Федеральное агентство по образованию РФ
Удмуртский государственный университет
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

А.Г. Родионова, Е.В. Новикова

Функциональный анализ и вариационное исчисление в вопросах и задачах (типовой расчет)

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2008

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Р 60

Рецензенты: к.ф.-м.н. **А.Г. Ицков**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

Родионова А.Г., Новикова Е.В.
Р60 Функциональный анализ и вариационное исчисление в вопросах и задачах (типовой расчет). Учебно-методическое пособие. Ижевск, 2008. 65 с.

Учебно-методическое пособие содержит задания для практических занятий и состоит из четырех глав. Каждая глава разделена параграфами, снабженными кратким обзором заявленной темы, что позволяет лучше усваивать материал. Нумерация заданий сквозная.

Пособие рассчитано на студентов, изучающих функциональный анализ и вариационное исчисление. Оно может быть также полезно преподавателям при проведении занятий и для подготовки индивидуальных заданий студентам.

ББК.161.6

ГЛАЗВА I. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Пусть A и B – множества. Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Будем говорить, что множество A есть подмножество B и писать $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то называем множества A и B равными и пишем $A=B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$.

Пусть A и B – подмножества множества X.

Определение 1. Объединением множеств A и B называется множество $A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ èëè } x \in B\}$.

Определение 2. Пересечением множеств A и B называется множество $A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ è } x \in B\}$.

Обозначения $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ применяются для объединения и пересечения подмножеств A_i, $i = \overline{1,n}$, множества X.

Определение 3. Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ è } x \notin B\}$.

Разность $X \setminus A$ называется дополнением множества A к множеству X и обозначается $\overline{A}$.

Определение 4. Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество $A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$.

Упражнение. Покажите, что $A \Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$.

Пусть A, B и D – произвольные подмножества множества X. Тогда справедливы следующие равенства:

1) $\overline{\overline{A}} = A$ (закон дополнения дополнения);

2) $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$ (коммутативность операций объединения и пересечения);
3) $A \bigcup (B \bigcup D) = (A \bigcup B) \bigcup D$, $(A \bigcap B) \bigcap D = A \bigcap (B \bigcap D)$ (ассоциативность операций объединения и пересечения);
4) $A \bigcup (B \bigcap D) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup D)$ (дистрибутивность операции объединения относительно пересечения);
5) $A \bigcap (B \bigcup D) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap D)$ (дистрибутивность операции пересечения относительно операции объединения);
6) $A \bigcup A = A \bigcap A = A$ (законы идемпотентности);
7) $A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcap X = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$, $A \bigcup X = X$;
8) $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$, $A \bigcup \overline{A} = X$;
9) $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$, $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$ (принцип двойственности – законы де Моргана).

ЗАДАНИЕ № 1

Доказать включения (равенства) множеств.

1. $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$.
2. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
4. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
5. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.
6. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
8. $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.
9. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.
10. $(B \setminus C) \setminus (B \cap A) \subset B \setminus A$.
11. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

12. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
13. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
14. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
15. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.
16. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
17. $(A \cap C) \setminus (B \cap D) = (A \setminus D) \cap C$.
18. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
19. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
20. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
21. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
22. $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) \subset A \cap C$.
23. $(A \cap B) \setminus (C \cup D) \subset A \setminus C$.
24. $A \setminus \overline{B} = A \cap B$.
25. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset \overline{A \setminus \overline{B}}$.

§ 2. ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ МНОЖЕСТВ

Пусть X и Y – множества произвольной природы. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу сопоставлен единственный элемент $f(x) \in Y$, то говорят, что задано отображение f множества X в множество Y, и пишут $f : X \to Y$. Для любого $A \subset X$ определим образ

$$f(A) = \{\, y \in Y : \text{существует } x \in A : y = f(x) \,\},$$

а для любого $B \subset Y$ определим его полный прообраз

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X : f(x) \in B \,\}.$$

Рассмотрим отображение f из X в Y. Пусть $A, B \subset X$. Докажите, что имеют место соотношения

1) $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$;
2) $f(A \bigcap B) \subseteq f(A) \bigcap f(B)$;

3) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

В каких случаях в п.2 и п.3 выполняется равенство?

Определение 1. Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным (взаимно-однозначным отображением «в»), если условие $x_1 \neq x_2$ влечет $f(x_1) \neq f(x_2)$ (образы различных элементов различны).

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называется сюръективным (отображением X на Y), если $f(X) = Y$.

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называется биективным (взаимно-однозначным соответствием или взаимно-однозначным отображением «на»), если оно инъективно и сюръективно.

Определение 4. Множества X и Y называются эквивалентными или равномощными, если существует взаимно-однозначное соответствие между элементами этих множеств. Запись $X \sim Y$ означает, что X эквивалентно Y. Мощности X и Y обозначаем соответственно через $|X|$ и $|Y|$.

Определение 5. Множество X называются счетным, если $X \sim \mathbf{N}$ (где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел). Через $\aleph_0$ (алеф-ноль) обозначаем мощность счетного множества.

Определение 6. Множество X называется не более чем счетным, если оно счетно или конечно.

Упражнение 1. Покажите, что объединение конечного числа счетных множеств есть счетное множество.

Упражнение 2. Покажите, что объединение счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

Определение 7. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называются несчетным.

Теорема Кантора. Множество [0,1] несчетно.

Определение 8. Множество X, эквивалентное отрезку [0,1] действительных чисел, называется множеством мощности континуум.

ЗАДАНИЕ № 2

Установить взаимно однозначное соответствие между множествами X **и** Y**.**

1. $X=[a;b]$, $Y=[0;1]$.
2. $X=(0;1)$, $Y=\mathbf{R}$.
3. $X=(-1;1)$, $Y=\mathbf{R}$.
4. $X=[0;1)$, $Y=[0;+\infty]$.
5. $X=[0;1]$, $Y=(0;1)$.
6. $X=[0;1]$, $Y=\mathbf{R}$.
7. $X=[0;+\infty]$, $Y=\mathbf{R}$.
8. X – ñô åðà, Y – ï ëî ñêî ñòü.
9. X – î êðóæí î ñòü, Y – ï ðÿì àÿ.
10. X – гипотенуза прямоугольного треугольника *ABC*, Y – катет этого треугольника.
11. X, Y – êàòåòû ï ðÿì î óãî ëüí î ãî òðåóãî ëüí èêà.
12. $X=[1;2)$, $Y=[3;4]$.
13. $X=(0;1)$, $Y=(-\infty;0)$.
14. $X=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2<1\right\}$, $Y=\mathbf{R}^2$.
15. $X=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le 1\right\}$, $Y=\mathbf{R}^2$.
16. $X=\mathbf{R}^2$; $Y=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : |x|<1,\ y<1\right\}$.
17. $X=\mathbf{N}$, $Y=\mathbf{Q}$.
18. $X=\mathbf{N}$, $Y=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x,\ y\in\mathbf{Q}\right\}$.
19. $X=[2,3]$, Y – ýëëèï ñ.
20. $X=[0;1]$, Y – î êðóæí î ñòü.
21. X – î êðóæí î ñòü, Y – ýëëèï ñ.
22. $X=\mathbf{R}$, $Y=\mathbf{R}_+$ – множество положительных действительных чисел.
23. $X=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $Y=\mathbf{R}$.
24. $X=\mathbf{N}$, Y – ì í î æåñòâî ÷åòí û õ ÷èñåë.
25. X – î òðåçî ê, Y – êâàäðàò.

§ 3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. Метрическим пространством называется пара (X,ρ), состоящая из некоторого множества X и расстояния (метрики) ρ, т.е. вещественной функции $\rho(x,y)$, определяемой для любых $x,y\in X$ и удовлетворяющей следующим аксиомам:

1) $\rho(x,y)\ge 0$, причем $\rho(y,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$ (аксиома тождества),
2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для всех $x,y\in X$ (аксиома симметрии),
3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)$ для всех $x,y,z\in X$ (неравенство треугольника).

Замечание 1. Из аксиом метрики легко получается так называемое обратное неравенство треугольника

$$|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\le\rho(x,y).$$

Замечание 2. Элементы метрического пространства называются точками.

Замечание 3. Всякое множество *Y*, лежащее в метрическом пространстве X и имеющее те же расстояния между элементами, что и *X*, само является метрическим пространством и называется подпространством пространства *X*.

Определение 2. Элемент a метрического пространства X называется пределом последовательности $\{x_n\} \subset X$, если $\rho(x_n, a) \to 0$ при $n \to \infty$, при этом пишут $x_n \to a$, $n \to \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Доказать следующие очевидные утверждения.

Теорема 1. Если последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства X сходится к точке $a \in X$, то любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ сходится к этой же точке a.

Теорема 2. Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства X может сходиться не более чем к одному пределу.

Теорема 3. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $a \in X$, то последовательность $\rho(x_n, \theta)$ ограничена для любой фиксированной точки $\theta \in X$.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется сходящейся в себе (еще ее называют последовательностью Коши или фундаментальной последовательностью), если выполнено одно из двух условий:

1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_ε такое, что для всех $m, n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_ε такое, что для всех $n > N_\varepsilon$ и всех $p \in \mathbf{N}$ (где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел) выполняется неравенство $\rho(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

Упражнение: покажите, что 1) эквивалентно 2).

Определение 4. Метрическое пространство X называется полным, если всякая сходящаяся в себе последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится к элементу этого пространства.

Упражнение: покажите, что если последовательность сходится к пределу a, то она сходится в себе.

ЗАДАНИЕ № 3

1. Пусть $X = C^{(1)}[a;b]$. Будет ли метрикой функция
$$\rho_1(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |x'(t) - y'(t)| ?$$
Доказать полноту пространства (X, ρ_1).
2. Пусть $X = C^{(1)}[a;b]$. Будет ли метрикой функция
$$\rho_2(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} (|x(t) - y(t)| + |x'(t) - y'(t)|) ?$$
Доказать полноту пространства (X, ρ_2).
3. Пусть X – множество всех последовательностей непрерывных на [a,b] функций $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{t\in[a;b]} |f_n(t)|$. Проверить аксиомы метрики для функции $\rho(f,g) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sup\limits_{t\in[a,b]} |f_i(t) - g_i(t)|$. Доказать полноту пространства (X, ρ).
4. Доказать, что множество всех ограниченных функций на отрезке [a,b] образует метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y) = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$.
5. Доказать, что множество всех непрерывных на [a,b] функций, для которых $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt$ сходится, является метрическим пространством с метрикой

$$\rho\ (x,y)=\left(\int\limits_a^b |\,x(t)-y(t)\,|^p\ dt\right)^{1/p}.$$

6. Доказать, что множество l_p $(1\le p<+\infty)$ всевозможных последовательностей $x=(x_1,...,x_n,...)$ действительных чисел, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\,x_n\,|^p<+\infty$, является метрическим пространством с метрикой
$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\,x_n-y_n\,|^p\right)^{1/p},\quad x,y\in l_p.$$

Доказать, что нижеуказанные функции являются метриками на соответствующих множествах.

7. $\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{m}\max\limits_{t\in[a,b]}|\,x^{(n)}(t)-y^{(n)}(t)\,|$ í à $X=C^{(m)}[a,b]$.

8. $\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\dfrac{|\,x_n-y_n\,|}{1+|\,x_n-y_n\,|}$ на множестве числовых последовательностей $X=\{x=(x_1,...x_n,...),\quad x_i\in\mathbf{R},\ i\in\mathbf{N}\}$.

9. $\rho\ (x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|\,x(t)-y(t)\,|$ í à $X=C[a,b]$.

10. $\rho\ (x,y)=\sup\limits_{i}|\,x_i-y_i\,|$ í à $X=\mathrm{m}$, т.е. на пространстве ограниченных последовательностей
($x=(x_1,...,x_i,...),\ y=(y_1,...,y_i,...);\quad x,y\in\mathrm{m}$).

11. $\rho\ (x,y)=\sup\limits_{i}|\,x_i-y_i\,|$ í à $X=\mathrm{c}$, т.е. на пространстве сходящихся числовых последовательностей
($x=(x_1,...,x_i,...),\ y=(y_1,...,y_i,...),\quad x,y\in\mathrm{c}$).

12. $\rho\ (x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\,x(t)-y(t)\,|\,dt$ í à $X=CL_1(\mathbf{R})$, т.е. на множестве всех функций, непрерывных и абсолютно интегрируемых на числовой оси $\mathbf{R}$.

Будут ли образовывать метрические пространства следующие множества с введенными на них функциями.

13. $X=C^{(1)}[a,b],\quad \rho(x,y)=\sup\limits_{t\in[a,b]}|\,x'(t)-y'(t)\,|$.
14. $X=\mathbf{R},\quad \rho(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y\,|$.
15. $X=\mathbf{R},\quad \rho(x,y)=|\,x-y\,|$.
16. $X=\mathbf{R},\quad \rho(x,y)=\sin^2(x-y)$.
17. $X=C[a,b],\quad \rho(x,y)=\int\limits_a^b|\,x(t)-y(t)\,|\,dt$, в этом случае используется обозначение $(X,\rho)\doteq C_1[a,b]$.
18. $X=\mathbf{R}^n,\quad \rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$.
19. $X=C[a,b],\quad \rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b\big(x(t)-y(t)\big)^2\,dt}$, в этом случае используется обозначение $(X,\rho)\doteq C_2[a,b]$.
20. $X=\mathbf{N},\quad \rho(m,n)=\dfrac{|\,m-n\,|}{mn}$.
21. $X=\mathbf{N},\quad \rho(m,n)=\begin{cases}0, & m=n\\ 1+\dfrac{1}{m+n}, & m\ne n\end{cases}$.
22. X – множество всех точек окружности, расстоянием считать длину наименьшей дуги, соединяющей две данные точки.

Пусть (X,ρ) – произвольное метрическое пространство. Проверить выполнение аксиом метрики для следующих функций.

23. $\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$.
24. $\rho_2(x,y)=\min\{\rho(x,y);1\}$.
25. $\rho_3(x,y)=\ln\left(1+\rho(x,y)\right)$.

ЗАДАНИЕ № 4

Найти расстояние между элементами x и y в пространствах $C[a,b], C_1[a,b], C_2[a,b]$.
Изобразить шар с центром в точке x_0 радиуса $r=1$ в пространстве $C[a,b]$.

1. $x(t)=t;\quad y(t)=t^3;\quad t\in[-1,1];\quad x_0(t)=\ln t,\quad t\in[1;3]$.
2. $x(t)=\sin t;\quad y(t)=t;\quad t\in[0,\pi];\quad x_0(t)=\operatorname{arctg} t,\quad t\in[0;1]$.
3. $x(t)=\sin t;\quad y(t)=2t;\quad t\in[0,\pi];\quad x_0(t)=e^{t+1},\quad t\in[0;1]$.
4. $x(t)=\cos 2t; y(t)=t+1; t\in[0,\pi];\quad x_0(t)=|t^2+2t|, t\in[-3,1]$.
5. $x(t)=e^t;\quad y(t)=t+1;\quad t\in[0,1];\quad x_0(t)=\cos(t+1),\quad t\in[-1,0]$.
6. $x(t)=e^t;\quad y(t)=\sin t;\quad t\in[0,1];\quad x_0(t)=\dfrac{t}{t-1},\quad t\in[2;3]$.
7. $x(t)=e^{3t};\quad y(t)=\sin 2t;\quad t\in[0,1];\quad x_0(t)=\dfrac{t}{t-2},\quad t\in[3;4]$.
8. $x(t)=|t|;\quad y(t)=t^2;\quad t\in[0,1];\quad x_0(t)=\sqrt{t+1},\quad t\in[0;3]$.
9. $x(t)=t^3;\quad y(t)=4t;\quad t\in[0,3];\quad x_0(t)=|\sin t|,\quad t\in[0;2\pi]$.
10. $x(t)=t^4;\quad y(t)=t^2;\quad t\in[0,2];\quad x_0(t)=|\cos t|,\quad t\in[0;\pi]$.

11. $x(t)=\ln(t+1);\ y(t)=t;\ t\in[0,1];\ x_0(t)=\arcsin t,\ t\in[-1,1]$.
12. $x(t)=\ln t+1;\ y(t)=2t;\ t\in[1,3];\ x_0(t)=|1-t|,\ t\in[0;2]$.
13. $x(t)=e^t;\ y(t)=\cos t;\ t\in[0,1];\ x_0(t)=\dfrac{t}{t+3},\ t\in[-2;1]$.
14. $x(t)=e^{-t};\ y(t)=\sin t;\ t\in[-1,0];\ x_0(t)=\sqrt{1-t},\ t\in[-4;0]$.
15. $x(t)=e^{-2t};\ y(t)=|t|;\ t\in[-1,0];\ x_0(t)=|\sin 2t|,\ t\in[-\pi;\pi]$.
16. $x(t)=|t-1|;\ y(t)=e^t;\ t\in[0,1];\ x_0(t)=|2\cos\dfrac{t}{2}|, t\in[-2\pi;0]$.
17. $x(t)=\sin\dfrac{t}{2};\ y(t)=1-e^t;\ t\in[0,\pi];\ x_0(t)=\ln|t|,\ t\in[-3;-\dfrac{1}{e}]$.
18. $x(t)=\cos t;\ y(t)=1+\sin 2t;\ t\in[0,\pi];\ x_0(t)=e^{|t|},\ t\in[-2;1]$.
19. $x(t)=-t;\ y(t)=\ln(1-t);\ t\in[-1,0];\ x_0(t)=\sqrt{\sin t},\ t\in[0;\pi]$.
20. $x(t)=(t-1)^2;\ y(t)=t;\ t\in[-1;-2];\ x_0(t)=tg\dfrac{t}{2},\ t\in[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{3}]$.
21. $x(t)=\sqrt{t};\ y(t)=t+1;\ t\in[0;1];\ x_0(t)=1-\cos t,\ t\in[-\dfrac{\pi}{2};\pi]$.
22. $x(t)=1-\sqrt{t};\ y(t)=2t+1;\ t\in[0;2];\ x_0(t)=|\cos t-1|,\ t\in[0;\pi]$.
23. $x(t)=2t-t^2;\ y(t)=t^2;\ t\in[-1,1];\ x_0(t)=|1-e^t|,\ t\in[-1;2]$.
24. $x(t)=t^4;\ y(t)=t^3;\ t\in[-1,2];\ x_0(t)=\sin t-1,\ t\in[0;\pi]$.
25. $x(t)=\sin(t-\dfrac{\pi}{4});\ y(t)=t;\ t\in[0,\dfrac{\pi}{2}];\ x_0(t)=t-t^2,\ t\in[-1;2]$.

ЗАДАНИЕ № 5

Найти расстояние между элементами x и y в пространствах $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}_1^n, \mathbf{R}_\infty^n$ (n=3).
Изобразить шар с центром в точке x_0 радиуса r, в каждом из этих пространств при $n=2$.

1. $x=(1,2,3)$, $y=(-1,0,7)$; $x_0=(1;2)$, $r=2$.
2. $x=(-1,0,2)$, $y=(2,0,3)$; $x_0=(-1;-2)$, $r=3$.
3. $x=(7,1,5)$, $y=(0,2,1)$; $x_0=(-1;2)$, $r=1$.
4. $x=(6,2,4)$, $y=(1,1,0)$; $x_0=(1;-2)$, $r=4$.
5. $x=(5,3,5)$, $y=(2,2,1)$; $x_0=(2;1)$, $r=1$.
6. $x=(4,4,6)$, $y=(3,3,2)$; $x_0=(-2;-1)$, $r=2$.
7. $x=(-3,2,-2)$, $y=(-5,2,-1)$; $x_0=(-2;1)$, $r=2$.
8. $x=(-2,3,-2)$, $y=(-4,2,0)$; $x_0=(2;-2)$, $r=3$.
9. $x=(-1,4,0)$, $y=(-3,2,1)$; $x_0=(-2;-1)$, $r=4$.
10. $x=(9,-3,4)$, $y=(0,-7,1)$; $x_0=(0;2)$, $r=1$.
11. $x=(10,-2,5)$, $y=(1,-6,2)$; $x_0=(0;-2)$, $r=2$.
12. $x=(11,-1,6)$, $y=(2,-4,3)$; $x_0=(2;0)$, $r=1$.
13. $x=(12,0,7)$, $y=(3,-3,4)$; $x_0=(-2;0)$, $r=3$.
14. $x=(-3,-2,0)$, $y=(0,7,5)$; $x_0=(3;-4)$, $r=1$.
15. $x=(-2,-1,1)$, $y=(1,8,6)$; $x_0=(-3;4)$, $r=2$.
16. $x=(-1,0,2)$, $y=(2,9,7)$; $x_0=(3;4)$, $r=3$.
17. $x=(0,1,3)$, $y=(3,10,8)$; $x_0=(-3;-4)$, $r=1$.
18. $x=(-5,3,-1)$, $y=(0,1,0)$; $x_0=(3;2)$, $r=1$.
19. $x=(-4,4,0)$, $y=(1,2,1)$; $x_0=(-3;-2)$, $r=2$.
20. $x=(5,1,-1)$, $y=(0,4,8)$; $x_0=(2;3)$, $r=2$.
21. $x=(3,-4,1)$, $y=(1,-2,-3)$; $x_0=(2;-3)$, $r=1$.
22. $x=(8,5,-2)$, $y=(-1,2,-1)$; $x_0=(4;1)$, $r=2$.
23. $x=(7,-2,1)$, $y=(-2,-1,6)$; $x_0=(0;3)$, $r=1$.
24. $x=(4,5,-2)$, $y=(7,4,1)$; $x_0=(-3;-1)$, $r=3$.
25. $x=(-6,3,2)$, $y=(-2,1,0)$; $x_0=(-1;3)$, $r=2$.

§ 4. МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть X – метрическое пространство с метрикой ρ.

Определение 1. Открытым шаром радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке $x_0\in X$ называется множество

$$B_\varepsilon(x_0)=\left\{x\in X:\rho(x,x_0)<\varepsilon\right\}.$$

Замечание. Окрестностью точки x_0 будем называть открытый шар с центром в точке x_0 радиуса ε.

Определение 2. Замкнутым шаром радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке $x_0\in X$ называется множество

$$B_\varepsilon[x_0]=\left\{x\in X:\ \rho(x,x_0)\le\varepsilon\right\}.$$

Пусть M – подмножество метрического пространства X.

Определение 3. Множество M называется ограниченным, если его можно поместить в шар конечного радиуса.

Определение 4. Точка $x_0\in X$ называется точкой прикосновения множества M, если любая окрестность точки x_0 содержит хотя бы одну точку M, т.е. если $B_\varepsilon(x_0)\bigcap M\ne 0$ для любого $\varepsilon>0$.

Определение 5. Точка $x_0\in X$ называется предельной точкой множества M, если любая окрестность точки x_0 содержит хотя бы одну точку множества $M\setminus\{x_0\}$, т.е. если $B_\varepsilon(x_0)\bigcap(M\setminus\{x_0\})\ne 0$ для любого $\varepsilon>0$.

Определение 6. Точка $x_0\in M$ называется изолированной точкой множества M, если существует окрестность точки x_0, в которой нет других точек, отличных от x_0, т.е. $B_\varepsilon(x_0)\bigcap M=\{x_0\}$ при некотором $\varepsilon>0$.

Определение 7. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется замыканием этого множества и обозначается $\bar{M}$ (èëè $[M]$).

Операция перехода от множества M к его замыканию называется операцией замыкания. Ясно, что операция замыкания заключается в присоединении к множеству M предельных точек, не принадлежащих этому множеству.

Определение 8. Точка $x_0 \in M$ называется внутренней точкой множества M, если она входит в множество M вместе с некоторой окрестностью, т.е. $B_{\varepsilon}(x_0) \subset M$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Определение 9. Множество M называется открытым, если все его точки внутренние.

Определение 10. Множество M называется замкнутым, если $M = \overline{M}$, т.е. M содержит все свои предельные точки.

Определение 11. Множество M называется всюду плотным в X, если $\overline{M} = X$.

Определение 12. Множество M метрического пространства X, называется компактным в X (относительно компактным), если любое бесконечное подмножество из M содержит сходящуюся последовательность.

Если предельные элементы всех этих последовательностей принадлежат множеству M, то M называется компактным в себе или просто компактным.

Теорема 1. Относительно компактное множество ограничено.

ЗАДАНИЕ № 6

1. Доказать, что замыкание $\overline{M}$ множества M совпадает с пересечением всех замкнутых множеств, содержащих данное множество M.

2. Пусть $x_0(t)$ – фиксированная функция в $C[a,b]$. Доказать, что множество $\{x(t) \in C[a;b] : x(t) < x_0(t)\}$ открыто в пространстве $C[a,b]$.
3. Через M_k обозначим множество всех функций $x(t)$ из $C[a,b]$, удовлетворяющих условию Липшица с постоянной k: $|x(t_1) - x(t_2)| \le k\,|t_1 - t_2|$ ($\forall t_1, t_2 \in [a;b]$). Доказать, что M_k совпадает с замыканием множества всех дифференцируемых на $[a,b]$ функций таких, что $|x'(t)| \le k$ ($t \in [a;b]$).
4. Доказать, что каждое ограниченное множество функций, удовлетворяющих условию Липшица, компактно в пространстве $C[a,b]$.
5. Доказать, что множество функций, имеющих на $[a,b]$ n-ую производную, ограниченную константой m, является компактным.
6. Доказать, что любое замкнутое подмножество компактного в себе множества является компактным в себе.
7. Доказать, что пересечение любого числа компактных в себе множеств – компактное в себе множество.
8. Доказать, что замыкание объединения двух множеств равно объединению замыканий этих множеств.
9. Доказать, что граница каждого множества замкнута.
10. Доказать, что множество замкнуто, если оно включает все свои граничные точки.
11. Доказать, что всякое замкнутое подпространство M полного метрического пространства X есть полное метрическое пространство.
12. Доказать, что замыкание каждого множества замкнуто.
13. Доказать, что из включения $M_1 \subset M_2$ следует включение $\bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$.

14. Доказать, что объединение конечного числа компактов есть компакт, а объединение конечного числа относительно компактных множеств – относительно компактное множество.
15. Доказать, что в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ любое замкнутое ограниченное множество компактно.
16. Доказать, что объединение любого числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.
17. Доказать, что пересечение любого числа и объединение любого конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.
18. Показать, что всякая точка прикосновения множества *M* является либо предельной для него, либо изолированной точкой этого множества.
19. Доказать, что для того чтобы множество *M* было открыто в *X*, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $X \setminus M$ было замкнутым.
20. Доказать, что для того чтобы множество *M* было замкнутым в *X*, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $X \setminus M$ было открытым.
21. Доказать, что для того чтобы точка x_0 была предельной для *M*, необходимо и достаточно, чтобы в *M* существовала последовательность попарно различных точек, сходящихся к x_0.
22. Доказать, что в произвольном метрическом пространстве справедливо включение $\overline{B(x_0,r)} \subset B[x_0,r]$. Привести примеры метрических пространств, в которых $\overline{B(x_0,r)} \neq B[x_0,r]$.

23. Доказать, что множество P всех многочленов всюду плотно в пространстве $C^{(k)}[a;b]$ всех *k* раз непрерывно дифференцируемых функций с метрикой
$$\rho(x,y)=\sum_{i=0}^{k}\max_{t\in[a,b]}|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|.$$
24. Доказать, что если отображение $A: X \to X$ полного метрического пространства *X* в себя такое, что при некотором натуральном *n* его степень (*n*-ая итерация) A^n является сжимающим отображением, то *A* имеет и при том единственную неподвижную точку.
25. Пусть X – полное метрическое пространство, *A* и *B* – сжимающие отображения из *X* в *X*, причем
$$\rho(Ax,Ay)\le\alpha_A\rho(x,y),\quad \rho(Bx,By)\le\alpha_B\rho(x,y).$$
Доказать, что если $(Ax,Bx)<\varepsilon$ для всех $x\in X$ (такие отображения *A* и *B* называются ε-близкими), то их неподвижные точки находятся на расстоянии, не превосходящем величины $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$, где $\alpha=\max(\alpha_A,\alpha_B)<1$.

ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. Непустое множество X элементов *x, y, z …* называется линейным или векторным пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям.

1. Для любых двух элементов $x, y \in X$ однозначно определен третий элемент $z \in X$, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$, причем
   1) $x + y = y + x$ (коммутативность),
   2) $x + (y+z) = (x+y) + z$ (ассоциативность),
   3) в X существует такой элемент θ, что $x + \theta = x$ для всех $x \in X$ (существование нуля),
   4) для каждого $x \in X$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = \theta$ (существование противоположного элемента).
2. Для любого числа α и любого элемента $x \in X$ элемент $\alpha x \in X$ (произведение элемента x на число α), причем
   1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
   2) $1 \cdot x = x$,
   3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
   4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Если $\alpha \in \mathbf{R}$, то X – действительное линейное пространство.
Если $\alpha \in \mathbf{C}$, то X – комплексное линейное пространство.

ЗАДАНИЕ 7

Являются ли векторными пространствами над полем $\mathbf{R}$ следующие множества:

1. Множество рациональных чисел.

2. Множество иррациональных чисел.
3. Множество функций, монотонных на отрезке $[a,b]$.
4. Множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющих условию $x(a) = 0$.
5. Множество непрерывных периодических на $\mathbf{R}$ функций.
6. Множество $C[a,b]$ – функций, непрерывных на $[a,b]$.
7. Множество функций, непрерывных на $[a,b]$ и удовлетворяющих условию $x(a) = 1$.
8. Подмножество V векторов x из $\mathbf{R}^3$ ($V \subset \mathbf{R}^3$), для которого выполнено условие $x_1 = 0$.
9. Подмножество $V \subset \mathbf{R}^3$, для которого выполнено условие $x_1 + x_2 = 0$.
10. Подмножество $V \subset \mathbf{R}^3$, для которого выполнено условие $x_1 + x_2 = 1$.
11. Пусть P – пространство полиномов x с обычными операциями сложения и умножения на число. Пусть V – подмножество тех x из P, для которых выполнено условие: степень x равна 4.
12. Пусть P из задания 11, а V – подмножество тех x из P, для которых выполнено условие: $2x(0) = x(1)$.
13. Множество M_{mn} – множество всех прямоугольных матриц строения $m \times n$ относительно обычных операций сложения матриц и умножения матриц на число.
14. Множество $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$, если под суммой элементов понимать их произведение, а под произведением элемента x на $\alpha \in \mathbf{R}$ элемент x^α.
15. Множество четных многочленов степени не выше n.
16. Множество тригонометрических многочленов степени не выше 2, т. е. множество функций вида

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t\,.$$

17. Множество действительных чисел R с операциями
"$x + y$" $= \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, y)$, "$\alpha x$" $= \mathrm{tg}(\alpha\, \mathrm{arctg}\, x)$, $x, y \in \mathbf{R}$.
18. Множество верхних треугольных квадратных матриц порядка n с обычными операциями сложения матриц и умножения матриц на число.
19. Множество функций таких, что $\sup\limits_{[a,b]} |f(x)| \le 1$.
20. Множество функций, ограниченных на $[a,b]$.
21. Множество функций, дифференцируемых на $[a,b]$.
22. Множество функций, не отрицательных на $[a,b]$.
23. Множество функций таких, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$.
24. Подмножество V èç $\mathbf{R}^2$, состоящее из тех векторов x, что $|x| \le 1$, $x = (x_1, x_2)$.
25. Подмножество V èç $\mathbf{R}^3$, состоящее из тех векторов x, что $x_1 = x_2 = x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1. Линейное пространство X над полем K (где $K = \mathbf{R}$ или $K = \mathbf{C}$) называется нормированным, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$, называемое нормой x, так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ (невырожденность нормы);

2) для всех $x \in X$ è âñåõ $\lambda \in K$ выполняется равенство $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (однородность нормы);

3) для всех $x, y \in X$ выполняется $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Замечание. Любое линейное нормированное пространство порождает метрическое пространство (X, ρ), где $\rho(x, y) = \|x - y\|$ $(x, y \in X)$ – метрика, порожденная нормой.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства X называется сходящейся по норме к элементу $x \in X$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Определение 3. Нормированное пространство, полное относительно порожденной метрики, называется банаховым пространством.

Определение 4. Две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие числа $\alpha > 0, \beta > 0$, что для любого $x \in X$ выполняются неравенства $\alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1$.

ЗАДАНИЕ № 8

Доказать, что перечисленные ниже линейные пространства являются нормированными относительно указанных норм. Что означает сходимость последовательности по норме в каждом из этих пространств?

1. $X = \mathbf{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.
2. $X = \mathbf{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \le k \le n} |x_k|$.
3. $X = \mathbf{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.

4. $X = \mathbf{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ $(p > 1)$.

5. Пространство l_1 последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, $x_k \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty, \quad \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

6. Пространство l_2 последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, $x_k \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty, \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

7. При $p > 1$ пространство l_p последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, $x_k \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

8. Пространство $\boldsymbol{m}$ ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, $x_k \in \mathbf{R}$, $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

9. Пространство $\boldsymbol{c}_0$ стремящихся к нулю последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, $x_k \in \mathbf{R}$, $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

10. Пространство $\boldsymbol{c}$ сходящихся последовательностей $x = (x_1, x_2, ...)$, $x_k \in \mathbf{R}$, $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

11. Пространство $C[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

12. Пространство $C^{(n)}[a,b]$ n раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, $\|x\| = \sum_{k=1}^{n} \max_{t \in [a,b]} |x^{(k)}(t)|$.

Можно ли в линейном пространстве $C^{(1)}[a,b]$ принять за норму элемента следующие функционалы.

13. $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|$.

14. $\|x\| = |x(a) - x(b)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|$.

15. $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\, dt + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|$.

Можно ли в линейном пространстве $C^{(2)}[a,b]$ принять за норму элемента следующие функционалы.

16. $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \max_{t \in [a,b]} |x''(t)|$.

17. $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max_{t \in [a,b]} |x''(t)|$.

18. $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$.

19. Доказать, что $\|x - y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big|$ для всех x и y из линейного нормированного пространства X.

20. Доказать, что $\|x\| \leq \max\left(\|x + y\|, \|x - y\|\right)$ для всех x и y из линейного нормированного пространства X.

Пусть $x_n, y_n,\ x, y$ принадлежат линейному нормированному пространству X, а $\lambda_n, \lambda \in K$ $(n \in \mathbf{N})$. Доказать следующие утверждения.

21. Если $x_n \to x$ и $\|x_n - y_n\| \to 0$, то $y_n \to x$ при $n \to \infty$.
22. Если $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, то $\lambda_n x_n \to \lambda x$ при $n \to \infty$.
23. Если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$ при $n \to \infty$.
24. Если $x_n \to x$, $y_n \to y$, то $x_n + y_n \to x + y$ при $n \to \infty$.
25. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и по одной из них X является банаховым пространством. Доказать, что X является банаховым пространством и по другой норме.

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение 1. Пусть *X, Y* – линейные пространства над полем *K*, где *K* – поле вещественных или комплексных чисел, $\Omega \subseteq X$. Если каждому элементу $x \in \Omega$ ставится в соответствие определенный элемент $y \in Y$, то говорят, что на Ω задан оператор *A*. Множество Ω называется областью определения оператора *A* и обозначается *D(A)*. Множество $E(A) = \{ y \in Y : \ y = Ax, \ x \in \Omega \}$ называется областью значений оператора *A*. Элемент *y* называется образом элемента ***x***, а элемент ***x*** – прообразом элемента *y*.

Определение 2. Оператор A, действующий из линейного пространства *X* в линейное пространство *Y*, называется линейным, если

1) для всех $x, y \in X$ выполняется $A(x+y) = Ax + Ay$ (аддитивность оператора),

2) для всех $x \in X$ и всех $\lambda \in R$ выполняется равенство $A(\lambda x) = \lambda Ax$ (однородность оператора).

Замечание. Если $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$, то линейный оператор называется линейным функционалом.

Определение 3. Оператор *A*, действующий из линейного нормированного пространства *X* в линейное нормированное пространство *Y* называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $x_n \to x_0$ влечет $Ax_n \to Ax_0$ при $n \to \infty$.

Определение 4. Линейный оператор *A*, действующий из линейного нормированного пространства *X* в линейное нормированное пространство *Y* называется ограниченным, если существует такое число $C > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X$.

Наименьшее из чисел *C*, удовлетворяющих данному неравенству, называется нормой оператора и обозначается $\|A\|$. Норму оператора можно определить также равенствами

$$\|A\| = \sup_{x \ne \theta} \left(\|Ax\|_Y / \|x\|_X \right) = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y .$$

Теорема 1. Для того чтобы линейный оператор $A : X \to Y$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.

ЗАДАНИЕ № 9

Проверить линейность операторов. Установить область определения и область значения операторов. Найти образ x_0 при данном отображении.

1. $(Ax)(t) = \int_0^1 x(t) \sin t dt + \cos t, \quad x_0(t) = t^2$.
2. $(Ax)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt, \quad x_0(t) = \sin 2t$.
3. $(Ax)(t) = 2\cos t\, \ddot{x}(t) + 2\sin t\, \dot{x}(t) + x(t), \quad x_0(t) = \cos(t^2+1)$.
4. $(Ax)(t) = \dfrac{d}{dt}\left(x(t) \cdot (t^2 + 3t + 1) \right), \quad x_0(t) = \mathrm{tg}\ t$.

5. $(Ax)(t) = \int\limits_0^{\pi} x\cos t dt, \quad x_0(t) = e^t$.

6. $(Ax)(t) = \sin t\, x^{(5)}(t) + \cos t\, x^{(3)}(t) + x^{(2)}(t), \ x_0(t) = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$.

7. $(Ax)(t) = \int\limits_0^{t} x^2(t)dt + e^t, \quad x_0(t) = \cos 4t$.

8. $(Ax)(t) = \dfrac{d}{dt}\int\limits_{2t}^{t^2} x(s)ds, \quad x_0(t) = \cos t^2$.

9. $(Ax)(t) = 2\int\limits_0^1 e^{s+1}x(s)ds + e^t, \quad x_0(t) = \sin(t+1)$.

10. $(Ax)(t) = \int\limits_0^{\pi} |x(t)|\, dt + \int\limits_0^{\pi} \cos\dfrac{t}{2}dt, \quad x_0(t) = \cos t$.

11. $Ax = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

12. $Ax = e^{ix} + (i+1), \quad x_0 = 2i + 1$.

13. $(Ax)(t) = \int\limits_t^0 (t+1)x(t)dt, \quad x_0(t) = \cos t$.

14. $(Ax)(t) = \dfrac{d}{dt}\left(x^2(t) + 2x(t)\right), \quad x_0(t) = \sin 3t$.

15. $(Ax)(t) = t^2x(0), \quad x_0(t) = e^{2t^2-1}$.

16. $Ax = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$, ãäå $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

17. $Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ -x_3 & x_2 \end{pmatrix}$, ãäå $x = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad x_0 = (1;2;3)^T$.

18. $Ax = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$, ãäå $x = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad x_0 = (5;-2;0)^T$.

19. $Ax = (x_2^2, x_1)$, ãäå $x = (x_1, x_2)^T, \ x_0 = (4;-1)^T$.

20. $Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}$, ãäå $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

21. $Ax = (x_2, 2x_1, x_3 + x_1)^T$, ãäå $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}, \ x_0 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

22. $(Ax)(t) = t\,(x(t)+1)$, ãäå $x(t) = x_1t^2 + x_2t + x_3$,
$x_0(t) = -2t^2 + 1$.

23. $(Ax)(t) = t\,x(t) + 1$, ãäå $x(t) = x_1t^2 + x_2t + x_3$,
$x_0(t) = t^2 + 5t - 2$.

24. $(Ax)(t) = \dfrac{d}{dt}\left(e^t x(t)\right), \quad x_0(t) = \sin t^2$.

25. $Ax = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}$, ãäå $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T, \ x_0 = (4;-1;2)^T$.

ГЛАВА III. РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X – линейное пространство над полем К, где К – поле вещественных или комплексных чисел.

Определение 1. Скалярным произведением в X называется отображение пары (x,y) из $X \times X$ в поле К, удовлетворяющее при любых $x, y, z \in X$ è $\alpha, \beta \in K$ условиям:

1) $(x,x) \geq 0$, ïðè÷åì $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ (θ – íóëü â ïðîñòðàíñòâå X),

2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$,

3) $(y,x) = \overline{(x,y)}$.

Черта в условии 3) означает комплексное сопряжение. Если $K = \mathbf{R}$, то условие 3) имеет вид: $(y,x) = (x,y)$. С помощью скалярного произведения в X можно ввести норму $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Если пространство X с введенной таким образом нормой полно, то X называется гильбертовым пространством.

Определение 2. Пусть X – пространство со скалярным произведением. Если $(x,y) = 0$, то элементы x и y называются ортогональными и пишут $x \perp y$.

Определение 3. Система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ из X (не равных нулю одновременно) называется ортогональной системой, если $(x_k, x_l) = 0$ при всех $k, l = 1, 2, \ldots, \quad k \neq l$.

Определение 4. Система элементов $x_1, x_2, \ldots$ называется ортонормированной, если $(x_k, x_l) = \begin{cases} 0 & \text{ïðè } k \neq l \\ 1 & \text{ïðè } k = l \end{cases}$ при всех $k, l = 1, 2, \ldots$.

Определение 5. Вещественное (комплексное) линейное пространство X с введенным на нем скалярным произведением называется евклидовым (унитарным).

Теорема 1. Пусть X – евклидово (унитарное) пространство, рассмотрим конечную или бесконечную систему его элементов $\{x_k\}$. Если система $\{x_k\}$ линейно независима, то по ней можно построить ортогональную, а также ортонормированную систему, применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта: $y_1 = x_1; \quad y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i$.

Система $\{y_k\}$ ортогональна. Из нее можно получить ортонормированную систему $\{l_k\}$, полагая $l_k = y_k / \|y_k\|$.

ЗАДАНИЕ № 10

1. Показать, что $(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \overline{y}_n, \quad 0 < \alpha_n \leq 1$ будет скалярным произведением в комплексном пространстве l_2.
2. Пусть $(x,y) = \int_0^1 \alpha(t) x(t) y(t) dt$, ãäå $\alpha(t) \in C[0;1]$. Будет ли это отображение определять в $C_2[0,1]$ скалярное произведение?
3. Показать, что в неравенстве Коши-Буняковского $|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$ равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = \alpha y$.
4. Проверить ортогональность в l_2 системы $\{l_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, где k-ая координата вектора l_k равна 1, а остальные координаты равны нулю.

5. Проверить ортогональность в $L_2([0,2\pi])$ системы функций: $1,\ \cos t, \sin t, ..., \cos nt, \sin nt, ...$.
6. Проверить тождество $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (равенство параллелограмма).
7. Провести процесс ортогонализации для функций $1, t, t^2, t^3 ...$ в $L_2[-1,1]$.
8. Показать, что отображение

$$(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt+\int_a^b x'(t)y'(t)dt$$

определяет в $C^{(1)}[a,b]$ скалярное произведение.
9. Пусть x_n è y_n по норме не превосходят единицы, показать, что из $(x_n, y_n)\to 1$ следует $\|x_n-y_n\|\to 0$.
10. Пусть x_n è y_n удовлетворяют условиям задания 9. Показать, что из $\|x_n+y_n\|\to 2$ следует $\|x_n-y_n\|\to 0$.
11. Показать, что скалярное произведение (x,y) есть непрерывная функция относительно сходимости по норме $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, то есть если $\|x_n-x\|\to 0$, $\|y_n-y\|\to 0$, то $(x_n,y_n)\to(x,y)$ ï ðè $n\to\infty$.
12. При каких условиях на α_i отображение

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i y_i$$

определяет в l_2 скалярное произведение?
13. Проверить тождество

$$4(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2.$$

14. В пространстве непрерывных на $(-\infty;+\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2e^{-t^2}dt$ сходится, проверить аксиомы скалярного произведения для $(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)y(t)e^{-t^2}dt$.
15. Провести процесс ортогонализации для системы $1, t, t^2$ в пространстве со скалярным произведением задачи 14.
16. В пространстве непрерывных на $[0;+\infty)$ функций $x(t)$ таких, что $\int_0^{+\infty}|x(t)|^2e^{-t}dt$ сходится, проверить аксиомы скалярного произведения для $(x,y)=\int_0^{+\infty}x(t)y(t)e^{-t}dt$.
17. Ортогонализовать систему функций $1, t, t^2$ в пространстве со скалярным произведением задачи 16.
18. Доказать, что в евклидовом пространстве два вектора x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2$.
19. Доказать, что в унитарном пространстве два вектора x и y ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\lambda x\|^2+\|\mu y\|^2=\|\lambda x+\mu y\|^2 \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbf{C}$.
20. Найти угол между функциями $x(t)=t$ и $y(t)=\sin t$ в пространстве $C^{(1)}[0,\pi]$ (см. задачу 8).
21. Найти угол между функциями $x(t)=t$ и $y(t)=\sin t$ в пространстве $C[0,\pi]$.
22. Проверить ортогональность системы функций $\left\{\sin(2n-1)\frac{t}{2}\right\}$, $n=1,2,...$, в пространстве $L_2[0,\pi]$.

23. Проверить тождество Аполлония в пространстве со скалярным произведением:

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

24. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых векторов *x, y, z, t* справедливо неравенство Птолемея

$$\|x-z\|\cdot\|y-t\|\le\|x-y\|\cdot\|z-t\|+\|y-z\|\cdot\|x-t\|.$$

Когда имеет место равенство?

25. Проверить, что система функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt\right\}, n=1,2,\dots,$ образует ортогональный базис в $L_2[0,\pi]$, а в $L_2[-\pi,\pi]$ является ортогональной системой, но не базисом.

§ 2. РЯДЫ ФУРЬЕ

2.1. Тригонометрические ряды Фурье.

Определение 1. Система функций $\{\varphi_n(x)\}, \varphi_n\in L_2[a,b]$, называется ортогональной на отрезке $[a,b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на $[a,b]$:

$$(\varphi_m,\varphi_k)=0,\quad m\ne k.$$

Определение 2. Ортогональная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ на отрезке $[a,b]$ называется ортонормальной (ортонормированной), если $\|\varphi_n\|=1,\quad n=0,1,\dots$.

Теорема 1. Основная тригонометрическая система функций

$$\left\{1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\dots,\cos\frac{\pi nx}{l},\sin\frac{\pi nx}{l},\dots\right\}$$

является ортогональной на любом отрезке длины *2l* (в частности, на отрезке $[-1,1]$).

Определение 3. Пусть $f(x)\in L_2[a,b]$, $\{\varphi_n(x)\}$ – ортогональная система функций, $\varphi_n(x)\in L_2[a,b]$ $(n=0,1,\dots)$. Говорят, что функция $f(x)$ порождает обобщенный ряд Фурье и пишут

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x),\quad \text{ãäå ÷èñëà}\ \ c_n=\frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2},\quad n=0,1,\dots,$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе функций $\{\varphi_n(x)\}$.

Определение 4. Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом *T=2l*. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right),\qquad(1)$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ \ n\in\mathbf{N},$$

называется тригонометрическим рядом Фурье для $f(x)$.

Теорема 2. Если $f(x)\in L_2[-l,l]$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[-l,l]$ функция, то ее тригонометрический ряд Фурье (1) сходится в каждой точке этого отрезка и для суммы этого ряда $S(x)$ справедливы следующие соотношения:

1) $S(x)=f(x)$, если x является точкой непрерывности функции $f(x)$;

2) $S(x)=\frac{1}{2}\left(f(x_0-0)+f(x_0+0)\right)$, если x_0 – точка разрыва первого ряда функции $f(x)$;

3) $S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left(f(-l+0)+f(l-0)\right)$.

2.2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.

Если функция $f(x)$ четна, то все коэффициенты $b_n=0$. В этом случае говорят, что функция разложена в ряд по косинусам, а коэффициенты находят по формулам:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n=1,2,3,...).$$

Ряд Фурье для четной функции с периодом *2l* имеет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}.$$

Если функция $f(x)$ нечетна, то все коэффициенты $a_n=0 \quad (n=0,1,2,...,)$. Говорят, что функция разложена в ряд по синусам, а коэффициенты вычисляют по формулам:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n=1,2,3,...).$$

Ряд Фурье для нечетной функции с периодом *2l* имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

2.3. Ряды Фурье для функций с периодом 2π.

Пусть $f(x)$ – 2π-периодическая функция, имеющая на отрезке $[-\pi,\pi]$ не более конечного числа точек разрыва первого рода и абсолютно интегрируемая на этом отрезке, тогда эта функция раскладывается в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$: $\quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, где

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,3,...).$$

ЗАДАНИЕ 11

Разложить в ряд Фурье следующие функции.

1. $f(x)=x^2$, $x\in(0,\pi)$ в ряд синусов.
2. $f(x)=x^3$, $x\in(-\pi,\pi)$ в ряд синусов.
3. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0\\ 3, & 0<x<\pi\end{cases}$.
4. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h\\ 0, & h<x<\pi\end{cases}$ в ряд косинусов $(0<h<\pi)$.
5. $f(x)=|x|$, $x\in(-l,l)$.
6. $f(x)=e^x-1$, $x\in(0,2\pi)$.
7. $f(x)=e^x$, $x\in(-l,l)$.
8. $f(x)=\cos ax$, $x\in(-\pi,\pi)$, $a\notin\mathbf{Z}$.
9. $f(x)=\sin ax$, $x\in(-\pi,\pi)$, $a\notin\mathbf{Z}$.

10. $f(x)=\sin ax$, $x\in(0,\pi)$, $a\in\mathbf{Z}$, в ряд косинусов.
11. $f(x)=\cos ax$, $x\in(0,\pi)$, $a\in\mathbf{Z}$, в ряд синусов.
12. $f(x)=\mathrm{sh}ax$, $x\in(-\pi,\pi)$.
13. $f(x)=\mathrm{ch}ax$, $x\in(0,\pi)$, в ряд косинусов.
14. $f(x)=\mathrm{ch}ax$, $x\in(0,\pi)$, в ряд синусов.
15. $f(x)=x(\pi-x)$, $x\in(0,\pi)$, в ряд синусов.
16. $f(x)=|\sin x|$, $x\in(-\pi,\pi)$.
17. $f(x)=x\sin x$, $x\in(-\pi,\pi)$, как 2π -периодическую.
18. $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0\\ x,\ \ 0\le x<\pi\end{cases}$.
19. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & \dfrac{\pi}{3}<x\le\pi\end{cases}$.
20. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}$, $f(-x)=-f(x)$.
21. $f(x)=e^{ax}$, $x\in[0,\pi]$, в ряд косинусов.
22. $f(x)=e^{ax}$, $x\in[0,\pi]$, в ряд синусов.
23. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{h}{2}\\ h-x, & \dfrac{h}{2}<x\le h\end{cases}$.
24. $f(x)=x$, $x\in[0,\pi]$, в ряд косинусов.
25. $f(x)=\mathrm{sh}ax$, $x\in(-\pi,\pi)$.

Разложить в ряд Фурье следующие функции.

1. $f(x)=x\sin x$, $x\in(-\pi,\pi)$, 2π -периодическая.
2. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h}, & 0\le x\le 2h\\ 0, & 2h<x\le\pi\end{cases}$ в ряд косинусов.
3. $f(x)=|x|$, $x\in(-\pi,\pi)$.
4. $f(x)=x$, $x\in(a,a+2l)$.
5. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\dfrac{l}{2}\\ l-x, & \dfrac{l}{2}<x\le l\end{cases}$ в ряд синусов.
6. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$.
7. $f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 1, & 1<x<2\\ 3-x, & 2\le x\le 3\end{cases}$.
8. $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le A\\ 0, & A<x\le\pi\end{cases}$ в ряд косинусов.
9. $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0\\ \dfrac{1}{2}x, & 0<x\le 2\end{cases}$.
10. $f(x)=x\cos x$, $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.
11. $f(x)=x$, $x\in(a,a+2l)$ в ряд синусов.

12. $f(x)=\begin{cases} A, & 0<x<l \\ 0, & l<x<2l \end{cases}$, $x\in(0,2l)$, $A=\mathrm{const}$.

13. $f(x)=x$, $x\in(-\pi,\pi)$.

14. $f(x)=x$, $0\le x\le l$, $f(-x)=f(x)$ и $f(x+2l)=f(x)$.

15. $f(x)=e^{ax}$, $x\in(-h,h)$.

16. $f(x)=e^{x}$, $x\in(-l,l)$, $f(x+2l)=f(x)$.

17. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{l}{2} \\ l-x, & \dfrac{l}{2}<x\le l \end{cases}$.

18. $f(x)=\sin kx$, $x\in(0,\pi)$, в ряд косинусов $(k\in\mathbf{Z})$.

19. $f(x)=|x|$, $x\in(-A,A)$.

20. $f(x)=x^2$, $x\in(0,\pi)$, в ряд косинусов.

21. $f(x)=\begin{cases} 1 & -\pi<x<0 \\ 2 & 0<x<\pi \end{cases}$.

22. $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<l \\ 0, & l<x<2l \end{cases}$.

23. $f(x)=x^2$, $x\in(-l,l)$.

24. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2} \\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi \end{cases}$, $f(-x)=-f(x)$.

25. $f(x)=(\pi-x)x$, $x\in(0,\pi)$, в ряд косинусов.

ГЛАВА IV. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Определение 1. Пусть функционал $J\big(y(x)\big)$ задан на линейном нормированном пространстве M функций $y(x)$. Приращением функционала $J\big(y(x)\big)$, соответствующим приращению аргумента $\delta y(x)$, называется величина

$$\Delta J=\Delta J\big(y(x)\big)=J\big(y(x)+\delta y(x)\big)-J\big(y(x)\big),$$

где $\delta y(x)=\overline{y}(x)-y(x)$, $y(x)\in M$, $\overline{y}(x)\in M$.

Определение 2. Если приращение функционала можно представить в виде $\Delta J=L\big(y(x),\delta y\big)+o\big(\delta y\big)$, $\|\delta y\|\to 0$, где $L\big(y(x),\delta y\big)$ – линейный по δy функционал, то линейная по отношению к приращению δy часть приращения функционала $L\big(y(x),\delta y\big)$ называется вариацией функционала и обозначается δJ.

Определение 3. Говорят, что функционал $J\big(y(x)\big)$ имеет на кривой $y_0(x)$ локальный максимум (локальный минимум), если существует окрестность

$$O_\varepsilon\big(y_0(x)\big)=\big\{y(x)\in M:\ \|y(x)-y_0(x)\|<\varepsilon\big\}$$

такая, что для всех кривых $y(x)\in O_\varepsilon(y_0(x))$ выполняется неравенство $\Delta J\big(y(x)\big)\le 0$ $\quad(\Delta J\big(y(x)\big)\ge 0)$.

Задачи о нахождении экстремума (максимума или минимума) функционала называют вариационными задачами.

Теорема 1. Пусть функция $F(x,y,y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам. Для того чтобы функционал

$J(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')dx$, определенный на множестве функций $y = y(x)$ $(x \in [a,b])$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = A$, $y(b) = B$, достигал на некоторой функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Интегральные кривые уравнения Эйлера называются экстремалями функционала. В развернутой форме уравнение Эйлера имеет вид:

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{y'y'} + F_{xy'} - F_y = 0 \quad (F_{y'y'} \neq 0).$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

1. Пусть F не зависит от y': $F = F(x, y)$. Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид: $F_y(x, y) = 0$.
2. Пусть F зависит только от y': $F = F(y')$. В этом случае экстремалями уравнения Эйлера $F_{y'y'}y'' = 0$ являются прямые $y = C_1x + C_2$.
3. Пусть F не зависит от y: $F = F(x, y')$. Уравнение Эйлера $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$ в этом случае сводится к уравнению $F_{y'}(x, y') = C$.
4. Пусть F не зависит явно от x: $F = F(y, y')$. В этом случае уравнение Эйлера $F_y - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'}y'' = 0$ можно привести к виду $F - y' \cdot F_{y'} = C$.

Пример. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2)dx \to \text{extr}; \ y(1) = 1, y(2) = 8.$$

Решение. Здесь $F = x^2 y'^2 + 12y^2$, $F_y = 24y$ $F_{y'} = 2x^2 y'$. Уравнение Эйлера $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$. Его общее решение $y = C_1x^3 + C_2x^{-4}$. Используя граничные условия, получим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Итак, ответ $y = x^3$.

ЗАДАНИЕ 13

1. $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}$; $x(0) = 1$, $x(1) = 0$.
2. $\int_0^1 (x - \dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(0) = x(1) = 0$.
3. $\int_0^1 (x + \dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(0) = 0$, $x(1) = 2$.
4. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + tx)dt \to \text{extr}$; $x(0) = x(1) = 0$.
5. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + t^2x)dt \to \text{extr}$; $x(0) = 0$, $x(2) = 4$.
6. $\int_0^{\frac{3}{2}} (\dot{x}^3 + 2x)dt \to \text{extr}$; $x(0) = 0$, $x(\frac{3}{2}) = 1$.
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^3 + \cos t \cdot x)dt \to \text{extr}$; $x(0) = 0$, $x(\frac{\pi}{2}) = 1$.

8. $\int\limits_1^e t\dot{x}^2 dt \to \text{extr}$; $x(1)=0,\quad x(e)=1$.

9. $\int\limits_2^3 (t^2-1)\dot{x}^2 dt \to \text{extr}$; $x(2)=0,\quad x(3)=1$.

10. $\int\limits_0^1 (t^2\dot{x}^2+12x^2)dt \to \text{extr}$; $x(0)=0,\quad x(1)=1$.

11. $\int\limits_{-1}^1 (\dot{x}^2+x^2)dt \to \text{extr}$; $x(-1)=x(1)=1$.

12. $\int\limits_0^1 (4x\sin t - x^2-\dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(0)=x(1)=0$.

13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (4x^2-\dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(0)=1,\quad x(\frac{\pi}{4})=0$.

14. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+x^2-\dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(0)=x(\frac{\pi}{2})=0$.

15. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2+x^2+tx)dt \to \text{extr}$; $x(0)=0;\quad x(1)=0$.

16. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}dt \to \text{extr}$; $x(0)=1;\quad x(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2+3x^2)e^{2t}dt \to \text{extr}$; $x(0)=0;\quad x(1)=e$.

18. $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2-x^2+4x\cos t)dt \to \text{extr}$; $x(0)=0;\quad x(\pi)=1$.

19. $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} (4x\sin t + x^2-\dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(0)=x(\frac{3\pi}{2})=0$.

20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (6x\sin 2t + x^2-\dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(0)=0;\quad x(\frac{\pi}{2})=1$.

21. $\int\limits_1^e (2x-t^2\dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(1)=e;\quad x(e)=0$.

22. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2+x^2+2xe^t)dt \to \text{extr}$; $x(0)=0;\quad x(1)=e$.

23. $\int\limits_0^1 (e^{t+x}-x-\sin t)dt \to \text{extr}$; $x(0)=0;\quad x(1)=-1$.

24. $\int\limits_1^e (x\dot{x}+t\dot{x}^2)dt \to \text{extr}$; $x(1)=0;\quad x(e)=1$.

25. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2+x\dot{x}+tx)dt \to \text{extr}$; $x(0)=0;\quad x(1)=\frac{7}{6}$.

§ 2. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА С ФУНКЦИОНАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Экстремали функционала, зависящего от m функций $y_1(x),\dots,y_m(x)\in C^{(1)}[a,b]$,

$$J(y_1,\dots,y_m)=\int\limits_a^b F(x,y_1,\dots y_m y_1',\dots,y_m')dx,$$

удовлетворяющие граничным условиям $y_k(a)=y_k^0$, $y_k(b)=y_k^1$ $(k=1,2,\dots,m)$, находятся из системы уравнений Эйлера:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., m),$$

где функция F дважды непрерывно дифференцируема по всем аргументам.

Пример. Найти экстремали функционала

$$J(y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$$

при условии $y(0) = z(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad z(\frac{\pi}{2}) = -1$

Решение. 1. Здесь $F = y'^2 + z'^2 + 2yz$.

2. Система уравнений Эйлера имеет вид $\begin{cases} z - y'' = 0 \\ y - z'' = 0 \end{cases}$.

3. Решение системы уравнений Эйлера

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x \\ z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x \end{cases}$$

с учетом граничных условий равно $\begin{cases} y = \sin x \\ z = -\sin x \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 14

1. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1 x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = \text{sh}1, \quad x_2(1) = -\text{sh}1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 1 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = \text{sh}1 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \int_0^1 (x_1^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \int_0^1 (x_2^2 + 2\dot{x}_1 \dot{x}_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}_1 \dot{x}_2 + x_1 x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad x_1(1) = e, \quad x_2(1) = \frac{1}{e} \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1 \dot{x}_2 - x_1 x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad x_2(\frac{\pi}{2}) = -1 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}_1 \dot{x}_2 - x_1)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1 \end{cases}$.

10. $$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1 \end{cases}.$$

11. $$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6x_1t + 12x_2t^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1 \end{cases}.$$

12. $$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 12x_1t^2 + 6x_2t^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = x_2(1) = 1 \end{cases}.$$

13. $$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6x_1t + x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad x_1(1) = x_2(1) = 0 \end{cases}.$$

14. $$\begin{cases} \int\limits_0^{\pi} (2x_1x_2 - 2x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\pi) = 1, \quad x_2(\pi) = -1 \end{cases}.$$

15. $$\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (2x_2 - 4x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\frac{\pi}{4}) = x_2(\frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases}.$$

16. $$\begin{cases} \int\limits_{-1}^1 (2tx + \frac{\dot{x}_2^3}{3} - \dot{x}_1^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(-1) = 2, \quad x_2(-1) = -1, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(1) = 1 \end{cases}.$$

17. $$\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1^2 - 2x_1x_2 + \dot{x}_2^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\frac{\pi}{2}) = x_2(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}.$$

18. $$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 - 2x_1 + \dot{x}_2^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(1) = \frac{3}{2}, \quad x_2(1) = 1 \end{cases}.$$

19. $$\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad x_2(\frac{\pi}{2}) = -1 \end{cases}.$$

20. $$\begin{cases} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\frac{\pi}{2}) = x_2(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}.$$

21. $$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1)dt \to \text{extr} \\ x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad x_1(1) = \frac{3}{2}, \quad x_2(1) = 1 \end{cases}.$$

22. $$\begin{cases} \int\limits_1^2 (\dot{x}_1^2 + x_2^2 + \dot{x}_2^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 0, \quad x_1(2) = 2, \quad x_2(2) = 1 \end{cases}.$$

23. $\begin{cases} \int_0^3 \sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}\, dt \to \text{extr} \\ x_1(0)=1, \quad x_2(0)=-2, \quad x_1(3)=7, \quad x_2(3)=1 \end{cases}.$

24. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+8x_1x_2-30x_1e^t)dt \to \text{extr} \\ x_1(0)=3, \quad x_2(0)=6, \; x_1(1)=2\operatorname{ch}2+e, \; x_2(1)=2\operatorname{ch}2+4e \end{cases}.$

25. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}_2^2-\dot{x}_1^2-2x_2^2+2x_1x_2-2x_1t^2)dt \to \text{extr} \\ x_1(0)=-6, \quad x_2(0)=-4, \quad x_1(1)=-4, \quad x_2(1)=-3 \end{cases}.$

§ 3. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА С ФУНКЦИОНАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим функционал $J(y)=\int_a^b F(x,y,y',\dots,y^{(m)}{}')dx$, где функция F дифференцируема $m+2$ раза по всем аргументам. Если на функции $\overline{y}(x)\in C^{(m)}[a,b]$, удовлетворяющей граничным условиям $y(a)=A,\; y(b)=B,\; y^{(k)}(a)=A_k$, $y^{(k)}(b)=B_k$ $(A,B,A_k,B_k\in\mathbf{R},\; k=1,\dots,m-1)$ функционал $J(y)$ достигает экстремума, то функция $\overline{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}+\ldots+(-1)^m\frac{d^m}{dx^m F_{y^{(m)}}}=0.$$

Пример. Найти экстремаль функционала

$$J(y)=\int_0^1((y'')^2-48y)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям

$$y(0)=1, \quad y'(0)=-4, \quad y(1)=y'(1)=0.$$

Решение. 1. Здесь $F=(y'')^2-48y$.

2. Уравнение Эйлера-Пуассона $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0$ при $F_y=-48,\quad F_{y'}=0,\quad F_{y''}=2y''$ имеет вид $y^{(IV)}=24$.

3. Решение уравнения $y(x)=x^4+\frac{C_1}{6}x^3+\frac{C_2}{2}x^2+C_3x+C_4$ с учетом граничных условий принимает вид:

$$y(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+1.$$

ЗАДАНИЕ 15

1. $\int_0^1 \ddot{x}^2dt \to \text{extr}; \qquad x(0)=\dot{x}(0)=\dot{x}(1)=0, \quad x(1)=1.$

2. $\begin{cases} \int_0^1 (\ddot{x}^2-48x)dt \to \text{extr} \\ x(1)=\dot{x}(1)=0, \quad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=-4 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} \int_0^1 (t+1)^3\ddot{x}^2dt \to \text{extr} \\ x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=-1, \quad x(1)=\frac{1}{2}, \quad \dot{x}(1)=-\frac{1}{4} \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \int_0^\pi (\ddot{x}^2-x^2)dt \to \text{extr} \\ x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=1, \quad x(\pi)=\operatorname{sh}\pi, \quad \dot{x}(\pi)=\operatorname{ch}\pi \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \int_0^\pi (\ddot{x}^2+4x^2)dt \to \text{extr} \\ x(0)=\dot{x}(0)=x(\pi)=0, \quad \dot{x}(\pi)=\operatorname{sh}\pi \end{cases}$

6. $\int_0^{\pi} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0, \quad \dot{x}(\pi) = 1.$

7. $\begin{cases} \int_0^1 \dddot{x}^2 dt \to \text{extr} \\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1, \quad \dot{x}(1) = 4, \quad \ddot{x}(1) = 12 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} \int_0^1 (t+1)^2 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr} \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \ln 2, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{x}(1) = \frac{1}{2} \end{cases}.$

9. $\int_0^e (t+1)t\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \; x(1) = 0, \; \dot{x}(1) = 1, \; x(e) = e, \; \dot{x}(e) = 2.$

10. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 24tx)dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 1.$

11. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 + 24tx)dt \to \text{extr}; \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 1.$

12. $\begin{cases} \int_0^1 (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)dt \to \text{extr} \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = \operatorname{ch}1, \quad \dot{x}(1) = \operatorname{sh}1 \end{cases}.$

13. $\int_0^1 (48x - \ddot{x}^2)dt \to \text{extr}; \; x(0) = \dot{x}(0) = 0, \; x(1) = 1, \; \dot{x}(1) = 4.$

14. $\int_0^1 e^{-t}\ddot{x}^2 dt \to \text{extr}; \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \; x(1) = e, \; \dot{x}(1) = 2e.$

15. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 + 1)dt \to \text{extr}; \; x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 1, \; x(1) = 1, \; \dot{x}(1) = 1.$

16. $\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ddot{x}^2 - x^2 + t^2)dt \to \text{extr} \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = -1 \end{cases}.$

17. $\begin{cases} \int_0^1 (t+1)^3 \ddot{x}^2 dt \to \text{extr} \\ x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad x(1) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}.$

18. $\begin{cases} \int_0^{\pi} (\dddot{x}^2 + \ddot{x}^2)dt \to \text{extr} \\ x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 0, \; \ddot{x}(0) = 0, \; x(\pi) = \pi, \; \dot{x}(\pi) = 2, \; \ddot{x}(\pi) = 0 \end{cases}.$

19. $\begin{cases} \int_0^1 (x^2 + 2\dot{x}^2 + \ddot{x}^2)dt \to \text{extr} \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = -\operatorname{sh}1 \end{cases}.$

20. $\begin{cases} \int_0^6 (\ddot{x}^2 + t^2 x)dt \to \text{extr} \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(6) = -28{,}8; \quad \dot{x}(6) = -49{,}8 \end{cases}.$

21. $\begin{cases} \int_0^{\pi} (\dddot{x}^2 - \ddot{x}^2)dt \to \text{extr} \\ x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \ddot{x}(\pi) = 0, \quad x(\pi) = \pi, \quad \dot{x}(\pi) = 2 \end{cases}.$

22. $\begin{cases} \int_0^1 (\dot{x}^2 + \ddot{x}^2)dt \to \text{extr} \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad x(1) = \operatorname{sh}1, \quad \dot{x}(1) = \operatorname{ch}1 \end{cases}.$

23. $\int_0^1 e^{-t}\ddot{x}^2dt \to \text{extr}\,; \quad x(0)=\dot{x}(0)=1, \quad x(1)=\dot{x}(1)=e.$

24. $\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ddot{x}^2 - 16x^2 + te^{-t})dt \to \text{extr} \\ x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0, \quad x(\frac{\pi}{2})=0, \quad \dot{x}(\frac{\pi}{4})=-2 \end{cases}.$

25. $\begin{cases} \int_0^1 (2\dddot{x}^2 + t^2 + 1)dt \to \text{extr} \\ x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0,\ \ddot{x}(0)=-2,\ x(1)=2,\ \dot{x}(1)=6, \ddot{x}(1)=22 \end{cases}.$

§ 4. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим функционал $J(y)=\int_a^b F(x,y,y')dx$, где функция F имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным. Если на функции $\overline{y}(x) \in C^{(1)}[a,b]$, удовлетворяющей граничным условиям $y(a)=A,\ \ y(b)=B$ и интегральной связи $\int_a^b \varphi(x,y,y')dx=\alpha$, указанный функционал достигает экстремума, то функция $\overline{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $L_y - \frac{d}{dx}L_{y'}=0$, составленному для функции Лагранжа $L(x,y,y',\lambda)=F(x,y,y')+\lambda\varphi(x,y,y')$, где $\lambda \in \mathbf{C}$ – множитель Лагранжа.

Пример. Найти экстремаль функционала

$$J(y)=\int_0^{\pi} y\sin x\, dx,$$

удовлетворяющую условиям $y(0)=0,\ y(\pi)=\pi$ и уравнению связи $\int_0^{\pi}(y')^2dx=\frac{3\pi}{2}$.

Решение. 1. Здесь $L=y\sin x+\lambda(y')^2$.

2. Уравнение Эйлера: $y''=\frac{\sin x}{2\lambda}$ при $L_y=\sin x,\ L_{y'}=2\lambda y'$.

3. Решение уравнения Эйлера: $y(x)=-\frac{\sin x}{2\lambda}+C_1x+C_2$.

4. Учитывая уравнение связи, получаем

$$\int_0^{\pi}(C_1-\frac{\cos x}{2\lambda})^2dx = C_1^2\pi+\frac{\pi}{8\lambda^2}=\frac{3\pi}{2},$$

тогда с учетом граничных условий имеем две экстремали: $y(x)=x+\sin x,\quad y=x-\sin x$.

ЗАДАНИЕ 16

1. $\int_0^1 \dot{x}^2dt \to \text{extr}\,; \quad \int_0^1 xdt=0, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1.$

2. $\int_0^1 \dot{x}^2dt \to \text{extr}\,; \quad \int_0^1 x^2dt=1, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1.$

3. $\int_0^1 \dot{x}^2dt \to \text{extr}\,; \quad \int_0^1 xdt=3, \quad x(0)=1, \quad x(1)=6.$

4. $\int_0^1 \dot{x}^2dt \to \text{extr}\,; \quad \int_0^1 txdt=0, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1.$

5. $\int_0^1 \dot{x}^2dt \to \text{extr}\,; \quad \int_0^1 xdt=1, \quad x(0)=x(1)=0.$

6. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^\pi x\sin t dt = 0, \quad x(0)=0, \quad x(\pi)=1.$

7. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^\pi x\cos t dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(0)=2, \quad x(\pi)=0\,.$

8. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 xe^{-t} dt = e, \quad x(0)=2e+1, \quad x(1)=2.$

9. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 xe^{t} dt = 0, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1.$

10. $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2) dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^\pi x\cos t dt = 1, \quad x(0)=x(\pi)=0.$

11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2) dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin t dt = 1, \quad x(0)=x(\frac{\pi}{2})=0.$

12. $\int\limits_1^2 t^3\dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_1^2 x dt = 2, \quad x(1)=4, \quad x(2)=1.$

13. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 x^3 dt = 1, \quad x(0)=x(1)=0.$

14. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 (x - x^2) dt = \frac{1}{4}(1-3e^2), \ x(0)=x(1)=e^{-1}.$

15. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + t^2) dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 x^2 dt = 2, \quad x(0)=0, \quad x(1)=0.$

16. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^\pi x^2 dt = 1, \quad x(0)=0, \quad x(\pi)=0.$

17. $\int\limits_0^1 (x-(t-1)^2) dt \to \text{extr}\,; \int\limits_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2} dt = \frac{\pi}{2}, \ x(0)=1, x(1)=0.$

18. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^\pi x\sin t dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(0)=1, \quad x(\pi)=-1.$

19. $\begin{cases} \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 xe^{-t} dt = \frac{1}{4}(1-3e^2) \\ \qquad x(0)=0, \quad x(1)=e^{-1} \end{cases}$

20. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^\pi x\cos t dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(0)=1, \quad x(\pi)=-1.$

21. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt \to \text{extr}\,; \int\limits_0^1 xe^{t} dt = 7-e^2, \ x(0)=0, \ x(1)=-\frac{4}{e}.$

22. $\int\limits_{-1}^1 x dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_{-1}^1 \sqrt{1+\dot{x}^2}\ dt = \pi, \quad x(-1)=0, \quad x(1)=0.$

23. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 (x-\dot{x}^2) dt = \frac{1}{12}, \quad x(0)=0, \quad x(1)=\frac{1}{4}.$

24. $\int\limits_0^\pi x\sin t\ dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^\pi \dot{x}^2 dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(0)=0, \quad x(\pi)=0.$

25. $\int\limits_0^1 \frac{1}{2}\dot{x}^2 dt \to \text{extr}\,; \quad \int\limits_0^1 t\dot{x}\ dt = 2, \quad x(0)=x(1)=0.$

§ 5. ЗАДАЧА БОЛЬЦА И ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

5.1. Задача Больца.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx + \Phi(y(x_0), y(x_1))\,,$$

где $y(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$ $([x_0, x_1] \subset \mathbf{R})$, функция $\Phi(y(x_0), y(x_1))$ имеет непрерывные частные производные по обоим аргументам, а функция $F(x, y, y')$ – непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам. Если функция $\overline{y}(x)$ доставляет экстремум функционалу, то она удовлетворяет:

а) уравнению Эйлера $F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0$;

б) условиям трансверсальности

$$F_{y'}|_{x=x_0} = \Phi_{y(x_o)}, \quad F_{y'}|_{x=x_1} = -\Phi_{y(x_1)}.$$

5.2. Задача с подвижными границами.

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам, где $y \in C(\Delta)$, $\Delta \subset R$. Пусть, кроме того, заданы две кривые $y = \varphi(x)$ è $y = \psi(x)$ $(\varphi, \psi \in C^{(1)}[a, b])$.

В классе гладких кривых $y = y(x)$, концы которых скользят по двум заданным линиям так, что

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad y_1 = \psi(x_1) \quad ([x_0, x_1] \subset \Delta),$$

требуется найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$.

Если на функции $\overline{y}(x)$ указанный функционал достигает экстремума, то она удовлетворяет:

а) уравнению Эйлера $F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0$;

б) условиям трансверсальности

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]|_{x=x_0} = 0, \; [F + (\psi' - y')F_{y'}]|_{x=x_0} = 0.$$

Замечание. Если один из концов допустимых кривых закреплен, то условия трансверсальности для этого конца не выписываются.

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int\limits_0^1 ((y')^2 - y)dx + y^2(1) \to \text{extr}.$$

Решение. Здесь

$$F(x, y, y') = (y')^2 - y, \quad \Phi(y(0), y(1)) = y^2(1),$$

$$F_y = -1, \quad F_{y'} = 2y', \quad \Phi_{y(0)} = 0, \quad \Phi_{y(1)} = 2y(1).$$

Уравнение Эйлера: $2y'' + 1 = 0$.

Условия трансверсальности: $y'(0) = 0, \quad y'(1) = -y(1)$.

Общее решение уравнения Эйлера: $y(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + C_1 x + C_2$.

Учитывая условия трансверсальности, получаем ответ: $y(x) = \dfrac{1}{4}(3 - x^2)$.

Пример 2. Найти расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 5$.

Решение. Задача сводится к нахождению экстремали функционала $J(y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx$ при условии, что ее левый конец скользит по параболе $y = x^2$, а правый – по прямой $y = x - 5$.

Так как $F = \sqrt{1 + y'^2}$, то имеет место частный случай уравнения Эйлера, общим решением которого является функция $y = C_1 x + C_2$. Поскольку

$$\varphi(x) = x^2, \quad \psi(x) = x - 5, \quad \varphi'(x) = 2x, \quad \psi'(x) = 1,$$

то условия трансверсальности имеют вид:

$$\sqrt{1+y'^2}+(2x-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_0}=0$$

$$\sqrt{1+y'^2}+(1-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1}=0,\text{ где } y'=C_1.$$

Находим C_1, C_2, x_0, x_1 из системы

$$\begin{cases}\sqrt{1+C_1^2}+(2x_0-C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0\\ \sqrt{1+C_1^2}+(1-C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}=0\\ C_1x_0+C_2=x_0^2\\ C_1x_1+C_2=x_1-5\end{cases}.$$

Следовательно, $C_1=-1,\quad C_2=3/4,\quad x_0=1/2,\quad x_1=23/8$, экстремалью функционала является прямая $y=-x+3/4$, а искомое расстояние равно $\dfrac{19\sqrt{2}}{8}$.

ЗАДАНИЕ 17

1. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2dt+4x^2(0)-5x^2(1)\to \text{extr}$.
2. Найти кратчайшее расстояние от точки A(1,0) до эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
3. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2+x^2)dt-2x(1)\,\text{sh}1\to \text{extr}$.
4. Найти кратчайшее расстояние от точки A(-1,5) до параболы $y^2=x$.

5. $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2+x^2-4x\sin t)dt+2x^2(0)+2x(\pi)-x^2(\pi)\to \text{extr}$.
6. Найти кратчайшее расстояние между окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $x+y=4$.
7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2+x^2)dt+x^2(0)-x^2(\frac{\pi}{2})+4x(\frac{\pi}{2})\to \text{extr}$.
8. Найти кратчайшее расстояние от точки A(-1,3) до прямой $y=1-3x$.
9. $\int\limits_0^3 4\dot{x}^2x^2dt+x^4(0)-8x(3)\to \text{extr}$.
10. Найти экстремали функционала
$$J=\int\limits_0^{x_1} y'^2\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(x_1)=-x_1-1.$$
11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2-x^2)dt+2x^2(0)+4x(0)x(\frac{\pi}{2})\to \text{extr}$.
12. Найти экстремали функционала
$$J=\int\limits_0^{x_1} y'^2\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(x_1)=\frac{2}{1-x_1}.$$
13. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2-x^2)dt+2x^2(\frac{\pi}{2})+4x(0)x(\frac{\pi}{2})\to \text{extr}$.
14. Найти экстремали функционала
$$J=\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx,\quad y(x_0)=x_0^2+2,\quad y(x_1)=x_1.$$
15. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2+x^2)dt+3x^2(1)\to \text{extr}$.

16. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt + 2x^2(\frac{\pi}{2}) \to \text{extr}$.

17. Найти экстремали функционала

$$J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx, \quad y(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = x_1 - 5.$$

18. $\int\limits_{1}^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2)dt + 4x^2(0) + 2x^2(\frac{\pi}{2}) \to \text{extr}$.

19. Найти экстремали функционала

$$J = \int\limits_{0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = \frac{1}{x_1^2}.$$

20. Найти экстремали функционала

$$J = \int\limits_{0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx, \quad y(0) = 1, \quad y(x_1) = x_1 - 1.$$

21. Найти экстремали функционала

$$J = \int\limits_{0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = x_1 - 10.$$

22. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}^2 - x)dt - \frac{x^2(1)}{2} \to \text{extr}$.

23. $\int\limits_{1}^{2} t^2\dot{x}^2dt - 2x(1) + x^2(2) \to \text{extr}$.

24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)dt - 2x^2(0) - x^2(\frac{\pi}{2}) \to \text{extr}$.

25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)dt - 2x^2(0) \to \text{extr}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. – М: Высшая школа, 1982.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть 2. – М: Высшая школа, 1996.
5. Ицков А.Г. Основы дискретной математики. – Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2002.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М: Наука, 1977.
7. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М: Наука, 1979.
8. Колмогоров А.Н.,Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М: Наука, 1972.
9. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М: Высшая школа, 2002.
10. Теляковский С.А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М: Наука, 1980.
11. Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. – М: Физматлит, 2005.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Родионова Алла Григорьевна
Новикова Елена Вениаминовна

**Функциональный анализ
и вариационное исчисление
в вопросах и задачах
(типовой расчет)**

Учебно-методическое пособие

Редактор Л.Н. Плетнева
Компьютерный набор Л.К. Воронцова
Верстка В.И. Родионов

Пописано в печать __.12.08. Формат $60 \times 84\ ^1\!/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. _,__. Уч.-изд. л. _,_.
Тираж 100 экз. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел УдГУ
Типография Удмуртского университета
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4