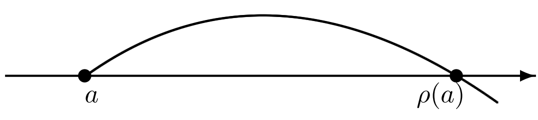
В.Я. Дерр

НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА



Ижевск 2009

Федеральное агентство по образованию
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
Кафедра математического анализа

В.Я. Дерр

НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Учебное-методическое пособие для выполнения курсовых работ

Ижевск 2009

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией факультета

Дерр В.Я.

Д Неосцилляция решений уравнения второго порядка: учеб.-метод. пособие/УдГУ. – Ижевск,2009. 34с.

Пособие посвящено изложению современного состояния теории неосцилляции решений линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Кроме теоретического материала приводятся 20 заданий для самостоятельного выполнения студентами в качестве курсовых и выпускных квалификационных работ.

Предназначено для студентов математического факультета.

УДК 517.2, 517.5
ББК 22.161.5
Д36

Содержание

Предисловие

Неосцилляции решений обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения посвящена обширная литература (см. напр., [1] — [13]). Неосцилляция играет большую роль в качественной теории линейного дифференциального уравнения (в особенности уравнения второго порядка). Однако на русском языке нет ни одного учебного пособия или даже монографии, в которых излагалась бы теория неосцилляции и ее применение. Имеются только журнальные статьи (кроме процитированных, см. также [17]–[30]). Чтобы хотя бы отчасти ликвидировать этот пробел и привлечь наиболее продвинутых студентов к научной работе, мы излагаем здесь современное состояние этой теории применительно к уравнению второго порядка.

С помощью поставленных в работе вопросов-заданий можно предложить целый ряд курсовых работ для студентов второго и третьего курсов, которые перерастут затем в выпускные квалификационные работы для бакалавров и специалистов, а также в магистерские диссертации для магистрантов.

Как правило, в процитированной литературе уравнение второго порядка записывается в форме $x''+Q(t)x=0$; большинство достаточных условий сформулированы в терминах «малости» коэффициента Q. В предлагаемой работе рассматривается полное уравнение

$$(Lx)(t) \doteq x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad t \in I \doteq (\alpha,\beta), \tag{1}$$

$-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$; функции $p, q : I \to \mathbb{R}$ — локально суммируемы на I.

Мы приводим здесь и новые достаточные условия неосцилляции уравнения (1), не обязательно основанные на малости коэффициентов.

1. Сведения из общей теории уравнения (1)

1. Для удобства читателя кратко изложим некоторые вопросы общей теории уравнения

$$(Lx)(t) = f(t) \quad (f \text{ локально суммируема на } I,\ t \in I). \tag{2}$$

Решением уравнения (2) называется функция $x : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывную производную x' и удовлетворяющую уравнению (2) почти всюду (относительно меры Лебега). При сделанных относительно p, q предположениях существует единственное решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям $x(a) = \xi_0,\ x'(a) = \xi_1,\ a \in I$. Общее решение уравнения (1) имеет вид $x(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$, где u_1, u_2 — линейно независимые решения уравнения (1) (фундаментальная система решений, ФСР), c_1, c_2 — произвольные постоянные. Вронскиан $W(t) \doteq [u_1, u_2](t)$ ФСР $\{u_1, u_2\}$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала I. Функцией Коши $C(t, s)$ уравнения (1) называется функция $C : I \times [\alpha, t] \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами

$$(LC)(\cdot, s) = 0 \quad \text{при почти всех } t \geqslant s,$$

$$C(s, s) = 0, \quad \frac{\partial C(s, s)}{\partial t} = 1 \quad (s \in I).$$

Функция Коши существует и единственна. С помощью нее общее решение уравнения (2) может быть записано в виде

$$x(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \int_a^t C(t, s)f(s)\,ds \tag{3}$$

(u_1, u_2 — ФСР уравнения (1), c_1, c_2 — произвольные постоянные).

Задание 1. Докажите представление (3).

Задание 2. Пусть u_1, u_2 — ФСР уравнения (1), W — ее вронскиан. Докажите, что

$$C(t, s) = \begin{vmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{vmatrix} / W(s).$$

Задание 3. Найдите функцию Коши уравнения (1) с постоянными коэффициентами ($p(t) \equiv p,\ q(t) \equiv q$); рассмотрите отдельно случаи вещественных корней и случай комплексных корней характеристического уравнения; исследуйте знак функции Коши в обоих случаях.

Функция $G : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ называется функцией Грина краевой задачи

$$(Lx)(t) = f(t) \quad (t \in I), \quad x(a) = 0,\ x(b) = 0 \quad (a, b \in I), \tag{4}$$

если она обладает свойствами:

1) G непрерывна на $[a,b]^2$;

2) $\frac{\partial G(\cdot,s)}{\partial t}$ абсолютно непрерывна в треугольниках $a \leqslant s < t \leqslant b$ и $a \leqslant t < s \leqslant b$, причем $\frac{\partial G(s+,s)}{\partial t} - \frac{\partial G(s-,s)}{\partial t} = 1$;

3)$(LG)(\cdot, s) = 0$ при $t \neq s$;

4) $G(a,s) = 0,\ G(b,s) = 0$.

Если краевая задача (4) однозначно разрешима, то существует и единственна ее функция Грина, а ее решение x имеет представление

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds. \tag{5}$$

Имеет также место представление

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{C(b,t)C(s,a)}{C(b,a)}, & \text{если } a \leqslant s < t, \\ -\frac{C(t,a)C(b,s)}{C(b,a)}, & \text{если } t \leqslant s \leqslant b, \end{cases} \tag{6}$$

из которого следует, что если $C(t,s) > 0$, при $a \leqslant s < t \leqslant b$, то $G(t,s) < 0$ при $(t,s) \in (a,b)^2$.

Задание 4. Докажите представление (5).

Задание 5. Докажите представление (6).

Задание 6. Найдите явное представление функции Грина задачи (4) при $p(t) \equiv p,\ q(t) \equiv q$ через корни характеристического уравнения.

Рассмотрим краевую задачу

$$(Lx)(t) = f(t), \quad t \in J \subset I, \quad l_1 x = a_1, \quad l_2 x = a_2, \tag{7}$$

где l_i — линейные функционалы, определенные на множестве функций $x : J \to \mathbb{R}$, имеющих абсолютно непрерывные производные. Функцию Грина $G(t,s)$ краевой задачи (7) определим свойствами 1)–3), а вместо свойства 4) потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$l_i G(\cdot, s) = 0, \quad i = 1, 2$$

Задание 7. Выразите функцию Грина задачи (7) через ФСР уравнения (1). Докажите, что

$$G(t,s) = \frac{\begin{vmatrix} \widetilde{C}(t,s) & u_1(t) & u_2(t) \\ l_1\widetilde{C}(\cdot,s) & l_1u_1 & l_1u_2 \\ l_2\widetilde{C}(\cdot,s) & l_2u_1 & l_2u_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1u_1 & l_1u_2 \\ l_2u_1 & l_2u_2 \end{vmatrix}}, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{C}(t,s) = \begin{cases} C(t,s) & \text{при} \quad s < t, \\ 0 & \text{при} \quad s \geqslant t, \end{cases}$$

— функция Грина задачи Коши, u_1, u_2 — ФСР уравнения (1).

Рассмотрим периодическую краевую задачу

$$(Lx)(t) = f(t), \quad x(b) = x(a),\ x'(b) = x'(a). \tag{9}$$

Задание 8. Выразите функцию Грина задачи (9) через ФСР уравнения (1) (воспользуйтесь представлением (8)). Найдите явное представление функции Грина задачи (9) при $p(t) \equiv p,\ q(t) \equiv q$ через корни характеристического уравнения. Исследуйте знак функции Грина в зависимости от корней характеристического уравнения.

2. Определение неосцилляции. Теоремы Штурма

2. В дальнейшем большую роль будут играть следующие теоремы Штурма: о разделении нулей («сепарационная» теорема) и теорема сравнения [14, с. 252],[15, с. 81], для удобства сформулированные в наших терминах.

Теорема 1. *Пусть $a, b \in I$, x — решение уравнения* (1) *такое, что* $x(a) = x(b) = 0$, $x(t) \neq 0; (t \in (a, b))$. *Тогда любое другое решение этого уравнения, линейно независимое с* x, *имеет ровно один нуль в* (a, b).

Доказательство. Пусть y — линейно независимое с x решение уравнения (1) такое, что $y(t) \neq 0$ в (a, b). Так как $y(a) \neq 0$, $y(b) \neq 0$ (в силу линейной независимости x и y), то $y(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Это означает, что функция $h(t) \doteq -\dfrac{W(t)}{y(t)}$, где $W \doteq [x, y]$ — вронскиан системы $\{x, y\}$, непрерывна и $h(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $h(t) > 0$ на $[a, b]$. Так как при этом $h = \left(\dfrac{x}{y}\right)'$, то с одной стороны $\int_a^b h(t)\,dt > 0$, а с другой — $\int_a^b h(t)\,dt = \dfrac{x(b)}{y(b)} - \dfrac{x(a)}{y(a)} = 0$. Это противоречие означает, что $y(t^*) = 0$ в некоторой точке $t^* \in (a, b)$.

Если $y(t_*) = 0$ в некоторой точке $t_* \neq t^*$, то по доказанному решение x имело бы по крайней мере один нуль в (a, b), что противоречит условию.

Пусть $a \in I$, x — решение уравнения (1) такое, что $x(a) = 0$. Точка $\rho_+(a) > a \quad \big(\rho_-(a) < a\big)$ называется *правой* (*левой*) *сопряженной точкой для* a, (*right* (*left*) *conjugate point for* a) если

$$x(\rho_\pm(a)) = 0,\ x(t) \neq 0 \quad \text{в} \quad (a, \rho_+(a)) \quad \big(\text{в } (\rho_-(a), a)\big).$$

Если $x(t) \neq 0$ в $(a, \beta) \quad \big((\alpha, a)\big)$, то по определению полагаем

$$\rho_+(a) = \beta \quad \big(\rho_-(a) = \alpha\big)$$

Следствие 1. *Функции* $\rho_\pm$ — *строго возрастающие, причем*

$$\rho_+\big(\rho_-(t)\big) = \rho_-\big(\rho_+(t)\big) = t \quad (t \in I),$$

т. е. функции $\rho_\pm$ *взаимно обратны и непрерывно отображают любой промежуток из* I *в промежуток из* I.

Доказательство. Пусть $t_2 > t_1$, $x(t_1) = y(t_2) = 0$ (x и y — решения уравнения (1)). Предположим, что $\rho_+(t_2) \leqslant \rho_+(t_1)$; равенство здесь, означающее, что $x(\rho_+(t_2)) = y(\rho_+(t_1)) = 0$ противоречит определению сопряженной точки; строгое же неравенство противоречит теореме 1 (так как решение y имело бы два нуля между двумя последовательными нулями решения x.) Следовательно, $\rho_+(t_2) > \rho_+(t_1)$. Точно так же доказывается строгое возрастание функции ρ_-. Взаимная обратность этих функций вытекает непосредственно из определений сопряженных точек; непрерывность следует из свойств строго монотонных функций.

Задание 9. Покажите, что для уравнения с постоянными коэффициентами ($p(t) \equiv p$, $q(t) \equiv q$)

$$\rho_+(t) = t + \gamma,\ \rho_-(t) = t - \gamma,$$

где константа γ зависит от уравнения. Покажите, что если корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ вещественны, то $\gamma = +\infty$; в случае, если корни $a \pm bi$ характеристического уравнения невещественны ($b > 0$), то $\gamma = \dfrac{\pi}{b}$.

Уравнение (1) называется *неосцилляционным* на промежутке $J \subset I$, если любое его нетривиальное решение имеет на этом промежутке не более одного нуля. Говорят также, что J — *промежуток неосцилляции* уравнения (1).

Таким образом, промежуток J будет промежутком неосцилляции уравнения (1) в том и только том случае, если $\rho_\pm(a)) \notin J)$ для любого $a \in J$. Отсюда английский термин *disconjugacy* (буквально: отсутствие сопряжения), означающий неосцилляцию [4].

Для краткости будем писать: $L \in \mathfrak{T}(J)$, если уравнение (1) неосцилляционно на промежутке $J \subset I$. $\mathfrak{T}(J)$ означает, следовательно, множество линейных дифференциальных выражений L, для которых уравнение $Lx = 0$ неосцилляционно на $J \subset I$.

Пусть $(a, b) \subset I,\ a_n \to a+,\ b_n \to b-\ (a_n \to -\infty,\ b_n \to\ +\infty$, если $a = \alpha = -\infty,\ b = \beta = +\infty$.) Тогда, очевидно,

$$\mathfrak{T}\big((a, b)\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{T}\big([a_n,\, b_n]\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{T}\big((a_n,\, b_n)\big). \tag{10}$$

Из определений неосцилляции и функции Коши следует, что если уравнение (1) неосцилляционно на промежутке $J = [a, b) \subset I$, то $C(t, s) > 0$ в треугольнике $a \leqslant s < t < b$. Неосцилляция уравнения (1) на $[a, b]$ означает однозначную разрешимость задачи (4), а значит, в силу представления (6) функция Грина этой задачи обладает свойством: $G(t, s) < 0$ в квадрате $(a, b)^2$.

Задание 10. Докажите следующую теорему о дифференциальном неравенстве. Пусть уравнение (1) неосцилляционно на отрезке $[a, b] \subset I$, x — решение краевой задачи

$$(Lx)(t) = f(t) \quad (t \in [a, b]), \quad x(a) = x_a,\ x(b) = x_b, \tag{11}$$

функции u и v имеют абсолютно непрерывные на $[a, b]$ производные и

$$(Lu)(t) \leqslant f(t) \leqslant (Lv)(t)\ (t \in [a, b]),$$
$$u(a) = v(a) = x_a,\ u(b) = v(b) = x_b.$$

Тогда

$$v(t) \leqslant x(t) \leqslant u(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Теорема 2. *Пусть*

$$L_i\, y \doteq y'' + p(t)\, y' + q_i(t)\, y = 0,\ i = 1, 2 \text{ и } q_1(t) \leqslant q_2(t)\ (t \in I).$$

Тогда, если $L_2 \in \mathfrak{T}(J)$, *то и* $L_1 \in \mathfrak{T}(J)$ ($J \subset I$ — *промежуток*).

Доказательство. Пусть $L_2 \in \mathfrak{T}(J)$. Предположим, что $\mathbb{L}_1 \notin \mathfrak{T}(J)$. Найдется решение x уравнения $L_1 x = 0$ и точки $a, b \in J$, $a < b$, $x(a) = x(b) = 0$, $x(t) > 0$ $(t \in (a, b))$. Определим решение y уравнения $L_2 y = 0$ начальными условиями $y(a) = 0$, $y'(a) = x'(a)\,(> 0)$. Так как $L_2 \in \mathfrak{T}(J)$, то $y(b) > 0$. Положим $h \doteq y - x$. Тогда

$$0 = L_2 y - L_1 x = L_2 h - (q_1 - q_2)x,\ h(a) = 0, h'(a) = 0;$$

при этом $h(b) > 0$. Итак, функция h есть решение задачи

$$(L_2 h)(t) = (q_1(t) - q_2(t))x(t), \quad h(a) = h'(a) = 0;$$

следовательно,

$$h(t) = \int_a^t C_2(t,s)\big(q_1(s) - q_2(s)\big)x(s)\,ds \leqslant 0,$$

так как функция Коши $C_2(t,s)$ уравнения $L_2 y = 0$ положительна при $a \leqslant s < t \leqslant b$, $x(s) > 0$, $\big(q_1(s) - q_2(s)\big) \leqslant 0$ при $a < s \leqslant t \leqslant b$. Полученное неравенство $h(b) \leqslant 0$ противоречит установленному ранее неравенству $h(b) > 0$. Значит, $L_1 \in \mathfrak{T}(J)$.

3. С помощью теоремы 1 и следствия 1 докажем следующее важное утверждение.

Теорема 3. *Пусть* a, $b \in I$; *тогда*

$$\mathfrak{T}\big((a,b)\big) = \mathfrak{T}\big((a,b]\big) = \mathfrak{T}\big([a,b)\big).$$

Доказательство. Из соображений симметрии достаточно проверить, например, включение $\mathfrak{T}\big((a,b)\big) \subset \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$.

Пусть $L \in \mathfrak{T}\big((a,b)\big)$. Предположим, что $L \notin \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$. Тогда существует такое решение v уравнения (1), что

$$v(a) = v(c) = 0 \ (a < c < b) \quad v(t) > 0 \quad \text{в} \quad (a,c)$$

(v имеет не менее двух нулей в $[a,b)$, но не более одного нуля в (a,b)). Из определения следует, что $c = \rho_+(a) \quad \big((a = \rho_-(c)\big)$. Выберем точку $c_1 \in (c,b)$ так, чтобы выполнялось неравенство $v(t) < 0$ в (c,c_1) и положим $a_1 = \rho_-(c_1)$. Согласно следствию 1 $a < a_1 < c$. Пусть x — соответствующее решение уравнения (1), т. е. $x(c_1) = x(a_1) = 0, \quad x(t) > 0$ в (a_1,c_1).

Так как $L \in \mathfrak{T}\big([a_1,c_1]\big)$, то существует единственное решение y уравнения (1), удовлетворяющее условиям $y(a_1) = y(c_1) = 1$; при этом $y(t) > 0$ на $[a_1,c_1]$ (так как непрерывная функция, принимающая на концах интервала равные значения, может иметь лишь четное число нулей на этом интервале, а значит, в силу неосцилляции ни одного). Отметим также линейную независимость y и от v, и от x. По теореме 1 y имеет по одному нулю в интервалах (a,a_1) и (c,c_1), т. е. два нуля на (a,b). Это противоречие с неосцилляцией уравнения (1) на (a,b) завершает доказательство.

3. Критерий неосцилляции. Некоторые следствия

4. Из теоремы 1 сразу следует первая часть следующего утверждения.

Теорема 4. 1. *Если существует решение уравнения* (1), *не обращающееся в нуль на* $[a,b] \subset I\big((a,b) \subset I\big)$, *то* $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$ $\big(L \in \mathfrak{T}\big((a,b)\big)\big)$.

2. *Если* $L \in \mathfrak{T}\big([a,b]\big)$, $[a,b] \subset I$ $\big(L \in \mathfrak{T}([a,b))$, $[a,b) \subset I\big)$, *то существует решение уравнения* (1), *не обращающееся в нуль на* $[a,b]$ $\big((a,b)\big)$.

Доказательство. 2. Пусть $J = [a,b]$, $[a,b] \subset I$. Определим решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ начальными условиями $y_1(a) = 0$, $y_1'(a) = 1$ и $y_2(b) = 0$, $y_2'(b) = -1$. Так как $L \in \mathfrak{T}([a,b])$, то

$$y_1(t) > 0 \quad (t \in (a,b]), \quad y_2(t) > 0 \quad (t \in [a,b)).$$

Решение $y_1(t) + y_2(t)$ — требуемое.

Если $L \in \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$, то требуемым является решение y_1.

Решения, сохраняющего знак на $[a,b)$, может не существовать. Например, $L \doteq \frac{d^2}{dt^2} + 1 \in \mathfrak{T}([0,\pi))$, Однако любое решение уравнения $Lx = 0$ имеет в $[0,\pi)$ в точности один нуль.

Из теоремы 4 получаем следующий алгоритм приближенного нахождения промежутка неосцилляции уравнения (1), начинающегося (кончающегося) в некоторой точке $a \in I$. Другими словами, алгоритм приближенного вычисления значения $\rho_+(a)$ $(\rho_-(a))$.

Находим приближенно решение y уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$. Ближайший справа (слева) к точке a нуль y есть $\rho_+(a)$ $(\rho_-(a))$. Если y не обращается в нуль справа (слева) от точки a, то полагаем $\rho_+(a) = \beta$ $(\rho_-(a) = \alpha)$.

Задание 11. Реализуйте приведенный алгоритм программно. Найдите численный метод, вычисляющий приближенное решение с недостатком (с избытком).

Из сказанного выше следует, что

$$\rho_+ : (\alpha,\beta) \to (\alpha,\beta], \qquad \rho_- : (\alpha,\beta) \to [\alpha,\beta). \tag{12}$$

Обозначим

$$\sigma_+(t) \doteq \rho_+(t) - t, \qquad \sigma_-(t) \doteq t - \rho_-(t).$$

Функция σ_+ применяется при исследовании оптимальности по быстродействию линейных нестационарных систем со скалярным управлением ([31]–[35]; см. также более раннюю статью [22]); эти идеи нашли свое развитие в [36] для исследования систем с векторным управлением.

Задание 12. Докажите, что при ограничениях на коэффициенты уравнения (1), сформулированных во введении, $\sigma_+(t) > 0$, $\sigma_-(t) > 0$.

5. Докажем две теоремы, поясняющие роль неосцилляции в теории уравнения (1). Это теорема о факторизации (представлении выражения L в виде произведения линейных дифференциальных выражений первого порядка [1],[3]) и обобщенная теорема Ролля ([16, с. 63]).

Теорема 5. Пусть $J = [a,b] \subset I$ или $J = (a,b) \subset I$. Для того, чтобы $L \in \mathfrak{T}(J)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $h_i, i = 0,1,2$ такие, что h_0', h_1 — абсолютно непрерывны, h_2 — суммируема на J,

$$h_i(t) > 0, \ h_0(t)h_1(t)h_2(t) \equiv \ 1$$

на J, и имело место представление

$$(Lx)(t) = h_2(t)\frac{d}{dt}h_1(t)\frac{d}{dt}h_0(t)x(t) \tag{13}$$

($t \in J, \quad x$ абсолютно непрерывна на J).

Доказательство. Необходимость. Пусть $L \in \mathfrak{T}(J)$. По теореме 4 существует решение y уравнения (1) такое, что $y(t) > 0$ на J; пусть u — решение этого уравнения, линейно независимое с y и такое, что $w(t) \doteq [y,u](t) > 0$. Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$\widehat{L}x \doteq \frac{w}{y}\frac{dt}{dt}\frac{y^2}{w}\frac{dt}{dt}\frac{x}{y}.$$

Так как, очевидно, функции y, u образуют фундаментальную систему решений как уравнения (1), так и уравнения $\widehat{L}x = 0$, и старший коэффициент $\widehat{L}$ равен $\frac{w}{y}\frac{y^2}{w}\frac{1}{y} \equiv 1$, то $Lx \equiv \widehat{L}x$. Все условия выполняются при $h_0 = \frac{1}{y},\ h_1 = \frac{y^2}{w},\ h_2 = \frac{w}{y}$.

Достаточность. Пусть имеет место представление (13). Тогда функция $y(t) \doteq \frac{1}{h_0(t)} > 0$ $(t \in J)$ есть, очевидно, решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям теоремы 4, согласно которой $L \in \mathfrak{T}(J)$.

Теорема 6. Пусть $J = [a, b] \subset I$ или $J = (a, b) \subset I$, $L \in \mathfrak{T}(J)$; пусть функция u имеет абсолютно непрерывную на J производную, а функция Lu непрерывна. Тогда, если u имеет на J m $(m \geqslant 2)$ геометрически различных нулей, то Lu имеет на J не менее $m - 2$ геометрически различных нулей.

Доказательство. По теореме 5 имеет место представление (13). Функция $h_0 u$ имеет на J m геометрически различных нулей; по теореме Ролля функция $\frac{d}{dt}h_0 u$, а вместе с ней и функция $h_1 \frac{d}{dt} h_0 u$ имеет на J не менее $m-1$ геометрически различных нулей; согласно той же теореме Ролля функция Lu имеет на J не менее $m-2$ геометрически различных нулей.

4. Достаточные признаки неосцилляции — 1

6. Приведем достаточные условия (признаки) неосцилляции, основанные на теоремах 4 и 2.

Признак 1. *Пусть*

$$I = (-\infty, +\infty), \quad p(t) \equiv p = \text{const},\ q(t) \equiv q = \text{const}\,.$$

Для того, чтобы уравнение (1) *с постоянными коэффициентами было неосцилляционным на* I, *необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения* $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ *были вещественными.*

Доказательство. Пусть ν — вещественный корень характеристического уравнения. Тогда функция $x(t) \doteq e^{\nu t}$ — решение уравнения (1), не обращающееся в нуль на I. Согласно утверждению 1 теоремы 4 уравнение (1) неосцилляционно на I.

Обратно, пусть уравнение (1) неосцилляционно на I. Предположим, что характеристическое уравнение имеет корни $\gamma \pm \delta i$, $\delta \neq 0$. Тогда решение $x(t) = e^{\gamma t}\cos \delta t$ уравнения (1) имеет в I бесконечное множество нулей, что противоречит неосцилляции уравнения на I.

Рассмотрим уравнение

$$x'' + \frac{p}{t}x' + q(t)x = 0 \quad (t \in I(0, +\infty)), \quad \text{где } p = \mathrm{const}\,. \tag{14}$$

Признак 2. *Если* $q(t) \leqslant \dfrac{(p-1)^2}{4t^2}$, *то уравнение* (14) *неосцилляционно на* $I \doteq (0, +\infty)$.

Доказательство. Уравнение Эйлера $x'' + \frac{p}{t}x' + \frac{(p-1)^2}{4t^2}x = 0$ в силу теоремы 4 неосцилляционно на I, так как имеет решение $x(t) = t^{\frac{1-p}{2}}$, не обращающееся в нуль на I (учитываем также (10)). По теореме 2 на этом промежутке неосцилляционно и уравнение (14).

Следующее достаточное условие неосцилляции принадлежит А.М.Ляпунову ([12]).

Признак 3. *Пусть* $p(t) \equiv 0, \quad q(t) \geqslant 0$ *и* $\int_a^b q(t)dt \leqslant \frac{4}{b-a}$. *Тогда* $L \in \mathfrak{T}([a,b])$.

Доказательство. Пусть уравнение (1) имеет нетривиальное решение $y(t)$, имеющее 2 нуля на $[a,b]$. Так как y не может иметь кратных нулей, то не ограничивая общности, можно считать, что

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{15}$$

Функция y как решение краевой задачи (1), (15), удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(t) = -\int_a^b G(t,s)q(s)y(s)ds, \tag{16}$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(b-t)(s-a)}{b-a}, & \text{если } a \leqslant s < t, \\ -\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & \text{если } t \leqslant s \leqslant b \end{cases}$$

— функция Грина уравнения $y''=0$ при краевых условиях (15). Отсюда видно, что при $t\neq s$

$$|G(t,s)|<\frac{(b-s)(s-a)}{b-a}. \tag{17}$$

Пусть $\max_{s\in[a,b]}|y(s)|=|y(t^*)|$. Тогда из (16) и (17)

$$|y(t^*)|=\left|\int_a^b G(t^*,s)q(s)y(s)ds\right|\leqslant\int_a^b|G(t^*,s)|\,|y(s)|q(s)ds<$$
$$<|y(t^*)|\int_a^b\frac{(b-s)(s-a)q(s)}{b-a}ds\leqslant\frac{b-a}{4}\int_a^b q(s)ds$$

так как $(b-s)(s-a)\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{4}$ для $s\in[a,b]$. Отсюда $1<\dfrac{b-a}{4}\displaystyle\int_a^b q(s)ds$, что противоречит условию.

Следствие 2. *Если* $p(t)\equiv 0$,

$$\int_a^b q_+(t)\,dt\leqslant\frac{4}{b-a},$$

то $L\in\mathfrak{T}([a,b])$ $(q_+(t)=q(t)$ *при* $q(t)>0$, $q_+(t)=0$ *при* $q(t)\leqslant 0)$.

Доказательство. По доказанному $L_+\doteq\frac{d^2}{dt^2}+q_+\in\mathfrak{T}([a,b])$, а так как $q(t)\leqslant q_+(t)$, то и $L\in\mathfrak{T}([a,b])$.

Замечание 1. Константа 4 в условии признака 3 неулучшаема.

Это видно из следующего примера.

Пусть функция v дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$ и

$$v(t)=t\quad(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}-\delta),\quad v(t)=1-t\quad\left(t>\frac{1}{2}+\delta\right),$$

$$v(t)>0,\quad v''(t)<0\quad\left(\frac{1}{2}-\delta<t<\frac{1}{2}+\delta\right).$$

Положим
$$q(t) = \begin{cases} -\frac{v''(t)}{v(t)}, & \text{если } t \in (0,1), \\ 0, & \text{если } t = 0,\ t = 1. \end{cases}$$
Очевидно, что q непрерывна, $q(t) \geqslant 0$ на $[0,1]$;
$$L \doteq \frac{d^2}{dt^2} + q(t) \notin \mathfrak{T}([0,1]),$$
так как уравнение $Ly = 0$ имеет решение $y = v(t)$, имеющее 2 нуля на $[0,1]$. Однако,
$$\frac{v''}{v} = \left(\frac{v'}{v}\right)' + \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \geqslant \left(\frac{v'}{v}\right)',$$
поэтому интеграл
$$\int_0^1 q(t)dt = -\int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} \left(\frac{v'}{v}\right)' dt = -\frac{v'}{v}\bigg|_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}+\delta} = \frac{4}{1-2\delta}$$
может быть сделан сколь угодно близким к 4 при достаточно малом δ.

5. Полуэффективный критерий неосцилляции

7. Теорема 4 представляет собой пример *неэффективного* критерия неосцилляции, сформулированного в терминах решений уравнения (1), а не в терминах самого уравнения. Приведем теперь необходимое и достаточное условие (*критерий*) неосцилляции уравнения (1), который естественно назвать *полуэффективным* [10] (он эффективен как необходимое условие и неэффективен как достаточное); он, хотя и не выражается через коэффициенты уравнения (1), но с его помощью можно получать достаточные признаки неосцилляции, выражающиеся через эти коэффициенты. Критерий этот принадлежит Валле Пуссену [2].

Теорема 7. *Пусть $[a,b] \subset I$. Для того, чтобы $L \in \mathfrak{T}([a,b])$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция v, имеющая абсолютно непрерывную на $[a,b]$ производную и такая, что*
$$v(t) > 0 \quad (a < t \leqslant b), \qquad Lv \leqslant 0 \quad \textit{п.в. на } [a,b]. \tag{18}$$

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 4. Докажем достаточность условий теоремы. Если $v(a) = 0$, то положим $\widetilde{v}(t) = v(t) + \varepsilon u(t)$, где $\varepsilon > 0$, а $u(t)$ — решение уравнения (1) с начальными условиями $u(a) = 1,\ u'(a) = 0$. При достаточно малом ε $\widetilde{v}(t) > 0$ на $[a, b]$. Поэтому можно, не ограничивая общности, считать, что уже с самого начала $v(t) > 0$ на $[a, b]$. Рассмотрим уравнение

$$Mx \doteq x'' + px' - \frac{v'' + pv'}{v}x = 0. \tag{19}$$

По теореме 4 $M \in \mathfrak{T}([a, b])$ (так как уравнение (19) имеет положительное на $[a, b]$ решение v). По условию теоремы

$$v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t) \leqslant 0,$$

т. е.

$$-\frac{v''(t) + p(t)v'(t)}{v(t)} \geqslant q(t), \quad \text{п. в. на} \quad [a, b].$$

Доказываемое утверждение теперь следует из теоремы 2.

Точно так же доказывается и следующее утверждение.

Теорема 8. *Если существует функция v, имеющая абсолютно непрерывную на $[a, b)$ производную, такая , что*

$$v(t) > 0 \quad (a < t < b), \qquad Lv \leqslant 0 \quad \text{п. в. на} \quad (a, b), \tag{20}$$

то $L \in \mathfrak{T}([a, b))$.

6. Достаточные признаки неосцилляции — 2

8. Выбирая конкретные «пробные» функции v, получим эффективные признаки неосцилляции.

Признак 4. *Если $q(t) \leqslant 0$ на $[a, b] \subset I$ $\big($в $(a, b) \subset I\big)$, то $L \in \mathfrak{T}([a, b])$ $\big(L \in \mathfrak{T}\big((a, b)\big)\big)$.*

Доказательство. Полагаем $v(t) \equiv 1$ и ссылаемся на теорему 7 (теорему 8).

Признак 5. *Пусть*

$$p(t) = O(t-a) \text{ при } t \to a+, \ p(t) = O(b-t) \text{ при } t \to b-$$

(в частности, пусть $p(t) \equiv 0$). Тогда, если выполнено условие

$$\frac{\pi}{b-a} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-a)}{b-a} p(t) + q(t) \leqslant \frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

то $L \in \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$.

Доказательство. Полагаем $v(t) \equiv \sin \frac{\pi(t-a)}{b-a}$ и ссылаемся на теоремы 8 и 3.

Признак 6. *Пусть выполнено неравенство*

$$|p(t)| \cdot \left|\frac{b+a}{2} - t\right| + |q(t)| \cdot \frac{(b-t)(t-a)}{2} \leqslant 1 \tag{21}$$

или неравенство

$$\frac{b-a}{2} \operatorname*{essup}_{t \in (a,b)} |p(t)| + \frac{(b-a)^2}{8} \operatorname*{essup}_{t \in (a,b)} |q(t)| \leqslant 1. \tag{22}$$

Тогда $L \in \mathfrak{T}\big([a,b)\big)$.

Доказательство. Полагаем $v(t) \equiv \dfrac{(b-t)(t-a)}{2}$ и ссылаемся на теоремы 8 и 3.

Заметим, что неравенству (21) удовлетворить легче, чем неравенству (22); из выполнения (22) следует выполнение (21).

Пусть $P(t,\lambda) \doteq \lambda^2 + p(t)\lambda + q(t)$ — «характеристический» многочлен уравнения (1).

Признак 7. *Если существует вещественное число ν такое, что $P(t,\nu) \leqslant 0 \quad (t \in (-\infty,+\infty))$, то уравнение (1) неосцилляционно на $(-\infty,+\infty)$.*

Доказательство. Функция $v(t) \doteq e^{\nu t} > 0$ и

$$(Lv)(t) = e^{\nu t} P(t,\nu) \leqslant 0$$

на $(-\infty,+\infty)$. Остается сослаться на теорему 7.

9. Приведем ряд признаков, получающихся из теоремы 7 (теоремы 8) с помощью «пробной» функции, зависящей от коэффициентов уравнения (1).

1^o. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{L}x \doteq x'' + Px' + Qx = 0 \tag{23}$$

с постоянными коэффициентами P и Q в предположении, что оно является неосцилляционным на некотором полуинтервале $[a, b)$. Пусть v — решение краевой задачи

$$\widetilde{L}v = -1, \quad v(a) = v(b) = 0,$$

$\widetilde{C}(t,s)$ — функция Коши уравнения (23). Тогда

$$\widetilde{C}(t,s) > 0 \quad (a \leqslant s < t < b) \quad \text{и} \quad v(t) = \int_a^b M(t,s)\,ds > 0$$

$(t \in (a,b))$, где

$$M(t,s) \doteq \begin{cases} \dfrac{\widetilde{C}(b,t)\cdot\widetilde{C}(s,a)}{\widetilde{C}(b,a)}, & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b, \\ \dfrac{\widetilde{C}(t,a)\cdot\widetilde{C}(b,s)}{\widetilde{C}(b,a)}, & a \leqslant t < s \leqslant b \end{cases} > 0,$$

$(t,s) \in (a,b)\times(a,b)$. Так как

$$(Lv)(t) = -1 + \big(p(t) - P\big)v'(t) + \big(q(t) - Q\big)v(t),$$

то неравенство $(Lv)(t) \leqslant 0$ выполняется, если

$$\big(p(t) - P\big)\int_a^b \frac{\partial M(t,s)}{\partial t}\,ds + \big(q(t) - Q\big)\int_a^b M(t,s)\,ds)ds \leqslant 1, \tag{24}$$

$t \in (a,b)$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Признак 8. *Если выполнено неравенство* (24), *то уравнение* (1) *неосцилляционно на* $[a,b)$.

Удачный выбор коэффициентов P и Q позволяет получить признаки неосцилляции, более тонкие, чем приведенные ранее.

Задание 13. Приведите пример, подтверждающий сказанное. Приведите пример уравнения, для которого не выполняются условия признаков $4, 5, 6$, но выполняется условие признака 8. Организуйте численную проверку выполнения неравенства (24).

Задание 14. Пусть

$$F(P,Q) \doteq \max_{t\in[a,b]} \left(\big(p(t) - P\big) \int_a^b \frac{\partial M(t,s)}{\partial t}\, ds + \right.$$
$$\left. + \big(q(t) - Q\big) \int_a^b M(t,s)\, ds \right)$$

Найдите argmin $F(P,Q)$ *при условии, что уравнение* (23) *неосцилляционно на* $[a,b)$. *Организуйте численный процесс решения этой экстремальной задачи.*

2^o. Рассмотрим частный случай, когда $Q = 0$. В этом случае

$$M(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(1-e^{-P(b-t)})(1-e^{-P(s-a)})}{P(1-e^{-P(b-a)})} & (s \leqslant t), \\ \dfrac{(1-e^{-P(t-a)})(1-e^{-P(b-s)})}{P(1-e^{-P(b-a)})} & (s > t). \end{cases}$$

Непосредственное интегрирование и дифференцирование приводит к представлениям и оценкам

$$v(t) = \frac{(1-e^{-P(b-t)})(t-a-\frac{1}{P}(1-e^{-P(t-a)}))}{P(1-e^{-P(b-a)})} +$$
$$+ \frac{(1-e^{-P(t-a)})(b-t-\frac{1}{P}(1-e^{-P(b-t)}))}{P(1-e^{-P(b-a)})} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2(\frac{b-a}{2} - \frac{1}{P}(1-e^{-P\frac{b-a}{2}}))}{P(1+e^{-P\frac{b-a}{2}}))},$$

$$v'(t) = \frac{P\left((b-t)e^{-P(t-a)} - (t-a)e^{-P(b-t)}\right) + e^{-P(b-t)} - e^{-P(t-a)}}{P\left(1-e^{-P(b-a)}\right)},$$
$$|v'(t)| \leqslant \frac{|P(b-a) + e^{-P(b-a)} - 1|}{P(1-e^{-P(b-a)})}.$$

Так как условие $Lv \leqslant 0$ теперь эквивалентно неравенству $\big(p(t) - P\big)v'(t) + q(t)v(t) \leqslant 1$, то получаем следующий признак.

Признак 9. *Если*

$$|p(t)-P|\frac{|P(b-a)+e^{-P(b-a)}-1|}{P(1-e^{-P(b-a)})}+$$
$$+|q(t)|\frac{2(\frac{b-a}{2}-\frac{1}{P}(1-e^{-P\frac{b-a}{2}}))}{P(1+e^{-P\frac{b-a}{2}}))}\leqslant 1$$

$(a<t<b)$, *то уравнение* (1) *неосцилляционно на* $[a,b)$.

Задание 15. Пусть

$$F(P,b)\doteq\max_{t\in[a,b]}\left(|p(t)-P|\frac{|P(b-a)+e^{-P(b-a)}-1|}{P(1-e^{-P(b-a)})}+\right.$$
$$\left.+|q(t)|\frac{2(\frac{b-a}{2}-\frac{1}{P}(1-e^{-P\frac{b-a}{2}}))}{P(1+e^{-P\frac{b-a}{2}}))}\leqslant 1\right)$$

Найдите $\operatorname{argmin} F(P,b)$. *Организуйте численный процесс решения этой экстремальной задачи.*

3^o. Если вместо вспомогательного уравнения (23) взять уравнение $\widetilde{L}x\doteq x''+p(t)x'=0$, а в качстве v— решение задачи $\widetilde{L}v=-1$, $v(a)=v(b)=0$, то приходим к следующему признаку.

Признак 10. *Если выполнено неравенство* $q(t)\int_a^b M(t,s)\,ds\leqslant 1$, $t\in(a,b)$, *где*

$$M(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\int_t^b e^{-\int_t^\sigma p(\mu)\,d\mu}d\sigma\cdot\int_a^s e^{-\int_a^\sigma p(\mu)\,d\mu}d\sigma}{\int_a^b e^{-\int_a^\sigma p(\mu)\,d\mu}d\sigma} & (s\leqslant t),\\ \dfrac{\int_a^t e^{-\int_a^\sigma p(\mu)\,d\mu}d\sigma\cdot\int_s^b e^{-\int_s^\sigma p(\mu)\,d\mu}d\sigma}{\int_a^b e^{-\int_a^\sigma p(\mu)\,d\mu}d\sigma} & (t<s),\end{cases}$$

то уравнение (1) *неосцилляционно на* $[a,b)$.

Задание 16. Приведите пример уравнения, для которого не выполняются условия признаков $4,5,6$, но выполняется условие признаков 9 или 10.

7. Неосцилляция на всей оси

10. Приведем признаки неосцилляции уравнения второго порядка на всей оси. Рассмотрим уравнение

$$\widetilde{L}x \doteq x'' + px' + qx = 0 \tag{25}$$

с постоянными коэффициентами p и q. Как было выяснено ранее (см. признак 1), неосцилляция уравнения (25) на всей оси эквивалентна выполнению неравенства $p^2 - 4q \geqslant 0$.

Будем изображать уравнение (25) точкой $\widetilde{\mathcal{L}} = (p, q)$ плоскости Π переменных p, q (см. рис.1) Пусть

$$\mathfrak{N} \doteq \{(p, q) : p^2 - 4q \geqslant 0\}, \qquad \mathfrak{O} \doteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{N}.$$

Тогда согласно признаку 1

$$\widetilde{L} \in \mathfrak{T}\big((-\infty, +\infty)\big) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{N}.$$

На рис. 1 точке $\mathcal{L}_2$ соответствует уравнение $L_2 x = 0$, неосцилляционное на всей оси, точке $\mathcal{L}_1$ — уравнение, не являющееся неосцилляционным на всей оси.

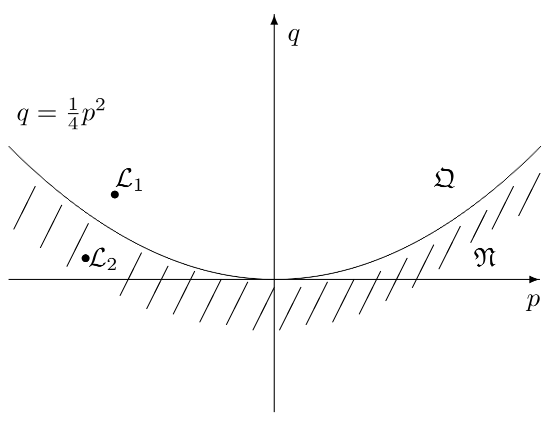


Рис.1

Пусть теперь

$$Lx \doteq x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad — \tag{26}$$

уравнение с непрерывными на $(-\infty, +\infty)$ коэффициентами. Каждое уравнение вида (26) изображается на плоскости П жордановой кривой

$$G_L: \qquad p = p(t), \quad q = q(t),$$

точнее, движением DG_L по этой кривой. Теперь уже одно только включение $G_L \subset \mathfrak{N}$ не обеспечивает неосцилляцию уравнения (26) на всей оси. Рассмотрим в связи с этим пример.

Пусть в уравнениии (25) $p = -\frac{\mu}{2}$, $q = \frac{\mu^2}{16}$; (μ — постоянная); тогда это уравнение изображается точкой граничной параболы (см. рис. 1), т. е. имеет место включение $G_L \subset \mathfrak{N}$, следовательно, уравнение неосцилляционно на всей оси (в этом случае уравнение (25) имеет решение $u = e^{\frac{1}{4}\mu t}$, положительное на всей оси). Если же $\mu = t$, то по-прежнему имеет место включение $G_L \subset \mathfrak{N}$, однако уравнение

$$Lx \doteq x'' - \frac{t}{2}x' + \frac{t^2}{16}x = 0 \tag{27}$$

имеет решение $u = e^{\frac{t^2}{8}} sin\,\frac{t}{2}$, имеющее на каждом отрезке $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$) по два нуля; значит, в этом случае неосцилляции на всей оси нет.

Поставим задачу: выяснить, при каких дополнительных условиях включение $G_L \subset \mathfrak{N}$ обеспечивает неосцилляцию уравнения (26) на всей числовой оси.

Вот несколько простых решений этой задачи.

А. Пусть $p(t) \equiv p = \text{const}$. Тогда включение $G_L \subset \mathfrak{N}$ эквивалентно выполнению неравенства $q(t) \leqslant \frac{1}{4}p^2$ (см. рис. 2). Функция $v(t) \doteq e^{-\frac{p}{2}t} > 0$ $(t \in \mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству

$$(Lv)(t) = e^{-\frac{p}{2}t}\left(q(t) - \frac{1}{4}p^2\right) \leqslant 0 \ (t \in \mathbb{R}).$$

Таким образом,

если $p(t) \equiv p = \text{const}$, $q(t) \leqslant \frac{1}{4}p^2$, *то уравнение* (26) *неосцилляционно на всей оси.*

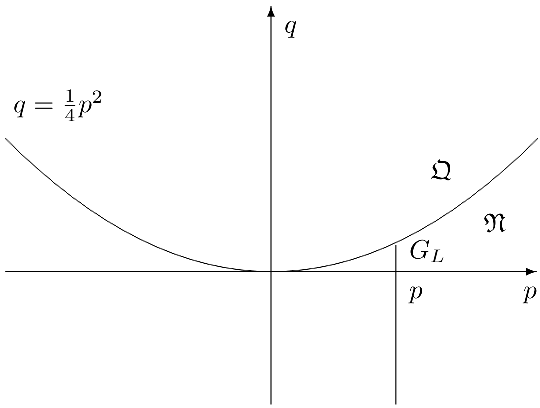


Рис.2

Б. Пусть G_L — прямая (или отрезок прямой) и $G_L \subset \mathfrak{N}$. Уравнение такой прямой либо имеет вид $q(t) \equiv q = \text{const} \leqslant 0$ (при любой $p(t)$), либо $p = p(t)$, $q = -\gamma^2 + k\,p(t)$, где $|k| \leqslant \gamma$ $(\gamma > 0)$ (при $k = \pm\gamma$ прямая касается параболы $q = \frac{1}{4}p^2$). В первом случае неосцилляция уравнения (26) на всей оси следует из теоремы 2. Во втором случае функция $v(t) \doteq e^{-kt} > 0$ $(t \in \mathbb{R})$ удовлетворяет неравенству

$$(Lv)(t) = e^{-kt}(k^2 - \gamma^2) \leqslant 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Таким образом,

если G_L — прямая в плоскости Π, *целиком лежащая в* $\mathfrak{N}$, *или отрезок такой прямой, то уравнение* (26) *неосцилляционно на всей оси.*

В. Пусть $\gamma \geqslant 0$. Введем множества

$$\mathfrak{M}_{\pm}(\gamma) = \{(p,q) : q \leqslant -\gamma^2 \pm \gamma\,p\}$$

Так как прямые $q = -\gamma^2 \pm \gamma\,p$ касаются параболы $q = \frac{1}{4}p^2$, то $\mathfrak{M}_{\pm}(\gamma) \subset \mathfrak{N}$ при любом $\gamma \geqslant 0$.

Из утверждений **А** и **Б** и теоремы сравнения 2 получаем следующее утверждение (см. рис. 3).

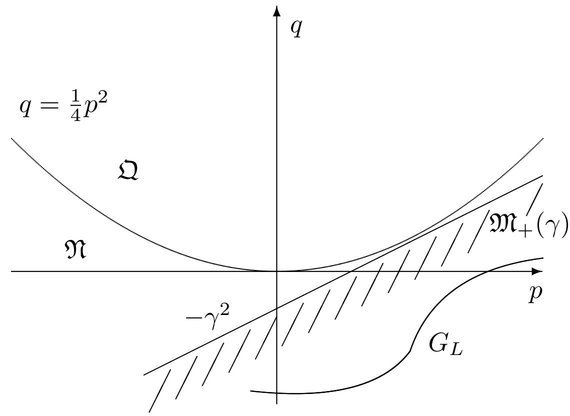


Рис.3

Теорема 9. *Если при некотором* $\gamma \geqslant 0$

$$G_L \subset \mathfrak{M}_+(\gamma) \quad \big(G_L \subset \mathfrak{M}_-(\gamma)\big),$$

то уравнение (26) *неосцилляционно на всей оси.*

(Полагаем $v(t) = e^{-\gamma\, t} \quad \big(v(t) = e^{\gamma\, t}\big)$.)

Заметим, что условие теоремы 9 зависит лишь от кривой G_L, а не от движения DG_L по этой кривой.

Г. Условия нижеследующих теорем зависят и от движения DG_L.

Теорема 10. Пусть $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, p дифференцируема и выполнено одно из условий

$$p'(t) \geqslant 2r(t) \quad (p'(t) \leqslant -2r(t)) \ (t \in \mathbb{R}) \tag{28}$$

или

$$p^2(t) - 4p'(t) + r(t) \leqslant 0 \quad (p^2(t) + 4p'(t) + r(t) \leqslant 0) \ (t \in \mathbb{R}) \tag{29}$$

и кроме того, $q(t) \leqslant \dfrac{p^2(t)}{4} + r(t) \quad (t \in \mathbb{R})$. Тогда уравнение (26) неосцилляционно на всей оси.

Доказательство. Пусть выполнено первое неравенство (28). Рассмотрим выражение

$$L_2 x \doteq x'' + p(t)x' + \left(\frac{p^2(t)}{4} + r(t)\right) x \tag{30}$$

при наших предположениях. Положим

$$v(t) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t p(s)\,ds}; \quad \text{тогда} \quad v(t) > 0,$$

$$(L_2 v)(t) = \left(-\frac{1}{2}p'(t) + r(t)\right)\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^t p(s)\,ds} \leqslant 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $L_2 \in \mathfrak{T}((-\infty,\, +\infty))$. Неосцилляция уравнения (26) следует теперь из теоремы сравнения 2.

Если выполнено второе неравенство (28), то положив $y(t) = x(-t)$, придем к уравнению $y'' - p(t)y' + q(t)y = 0$, и выражению

$$L_2 y \doteq y'' - p(t)y' + \left(\frac{p^2(t)}{4} + r(t)\right) y,$$

для которого положим $v(t) = e^{\frac{1}{2}\int_0^t p(s)\,ds}$; остальные рассуждения как и выше.

Пусть выполнено первое неравенство (29).Теперь положим

$$v(t) = e^{-\int_0^t p(s)\,ds} \; (> 0);$$

легко видеть, что

$$(L_2 v)(t) = \left(p^2(t) - \frac{1}{2}p'(t) - p^2(t) + \frac{p^2(t)}{4} + r(t)\right)\, e^{-\frac{1}{2}\int_0^t p(s)\,ds} \leqslant 0,$$

$t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $L_2 \in \mathfrak{T}((-\infty,\, +\infty))$ и нам снова остается сослаться на теорему сравнения 2. При выполнении второго неравенства (29) рассуждаем как и выше.

Заметим, что неравенство (29) выполняется (в виде равенства), например, при

$$r(t) \equiv -R^2, \qquad p(t) = \frac{R\left(1 - c^2 e^{\frac{Rt}{2}}\right)}{1 + c^2 e^{\frac{Rt}{2}}}.$$

В этом случае уравнение $L_2 x = 0$ имеет решение

$$x(t) = e^{-\displaystyle\int_0^t \frac{R\left(1 - c^2 e^{\frac{Rs}{2}}\right)}{1 + c^2 e^{\frac{Rs}{2}}}\, ds} \quad (> 0).$$

Отметим также, что в отличие от случая постоянных коэффициентов, для уравнения с переменными коэффициентами условие $G_L \subset \mathfrak{N}$ не является необходимым для неосцилляции уравнения (26) на всей оси. Так, уравнение (ср. (27))

$$(\overline{L})(t) \doteq x'' + tx' + \left(\frac{t^2}{4} + \frac{1}{2}\right) x = 0,$$

обладая решением $x = e^{-\frac{t^2}{4}} > 0$ $(t \in \mathbb{R})$, является неосцилляционным на всей оси, однако здесь $G_{\overline{L}} \subset \mathfrak{O}$ (см. рис. 4). Точно таким же свойством обладает и более общее уравнение

$$x'' + p(t)x' + \left(\frac{p^2(t)}{4} + \frac{1}{2}p'(t)\right) x = 0, \qquad p'(t) > 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Здесь однородное уравнение имеет решение $x = e^{-\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^t p(s)\,ds} > 0$, $t \in \mathbb{R}$ и следовательно, является неосцилляционным на всей оси.

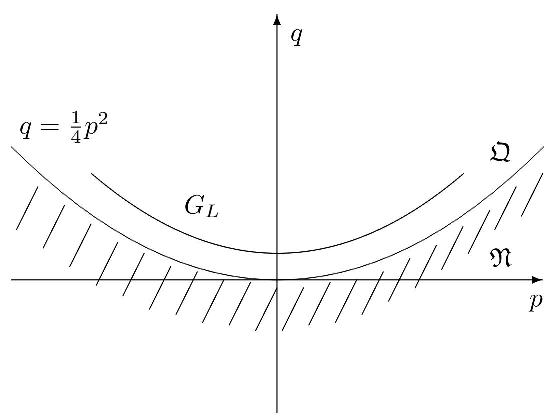


Рис.4

Из последнего примера и теоремы сравнения 2 получаем следующее усиление теоремы 10.

Теорема 11. *Если p дифференцируема, $p'(t) \geqslant 0 \quad (p'(t) \leqslant 0)$ на $\mathbb{R}$ и*

$$q(t) \leqslant \frac{p^2(t)}{4} + \frac{1}{2}p'(t) \quad \left(q(t) \leqslant \frac{p^2(t)}{4} - \frac{1}{2}p'(t)\right) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

то уравнение (26) неосцилляционно на всей оси.

11. Рассмотрим, наконец, уравнение

$$Lx \doteq x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (t \in (a, +\infty)) \tag{31}$$

с непрерывными на $(a, +\infty)$ коэффициентами. Замена переменной $t \to a + t^2$ сводит уравнение (31) к уравнению

$$x'' + p(a + t^2)x' + q(a + t^2)x = 0 \quad (t \in (-\infty, +\infty)). \tag{32}$$

Неосцилляция уравнения (32) на всей оси эквивалентна неосцилляции уравнения (31) на $(a, +\infty)$. Применяя к уравнению (32) доказанные выше признаки, получим условия неосцилляции уравнения (31) на $(a, +\infty)$.

Задание 17. Уравнение

$$Lx = x'' - \frac{2(2t - b)}{t^2 + (t - b)^2}\, x' + \frac{4}{t^2 + (t - b)^2}\, x = 0;$$

имеет решения $2t - b,\ t(t - b)$; найдите явное выражение для функций $\rho_{\pm}, \quad \sigma_{\pm}$.

Задание 18. Уравнение

$$Lx = x'' - \frac{A \operatorname{sh} t}{A \operatorname{ch} t - 1}\, x' + \frac{1}{A \operatorname{ch} t - 1}\, x = 0$$

$(A \geqslant 2)$ имеет решения $\operatorname{sh} t,\ \operatorname{ch} t - A$; найдите явное выражение для функций $\rho_{\pm}, \quad \sigma_{\pm}$.

Задание 19. Уравнение

$$Lx = x'' + \frac{\cos t}{2 - \sin t}\, x' + \frac{2}{2 - \sin t}\, x = 0;$$

имеет решения: $\cos t,\ 2\sin t - 1$; найдите функции $\rho_{\pm}, \quad \sigma_{\pm}$.

Задание 20. Уравнение

$$Lx = x'' - \frac{t \text{ ch } t}{t \text{ sh } t - \text{ch } t + A}\, x' + \frac{\text{ch } t}{t \text{ sh } t - \text{ch } t + A}\, x = 0$$

$(A \geqslant 2)$ имеет решения $t,\ \text{ch } t - A$; найдите функции $\rho_\pm, \quad \sigma_\pm$.

Список рекомендуемой литературы

1. Polia G. On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation // Trans. Amer. J. Math. Soc. —1922.— vol.24. — P. 312–324.
2. de la Valle-Poussin Ch. I. Sur l'equation differentielle du second ordre //Journ. Math Pur et. Appl. — 1929. — vol. 9, №8. — P. 125–144.
3. Mammana G. Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotto di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenzi ali lineari // Math. L. — 1931. —№33. — P. 186–231.
4. Wintner A. On the non-existence of conjugate points // Amer. J. Math. —1951. — №73. — P. 368–380.
5. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка // Матем. сб. —1960. — Т. 51 (92), №4. — С. 475–486.
6. Leighton W. Comparison theorems for linear differential equations of second order // Proc.Amer. Math. Soc. — 1962. —vol. 13.,P. 603–610.
7. Swanson C. A. Comparison and oscillation theory for linear differential equation. New-York: Academic Press., 1967. — 222 p.
8. Nehari Z. Disconjugacy criteria for linear differential equations // J. Diff. Equations. — 1968. - **4**, P. 604 - 611.
9. Nehari Z. Disconjugate linear differential operators //Trans. Amer. J. Math. Soc. —1969. — vol. 129. — P. 500–516.
10. Левин А. Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \ldots$ $\ldots + p_n(t)x = 0$ // УМН. —1969. — Т. XXIV, вып. 2 . — С. 43–46.
11. Hartman P. Principal solutions of disconjugate n-th order linear differential equations // Amer. J. Math. — 1969. — vol.91, №2. — P. 306–362.
12. Coppel W. A. Disconjugacy. Lecture Notes in Math. — Berlin. Heidelberg. New York: Springer–Verlag. 1971. — vol.220. — 170 p.
13. Muldowney J. S. Comparison theorems for linear boundary problems // SIAM J. Math. Anal. — 1978. — vol.9, №9. — P. 943–955.
14. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Наука —1959. — 468 с.
15. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир., 1970. — 720 с.
16. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978. — 431 с.
17. Комленко Ю. В. О некоторых критериях неосцилляции и ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР, — 1965. Т. 164, № 2. — С. 270–272.

18. Комленко Ю. В. Условия разрешимости некоторых краевых задач для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР, — 1967. Т. 174, № 5. — С. 1018–1020.
19. Комленко Ю. В., Тонков Е. Л. Периодическая краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. — 1968. Т. 179, № 1. — С. 17–19.
20. Тонков Е. Л. О периодическом уравнении второго порядка // Докл. АН СССР. — 1969. Т. 184, № 21. — С. 296–299.
21. Тонков Е. Л. Линейное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами // Матем.физика. Республ. межведомств. сб. Киев, — 1978.- № 24. — С. 58–69.
22. Тонков Е. Л. Неосцилляция и число переключений в линейной нестационарной системе, оптимальной по быстродействию //Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9,№ 12. — С. 2180–2185.
23. Ridenhour J. R. On the zeros of solutions of Nth order linear differential equations // J. of Differential equations. —1974. — vol.16. — P. 45–71.
24. Левин А. Ю., Степанов Г. Д. Одномерные краевые задачи с оператором, не повышающим числа перемен знака // Сибирский матем. журнал. —1976. — Т.17, №3. — С.606–626, № 4. — С. 813–830.
25. Тонков Е. Л. К вопросу о неосцилляции линейной системы // Нелинейные колебания и теория управления. УдГУ. Ижевск, 1982. — Вып. 4. — С. 62–74.
26. Дерр В. Я. Неосцилляция решений квазидифференциального уравнения // Нелинейные колебания и теория управления. УдГУ, Ижевск, 1982. — Вып. 4. — С. 52–61.
27. Дерр В .Я. Квазидифференциальные уравнения: неосцилляция решений./ УдГУ. Ижевск, 1984. — 54 с. — Деп. в ВИНИТИ 03.03.1984, № 1749-84.
28. Дерр В. Я. К обобщенной задаче Валле Пуссена // Дифференц. уравнения. —1987. — Т. 23, № 11. — С. 1861–1872.
29. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики. УдГУ. Ижевск, 1999. — Вып. 1 (16). — С. 3–105.
30. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные Науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 56-99.
31. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Дифференцируемость функции быстродействия и позиционное управление линейной нестационарной системой // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1966. — Вып. 2 (8). С. 47–68.

32. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Структура множества управляемости линейной докритической системы // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 107–115.
33. Милич Н, В. Длина промежутка чебышевскости и множество управляемости линейной нестационарной системы // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск. — 2000. — Вып. 1. — С. 109–130.
34. Милич Н, В. Докритичность и Q-приводимость линейной нестационарной системы // XXXII научн. тех. конф. ИжГТУб 18–21 апр. 2000 г. тез. докл. — Ижевск. — 2000. — Ч. 1. — С. 59–61.
35. Дерр В. Я., Милич Н, В., Николаев С. Ф., Тонков Е. Л. Задача быстродействия для Q-приводимой системы // Вестн. Тамбовского ун-та. — 2000. — т 5, вып. 4 — С. 438–440.
36. Лукьянов В, В. Двухпараметрические T-системы и их применение для исследования оптимальных по быстродействию линейных нестационарных систем // Вестн. Удм. ун-та. Серия Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 1. — С. 111–140.

Напечатано в авторской редакции
с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 30.01.09 Формат $60 \times 84^1/_{16}$
Печать офсетная. Усл.печ.л.2,09 Уч.-издл.1,9
Тираж 30 экз. Заказ №

Василий Яковлевич Дерр

НЕОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор и верстка: Т.С.Ашихмина, В.Я.Дерр, Д.Л.Федоров

Редакторы: