее как и при доказательстве теоремы 8 и используя последнее неравенство, получим, что для всякой функции $u \in S(\mathbb{R}, O_N[0])$ будет выполнено неравенство $M\{u^*(t)A(t)u(t)\} \geqslant 0$, т. е. функция $\widehat{u}(t) \equiv 0$ является решением задачи

$$M\{u^*(t)A(t)u(t)\} \to \inf, \quad u \in S(\mathbb{R}, O_N[0]).$$

Поскольку для функции $(t,u) \mapsto u^*A(t)u$ выполнено условие типа 4), то по теореме 1.4 [30] при п. в. $t \in \mathbb{R}$ и всех $v \in O_N[0]$ будет выполнено неравенство (7.4). Откуда в силу произвольности выбора $N \in \mathbb{N}$ получаем нужное неравенство при всех $v \in \mathbb{R}^n$. $\triangle$

З а м е ч а н и е 6. Если в задаче (5.3) отображение $L : \mathbb{R}\times\mathcal{V}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 1) и 2'), то для него условия (6.4) и (6.14) выполняются. Отметим также, что из теоремы 9 получаем необходимые условия решения в сильном (а значит, и в слабом) смысле для задачи (3.11), дополняющие необходимые условия решения в слабом смысле задачи (4.4), приведенные в [16].

Глава 3

Среднее значение квадратичной формы и условия второго порядка.

§8 Необходимые и достаточные условия неотрицательности среднего значения квадратичной формы.

Фиксируем отображения $P, Q, R \in S_\infty\big(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) для п. в. $t \in \mathbb{R}$ $\quad P(t) = P^*(t),\ \ R(t) = R^*(t);$

2) $v^*P(t)v > 0$ для всех отличных от нуля $v \in \mathbb{R}^n$ и п. в. $t \in \mathbb{R}.$

Указанным отображениям P, Q, R поставим в соответствие оператор $\mathbb{K} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, определенный равенством:

$$\mathbb{K}[x](t) \doteq \dot{x}(t)^* P(t)\dot{x}(t) + 2\dot{x}(t)^* Q(t)x(t) + x(t)^* R(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8.1}$$

и рассмотрим функционал

$$x(\cdot) \mapsto \mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \doteq M\big\{\mathbb{K}[x](t)\big\}, \quad x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{8.2}$$

который называется *неотрицательным*, если $\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \geqslant 0$ для всех функций x, принадлежащих $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим далее линейную систему уравнений с п. п. по Степанову коэффициентами

$$\frac{d}{dt}\big(P(t)\dot{x} + Q^*(t)x\big) = Q(t)\dot{x} + R(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

Как и в [31], говорим, что система уравнений (8.3) называется *системой без сопряженных точек на интервале* J, если каждое нетривиальное (не обязательно почти периодическое) решение не более одного раза обращается в нуль на этом интервале.

Теорема 10. *Для неотрицательности функционала* $\mathcal{K}$ *необходимо, чтобы система уравнений* (8.3) *не имела сопряженных точек на* $\mathbb{R}$, *и достаточно, чтобы эта система не имела сопряженных точек на интервале* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Покажем, что система уравнений (8.3) не имеет сопряженных точек на $\mathbb{R}$. Допустим противное. В этом случае существует такое нетривиальное решение $\eta(\cdot)$ системы уравнений (8.3), что по крайней мере для двух точек $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (считаем для определенности, что $t_1 < t_2$) $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Фиксируем далее отрезок $[a, b]$, содержащий $[t_1, t_2]$, полагаем

$$\mathbb{D}[a,b] \doteq \{x \in KC^1\big([a,b], \mathbb{R}^n\big) \,:\, x(a) = x(b) = 0\}, \tag{8.4}$$

где $KC^1\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ — пространство кусочно непрерывно дифференцируемых функций на $[a, b]$, и рассмотрим задачу:

$$\int\limits_a^b \mathbb{K}[x](t)\, dt \to \inf, \quad x \in \mathbb{D}[a,b]. \tag{8.5}$$

Поскольку уравнение Якоби для задачи (8.5) совпадает на (a, b) с уравнением (8.3), то в силу сделанного предположения для задачи (8.5) не выполнено усиленное условие Якоби (см., например, [36]). Поэтому [36] найдется такая функция $v \in \mathbb{D}[a,b]$ $\big($см. (8.4)$\big)$, для которой $\int\limits_a^b \mathbb{K}[v](t)\, dt < 0$.

Рассмотрим далее последовательность

$$p_m \doteq \int\limits_{a+ml}^{a+(m+1)l} \mathbb{K}[w](t)\,dt, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{8.6}$$

где $l \doteq b-a$, а $w(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — l-периодическое продолжение на $\mathbb{R}$ функции v. Поскольку отображение $t \mapsto \mathbb{K}[w](t)$ п. п. по Степанову, то [8] при каждом $\varepsilon > 0$ множество его ε-п. п., кратных l, относительно плотно. Поэтому $\big($см. (8.6)$\big)$ построенная последовательность $\{p_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является почти периодической, а следовательно, и последовательность $\{q_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, в которой

$$q_m \doteq \frac{1}{2}\big(|p_m| - p_m\big), \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{8.7}$$

будет также почти периодической. Отсюда, в свою очередь, получаем, что функция $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, заданная равенством

$$\xi(t) = q_m, \quad t \in \big[a+ml, a+(m+1)l\big), \quad m \in \mathbb{Z},$$

принадлежит $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Поэтому отображение

$$t \mapsto \psi(t) = \xi(t)\,w(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

(напомним, что $w(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — непрерывное l-периодическое продолжение функции $v(t)$, $t \in [a,b]$) будет п. п. по Степанову. Вместе с тем из определения функции ψ следует, что она является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$. Поэтому [8] $\psi \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Кроме того, при п. в. $t \in \mathbb{R}$ она дифференцируема, и $\dot{\psi}(t) = \xi(t)\dot{w}(t)$.

Таким образом построенная функция ψ принадлежит $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Кроме того (см. (8.6)) при всех $m \in \mathbb{Z}$

$$\int\limits_{a+ml}^{a+(m+1)l} \mathbb{K}[\psi](t)\,dt = q_m^2\,p_m. \tag{8.8}$$

Далее так как при каждом $m \in \mathbb{Z}$ $\big($см. (8.7)$\big)$

$$p_m q_m^2 = \begin{cases} p_m^3, & \text{если } p_m \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } p_m > 0, \end{cases}$$

то $p_m q_m^2 \leqslant 0$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, причем существуют индексы m, при которых $p_m q_m^2 < 0$. Следовательно, для п. п. последовательности $\{p_m q_m^2\}_{m\in\mathbb{Z}}$ будет выполнено неравенство

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{jl} \sum_{m=0}^{j-1} p_m q_m^2 < 0.$$

Поэтому в силу равенства

$$\mathcal{K}(\psi) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{jl} \sum_{m=0}^{j-1} \int\limits_{a+ml}^{a+(m+1)l} \mathbb{K}[\psi](t)\,dt,$$

принимая во внимание (8.8), получаем, что $\mathcal{K}(\psi) < 0$. Последнее противоречит неотрицательности функционала $\mathcal{K}$.

Пусть система уравнений (8.3) не имеет сопряженных точек на $(0, +\infty)$. Покажем, что в этом случае функционал $\mathcal{K}$ является неотрицательным на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Предположим противное. Поскольку (см. лемму 5) множество $B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ (см. (3.5)) всюду плотно в $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, а функционал $\mathcal{K}$ непрерывен на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, то найдется функция $\xi \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$,

$$\gamma \doteq \mathcal{K}\big(\xi(\cdot)\big) < 0.$$

Следовательно $\big($см. (8.2)$\big)$, найдется такое $T_0 > 0$, что для всех $T \geqslant T_0$ будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathbb{K}[\xi](t)\,dt < \frac{\gamma}{2}. \tag{8.9}$$

Рассмотрим далее при каждом $m \in \mathbb{N}$ функцию $\eta_m \in \mathbb{D}[0, T_0 + m]$, заданную равенством:

$$\eta_m(t) = \begin{cases} 2\xi(\frac{1}{2})t, \text{ при } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \xi(t), \text{ при } t \in [\frac{1}{2}, T_0 + m - \frac{1}{2}], \\ 2\xi(T_0 + m - \frac{1}{2})(T_0 + m - t), \text{ при } t \in [T_0 + m - \frac{1}{2}, T_0 + m]. \end{cases}$$

Непосредственно из определения η_m получаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{T_0 + m} \int\limits_0^{T_0+m} \big(\mathbb{K}[\xi](t) - \mathbb{K}[\eta_m](t)\big)\,dt = 0.$$

Откуда в силу (8.9) следует существование такого $m_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\int\limits_0^{T_0+m_0} \mathbb{K}[\eta_{m_0}](t)\,dt < 0. \tag{8.10}$$

С другой стороны, по условию система (8.3) не имеет сопряженных точек на $(0, +\infty)$. Следовательно (см. [31], с. 460), для каждого отрезка из $[0, +\infty)$, в частности, и для отрезка $[0, T_0{+}m_0]$, при любой функции $z \in \mathbb{D}[0, T_0{+}m_0]$ должно выполняться неравенство $\int\limits_0^{T_0+m_0} \mathbb{K}[z](t)\,dt \geqslant 0$, что противоречит неравенству (8.10). $\triangle$

§9 Условия строгой положительности среднего значения квадратичной формы.

В дальнейшем функционал $\mathcal{K}$ будем называть *строго положительным*, если найдется такая константа $\varkappa > 0$, что для всех $x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ будет выполнено неравенство

$$\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \geqslant \varkappa M\big\{|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2\big\}.$$

Теорема 11. *Пусть функционал $\mathcal{K}$ строго положителен. Тогда система уравнений* (8.3) *не имеет ограниченных решений.*

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$ — нетривиальное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение системы уравнений (8.3), и

$$\beta \doteq \inf_{t\in\mathbb{R}}\big(|u(t)|^2 + |\dot{u}(t)|^2\big).$$

Используя условие 2) для $P(t)$, практически повторив доказательство теоремы 7.3 из [13], получаем, что $\beta > 0$. Далее, поскольку u является решением системы уравнений (8.3), то для любого $T > 0$ будет выполнено равенство

$$\int\limits_1^{T-1} \mathbb{K}[u](t)\,dt = \big(P(t)\dot{u}(t) + Q(t)u(t)\big)^* u(t)\Big|_1^{T-1}. \qquad (9.1)$$

Фиксируем теперь произвольное $\varepsilon \in (0, \varkappa\beta/2)$, а также такую последовательность $\{T_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$, что $\lim\limits_{j\to\infty} T_j = +\infty$. Из (9.1) вытекает существование такого $j_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $j > j_1$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{1}{T_j - 2}\int\limits_1^{T_j-1} \mathbb{K}[u](t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть далее при каждом $j \in \mathbb{N}$

$$u_j(t) \doteq \begin{cases} u(1)\,t, \text{ при } t \in [0,1], \\ u(t), \text{ при } t \in [1, T_j - 1], \\ u(T_j - 1)\,(T_j - t), \text{ при } t \in [T_j - 1, T_j]. \end{cases} \tag{9.2}$$

Непосредственно из определения следует, что $u_j \in KC^1\big([0; T_j], \mathbb{R}^n\big)$, и $\big|u_j(t)\big|^2 + \big|\dot{u}_j(t)\big|^2 \geqslant \beta$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Принимая во внимание (9.2), (8.1), а также ограниченность в существенном отображений P, Q и R, получим существование такого $j_2 > j_1$, что при каждом $j > j_2$ будет выполнено неравенство

$$\left| \frac{1}{T_j} \int\limits_0^{T_j} \mathbb{K}[u_j](t)\,dt - \frac{1}{T_j} \int\limits_0^{T_j} \mathbb{K}[u](t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, используя неравенство $\big|\dot{u}_j(t)\big|^2 + \big|u_j(t)\big|^2 \geqslant \beta, \quad t \in \mathbb{R}$, и выбор $\varepsilon > 0$, получим при всех $j > j_2$ следующие соотношения:

$$\frac{1}{T_j} \int\limits_0^{T_j} \mathbb{K}[u_j](t)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta T_j} \int\limits_0^{T_j} \Big(\big|\dot{u}_j(t)\big|^2 + \big|u_j(t)\big|^2\Big)\,dt <$$

$$< \frac{\varkappa}{T_j} \int\limits_0^{T_j} \Big(\big|\dot{u}_j(t)\big|^2 + \big|u_j(t)\big|^2\Big)\,dt. \tag{9.3}$$

Далее, для фиксированного $i > j_2$ через $y(t), \quad t \in \mathbb{R}$ обозначим ω-периодическое продолжение на $\mathbb{R}$ функции $u_i(t), \quad t \in [0, \omega]$, где $\omega \doteq T_i$, и полагаем

$$p_m \doteq \int\limits_{m\omega}^{(m+1)\omega} \mathbb{K}[y](t)\,dt - \varepsilon, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку отображение $t \mapsto K[y](t)$ является п. п. по Степанову, то (см. [28],[41]) при каждом $\varepsilon > 0$ множество его ε - п. п., кратных ω, относительно плотно. Поэтому [32] построенная последовательность $\{p_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ является п. п. последовательностью.

Теперь по последовательности $\{p_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ определим последовательность $\{q_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$, в которой

$$q_m \doteq \frac{1}{2}\big(|p_m| - p_m\big), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Построенная последовательность $\{q_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ будет также п. п. Отсюда в свою очередь получаем, что функция $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, заданная равенством

$$\xi(t) = q_m, \quad t \in [m\omega, (m+1)\omega), \quad m \in \mathbb{Z},$$

принадлежит пространству $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Поэтому функция $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, заданная равенством

$$\psi(t) = \xi(t)\, y(t), \quad t \in [m\omega, (m+1)\omega), \quad m \in \mathbb{Z},$$

будет п. п. по Степанову. Вместе с тем из определения функции ψ следует, что она будет непрерывной, поскольку в точках разрыва функции ξ функция y (здесь см. определение функции y и (9.2) при $\omega = T_i$) обращается в ноль, и будет равномерно непрерывной, т.к. функция ξ ограничена. Кроме того, при п. в. $t \in \mathbb{R}$ ψ дифференцируема и $\dot{\psi}(t) = \xi(t)\dot{y}(t)$. Таким образом построенная функция ψ принадлежит пространству $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. При этом $\big($см. (9.3)$\big)$ выполнены следующие соотношения:

$$M\big\{\mathbb{K}[\psi](t)\big\} \leqslant \frac{\varepsilon}{\beta} M\big\{\big|\dot{\psi}(t)\big|^2 + \big|\psi(t)\big|^2\big\} < \varkappa\, M\big\{\big|\dot{\psi}(t)\big|^2 + \big|\psi(t)\big|^2\big\},$$

что невозможно. Тем самым теорема 11 доказана. $\triangle$

Дифференциальное уравнение (8.3) можно переписать (см. [31], с. 453) в виде линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{z}(t) = F(t)z(t),$$

в которой

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^*(t) \end{pmatrix},$$

и где в свою очередь, в матрице $F(t)$

$$A(t) = P^{-1}(t)R(t),\ B(t) = P^{-1}(t),\ C(t) = Q(t) - R^*(t)P^{-1}(t)R(t).$$

Утверждение 3. *Если функционал $\mathcal{K}$ строго положителен, то система уравнений $\dot{z}(t) = F(t)z(t)$, отвечающая системе уравнений* (8.3), *является экспоненциально дихотомичной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Квадратичная форма $\mathbb{K}$ находится во взаимно однозначном соответстви с функцией F. Через $\mathcal{H}(F)$ обозначим замыкание в метрике S множества сдвигов функции F, т. е. $\widehat{F} \in \mathcal{H}(F)$, если найдется последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|F(\cdot + t_j) - F(\cdot)\|_S = 0$. Каждой функции $\widehat{F}$, принадлежащей $\mathcal{H}(F)$, поставим в соответствие оператор $\widehat{\mathbb{K}}$, определяемый аналогично оператору $\mathbb{K}$, отвечающему функции F, и рассмотрим последовательность $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющую приведенному выше предельному равенству.

Поскольку функционал $\mathcal{K}$ строго положителен, то для каждого $j \in \mathbb{N}$

и всякой функции $x \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ будут выполнены соотношения

$$M\big\{\mathbb{K}[x_{-t_j}](t)\big\} \geqslant \varkappa\, M\big\{\big|x_{-t_j}(t)\big|^2 + \big|\dot{x}_{-t_j}(t)\big|^2\big\} = \\ = \varkappa\, M\big\{\big|x(t)\big|^2 + \big|\dot{x}(t)\big|^2\big\}. \quad (9.4)$$

Отсюда следует, что соответствующий каждой функции $\widehat{F} \in \mathcal{H}(F)$ функционал $x(\cdot) \mapsto \widehat{\mathcal{K}}\big(x(\cdot)\big) \doteq M\big\{\widehat{\mathbb{K}}[x](t)\big\}$ будет строго положительным. По теореме 11 получаем, что система уравнений $\dot{z}(t) = \widehat{F}(t)z(t)$ не будет иметь ограниченных решений на $\mathbb{R}$ кроме тривиального, а значит (см. [31],[7]), уравнение $\dot{z}(t) = F(t)z(t)$ экспоненциально дихотомично. $\triangle$

§10 Условия строгой положительности квадратичной формы в одномерном случае.

В этом пункте исследуются условия строгой положительности функционала $\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big) \doteq M\big\{\mathbb{K}[x](t)\big\}$, определенного на множестве $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, и для краткости изложения отображения P, Q, R, входящие в определение оператора $\mathbb{K} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, обозначим через p, q, r соответственно, т. е. считаем, что

$$\mathbb{K}[x](t) \doteq p(t)\dot{x}^2(t) + 2q(t)\dot{x}(t)x(t) + r(t)x^2(t).$$

При этом в дальнейшем предполагаем, что функции p, q принадлежат пространству $\mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, функция r из пространства $S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, и $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} p(t) > 0$.

Для функции x из множества (см. (3.5))

$$\mathfrak{B}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \doteq \big\{x \in B^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \ddot{x} \in S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})\big\}$$

рассмотрим оператор $\mathbb{L} : \mathfrak{B}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to S_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, определенный равенством

$$\mathbb{L}[x](t) \doteq \ddot{x}(t) + \frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\dot{x}(t) + \frac{\dot{q}(t) - r(t)}{p(t)}x(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10.1}$$

Если функционал $\mathcal{K}$, отвечающий оператору $\mathbb{K}$, является строго положительно определенным, то согласно теореме 11 дифференциальное уравнение (8.3) не будет иметь ограниченных решений. Уравнение (8.3) можно переписать в виде $\mathbb{L}[x](t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$, поэтому система линейных дифференциальных уравнений, отвечающая уравнению $\mathbb{L}[x](t) = 0$, будет экспоненциально дихотомичной. Поэтому для оператора $\mathbb{L}$ определена функция Грина (см. [7]) $G(t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}$, которая называется *неположительной* (*неотрицательной*), если для всех $t, s \in \mathbb{R}$ $G(t, s) \leqslant 0$ (соответственно, $G(t, s) \geqslant 0$), и *знакопостоянной*, если она неположительна или неотрицательна.

Утверждение 4. *Если функционал $\mathcal{K}$ строго положителен, то функция Грина G неположительна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 10 уравнение $\mathbb{L}[x](t) = 0$ не имеет сопряженных точек на $\mathbb{R}$, и в силу утверждения 3 соответствующая система линейных уравнений является экспоненциально дихотомичной. Поэтому [7] функция Грина G этого уравнения знакопостоянна. Рассмотрим далее п. п. по Бору решение

$$x(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, s) f(s)\, ds$$

уравнения $\mathbb{L}[x](t) = f(t)$, отвечающее произвольной фиксированной функции $f \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ такой, что $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} f(t) > 0$, которое в силу знакопостоянства функции Грина будет также знакопостоянной функцией на $\mathbb{R}$. Отсюда в силу строгой положительности функционала $\mathcal{K}$ и равенства

$$M\big\{\mathbb{K}[x](t)\big\} = -M\big\{p(t)\,\mathbb{L}[x](t)\,x(t)\big\} = -M\big\{p(t)f(t)x(t)\big\}$$

получаем, что $x(t) \leqslant 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, а значит в силу выбора функции f для всех $t, s \in \mathbb{R} \quad G(t,s) \leqslant 0$. $\triangle$

Теорема 12. *Функционал* $\mathcal{K}$, *определенный на множестве* $\mathfrak{B}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *строго положителен в том и только в том случае, если найдется такая функция* z, *что*

1) $z \in \mathfrak{B}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *и* $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} z(t) > 0$,
2) *для п. в.* $t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{L}[z](t) \leqslant 0 \quad (\mathbb{L}[z](t) \not\equiv 0)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует функция z с указанными в теореме 12 свойствами. Покажем, что функционал $\mathcal{K}$ строго положителен. Действительно, при п. в. $t \in \mathbb{R}$ для функции

$$\varphi(t) \doteq -\frac{\dot z(t)}{z(t)}$$

(см. (10.1)) справедливо неравенство

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \geqslant \varphi^2(t) - \frac{\dot p(t)}{p(t)}\varphi(t) + \frac{\dot q(t) - r(t)}{p(t)},$$

причем для некоторого множества положительной меры Лебега это неравенство является строгим. Поэтому (см. [7], стр. 140) при всех достаточно малых $\mu \in (0,1)$ уравнение

$$\mathbb{L}[x](t) + \mu\, x(t) = 0$$

не будет иметь сопряженных точек на $\mathbb{R}$. Кроме того, при

$$\varkappa \doteq \mu \inf_{t\in\mathbb{R}} p(t)$$

оно будет являться мажорантой Штурма (см. [31], стр. 395) для уравнения

$$\bigl(p(t)-\varkappa\bigr)\,\ddot{x}+\dot{p}(t)\,\dot{x}+\bigl(\dot{q}(t)-r(t)\bigr)x+\varkappa\, x=0, \quad t\in\mathbb{R},$$

откуда данное уравнение также не будет иметь сопряженных точек на $\mathbb{R}$. Следовательно, по теореме 10 функционал

$$x(\cdot)\mapsto \mathcal{K}\bigl(x(\cdot)\bigr)-\varkappa M\bigl\{\bigl|\dot{x}(t)\bigr|^2+\bigl|x(t)\bigr|^2\bigr\}$$

будет неотрицателен, что равносильно строгой положительности функционала $\mathcal{K}$.

Обратно, предположим, что функционал $\mathcal{K}$ строго положителен. Тогда в силу утверждения 4 функция Грина будет неположительна, откуда из теоремы 9.9, приведенной в [7] вытекает существование функции z с указанными свойствами 1) и 2). △

З а м е ч а н и е 7. Пусть $u(\cdot)$ — такое нетривиальное решение уравнения $L[x](t)\doteq\ddot{x}+q(t)\dot{x}+p(t)x=0, \quad t\in\mathbb{R}$, что $u(\alpha)=0$. Обозначим через $r(\alpha)$ первый нуль функции $u(\cdot)$ ($r(\alpha)>\alpha$). Отметим, что критерий отсутствия сопряженных точек на отрезке $[\alpha,\beta]$ (т.е. $\beta<r(\alpha)$) представлен в утверждении Валле-Пуссена [38], переоткрытом в последствии Н. В. Азбелевым [39]: $\beta<r(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда на отрезке* $[\alpha,\beta]$ *существует функция* $z(t)$, *обладающая абсолютно непрерывной производной и удовлетворяющая свойствам:*

1') $z(t) \geqslant 0$ *на* $[\alpha, \beta]$,

2) $L[z](t) \leqslant 0$, *но* $L[z](t) \not\equiv 0$ *на* $[\alpha, \beta]$.

Но специфика рассмотрения п. п. функций предполагает рассмотрение свойств функций, определенных на всей вещественной оси. Поэтому условие 1') заменяется на более сильное 1). В этом случае условия 1) и 2) эквивалентны неположительности функции Грина ([7], теорема 9.9). $\triangle$

§11 Достаточные условия второго порядка решения простейшей задачи вариационного исчисления.

В данном параграфе будем предполагать, что для функции L выполнены условия 2),5) и 6), указанные в главе 2. Тогда (см. замечание 2) для функционала I (см. 3.4) в силу сделанных ограничений на L в каждой точке $\widehat{x} \in \big(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathfrak{B}}\big)$ определена вторая вариация по Лагранжу $\delta^2 I(\widehat{x}(\cdot);\, \cdot\,)$. Причем для каждого $x(\cdot) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ $\delta^2 I(\widehat{x}(\cdot);\, \cdot\,)$ совпадает с $\mathcal{K}\big(x(\cdot)\big)$ $\big($см. (8.2)$\big)$ при

$$P(t) \doteq \widehat{L}''_{uu}(t), \quad Q(t) \doteq \widehat{L}''_{ux}(t), \quad R(t) \doteq \widehat{L}''_{xx}(t), \tag{11.1}$$

где $\widehat{L}''_{uu}(t) \doteq L''_{uu}\big(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\big)$, и аналогичным образом определены $\widehat{L}''_{ux}(t)$ и $\widehat{L}''_{xx}(t)$.

Отметим, что определенные выше функции P, Q, R принадлежат пространству $S\big(\mathbb{R}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\big)$.

Теорема 13. *Пусть функция* $\widehat{x} \in \mathcal{B}$ *является решением в слабом смысле задачи* (3.11), *и при п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *и всяком* $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$ *выполнено неравенство*

$$v^* \widehat{L}''_{uu}(t) v > 0. \tag{11.2}$$

Тогда система уравнений (8.3) *при* P, Q *и* R, *определенных равенством* (11.1), *не имеет сопряженных точек на* $\mathbb{R}$.

З а м е ч а н и е 8. Теорему 13 можно рассматривать как аналог усиленного условия Якоби для простейшей задачи классического вариационного исчисления (см. [36], с. 375). $\triangle$

З а м е ч а н и е 9. Отметим, что специфика рассматриваемой задачи (3.11) не позволяет, вообще говоря, непосредственно использовать результаты исследований условий положительности второй вариации простейшей задачи вариационного исчисления и отвечающей ей квадратичной формы (см., например [35],[36],[37], [42] и приведенную там библиографию). В частности, в отличие от известных достаточных условий для решения (в слабом смысле) для простейшей задачи вариационного исчисления, выполнение неравенства (11.2) и условие отсутствия сопряженных точек для уравнения (8.3) не являются достаточными. $\triangle$

В следующем примере экстремаль $\widehat{x}$ удовлетворяет всем достаточным условиям решения простейшей задачи классического вариационного исчисления, однако не является решением задачи (3.11).

П р и м е р 4. Пусть

$$L(t, x, u) \doteq \frac{u^2}{2} + v(t)\frac{x^2}{2} - g(t)x - \big(x - f(t)\big)^4, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

где $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, $g(t) = v_1(t)f_2(t) + v_2(t)f_1(t)$, а функции v_j и f_j, $j = 1, 2$, заданы следующими равенствами:

$$v_j(t) = a_j^2 \cos^2 b_j t + a_j b_j \sin b_j t, \quad f_j(t) = \exp\left(-\frac{a_j}{b_j} \sin b_j t\right),$$

при этом a_j, b_j — произвольно фиксированные константы, и b_1 и b_2 рационально несоизмеримы. Отметим, что функция $\widehat{x}(t) \doteq f(t)$ является экстремалью [36] задачи (3.11) с указанной функцией L. Поскольку для всех $t \in \mathbb{R}$ $f(t) > 0$, то по теореме Штурма [31] отвечающее рассматриваемой задаче уравнение (8.3) не имеет сопряженных точек на $\mathbb{R}$, и неравенство вида (11.2) также выполнено. С другой стороны, для функции $z(t) \doteq \widehat{x}(t) + c\,f(t)$, где c — произвольная фиксированная константа, выполнены соотношения

$$M\bigl\{L\bigl(t, z(t), \dot{z}(t)\bigr)\bigr\} = -c^4 M\bigl\{\bigl(f(t)\bigr)^4\bigr\} < 0 = M\bigl\{L\bigl(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)\bigr)\bigr\},$$

из которых следует, что экстремаль $\widehat{x}(t) = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, не является решением задачи (3.11). △

Из теоремы 12 получаем достаточные условия строгой положительности второй вариации функционала I (см. (3.4)), из которых вытекают достаточные условия решения задачи (3.11) в одномерном случае.

Теорема 14. *Пусть функция* $\widehat{x} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *удовлетворяет следующим условиям:*

a) *для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство* (4.3)

b) $\widehat{L}''_{uu}, \widehat{L}''_{xu} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *и* $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \widehat{L}''_{uu}(t) > 0$;

c) *найдется такая функция* $z \in \mathfrak{B}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *что* $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} z(t) > 0$, *и для п. в.* $t \in \mathbb{R}$ *оператор* $\mathbb{L}$ $\bigl($*см.*(10.1)$\bigr)$, *отвечающий лагранжиану задачи* (3.11), *удовлетворяет неравенству* $\mathbb{L}[z](t) \leqslant 0$ (*при этом* $\mathbb{L}[z](t) \not\equiv 0$).

Тогда функция $\widehat{x}$ *является решением задачи* (3.11).

П р и м е р 5. Пусть

$$L(t,x,u) \doteq \frac{u^2}{2} + \left(\frac{3}{4} - \cos 2t\right) x^2.$$

Для задачи (3.11) с указанным лагранжианом очевидно, что функция $\widehat{x}(t) \equiv 0$ удовлетворяет условиям a) и b) теоремы 14. Условие c) выполнено для функции $z(t) \doteq 6 + \cos 2t$. Поэтому $\widehat{x}(t) \equiv 0$ является решением задачи (3.11) с данным лагранжианом. $\triangle$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974. — 324 с.

2. Арнольд В. И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. — 1999. 284 с.

3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. —М.: Наука, 1970.— 249 с.

4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М. : Наука, 1967. — 472 с.

5. Гребенников Е. А. Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. — М.: Наука, 1971. — 444 с.

6. Зубов В И. Теория колебаний. — М. Высшая школа, 1974. — 400 с.

7. Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С. Нелинейные почти периодические колебания. — М. : Наука, 1970.— 351 с.

8. Левитан Б. М. Почти периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953.— 396 с.

9. Левитан Б. М. Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1978.— 205 с.

10. Малкин Н. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

11. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973. — 512 с.

12. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 288с.

13. Fink A. M. Almost periodic differential equation // Lect. Notes Math. — V.377. — 336 p.

14. Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. // J. Math. Anal. — 1988. — V.134, №2. — P. 312 — 321.

15. Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. II // Bull. Austral. Math. Soc. — 1989. — V.40. — P. 457 — 463.

16. Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. III // Israel J. Math. — 1989. — V.67, №3. — P. 337 — 344.

17. Blot J. Calculus of variations in mean and convex lagrangians. IV // Ricerche di Math. 1991. V.XL, fasc. 1. P. 3 — 18.L

18. Blot J. Osciliations presque–periodiques forcees d'equations d'Euler–Lagrange // Bull. Soc. math. France. — 1994 — V.122. — P. 337 — 344.

19. M.S. Berger, Y.Y. Chen. Forced quasiperiodic and almost periodic solutions for nonlinear systems. Nonlinear Anal. Trans. Math. Anal. 21(1993) 949 965.

20. C. Carminatti. Forced systems with almost periodic and quasiperiodic forcing term. Nonlinear Anal.Trans.Math. Anal. 32 (1998) 727-739.

21. S.F.Zakharin, I.O. Parasyuk. Generalized and classical almost periodic solution of Lagrangian systems. Funkcial. Ekac. 42 (1999) 325-338.

22. Cieutat P. Bounded and almost periodic solutions of convex Lagrangian systems // J. Differential Equations. — 2003. — V. 190. — P. 108 — 130.

23. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М. : Наука, 1977. — 623 с.

24. Иванов. А. Г. К вопросу об оптимальном управлении почти периодическими движениями. // Изв. ВУЗов. Математика. — 2003 г. — №4(491). — с. 40-56.

25. Иванов. А. Г. О задаче оптимального управления почти периодическими движениями. // Лекции XVI всесоюзной школы по теории линейных операторов в функциональных пространствах. — Нижний Новгород. 1992. — с. 159-172.

26. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.— 551 с.

27. Иванов А. Г. Об эквивалентности дифференциальных включений управляемых почти периодических систем //Дифференц. уравнения. — 1997. — Т.33, №7. — С. 876-884.

28. Иванов А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. I // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ.- Ижевск, 2002. - Вып. 1. — С.3-100.

29. Иванов А. Г. Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации. II // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ.- Ижевск, 2003. - Вып. 1. — С.3-96.

30. Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Математика. — 1994. - № 6. — С. 50-59.

31. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

32. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища школа, 1987. —288 с.

33. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1949. — 550 с.

34. Мухамадиев Э. Об обратимости дифференциальных операторов в пространстве непрерывных и ограниченных на оси функций. // Доклады АН СССР. 1971. Т. 196 № 1. — С. 47-49.

35. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М. : Наука, 1974. — 408 с.

36. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М. : Наука, 1979. — 429 с.

37. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. — М. : Наука, 1984. — 288 с.

38. ch. J. de la Vallee Poussin. Sur l'equation differentielle du second ordre. Determination d'une integrales par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre n, Journ. Math. Pures et Appl, 8,9, 125-144 (1929).

39. Азбелев Н. В. К вопросу о распространении метода Чаплыгина за границы применимости теоремы о дифференциальных неравенствах. ДАН СССР, 102, 3, 429-430 (1955).

40. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М. : Мир, 1970.— 456 с.

41. Долбилов А. М., Шнейберг И. Я. Почти периодические многозначные отображения и их сечения. — Сибирский математический журнал. Т. 32 № 2, 1991 г.

42. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. — Тбилиси: Изд — во Тбил. ун — та, 1975. — 230 с.

43. Воронецкая М. А., Иванов А. Г. О необходимых условиях сильного минимума для простейшей задачи вариационного исчисления в классе почти периодических функций // Известия ИМИ. Математика. №2(13). — Ижевск: Изд-во УдГУ. — 1998. С. 59-70.

44. Воронецкая М. А., Иванов А. Г. О некоторых вариационных задачах в классе почти периодических функций // Деп. в ВИНИТИ 27.12.03, №1902-В2003. УдГУ, Ижевск, 2003. 32 с.

45. Воронецкая М. А., Иванов А. Г. Почти периодическая задача Больца. // Известия ВУЗов. 2005. № 7 (518) С.8-24.

46. Воронецкая М. А. О некоторых свойствах среднего значения почти периодической квадратичной формы. //Вестник УдГУ. — Ижевск: Изд-во УдГУ. — 2005. С. 19-34.

47. Воронецкая М. А. О задачах вариационного исчисления в классе почти периодических функций. // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск. — 2005. С. 96-97.