Н.Н. Петров

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Ижевск 2008

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Удмуртский государственный университет»

Н.Н.ПЕТРОВ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Учебное пособие

Рекомендовано УМС по математике и механике УМО
по классическому университетскому образованию РФ
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по направлениям
и специальностям: «Математика», «Механика»,
«Прикладная математика и информатика».

Ижевск 2008

УДК 519.8
ББК 22.18
П 30

Петров Н.Н.
П 30. Методы оптимизации в задачах и упражнениях: Учебное пособие. Ижевск, 2008. 137с.

Пособие содержит 23 варианта индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов по курсу «Методы оптимизации».

© Петров Н.Н.,2008

© Удмуртский государственный университет, 2008

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Методы оптимизации» принадлежит к числу обязательных общеобразовательных математических дисциплин, определяющих профессиональное назначение специалистов-математиков, обучаемых в университете.

Пособие написано на основе лекций и практических занятий, которые автор проводил в течение более десяти лет на математическом факультете Удмуртского государственного университета.

Многие практические задачи, будучи формализованными в математической форме, состоят в нахождении минимума или максимума некоторой функции или функционала с учетом ограничений, накладываемых на допустимые значения переменных. Такие задачи называют экстремальными.

Изучение любого курса, в том числе и «Методы оптимизации», предполагает сопровождение лекций обязательными практическими занятиями, позволяющими закрепить теоретический материал и привить минимальные практические навыки. Кроме того, студентам необходимо дать возможность для более глубокого изучения теории путем самостоятельного решения задач. Для этого предназначено данное учебное пособие, в котором приводятся 23 варианта индивидуальных заданий для самостоятельной работы студентов. Все задания разделены на две части. В первой части приводятся конечномерные экстремальные задачи: гладкие экстремальные задачи, выпуклые экстремальные задачи, задачи линейного, целочисленного и дробно-линейного программирования.

Под формулировками некоторых задач понимается следующее.

Задача о коммивояжере. Имеется n городов, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Для любой пары (i, j) городов задано расстояние $c_{ij} \geqslant 0$ между ними (c_{ij} может означать не только расстояние, но и время, путевые расходы и прочее, поэтому в общем случае не предполагается, что $c_{ij} = c_{ji}$). Выехав из исходного города, коммивояжер должен вернуться в него, побывав во всех остальных городах ровно по одному разу. В качестве исходного может быть выбран любой город. Требуется найти маршрут минимальной длины. Пусть $C = (c_{ij})$.

Транспортная задача. В пунктах $A_1, \ldots A_m$ сосредоточено соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц некоторого однородного груза. Данный груз следует перевезти в пункты назначения $B_1, \ldots, B_n$, причем в каждый из них надлежит завезти соответственно $b_1, \ldots, b_n$ единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза из A_i в B_j равна c_{ij}. При этом, если $\sum\limits_i a_i \leqslant \sum\limits_j b_j$, то требуется вывезти весь груз от производителей. Если $\sum\limits_i a_i > \sum\limits_j b_j$, то требуется выполнить все заявки потребителей. Требуется составить план перевозок, суммарные расходы которого минимальны. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, \ldots, b_n), C = (c_{ij})$.

Задача о рюкзаке. Имеется n предметов, a_j — вес, b_j — ценность j-го предмета, $a_j > 0, b_j > 0$. Требуется загрузить рюкзак, выдерживающий суммарный вес c набором предметов, суммарная ценность которых максимальна. Пусть $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Задача о замене оборудования. Имеется период времени, разделенный на n этапов. В течение данного периода фирма должна производить продукцию на оборудовании, комплект которого вместе с установкой стоит z условных единиц. Со временем оборудование изнашивается, поэтому стоимость произведенной продукции $C(k)$ зависит от номера этапа и уменьшается с увеличением возраста оборудования. Кроме того, увеличиваются затраты $R(k)$ на обслуживание и ремонт оборудования. Требуется определить те моменты, в которые следует заменять старый комплект на новый, чтобы прибыль от произведенной продукции была максимальной. Под прибылью понимается суммарная стоимость произведенной продукции за вычетом стоимости обслуживания и приобретения нового оборудования. Предполагается, что в начальный момент времени установлено новое оборудование и, что возраст оборудования, которое останется после окончания периода времени из n этапов, роли не играет.

Вторая часть пособия содержит задачи вариационного исчисления и оптимального управления. При этом предполагается, что момент T_0 задан, а момент T не задан, а подлежит определению из условия оптимума. В задаче, посвященной дифференцируемости по Фреше, если точка не задана, то требуется провести исследование для всех точек области определения.

В каждой части приводится дополнительный набор задач повышенной сложности.

Список литературы, которую автор использовал для написания данного пособия, приведен в конце. Кроме того, данный список можно рекомендовать для дальнейшего знакомства с математической теорией оптимизации и для ее серьезного изучения.

Автор будет благодарен всем читателям за советы и пожелания по поводу пособия, которые просьба направлять по e-mail: npetrov@udmnet.ru или обычной почтой по адресу: 426034, Ижевск, ул. Университетская, д. 1, Удмуртский университет, математический факультет.

Автор выражает благодарность М. В. Чибиревой за помощь при оформлении, а также А. И. Благодатских и К. И. Дизендорфу за многочисленные рекомендации по улучшению качества пособия.

ЧАСТЬ I

Вариант 1

1. $x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 \to \mathrm{extr}.$

2. $x^2 + 12xy + 2y^2 \to \mathrm{extr},\ y^2 + 4x^2 = 25.$

3. $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \to \mathrm{extr},\quad x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 \leqslant 1.$

4. $\dfrac{\alpha_1}{x_1} + \dfrac{\alpha_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{x_n} \to \mathrm{extr},\ \ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \cdots + \beta_nx_n \leqslant 1,\ \alpha_i \geqslant 0.$

5. $y^2 \to \mathrm{extr},\quad 9x^3 + 2y^3 - 27xy \geqslant -16.$

6. Разделить натуральное число n на две части так, чтобы произведение их произведения на разность было максимально.

7. Точка x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $f^2 - f$, если f – непрерывная (произвольная) функция.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[0,2]} \min\limits_{y\in[-1,1]} (x^2 + \alpha xy).$

9. Найти расстояние от точки в пространстве R^n до гиперплоскости.

10. Из всех параллелограммов данной площади найти тот, у которого большая диагональ минимальна.

11. $3x_1 - 8x_2 \to\ \min,\ |x_1 + x_2| \leqslant 2,\ |x_2 - x_1| \leqslant 2,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

12. Будет ли произведение двух неотрицательных выпуклых функций выпуклой функцией?

13. $(4x^3 - 3x)^6 + (4y^3 - 3y)^6 \to \mathrm{extr},\quad x^2 + y^2 = 1.$

14. Доказать, что объем V и площадь боковой поверхности S прямого кругового конуса удовлетворяют неравенству

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leqslant \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$

15. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(-3, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 7, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1?. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,\ x_2 \geqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 3. \end{cases}$

19. $\dfrac{x_1 + 2x_2 - x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \to \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

20. Цех выпускает три вида продукции (A, B, C). В производстве участвуют три участка, располагая для этого определенными фондами времени в плановой период. Затраты времени на выпуск одной тонны продукции каждого вида, а также прибыль с каждой тонны продукции указаны в таблице

№ участка	фонд времени	A	B	C
1	120	4	2	4
2	130	4	6	2
3	140	5	3	1
прибыль, у.е.		100	80	50

Найти план выпуска продукции, обеспечивающей максимум прибыли при условии изготовления не менее 20 тонн продукции вида C и 8 тонн продукции вида A.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 1 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (7, 8, 5, 6),\ b = (11, 2, 6, 7),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 3$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 16, \\ x_1 - 3x_2 = 2. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 25,\ a = (6, 7, 9, 8, 4, 7),\ b = (2, 12, 3, 7, 1, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 4$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	12	11	11	10	8	8
затраты на обслуживание, у.е.	1	2	2	3	5	6

Вариант 2

1. $x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to \text{extr}.$

2. $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 \to \text{extr},\ x + y + z = 1.$

3. $x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_n^4 \to \text{extr},\quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1.$

4. $x_1^2 x_2^3 \ldots x_n^{n+1} \to \text{extr},\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$

5. $5x + 4y \to \text{extr},\quad x^2 + 2y^2 \geqslant 72,\ x \geqslant 2,\ y \geqslant -3.$

6. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма длин катетов равна заданному числу.

7. Найти расстояние от точки до гиперболы.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-1,2]} \min\limits_{y\in[-1,1]} (-x^2 + \alpha xy.)$

9. Привести пример двух гладких функций, каждая из которых на интервале $(0,1)$ не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений, а их сумма имеет наибольшее значение на данном интервале, но не имеет наименьшего значения на данном интервале.

10. Внутри данного треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника наименьшая.

11. $x_1 - 2x_2 \to \min,\ |x_2 + 3x_1| \leqslant 9,\ |x_1| \leqslant 5.$

12. $f : R^n \to R,\quad f(x) = ||Ax - b||^2,\ A -$ матрица, $b -$ вектор. Является ли f выпуклой функцией?.

13. Найти наибольшее значение площади треугольника, вершины которого лежат на трех концентрических окружностях радиусов $1,\ 3\sqrt{2},\ 5.$

14. Доказать, что для треугольника со сторонами a, b, c и площадью S имеет место неравенство
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S.$$

15. $x_1 + x_2 + x_3 \to \max,\ x_i \geqslant 0,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad = 2. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(2,3)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14, \\ x_1 + x_2 \leqslant 5. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,\ x_2 \geqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

18. $3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \leqslant 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 1. \end{cases}$

19. $\dfrac{x_1 + 2x_2 + 4x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0,\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

20. Промышленный комплекс состоит из уголных шахт и ТЭЦ. Добытый на шахтах уголь (валовая продукция) распределяется следующим образом:

а) очищается(сортируется), в процессе чего отсеивается 5% добытого угля;

б) идет на производство электроэнергии (на производство 1 кВт/ч электроэнергии требуется 100 кг угля);

в) продается на сторону (товарная продукция).

Аналогично распределяется выработанная на ТЭЦ электроэнергия:

а) теряется в сетях и идет на потребление самой ТЭЦ 4%;

б) идет на добычу угля (на 1 тонну угля расходуется 0,2 кВт/ч электороэнергии);

в) продается на сторону (товарная продукция).

В плановый период необходимо получить не менее 1200 тыс. тонн товарного угля и выработать не менее 2500 тыс кВт/ч товарной электроэнергии.

Составить математическую модель задачи оптимизации суммарных затрат на валовой продукт комплекса в плановый период (в денежном эквиваленте), если затраты на 1 тонну добытого угля составляют 0,3 у.е., а на 1 кВт/ч электроэнергии — 0, 02 у.е.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 53 & 11 & 13 & 6 \\ 17 & \infty & 6 & 12 & 32 & 25 \\ 8 & 13 & \infty & 5 & 15 & 11 \\ 21 & 6 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 12 & 26 & 17 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 15 & 15 & 11 & 9 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (20, 10, 6, 7),\ b = (14, 7, 10, 17),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_4$ ограничена $x_{14} \leqslant 8$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 29,\ a = (5, 7, 9, 6, 7, 5),\ b = (4, 8, 3, 7, 1, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 4$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	12	12	10	9	7	6
затраты на обслуживание, у.е.	1	1	2	3	6	6

Вариант 3

1. $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{50}{y} \to \text{extr}.$

2. $x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \to \text{extr},\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1,\ p > 1$

3. $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \text{extr},\ 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant 40,$
   $2x_1 + x_2 - x_3 = -3,\ x_2 \geqslant 0.$

4. $x^2 - y^2 + z^2 \to \text{extr},\ x + y + z \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$

5. $7x + 4y \to \text{extr},\ \ 2x^2 + 5y^2 \geqslant 100,\ x \geqslant -3,\ y \geqslant 3.$

6. Задача о полиноме Лежандра второй степени:
$$\int_{-1}^{1} (t^2 + tx_1 + x_2)^2 dt \to \min .$$

7. Найти расстояние от точки в пространстве R^n до прямой.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-2,2]} \min\limits_{y\in[-2,1]} (-x^2 + \alpha x - y^2).$

9. Точка x_0 является точкой локального экстремума функции f. Будет ли данная точка x_0 точкой экстремума функции $e^f - f$, если f – непрерывная (произвольная) функция.

10. Из всех треугольников данного периметра найти тот, у которого радиус вписанной окружности максимален.

11. $f : R^2 \to R^1,\ f(x_1, x_2) = \max\limits_{t\in[-1,1]} (t^2 + x_1 t + x_2)$. Является ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $x^2 + xy + y^2 + 3|x + y - 2| \to \min$.

13. На плоскости даны прямая l и точки A, B , лежащие по разные стороны от нее. Построить окружность, проходящую через данные точки так, чтобы прямая l высекала на ней хорду наименьшей длины.

14. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 20% цинка, 50% олова, 30% марганца. Второй сплав содержит 30% цинка, 20% олова, 50% марганца. Третий сплав содержит 10% цинка, 10% олова, 80% марганца. Требуется приготовить сплав, содержащий 40% олова. Найти минимальный процент цинка в таком сплаве.

15. $2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 8x_4 \to\ \min,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-1, 2)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to\ \max, \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 5. \\ x_1 + x_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max,\ x_2 \leqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

18. $-x_1+x_2+3x_3+x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leqslant 4. \end{cases}$

19. $\dfrac{4x_1 + 2x_2 - x_3}{2x_1 + x_2 + x_3} \to\ \min,\ x_i \geqslant 0,\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

20. Строительной организации необходимо выполнить три вида земляных работ (I, II, III) по 25000 м^3. Организация располагает для этого тремя экскаваторами A, B, C. Нормы выработки указаны в таблице (м^3/ч.)

№ вида работ	A	B	C
I	110	123	71
II	91	86	51
III	91	97	59

Построить математическую модель, определения плана использования экскаваторов по видам работ, при котором все работы выполняются за кратчайшее время.

Примечание. Рассмотреть два случая:

а) экскаваторы начинают и заканчивают работу одновременно;

б) экскаваторы могут начинать и заканчивать работу в разное время.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 27 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 35 & 5 & 1 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 11 & 16 & 47 & 48 & \infty & 5 \\ 13 & 5 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 4, 2, 7),\ b = (3, 12, 2, 17),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_2 \to b_2$ запрещена $x_{22} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_1 \to b_4$ в объеме $x_{14} \geqslant 4$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min, \ x_j \in Z_+, \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 26, \ a = (7, 4, 9, 8, 6, 5), \ b = (2, 12, 3, 7, 1, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 5$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	15	13	11	10	8	8
затраты на обслуживание, у.е.	2	3	4	6	7	8

Вариант 4

1. $3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to \text{extr}.$

2. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + \dots x_n^2 \to \text{extr}, \ \dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \dots + \dfrac{x_n}{a_n} \leqslant 1, \ a_i > 0.$

3. $xyz \to \text{extr}, \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1.$

4. $5x + y \ \to \text{extr}, \ x^2 + y^2 \geqslant 9, \ x \geqslant 1, \ y \geqslant 2.$

5. Задача о полиноме Лежандра третьей степени

$$\int_{-1}^{1} (t^3 + x_1 t^2 + x_2 t + x_3)^2 dt \to \min.$$

6. Найти минимум линейного функционала на единичном шаре R^n.

7. Привести пример гладкой конечномерной непериодической экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой абсолютный максимум и минимум достигаются в бесконечном числе точек.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[0,2]} \min\limits_{y\in[0,2]} (-x^2 + \alpha xy - y^2)$.

9. Внутри данного треугольника найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до сторон треугольника была бы наименьшей.

10. $\dfrac{x^4}{y^4} + \dfrac{y^4}{x^4} - \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \to \min, \quad x > 0,\ y > 0.$

11. $f : R \to R,\ f(x) = \inf\{x_1^2 + x_2^2 | x_1 + x_2 = x\}$. Является ли функция f выпуклой на R?

12. $x^2 + y^2 + 2\max(x, y) \to \min$.

13. У грузового автомобиля передние покрышки стираются через 15000 км, а задние – через 25000 (на задних колесах по две покрышки, на передних по одной). Каким образом нужно менять покрышки на колесах, чтобы проехать на одних и тех же покрышках наибольшее расстояние?

14. $\sqrt{x^2 + y^2 + x + y + \dfrac{1}{2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5} \to \mathrm{extr}.$

15. $x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \to \min, x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(-2, 5)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 13, \\ x_1 + x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min,\ x_1 \leqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

18. $2x_1+x_2-x_3+2x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1+3x_2-x_3+4x_4 \leqslant 5, \\ -x_1-x_2+x_3+2x_4 \leqslant 3. \end{cases}$

19. $\dfrac{-3x_1+x_2+x_3}{x_1+x_2+3x_3} \to \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1-x_2+2x_3=4. \end{cases}$

20. Максимальное количество используемых под овощи площадей в хозяйстве составляет 313 га. Трудовые ресурсы для производства овощей в течение года могут быть выделены в размере 45 000 чел.-дней, в том числе в напряженный период (сентябрь) – 8600 чел.-дней.

    По заключенным договорам необходимо продать 50 000 ц. овощей, в том числе капусты (a) — 31 500 ц., огурцов(b) — 4 500 ц., помидоров(c) — 6 500 ц., свеклы столовой(d) — 6 000 ц., прочих овощей(e) — 1 500 ц. Затраты труда, урожайность и прибыль в среднем за последние 3 года

Показатель	a	b	c	d	e
затраты на 1 га чел.д	75	138	346	158	91
затраты в напр. период	26	22	35	34	40
урожайность ц/га	325	92	176	206	52
прибыль, у.е./га	996	390	388	37	11

    Определить оптимальную структуру посевных площадей, позволяющих получить максимальную прибыль.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 27 & 23 & 16 & 20 & 26 \\ 27 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 11 & 16 & 47 & 48 & \infty & 15 \\ 13 & 5 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a=(17,4,3,8),\ b=(3,12,2,17),\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ запрещена $x_{11} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_1 \to b_2$ в объеме $x_{12} \geqslant 5$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \min, \ x_j \in Z_+, \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 23. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 27, \ a = (7, 9, 3, 8, 5, 12), \ b = (2, 4, 3, 7, 1, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 5$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	13	12	10	9	8	7
затраты на обслуживание, у.е.	1	1	2	3	5	7

Вариант 5

1. $x^3 + y^3 + 3xy \to \text{extr}.$

2. $x - 2y + 2z \to \text{extr } x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

3. $e^{x_1 - x_2} - x_1 - x_2 \to \text{extr}, \ x_1 + x_2 \leqslant 1, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \to \text{extr} \ , \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \ x + y + z \leqslant 0.$

5. $xy^3 \to \text{extr}, \ x + 5y \leqslant 8, \ x \geqslant 0, \ y \leqslant 0.$

6. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, абсолютный максимум достигается, минимум - нет.

7. В эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям координат.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,2]} \min\limits_{y\in[0,2]} (x^2 + \alpha xy - y^2)$.

9. Медианы AD, BE треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Какое максимальное значение может иметь угол C?

10. $x^3y^2z^2u \to \max$, $2x + xy + z + xyz = 1$, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $u \geqslant 0$.

11. $x^2 + y^2 + \dfrac{3}{2}|x + y - 1| \to \min$.

12. Является ли выпуклым множество

$$\{(x_1, x_2) \mid 0 \leqslant x_2 \leqslant \sin x_1^2,\ x_1 \in [0, \pi]\}?$$

13. Нужно перебросить камень через ограду высотой h. Горизонтальное расстояние до преграды равно l. При какой минимальной скорости это можно выполнить?

14. Нужно перевести по железной дороге 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых – 2 тонны. Большой контейнер, занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъемность вагона – 80 тонн. Найти минимальное число вагонов, необходимых для перевозки всех контейнеров.

15. $x_1 + 2x_3 + 2x_5 \to \max$, $x_i \geqslant 0$, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(4, 5)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 25, \\ x_1 + x_2 \leqslant 9. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,\ x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

18. $3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \leqslant 4. \end{cases}$

19. $\dfrac{4x_1 - x_2 - x_3}{2x_1 + 3x_2 + x_3} \to \max,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$

20. Имеется три пункта печатания газет (A, B, C). Они должны обспечить печатью семь областей. Пункт A расположен в области 1, пункт B – в области 3, пункт C – в области 3.

Суточный выпуск газет в пунктах печатания составляет $Q_A = 230000,\ Q_B = 160000,\ Q_C = 190000$ экземпляров.

Потребность в газетах для каждой области составляет: $q_1 = 70000,\ q_2 = 80000,\ q_3 = 90000,\ q_4 = 80000,\ q_5 = 90000,\ q_6 = 75000,\ q_7 = 95000$ экземпляров.

Для простоты примем, что потребление газет в каждой области сосредоточено в одном пункте и что в 1 — 3 областях газеты получают из пунктов печати, в них расположенных. Затраты на перевозку 1 000 экземпляров приведены в таблице:

Пункт печатания	4	5	6	7
A	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$3,1$
B	$0,9$	$3,1$	$1,4$	$1,1$
C	$3,8$	$2,3$	$1,6$	$1,4$

Найти такой план закрепления пунктов печатания газет за областями 4 – 7, при котором суммарные затраты на их перевозку были бы минимальными.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 23 & 16 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 47 & 48 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 4, 5, 8),\ b = (3, 12, 2, 17),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 2$;

б) гарантирована перевозка $a_4 \to b_2$ в объеме $x_{42} \geqslant 2$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$5x_1 - x_2 - x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 25,\ a = (9, 6, 3, 8, 7, 4),\ b = (7, 4, 2, 5, 1, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 6$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	13	11	10	8	7	7
затраты на обслуживание, у.е.	2	2	4	5	6	7

Вариант 6

1. $x^3 - (y-1)^3 - 3xy^2 \to \mathrm{extr}\,.$

2. $xy^2z^3 \to \mathrm{extr},\ x+y+z = 12\,.$

3. $3x_2^2 - 11x_1 - 3x_2 - x_3 \to \mathrm{extr},\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 7 \leqslant 0,$
   $5x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 2,\ x_3 \geqslant 0\,.$

4. $\sin x \times \sin y + \sin z \to \mathrm{extr},\ x+y+z = \dfrac{\pi}{2},\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$

5. $y^2 \to \mathrm{extr},\ 3x^3 + 2y^3 - 9xy \leqslant -4.$

6. Найти расстояние от точки до гиперболы.

7. Привести пример гладкой конечномерной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, но абсолютные минимум и максимум не достигаются.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,2]} \min\limits_{y\in[0,2]} (x^2 + \alpha xy + y^2).$

9. $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \to\ \max,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a,\ x_i \geqslant 0.$

10. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат на трех разных сторонах другого?

11. $f\, :\, R^2 \to R,\ f(x_1,x_2) = \max\limits_{t\in[-1,1]} |-t^2 + tx_1 + x_2|\,.$ Будет ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $x_1^2 + x_2^2 + \max(x_1,x_2) \to\ \min, |x_1| + |x_2| \leqslant 4.$

13. Несколько ящиков вместе весят 10 тонн, причем каждый из них весит не более одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок достаточно, чтобы за один раз увести весь этот груз?

14. В трапецию с углом α между основанием и боковой стороной вписана окружность радиусом R. Определить угол между основанием и другой стороной, при котором средняя линия трапеции минимальна.

15. $-x_1 - x_2 + x_3 \to \max, \; x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(1,3)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 13, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min, \; x_1 \leqslant 0, \; x_2 \geqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

18. $2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \to \min, \; x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 6. \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leqslant 4. \end{cases}$

19. $\dfrac{x_1 + 2x_2 + 4x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \to \min, \; x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

20. Для кормления коров фермер располагат клеверным и луговым сеном, подсолнечным силосом, кормовой свеклой, картофелем и концентратами. Для нормального развития скота необходимо, чтобы дневной рацион включал 19,26 кормовых единиц, 1926 г. переработанного белка, 114 г. кальция и 85 г. фосфора.

    Требуется оставить наиболее дешевый дневной рацион, обеспечивающий необходимое количество питательных веществ. Содержание питательных веществ (в граммах) и цена 1 кг. кормов приведена в таблице (№1 — белок, №2 — кальций, №3 — фосфор).

Корм 1 кг	Цена 1кг, у.е.	корм. ед.	№1	№2	№3
сено клеверное	$1,7$	$0,54$	56	$9,29$	$1,95$
сено луговое	$1,2$	$0,52$	36	$6,02$	$2,14$
силос подсолнечный	$0,8$	$0,18$	12	$3,55$	$0,65$
свекла	$1,5$	$0,12$	3	$0,38$	$0,33$
картофель	$2,4$	$0,30$	9	$0,14$	$0,68$
концентраты	$4,0$	$1,06$	196	$2,60$	$7,60$

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 23 & 56 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 43 & \infty & 3 & 35 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 5 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 7, 5, 9),\ b = (3, 11, 4, 17),\ C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_2$ ограничена $x_{12} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_1 \to b_4$ в объеме $x_{14} \geqslant 7$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-3x_1 + x_2 - x_3 \to \min, x_j \in Z_+, \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 25,\ a = (9, 6, 13, 8, 7, 5),\ b = (7, 9, 2, 5, 1, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 5$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	15	13	11	10	8	8
затраты на обслуживание, у.е.	2	2	4	4	6	6

Вариант 7

1. $x^3 + y^3 - 3xy \to \text{extr}$.
2. $y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy \to \text{extr},\ 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$.
3. $x^2 + y^2 \to \text{extr},\ 6x - 4y + 5 \geqslant 0,\ y - x + 1 \geqslant 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$.
4. $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \to \text{extr},\ x_1 + \dfrac{x_2}{2} + \cdots + \dfrac{x_n}{n} \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0$.
5. $xy^3 \to \text{extr},\ 2x + 3y \geqslant 7,\ x \geqslant 0,\ y \leqslant 0.$
6. На эллипсоиде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ найти точку, наиболее удаленную от начала координат.
7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи, заданной на всем пространстве, в которой имеется бесконечное число локальных минимумов, но нет ни одного локального максимума.
8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,6]} \min\limits_{y\in[-4,2]} (\alpha x^2 + \alpha xy + 2y^2).$
9. Сумма длин двух сторон треугольника равна a, а угол между ними равен $\dfrac{\pi}{6}$. Каковы должны быть длины сторон этого треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

10. Вписать в круговой сектор радиусом R с центральным углом α прямоугольник наибольшей площади.

11. $f : R^2 \to R,\ f(x_1, x_2) = \max\limits_{t \in [0,2]} |t^2 + tx_1 + x_2|$. Будет ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $|x| - |y| \to \mathrm{extr},\ x^2 + 2x + y^2 - 4y \leqslant 0.$

13. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья — за 13 минут, выпить кастрюлю молока за 14 минут, а Карлсон может сделать это за 6, 6, 7 минут соответственно. За какое наименьшее время они вдвоем смогут покончить с завтраком, состоящим из торта, банки варенья и кастрюли молока?

14. При каком наибольшем значении k для любых трех вещественных неотрицательных чисел a, b, c, сумма которых равна 1, выполняется неравенство
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant kabc?$$

15. $x_1 + x_2 + x_3 \to \ \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -2. \\ 4x_2 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(-1, 3)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \ \max, \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$3x_1 + 2x_3 + x_4 \to \min,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

18. $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \leqslant 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 3. \end{cases}$

19. $\dfrac{2x_1 + 3x_2}{2x_1 + x_2} \to \max, \ x_i \geqslant 0, \ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 8, \\ x_1 - x_2 \leqslant -3, \\ 2x_1 - x_2 \leqslant 6. \end{cases}$

20. На кондитерской фабрике изготовляют три вида восточных сладостей, для которых используется миндаль, фудук и арахис. Миндаль покупается по цене (за тонну) 6 500 у.е., фундук — 2 500 у.е., арахис — 3 500 у.е.

    Продукт один должен содержать не менее 50% миндаля и не более 25% фундука, продукт два — не менее 25% миндаля и не более 50% фундука, продукт три может содержать любое количество миндаля, фундука и арахиса. Продажная цена продукта 1 (1 тонна) — 5 000 у.е., продукта 2 — 3 500 у.е., продукта 3 — 2 500 у.е. Запасы сырья ограничены:
    миндаля — 100 т., фундука — 100 т., арахиса — 60 т.

    Какое количество продукта два следует производить, чтобы получить максимальную прибыль?

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 23 & 6 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 47 & 48 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 15 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (7, 14, 5, 8), \ b = (5, 9, 12, 17), \ C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

    2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

    а) перевозка $a_2 \to b_2$ ограничена $x_{22} \leqslant 5$;

    б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$3x_2 + 2x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 26,\ a = (9, 6, 3, 8, 7, 9),\ b = (7, 4, 2, 5, 5, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 6$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	17	15	13	10	8	7
затраты на обслуживание, у.е.	2	2	3	5	6	6

Вариант 8

1. $x^2 - y^2 + 2e^{-x^2} \to \mathrm{extr}$.

2. $ax^2 + by^2 + cz^2 \to \mathrm{extr},\ x + y + z = 1,\ a > 0, b > 0, c > 0$.

3. $2x_1 - x_1^2 + x_2 \to \mathrm{extr},\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 1,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16$.

4. $x_1^2 x_2^3 \ldots x_n^{n+1} \to \mathrm{extr},\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0.$

5. $x^2y^2 \to \mathrm{extr},\ 5x - 3y \geqslant 19,\ x \geqslant 1,\ y \geqslant -1.$

6. Вписать в заданный круг треугольник максимальной площади.

7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, имеет локальные максимумы и минимумы, а глобальные максимум и минимум не достигаются.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,0]} \min\limits_{y\in[-2,2]} (x^2 + \alpha xy - 2y^2)$.

9. Две стороны треугольника ABC равны a, b. Какую наименьшую величину может иметь наибольший угол треугольника?

10. Найти расстояние от точки до конуса $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

11. $f : R^2 \to R$, $f(x_1, x_2) = \max\limits_{t \in [-1,1]} |t^2 + tx_1 + x_2|$. Будет ли f выпуклой на R^2 функцией?

12. $x_1^2 + 2x_2^2 + \max(x_1, -x_2) \to \min$, $|2x_1| + |x_2| \leqslant 4$.

13. Какое из чисел больше:

$$100! \text{ или } 100\Big(\frac{100}{e}\Big)^{100}.$$

14. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $\cos f$, если f – непрерывная (произвольная) функция.

15. $x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min$, $x_i \geqslant 0$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(-2, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min$, $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$,

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

18. $-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \min$, $x_i \geqslant 0$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \leqslant 4. \end{cases}$$

19. $\dfrac{2x_1 - x_2 + 2x_3}{x_1 + 2x_2 + x_3} \to \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_3 = 6. \end{cases}$

20. На производство поступила партия стержней длиной 250 см. и 190 см. Необходимо получить не менее 470 отрезков по 45 см. и не менее 450 отрезков по 80 см. Как разрезать имеющиеся стержни, чтобы сократить до минимума отходы?

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 6 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 11 \\ 21 & 46 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 47 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (7, 14, 5, 18),\ b = (15, 9, 12, 17),\ C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ запрещена $x_{11} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_1$ в объеме $x_{21} \geqslant 12$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 26,\ a = (9, 4, 3, 8, 5, 9),\ b = (7, 4, 2, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	18	16	14	12	8	8
затраты на обслуживание, у.е.	1	3	5	5	5	6

Вариант 9

1. $(x-y)^2 + (2-y)^2 \to \mathrm{extr}$.

2. $x^2 - 3xy^2 + 18y \to \mathrm{extr},\ 3x - y - 6 = 0$.

3. $-x^2 - y^2 + 6x \to \mathrm{extr},\ x + y \leqslant 5,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0$.

4. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{2}{x_2} + \cdots + \dfrac{n}{x_n} \to \mathrm{extr}, x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n \leqslant 1, x_i \geqslant \dfrac{1}{n^2}$.

5. $y^3 \to \mathrm{extr},\ 9x^3 + 2y^3 - 27xy \leqslant -16,\ x \geqslant 0$.

6. На сколько частей и как нужно разложить отрезок данной длины a, чтобы произведение длин всех полученных отрезков было наибольшим?

7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой функционал ограничен, существуют глобальный минимум и локальный максимум, а глобального максимума не существует.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,4]} \min\limits_{y\in[-2,2]} (x^2 + \alpha xy - \alpha y^2)$.

9. Две стороны треугольника ABC равны a, b. Какую величину может иметь наименьший угол треугольника?

10. Найти расстояние между множествами

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0,\ 9x - 7y + 16 = 0.$$

11. $x_1 + (x_2+3)^2 \to \mathrm{extr},\ |x_1+1| + |x_2| \leqslant 1$

12. Будет ли выпуклой композиция двух выпуклых функций?

13. Найти наименьшее значение x, для которого существуют y, z такие, что
$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

14. Дан прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен α. Найти отношение радиусов описанной и вписанной окружностей и определить, при каком α это отношение будет наибольшим.

15. $x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 12x_5 = 12. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-1, 3)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 - 1x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 9, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min,\ x_1 \leqslant 0,\ x_3 \geqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 \geqslant 1. \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geqslant 2. \end{cases}$$

18. $-x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \min,\ x_i \geqslant 0,$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 \leqslant 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 5. \end{cases}$$

19. $\dfrac{4x_1 + x_2 - x_3}{2x_1 + x_2 + x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$

20. В цех поступили стержни длиной 107 см. Для дальнейшего производства потребуется не менее 210 отрезков длиной 26 см., не менее 163 отрезка по 29 см. и не менее 175 отрезков по 32 см. Необходимо удовлетворить данную потребность, разрезав при этом как можно меньше стержней.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 37 & 23 & 6 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (7, 14, 5, 13),\ b = (15, 8, 12, 17),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_2$ запрещена $x_{12} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 10$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 25,\ a = (7, 5, 4, 8, 6, 9),\ b = (7, 4, 2, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	16	14	12	10	8	7
затраты на обслуживание, у.е.	2	3	5	5	6	6

Вариант 10

1. $x^3+y^3+z^3+12xy+2z \to \text{extr}$.

2. $xyz \to \text{extr},\ x+y+z=5,\ xy+xz+yz=8.$

3. $8x^2+10y^2-12xy+50x-80y \to \text{extr}, x+y \leqslant 1,\ 8x^2+y^2 \leqslant 2.$

4. $xy^2z^3 \to \text{extr},\ x+2y+3z=1,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ -36x^3+y^3-27xy \leqslant 8,\ x \geqslant 0.$

6. Найти наибольший объем параллелепипеда при данной сумме длин его ребер.

7. Найти наибольший член последовательности $n^{\frac{1}{n}},\ n \in N.$

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,4]} \min\limits_{y\in[-2,2]}(-x^2+\alpha xy-\alpha y^2).$

9. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи без ограничений, заданной на всем пространстве, в которой имеется бесконечное число локальных минимумов, но нет и одного локального максимума.

10. Найти треугольник наименьшего периметра, зная две его вершины A, B и прямую l, которой принадлежит третья вершина.

11. $|x_1|+x_2^2 \to \text{extr},\ x_2 \leqslant 2,\ x_2 \geqslant 1+x_1,\ x_2 \geqslant 1-x_1.$

12. f – выпуклая неотрицательная функция, заданная на R. Будет ли выпуклой на R функция f^2 ?

13. Высота, опущенная из вершины основания правильной треугольной пирамиды на противоположную ей боковую грань, равна b. Чему должна равняться сторона основания пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим?

14. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5кг, во второй – 20кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, во втором – в q раз. О числах p, q известно, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

15. $x_1+2x_2+2x_5 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2, \\ x_2+x_3+x_4-x_5=2. \\ x_3-x_4+x_5=1. \end{cases}$

16. При каких значениях параметра k точка $(1,4)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1-x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 15, \\ x_1+x_2 \leqslant 5. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования: $x_1-2x_2-x_3 \to \min$,

$$x_1 \leqslant 0, \ x_2 \leqslant 0, \ x_3 \leqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1-4x_2-x_3=1, \\ 5x_1+6x_2+x_3=2. \end{cases}$$

18. $2x_1-2x_2+x_3+x_4 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-x_4 \leqslant 6, \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4 \leqslant 5. \end{cases}$

19. $\dfrac{-2x_1-3x_2+x_3}{2x_1+x_2+x_3} \to \max, \ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=4, \\ -2x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$

20. Завод заключил договор на поставку комплектов отрезков стержней длиной по 18, 23 и 32 см. Причем количества отрезков разной длины в комплекте должны быть в соотношении $1:5:3$. На данный момент имеется 80 стержней длиной по 89 см. Как их следует разрезать, чтобы количество комплектов было максимальным?

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 46 & 20 & 26 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (9, 14, 5, 12),\ b = (16, 8, 8, 17),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_1$ в объеме $x_{21} \geqslant 7$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 26,\ a = (7, 5, 4, 8, 4, 9),\ b = (6, 4, 2, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	19	17	16	14	12	8
затраты на обслуживание, у.е.	2	2	5	5	6	7

Вариант 11

1. $x^2 - y^2 + 6y - 4x \to \operatorname{extr}$.

2. $x + y + z \to \operatorname{extr},\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1.$

3. $x^2 + 2xy + 3y^2 + x + y \to \operatorname{extr},\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x - y \leqslant 1$

4. $xyz(x+y+z) \to \text{extr},\ x^4+y^4+z^4 \leqslant 1.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ 3x^3+2y^3-9xy \geqslant -4,\ x \leqslant 0.$

6. Вписать в шар пространства R^n прямоугольный параллелепипед максимального объема.

7. Найти расстояние от эллипса $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ до прямой $3x+y-9=0$.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,4]}\min\limits_{y\in[-2,2]}(-x^2-\alpha xy+\alpha y^2)$.

9. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи, заданной на всем пространстве, в которой имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума.

10. Найти треугольник наименьшего периметра, зная вершину A и прямые l, m, которым принадлежат две другие вершины.

11. При каких значениях параметра α функция

$$f : f(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} \times x_2^{4-\alpha}$$

будет выпуклой на множестве $\{(x_1,x_2)|x_1>0, x_2>0\}$?

12. $(x_1-3)^2+(x_1-x_2)^2 \to \ \min, \quad \max\{|x_1|,|x_2|\} \leqslant 1.$

13. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести в два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в аудитории абитуриентов удалось бы рассадить так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равно числу аудиторий. Найти минимальное возможное количество абитуриентов, которые могли быть проэкзаменованы при этих условиях.

14. Среди точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию

$$y = 4 - \left|y - \frac{6}{x}\right| - 2\left|\frac{3}{x} - 1\right|,$$

найти точку с наибольшей ординатой.

15. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 - x_6 = 2. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-1, 3)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,\ x_2 \leqslant 0, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $$-2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to \min,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} -2x_2 + x_4 + x_5 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \leqslant 5, \\ x_1 + x_3 \geqslant -3. \end{cases}$$

19. $$\frac{x_1 - 2x_2 + 3x_4}{x_2 + 2x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

20. На овощную базу прибыл железнодорожный состав, доставивший 300 тонн овощей. Имеется 4 бригады грузчиков, предложивших свои услуги на следующих условиях: бригада j берется разгружать по a_j тонн в день по расценке p_j у.е. за тонну. За каждый день простоя база платит штраф 250 у.е. Какие договоры на разгрузку состава следует заключить, чтобы минимизировать суммарные затраты. Исходные данные приведены в таблице.

№ бригады	a_j	p_j
1	10	10
2	20	15
3	30	20
4	40	25

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 20 & 6 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (9, 14, 5, 12),\ b = (16, 8, 8, 14),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 3$;

б) перевозка $a_2 \to b_4$ ограничена $x_{24} \leqslant 7$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-x_1 - x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 15, \\ x_1 \leqslant 7. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 24,\ a = (7, 5, 4, 8, 4, 6),\ b = (6, 8, 2, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	19	18	16	15	12	9
затраты на обслуживание, у.е.	2	3	5	6	8	8

Вариант 12

1. $5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \to \text{extr}$.

2. $x_1^4 + \cdots + x_n^4 \to \text{extr}, \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

3. $2x^2 + 4y^2 \to \text{extr}, \quad x^2 + 5y^2 \leqslant 1, \; x \geqslant 0, \; y \geqslant 0$.

4. $\sin x + \sin y + \sin z + 3\sin\dfrac{x+y+z}{3} \to \text{extr}$.

5. $y^3 \to \text{extr}, \quad 12x^3 + y^3 - 18xy \leqslant -16, \; x \leqslant 0$.

6. Среди треугольников данного периметра найти треугольник максимальной площади.

7. Привести пример гладкой конечномерной экстремальной задачи, заданной на всем пространстве, в которой имеется единственный локальный экстремум, не являющийся глобальным.

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[-4,4]} \min\limits_{y\in[-2,2]} (-\alpha x^2 - \alpha xy + y^2)$.

9. Дан отрезок AB и прямая l. На данной прямой найти точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

10. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 – точкой локального экстремума функции $f^3 + f$, если f – непрерывная (произвольная) функция.

11. При каких значениях параметра α функция

$$f : f(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 x_2^2 + (x_1^2 + x_2^2)^2$$

будет выпуклой на R^2 ?

12. $\max\{x_1^2, x_2\} \to \text{extr}, \quad 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6$.

13. В параболу $y = ax^2 + bx + c$ вписан четырехугольник $ABCD$ максимальной площади с диагоналями AC, BD. Найти координаты вершины C, если $A(-3,-4), B(-2,-1), D(1,-4)$.

14. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|2y+3x-2|+|3x+6| \leqslant 6.$$

15. $x_1+x_3+x_6 \to \max,\ x_i \geqslant 0.$

$$\begin{cases} x_1+4x_2+x_3+3x_4-2x_5+x_6=15, \\ x_1+4x_2-x_3-x_4+x_6=5, \\ 2x_1+6x_2+x_3+4x_4-2x_5+x_6=22. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-2,3)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 3x_1-2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 7, \\ x_1+x_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1+2x_2+x_3 \to \min,\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2-x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4=2, \\ -7x_1+8x_2+4x_3-5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1-10x_2+x_3 \to \max,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1-5{,}5x_2-7x_3=-13, \\ x_1-14{,}5x_2+7x_3=15. \end{cases}$

19. $\dfrac{-2x_1+x_2}{x_1+3x_2+2x_4} \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} 4x_1-x_2 \leqslant 5, \\ x_1+3x_2-x_3=7, \\ 3x_1+4x_2+x_4=17. \end{cases}$

20. В обработку поступили две партии досок для изготовления комплектов из трех деталей, причем первая партия содержит 50 досок по 6,5 метров каждая, а вторая партия содержит 200 досок по 4 метра каждая. Каждый комплект состоит из двух деталей по 2 метра и одной детали длиной 1,25 метра.

Как распилить все доски, чтобы получить возможно большее количество комплектов?

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 37 & 23 & 16 & 2 & 6 \\ 21 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 8 & 5 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 19 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (9, 14, 11, 12), \ b = (12, 8, 9, 14), \ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_2 \to b_1$ ограничена $x_{21} \leqslant 6$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 8$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-4x_1 - 3x_2 \to \min, \ x_j \in Z_+, \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 \leqslant 25, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 37. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 29, \ a = (7, 5, 9, 8, 14, 6), \ b = (6, 8, 2, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	19	18	16	15	13	11
затраты на обслуживание, у.е.	2	2	4	6	7	8

Вариант 13

1. $3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to \text{extr}$.

2. $x_1^2 + \dots + x_n^2 \to \text{extr}, \quad x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 = 1$.

3. $(x-4)^2 + (y-3)^2 \to \text{extr}, \quad y \geqslant x^2, \ y \leqslant 4$.

4. $x_1 x_2 \dots x_n \to \ \max, \ x_i \geqslant \frac{1}{n}, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

5. $y^3 \to \text{extr}, \quad x^3 + 2y^3 - 6xy \geqslant 4, \ x \geqslant 0$.

6. Среди всех n –угольников данного периметра найти n – угольник наибольшей площади.

7. Пусть P – многочлен четной степени, имеющий единственную точку x_0 такую, что $P'(x_0) = 0$. Будет ли точка x_0 точкой экстремума?

8. Вычислить $\max\limits_{x\in[2,4]} \min\limits_{y\in[0,6]} (\alpha x^2 - 2\alpha xy + 3y^2)$.

9. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и составляет с плоскостью основания угол α. При каком α объем пирамиды будет наибольшим?

10. Два человека, у которых есть один велосипед, должны попасть из пункта А в пункт В, находящийся на расстоянии 40 км от А. Первый передвигается со скоростью 4 км/час пешком и 30 км/час на велосипеде. Второй – пешком со скоростью 6 км/час, на велосипеде – 20 км/час. За какое наименьшее время они могут добраться до пункта В(велосипед на пути можно оставлять без присмотра)?

11. При каких значениях параметра α функция
$$f : f(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 x_2^2 + (x_1 + x_2)^2$$
будет выпуклой на R^2 ?

12. $e^{x_1} \to \ \min, \quad |x_1| + 2|x_2| \leqslant 4$.

13. Среди всех комплексных чисел, удовлетворяющих условию $z \cdot \overline{z} = 25$, найти такие, что $|z-7| + |z-7i|$ принимает наименьшее значение.

14. Тело состоит из цилиндра и двух конусов, построенных извне на основаниях цилиндра. Это тело вписано в шар данного радиуса так, что основания и вершины конусов лежат на поверхности шара. Когда такое тело имеет наибольший объем?

15. $x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 + x_5 + x_6 \to \max, \; x_i \geqslant 0,$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 = 15, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(2, 4)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 16, \\ x_1 + x_2 \leqslant 6. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min, \; x_1 \leqslant 0, \; x_3 \geqslant 0,$
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $-6x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max, \; x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72. \end{cases}$

19. $\dfrac{-3x_1 + 2x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + 3x_5} \to \min, \; x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_4 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 20, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_5 = 35, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_6 = 11. \end{cases}$

20. Имеются четыре механизма A_1, A_2, A_3, A_4 каждый из которых может быть использован на каждом из четырех видов работ

B_1, B_2, B_3, B_4 с производительностью (в условных единицах), заданой в виде таблицы

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	2	3	2
A_2	2	4	1	1
A_3	3	1	5	3
A_4	3	4	3	1

Требуется так распределить механизмы по одному на каждую из работ, чтобы суммарная производительность была максимальной.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 37 & 23 & 16 & 29 & 6 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 13 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 17 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (19, 14, 11, 12),\ b = (12, 18, 9, 14),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 8$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 8$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-6x_1 - 8x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \leqslant 75, \\ 5x_1 + 13x_2 \leqslant 47. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 29,\ a = (7, 8, 9, 8, 14, 6),\ b = (6, 2, 4, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	15	14	13	10	9	9
затраты на обслуживание, у.е.	2	3	3	5	6	7

Вариант 14

1. $3xy - x^2y - xy^2 \to \mathrm{extr}$.

2. $xyz \to \mathrm{extr},\quad \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 1.$

3. $3x - y + z^2 \to \mathrm{extr},\quad x + y + z \leqslant 0,\ -x + 2y + z^2 \geqslant 0.$

4. $x^2 + y^2 + z^2 \to \mathrm{extr},\quad x + y + z \leqslant 1,\ 2x - y - z \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \mathrm{extr},\ 9x^3 + 16y^3 - 27xy \leqslant -2,\ x \geqslant 0.$

6. Вписать в круг n-угольник наибольшей площади.

7. Даны точки $A(4, 0, 4), B(4, 4, 4), C(4, 4, 0)$. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти точку S, чтобы объем тетраэдра $SABC$ был наименьшим.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (\alpha x^2 - 2\alpha xy + 3y^2)$.

9. При каком натуральном k величина k^{m-k} максимальна?

10. На книжной полке стоят книги по математике и по логике, всего их 20. Какое максимальное количество комплектов можно составить, если в комплект входят 5 книг по математике и 5 книг по логике.

11. При каком $p > 0$ функция $f : f(x) = \dfrac{|x|^p}{p}$ выпукла на R?

12. $\max\{|x_1|, |x_2 - 1|\} \to \min, \quad |x_1| + |x_2| \leqslant 8.$

13. Пусть А – точка окружности с центром в точке О, В – середина отрезка ОА. Для какой точки окружности М величина угла ОМВ максимальна?

14. На диаметре АВ окружности единичного радиуса дана точка Р. Через данную точку Р провести хорду СД так, чтобы площадь четырехугольника АСВД была наибольшей.

15. $x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 \to \max, \; x_i \geqslant 0,$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 10. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-1, 5)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 14, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \; x_1 \geqslant 0, \; x_3 \geqslant 0, \; x_4 \leqslant 0,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $-6x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max, \; x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72. \end{cases}$

19. $\dfrac{x_1 - 2x_2 + 3x_3}{x_2 + 2x_4} \to \min, \; x_i \geqslant 0, \; \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

20. На кондитерской фабрике для производства карамели используют сахарный песок, патоку и фруктовое пюре, ресурсы которых в плановый период заданы числами 600 т., 200 т. и 120 т. соответственно. Расход сырья на 1 тонну карамели (в тоннах) соответствующего вида, а также прибыль (у.е.) заданы в таблице.

Вид сырья	Расход сырья		
	№1	№2	№3
Сахарный песок	$0,6$	$0,5$	$0,4$
Патока	$0,4$	$0,2$	$0,3$
Фруктовое пюре	–	$0,3$	$0,3$
Прибыль	140	150	130

Найти план производства карамели, при котором прибыль максимальна.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 29 & 6 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 25 & 35 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (19, 14, 11, 2),\ b = (12, 18, 9, 14),\ C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 10$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 4$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min, \;\; x_j \in Z_+, \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 10, \\ 2x_1 + 4x_3 \geqslant 14, \\ 2x_2 + x_3 \geqslant 7. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 29, \;\; a = (7, 8, 9, 8, 14, 5), \;\; b = (6, 2, 4, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	17	16	14	12	10	10
затраты на обслуживание, у.е.	2	3	3	5	6	7

Вариант 15

1. $x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z \to \operatorname{extr}$.

2. $x^2 + 4xy + 5y^2 \to \operatorname{extr}, \;\; x^2 + y^2 = 1$.

3. $2x^2 + 3y^2 \to \operatorname{extr}, \;\; x + y \leqslant 8, \;\; -x + 2y \leqslant 4, \;\; x \geqslant 0$.

4. $ax + by + cz \to \operatorname{extr}, \;\; ax^2 + by^2 + cz^2 \leqslant 1$.

5. $y^3 \to \operatorname{extr}, \;\; 14x^3 + 4y^3 - 21xy \leqslant 4, \;\; x \geqslant 0$.

6. Дан угол и точка внутри него. Через эту точку провести отрезок, имеющий концы на сторонах угла так, чтобы полученный треугольник имел наименьшую площадь.

7. Даны точки $A(4,0,4), B(4,4,4), C(4,4,0)$. На сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти точку S, чтобы объем тетраэдра $SABC$ был наибольшим.

8. Вычислить $\min\limits_{x \in [2,4]} \max\limits_{y \in [0,6]} (-\alpha x^2 - 2\alpha xy - 3y^2)$.

9. Каково минимальное число студентов на курсе, если хорошо успевающих студентов не более 48% и не менее 45%.

10. Среди всех конусов, периметр осевого сечения которых равен 8, найти конус максимального объема.

11. $\max\{x_1, x_2^2 - 1\} \to \min, \quad |x_1| + 4|x_2| \leqslant 12.$

12. Будет ли выпуклой на R функция

$$f : f(x) = \inf\{x_1^2 + x_2^4 | x_1 + x_2 = x\}?$$

13. Найти наибольшее значение произведения трехзначного числа на сумму трех слагаемых, каждое из которых есть взаимно обратное число к цифрам этого трехзначного числа.

14. Найти наибольшую величину боковой поверхности кругового конуса, вершина которого находится в центре эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$, высота направлена по большей оси, а один из диаметров основания есть хорда.

15. $x_1 + x_3 + x_6 \to \max, \ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 - x_6 = 2. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(3, 4)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2 - k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 19, \\ x_1 + x_2 \leqslant 7. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \ x_1 \leqslant 0, \ x_3 \geqslant 0, \ x_4 \leqslant 0,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geqslant 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $-2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min, \ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$

19. $\dfrac{x_1 - x_2 - x_3}{2x_1 + x_2} \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$

20. На участке имеются две группы взаимозаменяемого оборудования с ресурсами 280 нормо-часов в месяц для каждой группы. Участку установлен план выпуска двух видов изделий $A_1 = 80$ штук и $A_2 = 90$ штук. В таблице приведено время изготовления одного изделия на обеих группах оборудования (в часах).

Группа оборудования	№1	№2
I	2	3
II	5	4

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 47 & 23 & 16 & 29 & 56 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5 \\ 13 & 25 & 35 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 14, 11, 2),\ b = (12, 15, 9, 14),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 9$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 8$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-x_3 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6, \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 29,\ a = (7, 8, 9, 8, 4, 15),\ b = (6, 2, 4, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	25	23	21	18	15	13
затраты на обслуживание, у.е.	3	3	7	7	9	9

Вариант 16

1. $x + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{2}{z} \to \mathrm{extr}\,.$

2. $x - 2y + 2z \to \mathrm{extr},\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$

3. $x^2 + y^2 + z^2 \to \mathrm{extr},\ 2x - y + z \leqslant 5,\ x + y + z \leqslant 3,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$

4. $x - y + z \to \mathrm{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x + y + z \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \mathrm{extr},\ -7x^3 + 16y^3 - 21xy \leqslant -2,\ x \geqslant 0.$

6. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данную диагональ, найти параллелепипед максимального объема.

7. Пусть P – многочлен нечетной степени, имеющий единственную точку x_0 такую, что $P'(x_0) = 0$. Будет ли точка x_0 точкой экстремума?

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (-2\alpha x^2 - 2\alpha xy - 3y^2).$

9. Внутри данного четырехугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.

10. Можно ли в прямоугольник площади 1 поместить ряд непересекающихся кругов так, чтобы сумма их радиусов равнялась 1998?

11. $x_1^2+|x_2|\to \mathrm{extr},\quad x_1\leqslant 4,\ x_1\geqslant x_2+2,\ x_1\geqslant 2-x_2.$

12. Будет ли выпуклой на R функция

    $f: f(x)=\inf\{x_1^4+x_2^4 \mid x_1+x_2=x\}$?

13. Что больше: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ или $\dfrac{\alpha}{\beta}$, если $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$?

14. Деревни A, B, C расположены в вершинах равностороннего треугольника. В деревне A живут 100 школьников, в деревне B – 200, в деревне C – 300. Где нужно построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было минимально?

15. $x_1-4x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\to\ \min,\ x_i\geqslant 0,$

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3+x_5=20,\\ -x_1-2x_2+x_4+3x_5=24,\\ 3x_1-x_2-12x_5+x_6=18.\end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(1,5)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2\to \mathrm{extr},\qquad \begin{cases}5x_1-x_2\leqslant 0,\\ 2x_1+3x_2\leqslant 20,\\ x_1+x_2\leqslant 6.\end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

    $x_1+2x_2+x_3+3x_4\to\min,\ x_1\leqslant 0,\ x_4\leqslant 0,$

$$\begin{cases}3x_1-4x_2-x_4\geqslant 1,\\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4=2,\\ -7x_1+8x_2+4x_3-5x_4\leqslant 3.\end{cases}$$

18. $3x_1-x_2+5x_3+x_4\to\min,\ x_i\geqslant 0,\ \begin{cases}4x_1-x_2+5x_3+x_4=5,\\ 7x_1+x_2+8x_3+2x_4=9.\end{cases}$

19. $\dfrac{x_1-x_2-3x_4}{3x_1+2x_2+x_3}\to\ \min,\ x_i\geqslant 0,\quad \begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\ 3x_1-2x_2+x_4=9,\\ -x_1+2x_2+x_5=10.\end{cases}$

20. Оборудование фабрики позволяет выпускать фруктовые компоты в трех видах тары: стеклянной в количестве 10ц, жестяной в количестве 10ц, и полиэтиленовой в количестве 8ц.

    Найти производственную программу предприятия, максимизирующую прибыль, если себестоимость 1ц компота составляет: в стеклянной банке — 16 у.е., в жестяной — 10 у.е. и в полиэтиленовой — 14 у.е. Отпускная цена 1 ц компота составляет: в стеклянной банке — 40 у.е., в жестяной — 30 у.е., в полиэтиленовой — 35 у.е.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 29 & 56 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 15 & 11 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5 \\ 13 & 25 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 14, 11, 7),\ b = (12, 15, 11, 14),\ C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 8 & 8 & 11 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

    2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

    а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 10$;

    б) перевозка $a_4 \to b_4$ запрещена $x_{44} = 0$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6, \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 28,\ a = (4, 8, 9, 8, 9, 15),\ b = (6, 2, 4, 5, 7, 3).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	25	24	23	20	19	19
затраты на обслуживание, у.е.	3	6	6	9	9	9

Вариант 17

1. $xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z) \to \text{extr}\,.$

2. $xyz \to \text{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0.$

3. $x^2 + y^2 + z^2 \to \text{extr},\ 2x - y + z \leqslant 5,\ x + y + z = 3.$

4. $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \to \text{extr},\ \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n} \leqslant 1,\ x_i > 0,\ \alpha_i \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ -36x^3 + y^3 - 27xy \leqslant 8,\ x \geqslant 1.$

6. Среди всех тетраэдров с данным основанием и данной площадью боковой поверхности найти тетраэдр наибольшего объема.

7. Пусть P – многочлен нечетной степени, имеющий две точки x_1, x_2 такие, что $P'(x_1) = P'(x_2) = 0$. Будут ли точки x_1, x_2 точками экстремума?

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (-2\alpha x^2 + 2\alpha x + y - 3y^2).$

9. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка X. M, N – ее проекции на катеты AC и BC. При каком положении точки X длина отрезка MN минимальна?

10. Предполагается использовать 2000 ден. ед. на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15, 27 и 45 дней. Их стоимость соответственно 21, 40 и 60 денежных единиц. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее количество дней отдыха было наибольшим и все деньги были израсходованы.

11. $e^{x_1x_2} \to \min,\ |x_1| + |x_2| \leqslant 1,\ 2|x_1| + 0,5|x_2| \leqslant 1.$

12. Будет ли выпуклой на R функция

$$f : f(x) = \inf\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 | x_1 + x_2 + x_3 = x\}?$$

13. Что больше: $4\operatorname{tg} 5^0 \operatorname{tg} 9^0$ или $3\operatorname{tg} 6^0 \operatorname{tg} 10^0$?

14. В треугольной пирамиде три ребра, исходящие из одной вершины, перпендикулярны друг другу, причем одно из них равно противолежащему ему ребру основания, а произведение длин двух других ребер равно a. Найти наименьшее значение объема пирамиды.

15. $2x_1 - 6x_2 + 3x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(2, 5)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 20, \\ x_1 + x_2 \leqslant 7. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geqslant 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

19. $\dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_2 + 3x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

20. В резерве трех железнодорожных станций А, В, С находятся соответственно 50, 70 и 40 вагонов. Составить оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки зерна, если пункту №1 требуется 60, №2 — 45, №3 — 65, №4 — 30 вагонов. При этом следует учесть, что в пунктах №1, и №3 нет условий для длительного хранения зерна, поэтому его необходимо вывезти из них полностью. Стоимость перегона одного вагона со станции А в указанные пункты соответственно равна $14, 13, 16, 11$ у.е.; со станции В — $12, 17, 14, 18$ у.е.; со станции С — $15, 12, 11, 13$ у.е.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 9 & 6 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 30 & 25 \\ 10 & 1 & \infty & 8 & 11 & 19 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (7, 13, 11, 17),\ b = (12, 15, 11, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_2$ ограничена $x_{12} \leqslant 3$;

б) гарантирована перевозка $a_4 \to b_1$ в объеме $x_{41} \geqslant 6$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 29,\ a = (4, 8, 9, 8, 9, 9),\ b = (6, 7, 4, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	25	24	23	20	19	17
затраты на обслуживание, у.е.	2	4	6	7	8	9

Вариант 18

1. $(2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \to \mathrm{extr}$.

2. $xy^2z^3 \to \mathrm{extr},\ x + y + z = 1.$

3. $x + y + e^{x-y} \to \mathrm{extr},\ x + y \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

4. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \to \mathrm{extr},\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{2}{x_2} + \dots + \dfrac{n}{x_n} \leqslant 1,\ x_i > 0,\ \alpha_i \geqslant 0.$

5. $xy^3 \to \mathrm{extr},\ x + 5y \leqslant 8,\ x \geqslant -1,\ y \geqslant -2.$

6. Найти расстояние от эллипсоида $\dfrac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ до плоскости $3x + 4y + 12z = 128.$

7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет глобальных экстремумов, а их сумма имеет не совпадающие между собой глобальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (-2\alpha x^2 + 2\alpha x + y + 3y^2).$

9. Рассматриваются все остроугольные треугольники с заданными стороной a и углом α. Найти максимум суммы квадратов длин двух оставшихся сторон.

10. При каком натуральном n величина $\dfrac{\ln 2 \ln 3 \ldots \ln n}{10^n}$ принимает наименьшее значение?

11. Будет ли выпуклым множество всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $\inf\limits_n x_n = 1$?

12. $|x_1 - 1| + |2x_2 - 4| \to \min,\ |x_1 + 4| + |x_2| \leqslant 1.$

13. Найти углы равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине m медианы, проведенной к его боковой стороне.

14. Из чашки с кофе в чашку с молоком перелили ложку кофе, затем такую же ложку смеси перелили обратно. Чего больше: молока в чашке с кофе или кофе в чашке с молоком?

15. $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + 2x_6 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 3. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-3, 5)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 11, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, \quad \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 \to \min,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

19. $\dfrac{3x_1 - 2x_2}{3x_2 + 3x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

20. Уголь трех сортов в количестве $A_1 = 300$ т., $A_2 = 250$ т., $A_3 = 350$ т. распределяется между тремя котлами ТЭЦ, потребности которых в планируемый период составляют

$B_1 = 180$ т., $B_2 = 400$ т., $B_3 = 320$ т. Известна матрица теплотворной способности, где c_{ij} ккал/кг — теплотворная способность i-го сорта угля при отапливании им j-го топочного устройства:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти такой план распределения угля, при котором будет получено максимальное количество тепла.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 23 & 16 & 9 & 3 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 5 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (7, 13, 21, 17),\ b = (14, 15, 11, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_4$ ограничена $x_{14} \leqslant 2$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 10$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-x_1 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 31,\ a = (4, 8, 9, 8, 3, 9),\ b = (6, 7, 4, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	35	30	23	19	17	15
затраты на обслуживание, у.е.	4	5	5	6	7	8

Вариант 19

1. $xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{50}{y} \to \mathrm{extr}\,.$

2. $x_1^p + \cdots + x_n^p \to \mathrm{extr},\ x_1 + \cdots + x_n = 1,\ p > 1.$

3. $2x_1^2 + 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \mathrm{extr},\ 8x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leqslant 40,$
$-2x_1 + x_2 - x_3 = -3,\ x_2 \geqslant 0.$

4. $(x - \dfrac{9}{4})^2 + (y-2)^2 \to\ extr,\ y^2 - x \leqslant 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \mathrm{extr},\ 3x^3 + 2y^3 - 9xy \geqslant -4, x \leqslant 0.$

6. $m_1||x - a_1||^2 + \cdots + m_n||x - a_n||^2 \to\ \min,\ x, a_i \in R^n,\ m_i > 0.$

7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет глобальных экстремумов, а их разность имеет не совпадающие между собой глобальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]}\ \max\limits_{y\in[0,6]} (\alpha x^2 + 2\alpha x + y + 3y^2).$

9. Какую наибольшую площадь имеет четырехугольник, длины трех сторон которого равны 1?

10. Дана прямая l и точки A, B по разные стороны от нее. Найти на прямой l точку, разность расстояний от которой до данных точек A, B имеет наибольшее по абсолютной величине значение.

11. $x_1 e^{|x_1+x_2|} \to\ \min,\ |x_1| + 2|x_2| \leqslant 4.$

12. Будет ли выпуклой на R функция

$$f : f(x) = \inf\{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \mid x_1 + x_2 + x_3 = x\}?$$

13. В геометрической прогрессии $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ с положительными членами выполняется условие $b_1 = (b_1 + b_2)(3b_1 + 4b_2)$. При каком значении знаменателя прогрессии сумма первых четырех членов прогрессии максимальна?

14. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и высотой h вписать прямоугольный параллелепипед максимального объема так, чтобы четыре его вершины лежали на боковых ребрах пирамиды.

15. $x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1, \\ x_2 - x_6 = 2. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-5, 6)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 1. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \leqslant 0,$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1 - x_2 + x_3 - x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{4}{5}x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - \frac{4}{5}x_5 = 1. \end{cases}$$

19. $\dfrac{3x_1 - 2x_2 + x_3}{x_1 + 3x_2 + 3x_3} \to \min, \ x_i \geqslant 0, \ \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

20. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице:

Вид ресурсов	Расход сырья				Объем ресурсов
	№1	№2	№3	№4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила	22	14	18	30	400
Оборудование станко-ч	10	8	8	16	128
Прибыль	30	25	56	48	

Дополнительно требуется, чтобы первого товара выпускалось не более 5 единиц, второго — не менее 8 единиц, а третьего и четвертого — в отношении $1:2$.

Какой ассортимент товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной?

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 3 & 16 & 9 & 3 \\ 11 & \infty & 16 & 11 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 18 & \infty & 5 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 13, 21, 17), \ b = (14, 15, 11, 14), \ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_1$ запрещена $x_{11} = 0$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 12$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-x_1 + x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 33,\ a = (4, 8, 9, 8, 3, 8),\ b = (6, 7, 4, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 7$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	25	24	23	20	18	15
затраты на обслуживание, у.е.	2	3	5	7	8	9

Вариант 20

1. $2x^3 + 5x^2 + y^2 - xy^2 \to \mathrm{extr}\,.$

2. $5x^2 + 4xy + y^2 \to \mathrm{extr},\ x^2 - xy + y^2 = 1.$

3. $x^2 - 2y^2 \to \mathrm{extr},\ x + y \leqslant 1,\ y - x \leqslant 1,\ x \geqslant 0.$

4. $y^3 \to \mathrm{extr},\quad 4x^3 + y^3 - 6xy \geqslant 16,\ x \geqslant 0.$

5. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \to \mathrm{extr},\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{2x_2} + \dots + \dfrac{1}{nx_n} \leqslant 1,$
$x_i > 0,\ \alpha_i \geqslant 0.$

6. Через точку (a_1, a_2, a_3), $a_i > 0$ провести плоскость так, чтобы объем тетраэдра, отсекаемого плоскостью от первого координатного угла, был наименьшим.

7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет ни локального максимума, ни локального минимума, а их произведение имеет не совпадающие между собой локальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]} \max\limits_{y\in[0,6]} (\alpha x^2 + 2\alpha x + y - y^2)$.

9. Даны отрезок и окружность. На окружности найти точку, из которой данный отрезок виден под наименьшим углом.

10. При каком натуральном n величина $\dfrac{n^2}{(1,0002)^n}$ принимает наибольшее значение?

11. При каких α функция

$$f : f(x,y) = x^2 + y^2 + \alpha|x+y|$$

будет выпуклой на R^2?

12. $x^2 + y^2 + |x+y| \to \min,\ |x| + 2|y| \leqslant 4.$

13. Отрезок с концами на сторонах прямого угла содержит внутри себя точку, удаленную на расстояния 1 и 8 от сторон этого угла. Найти наименьшую длину такого отрезка.

14. Числа $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ — решения системы

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - 3y^2 = \dfrac{10p - p^2}{4p^2 + 9}, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = \dfrac{10 - p}{4p^2 + 9}. \end{cases}$$

При каком p выражение $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

15. $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 3, \\ x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-4, 6)$ является решением задачи

$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 11, \\ x_1 + x_2 \leqslant 2. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min, x_1 \geqslant 0,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 \to \max, \ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{4}{5}x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - \frac{3}{4}x_5 = 1. \end{cases}$$

19. $$\frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 3x_2 + 3x_3} \to \min, \ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

20. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства любого из четырех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного вида товара, прибыль, получаемая предприятием, а также запасы ресурсов указаны в таблице:

Вид ресурсов	Расход сырья				Объем ресурсов
	№1	№2	№3	№4	
Сырье, кг	3	5	2	4	60
Рабочая сила	22	14	18	30	400
Оборудование станко-ч	10	8	8	16	128
Прибыль	30	25	56	48	

Кроме того заданы производственные издержки в условных единицах на одну единицу каждого изделия: 6, 9, 12, 3, при этом суммарные издержки не должны превышать 96 условных единиц.

Какой ассортимет товара надо выпускать, чтобы прибыль была максимальной?

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 3 & 16 & 9 & 13 \\ 11 & \infty & 16 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 18 & \infty & 5 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 13, 21, 17),\ b = (14, 15, 21, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_1 \to b_3$ ограничена $x_{13} \leqslant 8$;

б) гарантирована перевозка $a_2 \to b_4$ в объеме $x_{24} \geqslant 10$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-2x_1 + x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 32,\ a = (4, 8, 9, 8, 3, 8),\ b = (6, 7, 2, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	30	25	23	20	17	14
затраты на обслуживание, у.е.	2	3	7	8	9	10

Вариант 21

1. $x^2 + xy + y^2 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{y} \to \text{extr}\,.$

2. $e^{xy} \to \text{extr},\ x + y = 1.$

3. $x_1 + x_2 + x_3 \to \text{extr},\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant x_3 \leqslant 1.$

4. $xyzw \to \text{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leqslant 1,\ x + y + z + w \leqslant 0.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ 28x^3 + y^3 - 21xy \leqslant 8.$

6. В какой точке эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ касательная к нему образует с осями координат треугольник наименьшей площади?

7. Привести пример двух гладких функций, заданных на всем пространстве, каждая из которых не имеет глобальных минимума и максимума, а их произведение имеет не совпадающие между собой глобальные минимум и максимум.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[2,4]} \max\limits_{y\in[-2,6]} (-\alpha x^2 + 2\alpha x - y - y^2).$

9. В плоскости треугольника ABC найти точку X такую, что $2|XA| + |XB| + 3|XC|$ минимальна.

10. Найти наибольшее значение параметра a, при котором неравенство $|ax^2 - ax + 1| \leqslant 1$ выполнено для всех $x \in [0, 1]$.

11. Является ли выпуклой на R^2 функция

$$f : f(x, y) = x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2}?$$

12. $x^2+y^2+4\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to \min$.

13. Найти наибольшее значение функции
$f : f(x) = \dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

14. В правильной восьмиугольной пирамиде, боковые ребра которой пронумерованы подряд, проведено сечение через первое и четвертое ребра, имеющее площадь S. Каким должен быть острый угол между плоскостью данного сечения и плоскостью основания, чтобы объем пирамиды был наибольшим?

15. $x_1+x_2+x_3+x_4 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=3, \\ x_1-2x_2-3x_3+4x_4=0. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-5, 8)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 8x_1-5x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 17, \\ x_1+x_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1+2x_2+x_3+3x_4 \to \min,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \leqslant 0,$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2-x_4 \geqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4=2, \\ -7x_1+8x_2+4x_3-5x_4 \geqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1-x_2+x_3-3x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_4-x_5=6, \\ -x_1+x_2-x_3+\frac{4}{5}x_4+x_5=8, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4-\frac{1}{2}x_5=1. \end{cases}$$

19. $\dfrac{x_1-2x_2}{x_1+3x_2+3x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0,\ \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=6. \end{cases}$

20. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 600000 литров алкината, 350000 литров крекинг-бензина, 500000 литров прямой перегонки, 300000 литров изопентона.

    В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А — $2:3:5:2$, бензин В — $3:1:2:1$, бензин С — $2:2:1:3$. Стоимость 1000 литров указанных сортов бензина равны соответственно 120, 100, 150 условных единиц.

    Определить оптимальный план смешения из условия максимального использования компонетов.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 8 & 16 & 9 & 13 \\ 11 & \infty & 16 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 25 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 11 & \infty & 15 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 13, 21, 12),\ b = (14, 15, 21, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

    2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

    а) перевозка $a_1 \to b_1$ ограничена $x_{11} \leqslant 7$;

    б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 12$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-2x_1 + 3x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 34,\ a = (3, 8, 9, 8, 3, 8),\ b = (6, 7, 2, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 8$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	31	27	25	20	17	14
затраты на обслуживание, у.е.	2	5	7	8	9	10

Вариант 22

1. $xy^2(12 - x - y) \to \text{extr}$.

2. $x^2 - y^2 + xy \to \text{extr},\ 3x + 4y = 1.$

3. $x^2 + y^2 - 12x + 16y \to \text{extr},\ x^2 + y^2 \leqslant 25,\ x \geqslant 0.$

4. $xy^2z^3w^4 \to \text{extr},\ x + y + z + w = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ w \geqslant 0.$

5. $y^3 \to \text{extr},\ 7x^3 + 2y^3 - 21xy \leqslant 16,\ y \leqslant 0.$

6. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции $f,\ f(x_0) \neq 0$. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $\dfrac{1}{f}$?

7. Найти расстояние от точки до параболы.

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]} \max\limits_{y\in[-2,6]} (-\alpha x^2 - 2\alpha x - y - y^2)$.

9. Даны отрезок и окружность. На окружности найти точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.

10. Найти треугольник наибольшей площади, вписанный в параболический сегмент, заключенный между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 3x$.

11. Будет ли выпуклой на R^2 функция
$$f : f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + |x + y|?$$

12. $\max\{|x_1|, |x_2 - 1|\} \to \min,\ |x_1 - 3| + |x_2 + 2| \leqslant 2.$

13. Что больше: $79^{\frac{3}{5}} + 1900^{\frac{3}{5}}$ или $1979^{\frac{3}{5}}$?

14. Найти максимальное значение параметра d, при котором уравнение
$$x^3 - (4+d)x^2 + 5dx - d^2 = 0$$
имеет три корня, которые являются квадратами сторон некоторого неостроугольного треугольника.

15. $x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max, x_i \geqslant 0,$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2. \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-3, 7)$ является решением задачи
$$kx_1 + (2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 7x_1 - 3x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \leqslant 27, \\ x_1 + x_2 \leqslant 4. \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geqslant 2, \\ -7x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 6, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{3}{4}x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 1. \end{cases}$$

19. $$\frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 3x_2 + x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

20. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 600000 литров алкината, 350000 литров крекинг-бензина, 400000 литров прямой перегонки, 300000 литров изопентона.

В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин A — $2:3:5:2$, бензин B — $3:1:2:1$, бензин C — $2:2:1:3$. Стоимость 1000 литров указанных сортов бензина равны соответственно 220, 200, 250 условных единиц.

Определить оптимальный план смешения из условия стоимости произведенной продукции.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 8 & 16 & 7 & 13 \\ 11 & \infty & 16 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 5 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 15 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 11, 21, 12),\ b = (14, 15, 14, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_3 \to b_4$ ограничена $x_{34} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_3$ в объеме $x_{33} \geqslant 10$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-2x_1 - 5x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 34,\ a = (3, 8, 9, 8, 3, 7),\ b = (6, 7, 2, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	32	29	27	25	17	14
затраты на обслуживание, у.е.	3	5	7	8	9	10

Вариант 23

1. $x^2 + xy + y^2 + \dfrac{27}{x} + \dfrac{9}{y^2} \to \mathrm{extr}\,.$

2. $4x^2 + xy - y^2 \to \mathrm{extr},\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 1.$

3. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \to \mathrm{extr},\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$

4. $xy + yz \to \mathrm{extr},\ x^2 + y^2 = 2,\ y + z = 2,\ x \geqslant 0.$

5. $xy^3 \to \mathrm{extr},\ x + 5y \geqslant 8,\ y \geqslant 1.$

6. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

7. Пусть x_0 – точка локального экстремума функции f. Будет ли точка x_0 точкой локального экстремума функции $f - f^2$?

8. Вычислить $\min\limits_{x\in[-2,4]} \max\limits_{y\in[-2,6]} (-\alpha x^2 - 2\alpha x - 2y + 2y^2)$.

9. Представить число 100 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

10. Дан равнобедренный треугольник $ABC(AC = CB \geqslant AB)$. Для какой точки X плоскости величина $|XA| + |XB| - |XC|$ будет наименьшей?

11. При каких α функция

$$f : f(x, y) = x^2 + y^2 + \alpha \min(x, y)$$

будет выпуклой на R^2?

12. $e^{3x_1} \to \min,\ 6|x_1-2|+|x_2+1| \leqslant 24.$

13. Найти наибольшее значение функции

$$f : f(x,y) = \frac{3xy-4x^2}{x^2+y^2}.$$

14. Что больше $\cos^2\dfrac{\pi}{180}+\cos^2\dfrac{4\pi}{180}$ или $\cos^2\dfrac{2\pi}{180}+\cos^2\dfrac{3\pi}{180}$?

15. $x_1+x_2+x_3-x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} x_1+x_2-4x_4+2x_5=-2, \\ x_2+x_3+x_4-2x_5=-2, \\ x_1+x_3+3x_4-2x_5=-2. \end{cases}$$

16. При каких значениях параметра k точка $(-1,4)$ является решением задачи

$$kx_1+(2-k)x_2 \to \max, \quad \begin{cases} 4x_1-x_2 \leqslant 0, \\ 2x_1+3x_2 \leqslant 17, \\ x_1+x_2 \leqslant 3? \end{cases}$$

17. Построить задачу, двойственную к следующей задаче линейного программирования:

$x_1+2x_2+x_3+3x_4 \to \max,\ x_1 \geqslant 0,\ x_3 \leqslant 0,\ x_4 \leqslant 0,$

$$\begin{cases} 3x_1-4x_2-x_4 \leqslant 1, \\ 5x_1+6x_2+2x_3+4x_4 \geqslant 2, \\ -7x_1+8x_2+4x_3-5x_4 \leqslant 3. \end{cases}$$

18. $x_1-x_2+x_3-3x_5 \to \max,\ x_i \geqslant 0,$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_4-x_5=2, \\ -x_1+x_2-x_3+\frac{3}{4}x_4+x_5=8, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4-\frac{2}{3}x_5=1. \end{cases}$$

19. $$\frac{3x_1-2x_2}{x_1+3x_2+x_3} \to \min,\ x_i \geqslant 0, \quad \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=4, \\ -x_1+2x_2+x_3+x_4=6. \end{cases}$$

20. Необходимо произвести сплав, содержащий 30% свинца, 30% цинка и 40% олова, используя 9 сплавов. Их составы и цены приведены в таблице

сплав	A	B	C	D	E	F	G	H	K
свинец	18	9	32	54	27	27	35	16	19
цинк	46	38	32	28	37	41	41	50	48
олово	36	53	36	18	36	32	24	34	33
стоим. 1 кг	6	15	13	11	10	8	14	16	12

Определить, какое количество сплава каждого типа необходимо для производства килограмма смеси, чтобы ее стоимость была минимальной.

21. Решить задачу о коммивояжере с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 17 & 8 & 6 & 7 & 13 \\ 11 & \infty & 10 & 7 & 13 & 25 \\ 10 & 12 & \infty & 8 & 9 & 15 \\ 11 & 16 & 5 & \infty & 8 & 18 \\ 41 & 16 & 7 & 8 & \infty & 15 \\ 13 & 12 & 15 & 9 & 11 & \infty \end{pmatrix}.$$

22. 1. Методом потенциалов решить транспортную задачу

$$a = (17, 11, 21, 13),\ b = (14, 12, 14, 14),\ C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить транспортную задачу при дополнительных ограничениях:

а) перевозка $a_3 \to b_1$ ограничена $x_{31} \leqslant 5$;

б) гарантирована перевозка $a_3 \to b_4$ в объеме $x_{34} \geqslant 12$.

23. Методом ветвей и границ решить задачу целочисленного программирования

$$-2x_1 - 7x_2 \to \min,\ x_j \in Z_+,\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24. \end{cases}$$

24. Методом динамического программирования решить задачу о рюкзаке

$$c = 31,\ a = (3, 8, 5, 8, 3, 7),\ b = (6, 4, 2, 5, 7, 8).$$

25. Определить оптимальные сроки замены оборудования, чтобы получить максимальную прибыль за 6 лет, если в начале срока установлено новое оборудование. Стоимость нового оборудования $z = 9$ у.е.

возраст оборудования, лет	0	1	2	3	4	5
выпуск продукции, у.е.	35	32	31	30	27	24
затраты на обслуживание, у.е.	5	7	9	10	12	15

Дополнительные задачи

1. Пусть $f \in C^1(R^1)$. Доказать, что если x^* единственная точка, такая что $f'(x^*) = 0$ и x^* — точка локального минимума, то x^* — точка глобального минимума.

2. Пусть $f \in C(R)$. Доказать, что между любыми двумя точками локального минимума функции f находится точка локального максимума(предполагается, что f имеет по крайней мере две точки локального минимума). Будет ли верно данное утверждение, если f не является непрерывной?

3. Многочлены P, Q степени n не имеют общих корней. Могут ли они иметь общие точки локального экстремума?

4. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскую поверхность. Точка F — середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный путь имел минимальную длину.

5. Стороны треугольника удовлетворяют неравенствам
$$a \leqslant 5 \leqslant b \leqslant 6 \leqslant c \leqslant 8$$
Найти наибольшую площадь такого треугольника.

6. Найти степень четверки, наиболее близкую к числу $2^{100} + 3^{100}$.

7. Пусть $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2}), i = 1, \dots n$ и
$$tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2 \cdot \dots \cdot tg\alpha_n = 1.$$
Найти наибольшее значение $\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \dots \cdot \sin\alpha_n$.

8. Пусть $A(z), B(z^2), C(z^3)$ — точки комплексной плоскости, отвечающие данным комплексным числам. Среди всех $z, |z| = 1$ найти те, для которых площадь треугольника ABC наибольшая.

9. Найти наименьшее значение ординаты середины отрезка длины 4, концы которого расположены на параболе $y = x^2$.

10. Натуральное число называется упрощенным, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее число последовательных натуральных чисел может оказаться упрощенными?

11. Верно ли следующее утверждение: четная функция не может иметь четного числа точек экстремума.

12. Верно ли следующее утверждение: нечетная функция не может иметь четного числа точек экстремума.

13. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 100 можно выбрать, чтобы сумма любых двух выбранных чисел не делилась на 6.

14. Привести пример дифференцируемой на R^2 функции, имеющей ровно n точек локального минимума.

15. Привести пример дифференцируемой на R^2 функции, имеющей бесконечное число точек локального минимума и не имеющей ни одной точки локального максимума.

16. Пусть x^* — точка строгого локального минимума бесконечно дифференцируемой на R функции. Следует ли отсюда, что существует k такое, что $f^{(k)}(x^*) \neq 0$?

17. Найти наибольшее значение определителя шестого порядка, все элементы которого по модулю не превосходят единицы.

18. Пусть $f_i, g_i : X \to R^1$, $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказать неравенство

$$\left| \inf_{x \in X} \max_{i \in I} f_i(x) - \inf_{x \in X} \max_{i \in I} g_i(x) \right| \leqslant \sup_{x \in X} \max_{i \in I} |f_i(x) - g_i(x)|.$$

19. Пусть $F : X \times Y \to R^1$. Доказать неравенство

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} F(x, y) \leqslant \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y).$$

20. Пусть $X \subset R^n$, $Y \subset R^m, F : X \times Y \to R^1$, $F \in C(X \times Y)$, X, Y — компакты, $g(x) = \min\limits_{y \in Y} F(x, y)$. Доказать что функция g непрерывна на X.

21. Пусть $f \in C(R^2)$ и

$$A = \{(x_r, y_r) : f(x_r, y_r) = \min_{x^2+y^2=r^2} f(x,y),\ r \geqslant 0\}.$$

Является ли множество A связным?

22. Последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ из множества X называется минимизирующей для функции f, если

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in X} f(x) = f_*.$$

Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — минимизирующая, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_* \in X$, $f \in C(X)$. Доказать, что в этом случае минимизирующая последовательность сходится к непустому множеству точек глобального минимума функции f на множестве X.

23. Последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к множеству A, если

$$\lim_{k\to\infty}\left(\inf_{a\in A} ||a - x_k||\right) = 0.$$

Показать, что последовательность, сходящаяся к множеству точек глобального минимума, не обязательно сходится к какой-либо точке глобального минимума.

24. Доказать, что для всех $a > 0$ система

$$\begin{cases} \frac{ax}{ye^x+e^y} = \frac{y}{xe^y+e^x} \\ xe^y + ye^x = 1 \end{cases}$$

имеет решение.

25. Функция $f : R^{n+1} \to R$ определяется следующим образом:

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \int_0^{\pi} \left(e^{-it} - \sum_{j=0}^{n} x_j e^{ijt}\right)^2 .dt$$

Найти глобальный минимум функции f .

26. Функция $f : R^{n+1} \to R$ определяется следующим образом:

$$f(x_0, \dots, x_n) = \int\limits_0^1 \bigl(t^k - \sum_{j=0}^{n} x_j t^{\lambda_j}\bigr)^2 dt,$$

где k — заданное натуральное число,
$\lambda_0 < \lambda_1 \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n$ — заданные вещественные числа. Найти глобальный минимум функции f.

27. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Убедиться, что равенство достигается лишь в случае $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

28. Доказать, что для любого неотрицательного набора вещественных чисел $x_1, \dots, x_n$ справедливо неравенство

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — заданные положительные числа, сумма которых равна единице.

29. Доказать, что задача линейного программирования

$$< c, x > \to \max, \ Ax \leqslant b, \ x \geqslant 0,$$

где $b \geqslant 0$, разрешима, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а) в матрице A имеется по крайней мере одна положительная строка;

б) матрица A неотрицательная и в ней нет нулевых столбцов.

30. Пусть при любом $c \in R^n$ задача линейного программирования

$$< c, x > \to \max, \ Ax \leqslant b$$

разрешима. Доказать, что ее множество допустимых планов ограничено.

31. Привести пример линейной функции f, заданной на выпуклом замкнутом множестве A такой, что

$$\sup_{x \in A} f(x) = 0, \text{ но } f(x) < 0 \text{ для всех } x \in A.$$

32. Доказать, что выпуклая функция f ограничена сверху на многограннике M и принимает на M наибольшее значение.

33. Привести пример выпуклой функции f, заданной и ограниченной на выпуклом компакте M, но не достигающей на M своей верхней грани.

34. Доказать, что максимум выпуклой функции на выпуклом многограннике достигается в одной из крайних точек.

35. Пусть f — вогнутая функция, заданная на выпуклом множестве X, $g(x) = \bigl|\min(0; f(x))\bigr|^q$, $q \geqslant 1$. Доказать, что функция g является выпуклой на X.

36. Пусть $Y \subset R^n$, $f(x) = \inf\limits_{y \in Y} \|x - y\|$. Доказать, что f является выпуклой на R^n тогда и только тогда, когда замыкание множества Y является выпуклым множеством.

37. Пусть X — выпуклое подмножество R^n. Функция $f : X \to R^1$ называется *квазивыпуклой* на X, если для всех $x, y \in X$, для любого $\alpha \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}.$$

Верно ли, что выпуклая на X функция является квазивыпуклой на X функцией?

38. Пусть X — выпуклое подмножество R^n, $f : X \to R^1$ — выпуклая на X функция. $X(u) = \{v \in X : f(v) \leqslant f(u)\}$. Доказать, что множество $X(u)$ выпукло для всех $u \in X$. Верно ли обратное утверждение?

39. Пусть X — выпуклое подмножество R^n, $f : X \to R^1$ — выпуклая на X функция, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ —- последовательность неотрицательных вещественных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1$,

$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек из X такая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ сходится. Можно ли утверждать, что имеет смысл и выполняется неравенство

$$f\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(x_k).$$

40. Пусть f — непрерывная на выпуклом множестве X функция, причем для любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Доказать, что f — выпуклая на X функция.

41. Пусть f — функция, заданная на выпуклом множестве X, причем для любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Верно ли, что f — выпуклая на X функция?

42. Пусть X — выпуклое подмножество R^n, $f : X \to R^1$ — выпуклая на X функция. Доказать, что множество точек локального минимума функции f на множестве X либо пусто, либо выпукло. Если $f \in C(X)$, множество X — замкнуто, то множество точек локального минимума функции f на X либо пусто, либо выпуклое замкнутое множество.

43. Привести пример гладкой экстремальной задачи с ограничениями типа равенств, в которой точке локального минимума отвечает единственный множитель Лагранжа $\lambda_0 = 0$.

44. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — непрерывные на R_+ функции, $P_n = \{x \in R_+^n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$. Доказать, что существует $x^* \in P_n$ и число λ такие, что $(j = 1, \ldots, n)$

$$f_j(x_j^*) \begin{cases} = \lambda, & \text{если } x_j^* > 0, \\ \geqslant \lambda, & \text{если } x_j^* = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

45. Рассматривается задача

$$\min_j f_j(x_j) \to \max, \quad x \in P_n,$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — непрерывные монотонно неубывающие на R_+ функции. Доказать, что существует глобальное решение x^* данной задачи и число λ такие, что выполнено (1).

46. Привести пример прямой и двойственной задач линейного программирования, множества решений которых

а) содержат по одной точке;

б) не ограничены.

47. Привести пример прямой и двойственной задач линейного программирования, допустимые множества которых

а) пусты;

б) непусты и ограничены;

в) не ограничены.

48. Пусть x^* — решение задачи линейного программирования

$$(c, x) \to \max, \quad Ax \leqslant b.$$

Доказать, что данное решение единственно тогда и только тогда, когда система

$$(c, h) \geqslant 0, \ Ah \leqslant 0$$

имеет только тривиальное решение $h = 0$.

49. Пусть

$$V = \max\{(c, x) \ : \ Ax = b, \ x \geqslant 0\}.$$

Ясно, что V является функцией координат векторов b, c и элементов матрицы A. При этом V не определено, если множество допустимых планов пусто; $V = \infty$, если линейная форма не ограничена сверху на множестве допустимых планов; $V = V_0 < \infty$, если задача разрешима.

а) Доказать, что

$$V_0(c_1 + c_2) \leqslant V_0(c_1) + V_0(c_2).$$

б) Привести пример задачи линейного программирования, в которой
$$V_0(c_1 + c_2) < V_0(c_1) + V_0(c_2).$$

в) Доказать, что
$$V_0(b_1 + b_2) \geqslant V_0(b_1) + V_0(b_2).$$

г) Привести пример задачи линейного программирования, в которой
$$V_0(b_1 + b_2) > V_0(b_1) + V_0(b_2).$$

д) Привести пример, показывающий, что V_0 не обязательно непрерывно зависит от элементов матрицы A.

50. Найти проекцию точки a на множество X в случае, если X — неотрицательный ортант, гиперплоскость, координатный параллелепипед.

51. Рассматривается задача
$$f(x) \to \min, \quad x \in X,$$
где X — замкнутое выпуклое множество, не содержащее прямых, f — вогнутая на X функция. Доказать, что если множество решений данной задачи непусто, то оно содержит хотя бы одну крайнюю точку множества X .

52. Пусть $x_j \in (0,1), \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1, n > 1.$ Доказать неравенство
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - x_j} \geqslant \frac{n^2}{n-1}.$$

53. Пусть $x_j \in (0,1), \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1, n > 1.$ Доказать неравенство
$$\sum_{j=1}^{n} x_j(1 - x_j) \geqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}}.$$

54. Пусть $x_j \in (0,1), \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1, n > 1, \ \ a > 0, b > 0$. Доказать неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \big(a + \frac{b}{x_j}\big) \geqslant (a + nb)^n.$$

55. Найти точки экстремума функции $f : R^2 \to R$, определяемой неявно уравнением

$$\int\limits_0^{f(x_1,x_2)} e^{u^2} du = x_1^2 + x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in R^2.$$

56. Доказать, что существует функция $f \in C^1(R)$, у которой множество $\{x : f'(x) = 0\}$ совпадает с канторовым множеством.

57. Пусть функция $f \in L_\infty[0,1]$. Найти константу, наилучшим образом приближающую эту функцию в метрике

$$a) L_1[0,1]; \quad b) L_2[0,1]; \quad c) L_\infty[0,1].$$

58. f - непрерывна и возрастает на $[0,1]$. При каком c интеграл

$$\int\limits_0^1 |f(t) - c| dt$$

принимает наименьшее значение?

59. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

60. Рассматривается график квадратного трехчлена, имеющий корни 1 и 4. Из начала координат (точка O) к данному графику проводятся две касательные, касающиеся его в точках A и B. Найти наибольшее значение косинуса угла AOB.

61. Найти какой-либо многочлен с целыми коэффициентами, наименьшее значение которого на всей прямой равно а) $\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{2}$.

62. Написать уравнение геометрического места точек (t, x), являющихся точками экстремума решений уравнения $\dot{x} = f(t, x)$. Как отличить точки локального максимума от точек локального минимума?

63. Описать алгоритм симплекс-метода для задачи

$$< c, x > \to \min, \quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказать, что он всегда заканчивается не более чем за n шагов.

64. Пусть $f : R^n \to R, f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \|x - a_i\|, \alpha_i > 0$. Доказать, что существует точка глобального минимума функции f на R^n. При каких условиях данная точка не является единственной?

65. В приемной в ожидании личной встречи с директором собралось n посетителей. Предварительный опрос показал, что рассмотрению вопроса i-го посетителя директор должен уделить время t_i, $i = 1, \ldots, n$. Директор, зная, что хотя общее время, которое он уделит всем посетителям одно и то же $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i$, хотел бы организовать прием так, чтобы посетители находились в приемной в целом как можно меньше. Какова должна быть очередность приема?

66. Пусть M_1, M_2 — линейные подпространства R^n, $M = M_1 \cap M_2$, $x_0 \in M$, $\delta_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$ Вычислить $\partial \delta_M(x_0)$.

67. Пусть $f : R^2 \to R^1$, $f(x, y) = |x| + |y|$. Вычислить $\partial f(x_0, y_0)$.

Замечание. Во всех задачах пространства конечномерны.

ЧАСТЬ II

Вариант 1

1. Показать, что оператор A является линейным и вычислить его норму
$$A\colon C[0,1] \to C[0,1] \quad (Ax)(t) = \int\limits_t^{1-t} x(\tau)\, d\tau.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше
$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (xe^x y, ye^{-x}, x^2+y^2),\ (0,0),$$
$$F\colon L^2[0,1] \to R^1, \quad F(x) = \Big(\int\limits_0^1 x^2(t)\, dt\Big)^2.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если M — множество ортогональных матриц второго порядка, x_0 — единичная матрица.

4. $\int\limits_{-1}^{1} (x^2 + \dot{x}^2)\, dt \to \text{extr}, \ \ x(1) = x(-1) = 1.$

5. $\int\limits_{0}^{T_0} (x^2 - \dot{x}^2 + 4x\sin t)\, dt \to \text{extr}, \ \ x(0) = x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1x_2)\, dt \to \text{extr}, \ \ x_1(0) = x_2(0) = 0,$

   $x_1(1) = \text{sh}1, \ \ x_2(1) = -\text{sh}1.$

7. $\int\limits_{0}^{1} \dot{x}^2\, dt + x^2(0) - 2x^2(1) \to \text{extr}.$

8. $\int\limits_{0}^{T} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\ dt \to \text{extr}, \ \ x(0) = 1, \ \ x(T) = 2.$

9. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^T x\,dt = 1, \quad x(0) = 1, \quad x(T) = 0.$

10. $\int\limits_0^1 (x_2 + x_1)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\,dt = 0, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = -3.$

11. $\int\limits_1^e (1+t)t\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}(1) = 1, \quad x(e) = e, \quad \dot{x}(e) = 2.$

12. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad \ddot{x}(0) = 1, \quad x(1) = 1/2.$

13. $\int\limits_1^e t^3\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_1^e x\,dt \geqslant 0, \quad x(1) = 1, \quad x(e) = 1/e,$
$\dot{x}(e) = -1/e^2.$

14. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \ddot{x} - x = u, \quad x(0) = 1.$

15. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin t\ \ dt \to \mathrm{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(-\pi) = x(\pi) = 0.$

16. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 1, \quad \dot{x}(2) = 2.$

17. $T \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(-1) = -1, \quad x(T) = 1, \quad \dot{x}(-1) = \dot{x}(T) = 0.$

18. $T \to \inf, \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) + \dot{x}(T) = 0, \quad x(T) = \dot{x}(0) = 1.$

19. $x_1^2(1) + x_2^2(1) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2,$
$x_1(0) = x_2(0) = 1, \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1.$

20. $\int\limits_0^1 u^2(t)\,dt + x(1) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 1.$

21. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1, \quad x_2(0) = \xi_2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. $T \to \inf, \quad \dot{x} = bx + u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = \xi, \quad x(T) = 0.$

23. Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси OX образует поверхность наименьшей площади.

24. $T \to \inf, \ \ \ddot{x} = u, \ \ |u| \leqslant 1, \ \ |x(0)| \leqslant 1, \ \ |\dot{x}(T)| \geqslant 4.$

25. $\int\limits_0^{21} (2u - 2u^2 + 5x)\, dt \to \text{extr}, \ \ \dot{x} = -3x + 12u, \ \ u \in [0, 1],$

$x(0) = 1, \ \ x(21) = 0.$

26. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 9,$

$x_1(0) = x_2(0) = 4, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 \in [-2, 4], \ \ u_2 \in [-3, 1],$

$x_1(0) = 6, \ \ x_2(0) = -2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{13} (3x_1 + 2x_2 + 2u_1 + u_2)\, dt + 2x_2(0) \to \text{extr}, \ \ \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4, \ \ x_1(13) = x_2(13) = 0, \ \ x_1(0) = 1.$

29. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \ \ u_1 \geqslant -1, \ \ u_2 \geqslant -2,$

$|u_1 + 2u_2| \leqslant 6, \ \ x_1(0) = 1, \ \ x_2(0) = 2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = -x_2, \ \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u, \ \ |u| \leqslant 1,$

$x_1(0) - x_2(0) = 1, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (x_1 + |u|)\, dt \to \min, \ \ \ \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ u \in [-1, 4],$

$x_1(0) = 12, \ x_2(0) = 0, \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^{T} (1 + u_1 + |u_2|)\, dt \to \min, \ \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 + |u_2| \leqslant 4,$

$u_1 \geqslant 0, \ \ x_1(0) = 12, \ \ x_2(0) = 0, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

33. $\int\limits_0^{2\pi} x \sin 6t\, dt \to \min, \ \ \dot{x} = u, \ u \in [-3, 6], \ \ \ x(0) = 4, \ x(2\pi) = 0.$

34. $\int\limits_0^{T_0} \varphi(t) u_1 u_2\, dt \to \min, \ \ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \ \ (\varphi(t) \geqslant 0).$

Вариант 2

1. Показать, что оператор A является линейным и вычислить его норму

$$A\colon C[0,1] \to R^1 \quad Ax = x(0) - 3\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau - 4x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше

$$F\colon R^3 \to R^2, \quad F(x,y,z) = (1 + x^2 e^{yz}, (x^2 - z^2)\sin y), \ (0,0,0),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \dot{x}(t) - \int\limits_0^t x^2(t)\,dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M = \{x \mid \ x \in C^n[0,1], \ x^{(n)}(t) = x_0^{(n)}(t), \ x_0 \in C^n[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0) = 1, \ \ x(1) = 0.$

5. $\int\limits_{-1}^1 (\dot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(-1) = 1, \ \ x(1) = 1.$

6. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - 16x^2 - 4\sin t)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0) = x(T_0) = 0.$

7. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x_1(0) = x_2(0) = 0,$

   $x_1(1) = x_2(1) = \mathrm{sh}1.$

8. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt + \alpha x^2(1) \to \mathrm{extr}, \ \ x(0) = 1.$

9. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=0, \quad T - x(T) = 1.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 3, \quad x(0)=1, \quad x(1)=6.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x_1\,dt = \int\limits_0^1 x_2\,dt = 0, \quad x_1(0)=0, \quad x_2(0)=0,$
$x_2(1)=0, \quad x_1(1)=2.$

12. $\int\limits_0^1 (t+1)^2\ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}(0)=0,$

$x(1)=1, \quad \dot{x}(1)=2, \quad \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 0.$

13. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0, \quad x(1)=1, \quad \dot{x}(1)=4.$

14. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2+4x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=\dot{x}(0)=0, \quad \dot{x}(\pi)=\mathrm{sh}(\pi).$

15. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2+\dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1, \quad \dot{x}(0)=\mathrm{sh}1, \quad x(1)=\dot{x}(1)=0.$

16. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \ddot{x}-x=u, \quad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=0.$

17. $\int\limits_0^{7\pi/4} x\sin t\,dt \to \mathrm{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0)=1.$

18. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=-2, \quad x(2)=0.$

19. $T \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \; x(-1)=1, \quad x(T)=-1,$
$\dot{x}(-1)=\dot{x}(T)=0.$

20. $T \to \inf, \quad -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad \dot{x}(0)+\dot{x}(T)=1, \quad x(0)=1, \quad x(T)=2.$

21. $x_1(1)+x_2(1) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}_1=u_1, \quad \dot{x}_2=u_2, \quad u_1^2+u_2^2 \leqslant 1,$
$x_1(0)=x_2(0)=0.$

22. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x(0) \to \text{extr}, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(1) = 2.$

23. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt = 1, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$

24. $T \to \inf, \quad \ddot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = -2, \quad |\dot{x}(T)| \leqslant 1.$

25. $\int\limits_0^{20} (4u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x} = -2x + 12u, \quad u \in [-1, 1],$
$x(0) = -1, \quad x(20) = 0.$

26. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad 2u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 18,$
$x_1(0) = x_2(0) = -4, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad u_1 \in [-2, 4], \quad u_2 \in [-3, -1],$
$x_1(0) = -6, \quad x_2(0) = 2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{16} (4x_1 + 2x_2 + 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \text{extr}, \quad \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4, \quad x_1(16) = 1, \quad x_2(16) = 0, \quad x_1(0) = 1.$

29. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \quad u_1 \geqslant -1, \quad u_2 \geqslant -2,$
$|2u_1 + 2u_2| \leqslant 8, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + u, \quad |u| \leqslant 2,$
$x_1(0) + x_2(0) = 1, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (x_2 + 2|u|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = -x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-1, 2],$
$x_1(0) = -12,\ x_2(0) = 1,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1 + |u_1| + |u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2, \quad |u_1| + 2|u_2| \leqslant 4,$
$x_1(0) = 4, \quad x_2(0) = -13, \quad x_2(T) = 3x_1(T).$

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \cos 6t\,dt \to \min, \quad \dot{x} = u,\ u \in [-2, 4], \quad x(-\pi) = -4,$
$x(\pi) = 0.$

34. $\int\limits_0^{T_0}(|u_1|+u_2+tu_1)\,dt\to\min,\ \ |u_1|\leqslant 10,\ |u_2|\leqslant 1.$

Вариант 3

1. Показать, что оператор A является линейным и вычислить его норму

$$A\colon C[0,1]\to R^1\quad Ax=\int\limits_0^1 x(\tau)\sin(\pi\tau)\,d\tau - x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше

$$F\colon R^2\to R^2,\quad F(x,y)=(|x|e^y,|y|e^x),$$

$$F\colon C^2[0,1]\to C[0,1],\quad (Fx)(t)=\ddot{x}(t)-\int\limits_0^t \sin x(\tau)d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M=\{(x_1,x_2)\mid (x_1,x_2)\in R^2,\ x_1x_2\leqslant 1/2\}.$$

4. $\int\limits_0^1(x-\dot{x}^2)\,dt\to\text{extr},\ \ x(0)=0,\ \ x(1)=\xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0}(\dot{x}^2-9x^2+4x\cos t)\,dt\to\text{extr},\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=0.$

6. $\int\limits_0^1(\dot{x}_1\dot{x}_2+x_1x_2)\,dt\to\text{extr},\ \ x_1(0)=x_2(0)=1,$

   $x_1(1)=e,\ \ x_2(1)=1/e.$

7. $\int\limits_0^T\dot{x}^2\,dt\to\text{extr},\ \ x(0)=1,\ \ T+x(T)=2.$

8. $\int\limits_0^{T_0}x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt\to\text{extr},\ \ x(T_0)=1.$

9. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \int\limits_0^1 tx\,dt = 1,\ \ x(0) = x(1) = \dot{x}(1) = \dot{x}(0) = 0.$

10. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0) = 0,\ \ \dot{x}(0) = 0,\ \ x(\pi) = \mathrm{sh}(\pi).$

11. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt + \alpha x^2(T) \to \mathrm{extr},\ \ x(0) = x_0.$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0) = 0,\ \ x(\pi/2) = 1 + \frac{\pi}{2},\ \ \dot{x}(\pi/2) = 1.$

13. $\int\limits_0^T x\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 1,\ \ x(0) = 1,\ \ x(T) = 0.$

14. $\int\limits_0^{T_0} x\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \int\limits_0^{T_0} \ddot{x}^2\,dt = 1,\ \ x(0) = 1,\ \ x(T_0) = 0.$

15. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ddot{x} - x = u,\ \ x(0) = 0,$

$x(1) = \mathrm{sh}1,\ \ \dot{x}(1) = \mathrm{ch}1 + \mathrm{sh}1.$

16. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ |\dot{x}| \leqslant 1,\ \ x(T_0) = 1.$

17. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ddot{x} \leqslant 24,\ \ x(0) = 11,\ \ x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

18. $T \to \inf,\ \ |\ddot{x}| \leqslant 2,\ \ \dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0,\ \ x(0) = 1,\ \ x(T) = \xi.$

19. $\int\limits_0^1 (x + u)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ddot{x} = u,\ \ |u| \leqslant 1,\ \ x(0) = 1.$

20. $T \to \inf,\ \ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ \ x(0) + \dot{x}(T) = 1,\ \ \dot{x}(0) = 1,\ \ x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr},\ \ \dot{x} = u,\ \ |u| \leqslant 1,\ \ x(0) = -1.$

22. Задано количество массы M, которое надо распределить по кривой $y = y(x)$, соединяющей две заданные точки плоскости A, B с заданной плотностью $\sigma(x, y)$ Найти форму кривой,

чтобы ее момент инерции относительно оси OY был наименьшим.

23. $\int\limits_0^1 (u_1^2 + u_2^2)\, dt \to \text{extr}, \;\; \dot{x}_1 = x_2, \;\; \dot{x}_2 = u_1, \;\; \dot{x}_3 = x_4, \;\; \dot{x}_4 = u_2 - a,$
$x_1(0) = -1, \;\; x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0, \;\; x_1(T) = 0,$
$x_2(T) = x_3(T) = x_4(T) = 0.$

24. $T \to \inf, \;\; \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u,$
$u \in \operatorname{co}\{(1,-1), (2,1), (0,3)\}, \;\; x(0) = x_0, \;\; x(T) = 0.$

25. $\int\limits_0^{20} (4u - 2u^2 - 5x)\, dt \to \text{extr}, \;\; \dot{x} = 2x - 12u, \;\; u \in [-1, 1],$
$x(0) = 1, \;\; x(20) = 0.$

26. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; 2u_1^2 + u_2^2 \leqslant 18,$
$x_1(0) = 2, \;\; x_2(0) = -4, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1 \in [-1, 4], \;\; u_2 \in [-3, 1],$
$x_1(0) = -16, \;\; x_2(0) = 2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{18} (4x_1 - 2x_2 + 2u_1 - u_2)\, dt + 2x_2(0) \to \text{extr}, \;\; \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4, \;\; x_1(18) = -1, \;\; x_2(18) = 0, \;\; x_1(0) = 1.$

29. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \;\; u_1 \geqslant -1, \;\; u_2 \geqslant -2,$
$|u_1 + 2u_2| \leqslant 8, \;\; x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = -2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = -x_2, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + u, \;\; |u| \leqslant 2,$
$x_1(0) + x_2(0) = 1, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1 - |u|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = u, \; u \in [-1, 4],$
$x_1(0) = 12, \; x_2(0) = 0, \; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1 + |u_1| + |u_2|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1, \; \dot{x}_2 = u_2, \;\; 4|u_1| + 3|u_2| \leqslant 24,$
$x_1(0) = 20, \;\; x_2(0) = -3, \;\; x_2(T) = -x_1(T).$

33. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi} x\sin 8t\,dt \to \min,\ \ \dot{x} = u,\ u \in [-3,1],\ \ x(-\frac{\pi}{2}) = 6,\ x(\pi) = 1.$

34. $\int\limits_{0}^{T_0} (u_1^2 + tu_1 + u_2^2 + tu_2)\,dt \to \min,\ \ \ u_1 \in [-2,1],\ u_2 \geqslant 0.$

Вариант 4

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_0^1 x\,dt + x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (y\cos x, x\cos y, x^2 - y^2),$$

$$F\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = e^{x(t)} - \int\limits_0^t x^2(\tau)\,d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке $(0,0)$

$$M = \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2,\ x_1^2 \geqslant x_2^3\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + tx)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ x(0) = 1,\ \ \ x(1) = 0.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (4\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ x(0) = 0,\ \ \ x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ \ \ x_1(\pi/2) = 1,$

$x_2(\pi/2) = -1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt + x^2(0) - x^2(\pi/2) + 4x(\pi/2) \to \mathrm{extr}.$

8. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0)=0,\ (T-1)x^2(T)+2=0.$

9. $\int\limits_0^1 (\frac{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}{2} - x_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x_1(1)=x_2(1)=1.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \int\limits_0^1 tx\,dt=0,\ \ x(0)=-4,\ \ x(1)=4.$

11. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1,\ \ x(0)=x(1)=0.$

12. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt + \alpha x^2(0) \to \mathrm{extr},\ \ x(T)=x_1$

13. $\int\limits_0^1 (\dddot{x}^2+\ddot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0)=\ddot{x}(0)=0, \dot{x}(0)=1,$

$\dot{x}(1)=\mathrm{ch}1,\ \ x(1)=\mathrm{sh}1.$

14. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ddot{x}-x=u,\ \ x(0)=\dot{x}(0)=0,\ \ x(1)=\mathrm{sh}1,$

$\dot{x}(1)=\mathrm{ch}1+\mathrm{sh}1.$

15. $\int\limits_0^4 (\dot{x}^2+x)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ |\dot{x}| \leqslant 1,\ \ x(4)=1.$

16. $\int\limits_0^2 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\ \ \ddot{x} \geqslant 6,\ \ x(0)=\dot{x}(2)=0,\ \ x(2)=17.$

17. $T \to \inf,\ \ 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\ \ x(0)=\xi_1,\ \ \dot{x}(0)=\xi_2,\ \ x(T)=\dot{x}(T)=0.$

18. $T \to \inf,\ \ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2,\ \ x(0)+\dot{x}(T)=\xi_1,\ \ x(T)=1,\ \ \dot{x}(0)=\xi_2.$

19. $\int\limits_0^1 (u_1^2+u_2^2)\,dt + x_1^2(1)+x_2^2(1) \to \mathrm{extr},\ \ \dot{x}_1=u_1,\ \ \dot{x}_2=u_2,$

$x_1(0)=1,\ \ x_2(0)=-1,\ \ u_1^2+u_2^2 \leqslant 1.$

20. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr},\ \ \dot{x}=u,\ \ |u| \leqslant 1,\ \ x(T)=1.$

21. $\int\limits_0^T (\dddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \;\; x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 1, \;\; x(T) = 0.$

22. $T \to \inf, \;\; -2 \leqslant \ddot{x} \leqslant -1, \;\; x(0) = \xi_0,$

    $\dot{x}(0) = \xi_1, \;\; x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

23. Исходя из принципа Ферма — луч света из одной точки в другую проходит за минимально возможное время, — найти кривую, по которой луч света проходит из одной точки в другую, если скорость света зависит от координат.

24. $T \to \inf, \;\; \ddot{x} + 2\dot{x} + x = u, \;\; \|u\| \leqslant 1\,, \; x, u \in R^2,$

    $x(0) = x_0, \;\; x(T) = x_1.$

25. $\int\limits_0^{30} (4u - 2u^2 - 2x)\,dt \to \text{extr}, \;\; \dot{x} = -2x - 12u, \;\; u \in [-2, 2],$

    $x(0) = 1, \;\; x(30) = 0.$

26. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; 2u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 24,$

    $x_1(0) = -2, \;\; x_2(0) = 4, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1 \in [-1, 4], \;\; u_2 \in [-3, 4],$

    $x_1(0) = 16, \;\; x_2(0) = -2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{28} (4x_1 - 2x_2 + 2u_1 + 4u_2)\,dt - x_2(0) \to \text{extr}, \;\; \dot{x}_1 = u_1,$

    $\dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4, \;\; x_1(28) = -12, \;\; x_2(28) = 0, \;\; x_1(0) = 1.$

29. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2, \;\; u_1 \geqslant -2, \;\; u_2 \geqslant -4,$

    $|u_1 + 2u_2| \leqslant 8, \;\; x_1(0) = -4, \;\; x_2(0) = 4, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = -x_2, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + u, \;\; |u| \leqslant 2,$

    $2x_1(0) + x_2(0) = 1, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (x_2 + |u|)\,dt \to \min, \;\; \dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = u, \; u \in [-1, 1],$

    $x_1(0) = 2, \; x_2(0) = 1, \; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ \ |u_1|+5|u_2| \leqslant 10,$
$x_1(0) = -2,\ \ x_2(0) = 3,\ \ x_2(T) = 4x_1(T).$

33. $\int\limits_{-2\pi}^{0} x\sin 8t\,dt \to \min, \ \ \dot{x} = u,\ u \in [-1,2], \ \ x(-2\pi) = 8,$
$x(0) = -1.$

34. $\int\limits_{-2}^{2} (u_1^3 - tu_1^2 + u_2^3 - tu_2^2)\,dt \to \min, \ \ u_1, u_2 \in [-0{,}5, 0{,}5].$

Вариант 5

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to R^1, \quad Ax = \int\limits_0^{1/2} x\,dt - \int\limits_{1/2}^{1} x\ dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (xy, x^2+y^2),$$
$$F\colon C^2[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \ddot{x}^2(t) - \cos x(t).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке $(0,0)$

$$M = \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 0\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (4x\sin t - x^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0) = x(1) = 0.$

5. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} (x^2 - 4x\cos t - \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(-T_0) = 0, \ \ x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6\dot{x}_1 t + 12\dot{x}_2 t^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = x_2(1) = 1.$

7. $\int\limits_0^{T_0} (x^2 + \dot{x}^2)\, dt + \alpha x^2(T_0) \to \text{extr}.$

8. $\int\limits_0^{T} \dot{x}^3\, dt \to \text{extr}, \;\; T + x(T) = 1, \;\; x(0) = 0.$

9. $\int\limits_0^{1} \left(\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - x_1 x_2\right) dt \to \text{extr}, \;\; x_1(0) = x_2(0) = 1.$

10. $\int\limits_0^{1} \dot{x}^2\, dt \to \text{extr}, \;\; \int\limits_0^{1} x\, dt = 1, \;\; \int\limits_0^{1} tx\, dt \leqslant 0, \;\; x(0) = x(1) = 0.$

11. $\int\limits_0^{1} \dot{x}^2\, dt \to \text{extr}, \;\; \int\limits_0^{1} t^2 x\, dt \geqslant 1, \;\; x(0) = x(1) = 0.$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dddot{x}^2 - \ddot{x}^2)\, dt \to \text{extr}, \;\; x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi/2) = 0,$

$x(\pi/2) = 0, \;\; \ddot{x}(0) = \ddot{x}(\pi/2) = 1.$

13. $\int\limits_{-1}^{1} \ddot{x}^2\, dt \to \text{extr}, \;\; \int\limits_{-1}^{1} \dot{x}^2\, dt = 1, \;\; \int\limits_{-1}^{1} x\, dt = 0,$

$x(-1) = x(1) = \dot{x}(-1) = \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{1} (\dddot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr}, \;\; \int\limits_0^{1} x\, dt \geqslant 1,$

$\ddot{x}(1) = \dot{x}(1) = x(0) = 1.$

15. $\int\limits_0^{T_0} |\dot{x}|\, dt \to \text{extr}, \;\; \ddot{x} \geqslant A, \;\; x(0) = 0, \;\; x(T_0) = \xi.$

16. $\int\limits_0^{1} \ddot{x}^2\, dt \to \text{extr}, \;\; |\ddot{x}| \leqslant 1, \;\; x(0) = \dot{x}(0) = 0, \;\; x(1) = -\frac{11}{24}.$

17. $T \to \inf, \;\; -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1, \;\; x(0) = 3,$

$\dot{x}(0) = \dot{x}(T) = 0, \;\; x(T) = -5.$

18. $T \to \inf, \;\; 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1, \;\; x(0) = \xi_1, \;\; x(T) = \xi_2.$

19. $\int\limits_0^{1} u^2\, dt + x(1) \to \text{extr}, \;\; \dot{x} = u, \;\; |u| \leqslant 1.$

20. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 + u_1$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u_2$, $|u_1| \leqslant 1, |u_2| \leqslant 1$,
$x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

21. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$, $x_1(0) = \xi_1$, $\dot{x}_2(0) = \xi_2$,
$0 \leqslant u \leqslant 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(0,1,1)$, $B(2,0,4)$ на поверхности $x^2 + y^2 - z = 0$.

23. На плоскости дана точка $A(x_A, y_A)$. Провести кривую длины l, соединяющую начало координат с точкой A так, чтобы площадь фигуры, ограниченной данной кривой, осью OX и прямой $x = x_A$ была наибольшей.

24. $x^2(T_0) \to \text{extr}$, $|\ddot{x}| \leqslant 1$, $x(0) = \xi$, $\dot{x}(0) = 0$.

25. $\int\limits_0^{30} (-4u - 2u^2 - 2x)\, dt \to \text{extr}$, $\dot{x} = 2x - 12u$, $u \in [-2, 2]$,
$x(0) = -1$, $x(30) = 0$.

26. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 27$,
$x_1(0) = -12$, $x_2(0) = -4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 3]$, $u_2 \in [-3, 8]$,
$x_1(0) = -6$, $x_2(0) = 5$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{20} (4x_1 + 2x_2 + 2u_1 + 4u_2)\, dt - 2x_2(0) \to \text{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,
$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$, $x_1(20) = -10$, $x_2(20) = 1$, $x_1(0) = 1$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $u_1 \geqslant -2$, $u_2 \geqslant -6$,
$|2u_1 + u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = -14$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 3$,
$2x_1(0) - x_2(0) = 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-2, 1]$,
$x_1(0) = -2$, $x_2(0) = 4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ 3|u_1|+2|u_2| \leqslant 18,$
$x_1(0) = 2,\ \ x_2(0) = -13,\ \ x_2(T) = x_1(T).$

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} x\cos 12t\,dt \to \min,\ \ \dot{x} = u,\ \ u \in [-2, 4],\ \ x(-\pi) = -1,$
$x(\frac{\pi}{2}) = 2.$

34. $\int\limits_{-1}^{1} (t^2u_2^2 - tu_2 + u_1 - |u_1|)\,dt \to \min,\ \ |u_1| \leqslant 4, |u_2| \leqslant 4.$

Вариант 6

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_{1/2}^{1} x\,dt - x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (a|x| + b|y|, x, y),$$
$$F\colon C[0,1] \to R^1, \quad Fx = \int\limits_0^1 \varphi(x(t))\,dt,\ \varphi \in C^1(R^1).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке z_0

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ f(x(0)) = 0,\ f \in C^1(R^1)\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 6x\mathrm{sh}2t)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0) = x(1) = 0.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (x^2 - \dot{x}^2 + 4x\cos t)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0) = 0,\ \ x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_{-1}^{1} (\dot{x}^2 - 2tx)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(-1) = -1,\ \ x(1) = \xi.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_3(0) = x_2(\pi/2) = 0, \quad x_3(\pi/2) = -\pi/2, \quad x_1(\pi/2) = \pi/2.$

8. $\int\limits_0^1 (x_1x_2 + \dot{x}_1\dot{x}_2)\,dt + x_1(0)x_2(1) + x_1(1)x_2(0) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = -3/2, \quad \int\limits_0^1 tx\,dt \geqslant -2,$
$x(0) = 2, \quad x(1) = -14.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx\,dt = 0, \quad x(0) = 0.$

11. $\int\limits_0^T (x^2 + \dot{x}^2)\,dt + \alpha x^2(T)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad \int\limits_0^T x\,dt \geqslant 1.$

12. $\int\limits_0^T (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt = 1.$

13. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{T_0} \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^{T_0} \dot{x}^2\,dt \geqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 1, \quad \ddot{x}(T_0) = 2.$

15. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \text{extr}, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 1.$

16. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = 0.$

17. $x(2) \to \text{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 2, \quad \int\limits_0^2 \dot{x}^2\,dt = 2, \quad x(0) = 0.$

18. $T \to \inf, \quad 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \xi, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

19. $T \to \inf, \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = \xi_1, \quad \dot{x}(0) + x(T) = \xi_2.$

20. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x(1) \to \text{extr}, \quad \dot{x} = x + u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 1.$

21. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2, \;\; \dot{x}_2 = -x_1 + u, \;\; -1 \leqslant u \leqslant 0, \;\; x_1(0) = x_1^0,$
$x_2(0) = x_2^0, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(0,1,2)$, $B(1,0,0)$ на поверхности $x^2 + y^2 = 1$.

23. Дан угол с вершиной в начале координат. Соединить данную точку A на одной стороне угла с неизвестной точкой B на другой стороне угла кривой длины l так, чтобы площадь между сторонами угла и кривой была максимальной.

24. $\int\limits_0^{3\pi} x \sin t \, dt \to \mathrm{extr}, \;\; |\dot{x}| \leqslant 1, \;\; x(0) = 0, \;\; x(3\pi) = \pi.$

25. $\int\limits_0^{30} (-4u - 2u^2 - x) \, dt \to \mathrm{extr}, \;\; \dot{x} = x - 2u, \;\; u \in [-1, 2],$
$x(0) = 3, \;\; x(30) = 0.$

26. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; 3u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 27,$
$x_1(0) = -2, \;\; x_2(0) = 4, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1 \in [-2, 3], \;\; u_2 \in [-3, 7],$
$x_1(0) = 8, \;\; x_2(0) = -5, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{20} (4x_1 + 2x_2 - 3u_1 + 4u_2) \, dt - 2x_2(0) \to \mathrm{extr}, \;\; \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \;\; x_1(20) = 10, \;\; x_2(20) = -1, \;\; x_1(0) = 1.$

29. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2, \;\; u_1 \geqslant -2, \;\; u_2 \geqslant -4,$
$|2u_1 + 3u_2| \leqslant 18, \;\; x_1(0) = 14, \;\; x_2(0) = 2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = -x_2, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + u, \;\; |u| \leqslant 3,$
$2x_1(0) - x_2(0) = -1, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|) \, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = u, \; u \in [-2, 1],$
$x_1(0) = 6, \; x_2(0) = -1, \; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + |u_2|) \, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1, \; \dot{x}_2 = u_2, \;\; |u_1| + 5|u_2| \leqslant 10,$
$x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = -3, \;\; 2x_2(T) = x_1(T).$

33. $\int\limits_{-2\pi}^{\pi/4} x\cos 5t\,dt \to \min,\ \ \dot{x}=u,\ u\in[-2,3],\quad x(-2\pi)=-3,$
$x(\frac{\pi}{4})=3.$

34. $\int\limits_{0}^{2\pi} u_1u_2\cos 2t\,dt \to \min,\quad u_1\geqslant 1,\ u_2\geqslant 2,\ u_1^2+u_2^2\leqslant 9.$

Вариант 7

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1]\to R^1,\ Ax=\int\limits_0^1 x\sin^2\pi t\,dt - x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^3\to R^2,\quad F(x,y,z)=(a|x|+b|y|+c|z|,x^2+y^2+z^2),$$
$$F\colon C[0,1]\to R^1,\quad F(x)=\int\limits_0^1 \varphi(t,x(t))\,dt,\ \varphi\in C^1(R).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке z_0

$$M=\{x\mid x\in C[0,1],\ f(x(0))=0,\ f\in C^1(R),\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} \dot{x}^3\,dt\to\text{extr},\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=\xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2+x^2-4x\sin(\frac{t}{6}))\,dt\to\text{extr},\quad x(0)=\xi,\ \ x(T_0)=0.$

6. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2+3x^2)e^{2t}\,dt\to\text{extr},\ \ x(0)=1,\ \ x(1)=e.$

7. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+2x_1)\,dt\to\text{extr},\ \ x_1(0)=1,$

$x_2(1)=1,\ \ x_2(0)=0,\ \ x_1(1)=\frac{1}{2}.$

8. $\int\limits_1^e 2\dot{x}(t\dot{x}+x)\,dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_1^e (t\dot{x}^2+2x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1)=e.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2}, x(0)=1, \quad x(\pi)=-1.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx\,dt \geqslant 1, \quad x(0)=x(1)=1.$

12. $\int\limits_0^T (2x^2+\dot{x}^2)\,dt - x^2(T) \to \text{extr}, \quad x(0)=\xi.$

13. $\int\limits_0^\pi (\dddot{x}^2-\dot{x}^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0)=\dot{x}(0)=0,$

$x(\pi)=\text{sh}(\pi), \quad \dot{x}(\pi)=\text{ch}(\pi)+1.$

14. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \geqslant 4, \quad x(0)=x(1)=\dot{x}(0)=0.$

15. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt \to \text{extr}, \quad \ddot{x}+x=u,$

$x(0)=x(\pi/2)=0, \quad \dot{x}(\pi/2)=-\pi/2.$

16. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2+x)\,dt \to \text{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0)=\xi.$

17. $x(T_0) \to \inf, \quad \int\limits_0^{T_0} \dot{x}^2\,dt \geqslant 2, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0)=0.$

18. $T \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0)=\xi_1, \quad \dot{x}(0)=\xi_2, \quad \dot{x}(T)=0.$

19. $T \to \inf, \quad -4 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0)=1, \quad \dot{x}(0)=2, \quad x(T)=\dot{x}(T)=0.$

20. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x^2(1) \to \text{extr}, \quad \dot{x}=x+u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0)=\xi.$

21. $\int\limits_0^{T_0} u^2(u-1)^2\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x}=u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$

$x(0)=0, \quad x(T_0)=1.$

22. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \ \ -1 \leqslant u \leqslant 2, \ \ x_1(0) = \xi_1,$

$x_2(0) = \xi_2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(0, 2, 0)$ до точки $B(2, 2, 0)$ на поверхности $y^2 + z^2 = 4$.

24. На сторонах OA и OB угла с вершиной O даны точки A и B. Требуется соединить их кратчайшей линией ACB при условии, что площадь $OACB$ равна S.

25. $T \to \inf, \ \ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} u,$

$u \in \operatorname{co}\{(0,0), (-1,1), (1,-1)\}, \ \ x(0) = x_0, \ \ x(T) = 0.$

26. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ 3u_1^2 + 25u_2^2 \leqslant 27,$

$x_1(0) = -12, \ \ x_2(0) = -4, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 \in [-5, 3], \ \ u_2 \in [-1, 7],$

$x_1(0) = -8, \ \ x_2(0) = -5, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{20} (4x_1 + 3x_2 - u_1 + 4u_2)\, dt - x_2(0) \to \operatorname{extr}, \ \ \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \ \ x_1(20) = 2, \ \ x_2(20) = 3, \ \ x_1(0) = 2.$

29. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2, \ \ u_1 \geqslant -4, \ \ u_2 \geqslant -4,$

$|u_1 + 6u_2| \leqslant 12, \ \ x_1(0) = 4, \ \ x_2(0) = 12, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = -x_2, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u, \ \ |u| \leqslant 3,$

$2x_1(0) - 2x_2(0) = 1, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ u \in [-3, 1],$

$x_1(0) = -8, \ x_2(0) = 1, \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + |u_2|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1, \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ 3|u_1| + 2|u_2| \leqslant 6,$

$x_1(0) = 12, \ \ x_2(0) = -3, \ \ x_2(T) = -2x_1(T).$

33. $\int\limits_{\pi}^{3\pi} x \cos 6t\, dt \to \min, \ \ \dot{x} = u, \ u \in [-2, 1], \quad x(\pi) = -4, \ x(3\pi) = 0.$

34. $\int\limits_0^{T_0} (u_1^2+p_1(t)u_2+u_1)\,dt \to \min, \quad 0 \leqslant u_1+u_2 \leqslant 2,\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0.$

Вариант 8

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int\limits_0^{1/2} x(\tau)\,d\tau - \int\limits_{1/2}^{t} x(\tau)\,d\tau.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^3 \to R^3, \quad F(x,y,z) = (x, -y, e^{-z}(x+y)),\ (1,1,0),$$
$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad F(x)(t) = \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ \int\limits_0^1 x^2(\tau)\,d\tau \geqslant 1\},\ x_0(t) = 1.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (4\dot{x}^2 + x^2 + 6x\mathrm{sh}2t)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0) = 0, \ \ x(T_0) = \xi.$

5. $\int\limits_0^1 \sqrt{x(1+\dot{x}^2)}\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0) = x(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

6. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x_1(0) = x_2(0) = 0,$

   $x_1(\pi/2) = 1, \ \ x_2(\pi/2) = 1.$

7. $\int\limits_0^3 4\dot{x}^2x^2\,dt + 4x^4(0) - 8x(3) \to \mathrm{extr}.$

8. $\int\limits_{-1}^{T} \dot x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(-1) = T, \quad \int\limits_{-1}^{T} x\,dt \geqslant 1, \quad x(T) = 0.$

9. $\int\limits_{0}^{\pi} \dot x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_{0}^{\pi} x \sin t\,dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1.$

10. $\int\limits_{0}^{1} \dot x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_{0}^{1} x\,dt \geqslant 1, \quad x(0) = \xi.$

11. $\int\limits_{0}^{T} (x^2 + \dot x^2)\,dt + x(0) \to \mathrm{extr}, \quad x(T) = \xi, \quad \int\limits_{0}^{T} tx\,dt = 1.$

12. $\int\limits_{0}^{1} \ddot x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = \dot x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$

13. $\int\limits_{0}^{1} x\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_{0}^{1} \ddot x^2\,dt \geqslant 1, \quad x(0) = \dot x(0) = \dot x(1) = 0.$

14. $\int\limits_{0}^{\pi/2} u^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \ddot x + x = u,$

$x(\pi/2) = 0, \quad \dot x(\pi/2) = 1, \quad x(0) = 0.$

15. $\int\limits_{0}^{T_0} (\dot x^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad |\dot x| \leqslant 1, \quad x(T_0) = \xi.$

16. $\int\limits_{0}^{1} (\frac{x^2 + \dot x^2}{2} + |\dot x|)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(1) = \xi.$

17. $T \to \inf, \quad |\ddot x| \leqslant 1, \quad x(0) = \xi_1, \quad \dot x(0) = \xi_2, \quad x(T) = 0.$

18. $T \to \inf, \quad -3 \leqslant u \leqslant 4, \quad x(0) = 1, \quad \dot x(0) = 2, \quad x(T) = \dot x(T) = 0.$

19. $\int\limits_{0}^{1} (u^2 + 2tx)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot x = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 0.$

20. $T \to \inf, \quad \int\limits_{0}^{T} x\,dt \geqslant 1, \quad \dot x = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 1.$

21. $\int\limits_{0}^{1} \sin u\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot x = \cos u, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \ |u| \leqslant \frac{\pi}{2}.$

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, \sqrt{12})$, $B(0, 3, 0)$ на поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

23. Среди всех кривых, соединяющих прямые $x = x_0$, $x = x_1$ и образующих вместе с ними и осью OX площадь заданной величины, найти ту, у которой центр тяжести этой фигуры занимает наинизшее положение.

24. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = -x_1 + u$, $-2 \leqslant u \leqslant -1$, $x(0) = \xi_1$,
$x_2(0) = \xi_2$, $x_1(T) + x_2(T) = 0$.

25. $\int\limits_0^{30} (4u - u^2 + 2x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = x + 2u$, $u \in [-3, 2]$,
$x(0) = -3$, $x(30) = 0$.

26. $T \to \inf$ $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 27$,
$x_1(0) = 6$, $x_2(0) = 7$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 3]$, $u_2 \in [-4, 7]$,
$x_1(0) = 28$, $x_2(0) = -14$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{20} (x_1 + 2x_2 - 3u_1 + 4u_2)\,dt + x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,
$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $x_1(20) = 1$, $x_2(20) = 1$, $x_1(0) = -1$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $u_1 \geqslant -2$, $u_2 \geqslant -4$,
$|u_1 + 6u_2| \leqslant 24$, $x_1(0) = -14$,
$x_2(0) = -2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 4$,
$2x_1(0) + x_2(0) = 3$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-4, 1]$,
$x_1(0) = 16$, $x_2(0) = -6$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + |u_2|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $5|u_1| + |u_2| \leqslant 5$,
$x_1(0) = 12$, $x_2(0) = -3$, $x_2(T) = -4x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi/3} x\cos 5t\,dt \to \min,\ \ \dot{x}=u,\ u\in[-2,2],\quad x(-\pi)=4,$
$x(\frac{2\pi}{3})=-1.$

34. $\int\limits_{0}^{2\pi}(u^2-u\cos t)\,dt \to \min,\ \ |u|\leqslant 0,5.$

Вариант 9

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1]\to C[0,1],\ (Ax)(t)=x(t)-x(0)+x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2\to R^2,\quad F(x,y)=(\{x\},y),$$

$$F\colon C[0,1]\to C[0,1],\quad (Fx)(t)=tx(t)-\int\limits_0^t x^2(\tau)\,d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0

$$M=\{x\in C^3[0,1]\mid\ \dddot{x}=0\}.$$

4. $\int\limits_0^1(\dot{x}^2+x^2+4x\mathrm{sh}t)\,dt\to\mathrm{extr},\ \ x(0)=-1,\ \ x(1)=0.$

5. $\int\limits_0^{T_0}(\dot{x}^2-4x^2)e^{2t}\,dt\to\mathrm{extr},\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=\xi.$

6. $\int\limits_{-1}^{1}x^2(1-\dot{x})^2\,dt\to\mathrm{extr},\ \ x(-1)=0,\ \ x(1)=1.$

7. $\int\limits_0^1(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+4x_1^2)\,dt\to\mathrm{extr},\ \ x_1(0)=x_2(0)=0,$
$x_2(1)=0,\ \ x_1(1)=1.$

8. $\int\limits_0^1 e^x\dot{x}^2\,dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^T e^x\dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\;\; x(0)=\xi,\;\; x(T)=T+1.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\;\; \int\limits_0^1 x\,dt = 0,\;\; x(0)=1,\;\; \int\limits_0^1 tx^2\,dt \geqslant 1.$

11. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\;\; x(0)=1,\;\; \int\limits_0^1 x\,dt = 1,\;\; \dot{x}(1)=0.$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \mathrm{extr},\;\; \ddot{x}+x=u,\;\; x(0)=1,\;\; \dot{x}(\pi/2)=0.$

13. $\int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt + x(0) \to \mathrm{extr},\;\; x(T)=\dot{x}(T)=1,\;\; \dot{x}(0)=0,\;\; \int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \geqslant 1.$

14. $T \to \inf,\;\; \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt \geqslant 1,\;\; x(0)=\dot{x}(0)=0,\;\; x(T)=\dot{x}(T)=1.$

15. $T \to \inf,\;\; \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 4,\;\; x(0)=0,\;\; \dot{x}(0)=1,\;\; \dot{x}(T)=-1.$

16. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr},\;\; |\dot{x}| \leqslant 1,\;\; x(0)=0,\;\; x(T_0)=1.$

17. $\int\limits_0^1 x^2\,dt \to \mathrm{extr},\;\; |\dot{x}| \leqslant 1,\;\; x(0)=1.$

18. $T \to \inf,\;\; 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\;\; x(0)=\dot{x}(0)=1,\;\; x(T)=\dot{x}(T)=2.$

19. $\int\limits_0^1 (x^2+u^2)\,dt + x(1) \to \mathrm{extr},\;\; \dot{x}=u,\;\; |u| \leqslant 1,\;\; x(0)=1.$

20. $\int\limits_0^T (x_1+x_2-3u)\,dt + x_1(T) \to \mathrm{extr},\;\; \dot{x}_1 = x_1+x_2,\;\; \dot{x}_2 = u,$
$0 \leqslant u \leqslant 1,\;\; x_1(0)=1,\;\; x_2(0)=0.$

21. $T \to \inf,\;\; \dot{x}_1 = u_1,\;\; \dot{x}_2 = u_2,\;\; u_1^2+u_2^2 \leqslant 1,\;\; x_1(0)=\xi_1,$
$x_2(0)=\xi_2,\;\; x_1(T)=x_2(T)=0.$

22. На поверхности $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ найти кратчайшее расстояние между точками $A\left(\sqrt{\frac{8}{3}},\sqrt{3},0\right)$, $B(0,0,-4)$.

23. Данную точку $(0,b)$ оси OY соединить с осью OX кривой, заключающей вместе с осями OX и OY фигуру данной площади S и образующей при вращении около оси OX наименьшую поверхность.

24. $T\to\inf$, $\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}u$,

$u\in\operatorname{co}\{(1,1),(-1,-2),(0,1)\}$, $x(0)=x_0$, $x(T)=0$.

25. $\int\limits_0^{40}(4u-6u^2+5x)\,dt\to\operatorname{extr}$, $\dot{x}=3x+2u$, $u\in[-1,2]$,

$x(0)=3$, $x(40)=0$.

26. $T\to\inf$ $\dot{x}_1=u_1$, $\dot{x}_2=u_2$, $9u_1^2+4u_2^2\leqslant 36$,

$x_1(0)=-6$, $x_2(0)=5$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

27. $T\to\inf$, $\dot{x}_1=u_1$, $\dot{x}_2=u_2$, $u_1\in[-2,3]$, $u_2\in[-4,5]$,

$x_1(0)=23$, $x_2(0)=-13$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

28. $\int\limits_0^{21}(3x_1+2x_2-3u_1-4u_2)\,dt+3x_2(0)\to\operatorname{extr}$, $\dot{x}_1=u_1$,

$\dot{x}_2=u_2$, $u_1^2+u_2^2\leqslant 1$, $x_1(21)=-1$, $x_2(21)=1$, $x_1(0)=-1$.

29. $T\to\inf$, $\dot{x}_1=x_2-u_1$, $\dot{x}_2=x_1+2u_2$, $u_1\geqslant -3$, $u_2\geqslant -4$,

$|u_1+6u_2|\leqslant 24$, $x_1(0)=-10$, $x_2(0)=1$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

30. $T\to\inf$, $\dot{x}_1=-x_2$, $\dot{x}_2=x_1+u$, $|u|\leqslant 3$,

$2x_1(0)+2x_2(0)=3$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

31. $\int\limits_0^{T}(1+|u|)\,dt\to\min$, $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=u$, $u\in[-6,1]$,

$x_1(0)=-2$, $x_2(0)=8$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

32. $\int\limits_0^{T}(1+|u_1|+|u_2|)\,dt\to\min$, $\dot{x}_1=u_1$, $\dot{x}_2=u_2$, $|u_1|+2|u_2|\leqslant 6$,

$x_1(0)=12$, $x_2(0)=-3$, $x_2(T)=x_1(T)=0$.

33. $\int\limits_{2\pi}^{4\pi} x \sin 3t \, dt \to \min, \;\; \dot{x} = u, \; u \in [-2, 2], \quad x(2\pi) = 4, \; x(4\pi) = -1.$

34. $\int\limits_{0}^{2\pi} (u^2 + u \sin 4t) \, dt \to \min, \quad |u| \leqslant \dfrac{1}{4}.$

Вариант 10

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму
$$A \colon C[0,1] \to C[0,1], \; (Ax)(t) = t^2 x(t) + x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.
$$F \colon R^2 \to R^2, \quad F(x, y) = (|xy|, x \cos y),$$
$$F \colon C[0,1] \to C^1[0,1], \quad (Fx)(t) = \int\limits_0^t x(\tau) \, d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M
$$M = \{x \in C^2[0,1] \mid \ddot{x} = f, f \in C^2[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + 9x^2 + 4x \operatorname{sh} t) \, dt \to \operatorname{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi.$

5. $\int\limits_0^1 \sin \dot{x} \, dt \to \operatorname{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = \pi/2.$

6. $\int\limits_{-1}^1 (x^2 + 2tx\dot{x}) \, dt \to \operatorname{extr}, \quad x(-1) = 1, \quad x(1) = 1.$

7. $\int\limits_0^1 (16x_1^2 - \dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2) \, dt \to \operatorname{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0,$
$x_1(1) = 1, \quad x_2(1) = 2.$

8. $\int\limits_0^1 e^{t+1} (\dot{x}^2 + 2x^2) \, dt + 2x(1)(x(0) + 1) \to \operatorname{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = \xi.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^\pi x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt = \pi + 2,$

    $x(0) = 2, \quad x(\pi) = 0.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt \geqslant 1, \quad \int\limits_0^1 tx\,dt = 0, \quad x(1) = 0.$

12. $\int\limits_0^T (x^2 + (\dot{x} - x)^2)\,dt - x^2(0) \to \mathrm{extr}, \quad x(T) = \xi, \quad \int\limits_0^T x\,dt = 1.$

13. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1, \quad x(1) = \dot{x}(0) = 0.$

15. $T \to \inf, \quad \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(T) = 1.$

16. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \mathrm{extr}, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(\pi/2) = 1.$

17. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = \xi.$

18. $T \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 2, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 4.$

19. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x} = u, |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 1.$

20. $T \to \inf, \quad \dot{x} = 2x + u, \ |u| \leqslant 1, \quad x(0) = -2, \quad x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^5 (3u - 2x)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x} = x - u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1,$

    $x(0) = 0, \quad x(5) = \frac{3}{2}.$

22. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, |u_1| \leqslant 1, |u_2| \leqslant 1, \quad x_1(0) = \xi_1,$
    $x_2(0) = \xi_2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1,1,\sqrt{2})$, $B(-1,0,\sqrt{3})$ на поверхности $x^2+y^2+z^2=4$.

24. Найти кратчайшую линию, соединяющую две точки плоскости, при условии, что данная линия должна отстоять от начала координат на расстояние, не меньшее заданного числа a.

25. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} u$,

$u \in \operatorname{co}\{(-1,1),(2,0),(0,3\}$, $x(0)=x_0$, $x(T)=0$.

26. $\int\limits_0^{12} (4u - 6u^2 + 5x)\,dt \to \operatorname{extr}$, $\dot{x} = 3x - 5u$, $u \in [-3,2]$,

$x(0) = -3$, $x(12) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $9u_1^2 + u_2^2 \leqslant 36$,

$x_1(0) = -16$, $x_2(0) = 15$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2,3]$, $u_2 \in [-3,5]$,

$x_1(0) = 22$, $x_2(0) = -13$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

29. $\int\limits_0^{24} (-3x_1 + 2x_2 - 3u_1 - 4u_2)\,dt + 3x_2(0) \to \operatorname{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,

$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $x_1(24) = -1$, $x_2(24) = 1$, $x_1(0) = -1$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $u_1 \geqslant -6$, $u_2 \geqslant -4$,

$|u_1 + 6u_2| \leqslant 24$, $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -21$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-1,4]$,

$x_1(0) = -8$, $x_2(0) = 12$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^{T} (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $3|u_1|+2|u_2| \leqslant 18$,

$x_1(0) = 12$, $x_2(0) = -3$, $x_2(T) = -3x_1(T)$.

33. $\int\limits_{\pi/3}^{3\pi} x\cos 3t\,dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2,4]$, $x(\frac{\pi}{3}) = 0$, $x(3\pi) = 1$.

34. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} u\cos(t-\dfrac{\pi}{3})\,dt \to \min, \;\; |u| \leqslant \dfrac{1}{2}.$

Вариант 11

1. Проверить, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1],\; (Ax)(t) = x(t) - \int\limits_0^1 x(t)\,dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (|x|-|y|, \sin(x^2+y^2)),$$

$$F\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \sin x(t) - \int\limits_0^1 x^5(t)\,dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0

$$M = \{x \in C^1[0,1],\; \int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \geqslant 1\},\; x_0 = t.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{ch}t)\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; x(0) = 1, \;\; x(1) = 0.$

5. $\int\limits_0^1 \cos\dot{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; x(0) = 0, \;\; x(1) = \xi.$

6. $\int\limits_0^1 x\dot{x}^3\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; x(0) = 0, \;\; x(1) = 1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/4} (2x_2 - 4x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2)\,dt \to \mathrm{extr},$

$x_1(0) = x_2(0) = 0, \;\; x_1(\pi/4) = x_2(\pi/4) = 1.$

8. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - x)\,dt - \frac{x^2(1)}{2} + \frac{x^2(0)}{2} \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \mathrm{extr},\quad x(0) = 0,\quad x(T) + T = 2.$

10. $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\quad \int\limits_1^2 x\,dt \geqslant 2,\quad x(1) = 0,\quad x(2) = 0.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\quad \int\limits_0^1 x\,dt = \int\limits_0^1 tx\,dt = 0,\quad x(0) = \xi,\quad x(1) = 1.$

12. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\quad x(0) = \dot{x}(0) = 0,\quad \dot{x}(1) = \mathrm{sh}1.$

13. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr},\quad \int\limits_0^1 x^2\,dt \leqslant 1,\quad x(0) = \dot{x}(0) = 2,\quad \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{\pi/2} (u^2 + x)\,dt + x^2(0) \to \mathrm{extr},\quad \ddot{x} + x = u,$
$\dot{x}(\pi/2) = 0,\quad x(\pi/2) = 1.$

15. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr},\quad |\dot{x}| \leqslant 1,\quad x(0) = 0.$

16. $T \to \inf,\quad \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 1,\quad x(0) = \dot{x}(0) = x(T) = 0.$

17. $T \to \inf,\quad 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1,\quad x(0) = 1,\quad \dot{x}(0) = -1,$
$x(T) = 0.$

18. $\int\limits_0^T x^2\,dt \to \mathrm{extr},\quad \dot{x} = u,\quad |u| \leqslant 1,\quad x(0) = \xi.$

19. $T \to \inf,\quad \dot{x} = 2x + u,\quad |u| \leqslant 1,\quad x(0) = -2,\quad x(T) = 0.$

20. $\int\limits_0^5 (x - u)\,dt - x^2(5) \to \mathrm{extr},\quad \dot{x} = 2x + u,\quad 0 \leqslant u \leqslant 1,\quad x(0) = 0.$

21. $T \to \inf,\quad \dot{x}_1 = u_1,\quad \dot{x}_2 = u_2,\quad |u_2| \leqslant 1,\quad 0 \leqslant u_1 \leqslant 2,$
$x_1(0) = \xi_1,\quad x_2(0) = \xi_2,\quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(0, 0, 2)$, $B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. Пусть $\sigma(x, y) = x + y^2$ — плотность распределения массы вдоль кривой, соединяющей точки $A(1, 1)$, $B(2, 3)$. Найти такую кривую, для которой момент инерции относительно оси OY был бы минимальным.

24. $T \to \inf, \;\; \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u,$

$u \in \mathrm{co}\{(-1, 1), (2, -1), (0, 2)\}, \;\; x(0) = x_0, \;\; x(T) = 0.$

25. $\int\limits_0^{15} (4u + u^2 + 5x)\, dt \to \mathrm{extr}, \;\; \dot{x} = -3x - 15u, \;\; u \in [-3, 4],$

$x(0) = 3, \;\; x(15) = 0.$

26. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 36,$

$x_1(0) = -13, \;\; x_2(0) = 11, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1 \in [-2, 1], \;\; u_2 \in [-3, 2],$

$x_1(0) = -22, \;\; x_2(0) = -13, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{22} (-3x_1 + 2x_2 - 3u_1 + 4u_2)\, dt + 3x_2(0) \to \mathrm{extr}, \;\; \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1, \;\; x_1(22) = -1, \;\; x_2(22) = 1, \;\; x_1(0) = -1.$

29. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + 2u_2, \;\; u_1 \geqslant -6, \;\; u_2 \geqslant -2,$

$|8u_1 + u_2| \leqslant 24, \;\; x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = -21, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $\int\limits_0^{T_0} ux dt \;\to \inf, \; x(0) = x_0, \; \dot{x} = (u - 2)x, \; u \in [0, 1].$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = u, \; u \in [-2, 1],$

$x_1(0) = 16, \; x_2(0) = 4, \; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + |u_2|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1, \; \dot{x}_2 = u_2, \;\; |u_1| + 3|u_2| \leqslant 9,$

$x_1(0) = 12, \;\; x_2(0) = -1, \;\; x_2(T) = -4x_1(T).$

33. $\int\limits_{-\pi}^{5\pi/4} x\cos 4t\,dt \to \min,\ \ \dot{x} = u,\ u \in [-2, 4],\quad x(-\pi) = 4,$
$x(\frac{5\pi}{4}) = 1.$

34. $\int\limits_{7}^{10} (\ln(tu) + u)\,dt \to \min,\ \ u \in [1, 2].$

Вариант 12

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму
$$A\colon C^1[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \dot{x}(t) + x(t).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.
$$F\colon R^2 \to R^2,\quad F(x,y) = (|x|,\ e^{|y|}),$$
$$F\colon C^2[0,1] \to C^1[0,1],\quad (Fx)(t) = \dot{x}(t) + \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0
$$M = \{x \in C^2[0,1] \mid \ddot{x}^2(t) < 1 \text{ для всех } t \in [0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\operatorname{ch}t)\,dt \to \operatorname{extr},\ \ x(0) = 0,\ \ x(T_0) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} \sin\dot{x}\,dt \to \operatorname{extr},\ \ x(0) = 0,\ \ x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_0^1 (t + \dot{x}^2)\,dt \to \operatorname{extr},\ \ x(0) = 1,\ \ x(1) = 2.$

7. $\int\limits_{-1}^1 (\dot{x}_1^2 + 2tx_1 + x_2^2 - \dot{x}_2^2)\,dt \to \operatorname{extr},\ \ x_1(-1) = 2,\ \ x_1(1) = 1,$
$x_2(-1) = -1,\ \ x_2(1) = 1.$

8. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)\,dt - 2x^2(0) - x^2(\pi/2) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

10. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = -T - 1.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 xe^{-t}\,dt \geqslant e, \quad x(0) = 2e + 1, \quad x(1) = 2.$

12. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^T x\,dt \leqslant 1, \quad x(0) = 3.$

13. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + 48x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1.$

14. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt = 1, \quad x(0) = x(1) = \dot{x}(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr}, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(\pi/2) = 0,$
$\dot{x}(0) = 0, \quad \dot{x}(\pi/2) = 1.$

16. $T \to \inf, \quad \int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt \geqslant 4, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(T) = 1, \quad \dot{x}(T) = 2.$

17. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad x_1(0) = \xi_1, \quad x_2(0) = \xi_2,$
$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0, \; u_1 \in [-1, 2], \; u_2 \in [-2, 4].$

18. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 1.$

19. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x)\,dt \to \text{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = x(T_0) = 1.$

20. $T \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 2, \quad x(T) + \dot{x}(T) = 2.$

21. $\int\limits_0^2 (2x - 3u)\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x} = x + u, \quad x(0) = 5, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1.$

22. $T \to \inf$, $\dot{x} = -x + u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $x(0) = -2$, $x(T) = 1$.

23. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти расстояние между точками $A(0, -2, 0)$, $B(0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

24. Среди всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки плоскости, найти ту кривую, которая при вращении вокруг оси OY образует поверхность наименьшей площади.

25. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u$,

$u \in \operatorname{co}\{(1,1), (-1,2), (0,0)\}$, $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$.

26. $\int\limits_0^{16} (u - 6u^2 + 5x)\, dt \to \operatorname{extr}$, $\dot{x} = -3x + 5u$, $u \in [-3, 2]$,

$x(0) = 5$, $x(16) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $9u_1^2 + u_2^2 \leqslant 36$,

$x_1(0) = 16$, $x_2(0) = -15$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 1]$, $u_2 \in [-3, 5]$,

$x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -13$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

29. $\int\limits_0^{24} (-3x_1 + 6x_2 - 3u_1 - u_2)\, dt - 3x_2(0) \to \operatorname{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,

$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$, $x_1(24) = -1$, $x_2(24) = 1$, $x_1(0) = -1$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + 2u_2$, $u_1 \geqslant -6$, $u_2 \geqslant -4$,

$|u_1 + 6u_2| \leqslant 12$, $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-2, 3]$,

$x_1(0) = 24$, $x_2(0) = 3$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^{T} (1 + |u_1| + 2|u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $|u_1| + 2|u_2| \leqslant 4$,

$x_1(0) = 12$, $x_2(0) = 13$, $x_2(T) = -x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/4} x \cos 9t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(-\pi) = 0$, $x(\frac{\pi}{4}) = 3$.

34. $\int\limits_{-12}^{12} (t\ln u - u)\,dt \to \min, \quad u \in [6, 10].$

Вариант 13

1. Показать, что оператор A является линейным и вычислить его норму

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1] \quad (Ax)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau - x\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^3, \quad F(x,y) = (xe^{-|x|}y, ye^{-x}, x^2+y^2),\ (0,0),$$

$$F\colon C^2[0,1] \to R^1, \quad F(x) = \left(\int\limits_0^1 x^3(t)\,dt\right)^{-2}.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0

$$M = \{x \in C^1[0,1] \mid \sin x(0) = \cos \dot{x}(1)\}.$$

4. $\int\limits_0^{\pi/2} (x^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 0.$

5. $\int\limits_0^{T_0} \cos\dot{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0) = x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_1^2 \frac{dt}{\dot{x}} \to \mathrm{extr}, \quad x(1) = 0, \quad x(2) = 1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (2x_1x_2 - 2x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2)\,dt \to \mathrm{extr},$

   $x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_2(\pi/2) = 0, \quad x_1(\pi/2) = 2.$

8. $\int\limits_0^{e-1} (t+1)\dot{x}^2\,dt + 2x(0)(x(e-1)+1) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^T \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^T x\,dt \leqslant 1, \quad x(T) = 3.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 xe^t\,dt = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$

11. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad (1 - T)x(T) = 2.$

12. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x}(1) = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

13. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \text{extr}, \quad \ddot{x} - x = u, \quad x(0) = 1.$

14. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 0.$

15. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 - x)\,dt \to \text{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = 0.$

16. $T \to \inf, \quad 0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 1, \quad x(T) = 0, \quad \dot{x}(0) = -1,$
$\dot{x}(T) = 0.$

17. $T \to \inf, \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = -1, \quad \dot{x}(T) = 0.$

18. $T \to \inf, \quad \dot{x} = u, \quad \int\limits_0^T x\,dt = 0, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 1.$

19. $\int\limits_0^2 (2x - 3u - u^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x} = x + u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 2, \quad x(0) = 5.$

20. $\int\limits_0^4 (u + u^2 - x)\,dt + 2x(4) \to \text{extr},$
$\dot{x} = 3x + 2u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad x(0) = 0.$

21. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad 0 \leqslant u_1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1, \quad x_1(T) = 0, \quad x_2(0) = \xi_2, \quad x_2(T) = 0.$

22. Найти расстояние от точки $A(1, -1, \sqrt{2})$ до точки $B(2, 0, 0)$ на поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

23. Среди всех плоских гладких кривых, соединяющих точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ найти ту, которая при вращении вокруг прямой $x = a$ образует поверхность наименьшей площади.

24. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$,

$x(0) = x_0$, $x(T) = 0$, $u \in [-1, 1]$.

25. $\int\limits_0^2 (3u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = -3x + 12u$, $u \in [0, 1]$,

$x(0) = 2$, $x(2) = 0$.

26. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 9u_2^2 \leqslant 9$,

$x_1(0) = x_2(0) = -4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-2, 4]$, $u_2 \in [-3, 1]$,

$x_1(0) = -5$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{12} (-3x_1 + 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,

$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$, $x_1(12) = x_2(12) = 0$, $x_1(0) = -2$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -3$, $u_2 \geqslant -2$,

$|u_1 + 5u_2| \leqslant 16$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 1$,

$x_1(0) - x_2(0) = 1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-4, 2]$,

$x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 24$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1 + |u_1| + |u_2|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $5|u_1| + 2|u_2| \leqslant 40$,

$x_1(0) = 12$, $x_2(0) = -3$, $2x_2(T) = x_1(T)$.

33. $\int\limits_{-2\pi}^{\pi/2} x \cos 3t\,dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(-2\pi) = 1$,

$x(\frac{\pi}{2}) = 0$.

34. $\int\limits_0^{T_0}(|u_1|+u_1+p(t)u_2)\,dt\to\min,\ \ |u_1|\leqslant 1,\ |u_2|\leqslant 1.$

Вариант 14

1. Показать, что оператор A является линейным и вычислить его норму

$$A\colon C[0,1]\to C[0,1]\quad (Ax)(t)=x(0)-3\int\limits_t^1 x(\tau)\,d\tau-4x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z, и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^3\to R^2,\quad F(x,y,z)=(1+x^2e^{yz},(x^2-z^2)|\sin y|),\ (0,0,0),$$

$$F\colon C^1[0,1]\to C[0,1],\quad (Fx)(t)=\dot x^2(t)-\int\limits_0^t x^2(t)\,dt.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M=\{x\mid\ x\in C^n[0,1],\ x^{(n)}(t)=x_0^{(n)}(t)+x(t),\ x_0\in C^n[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0}\dot x e^{\dot x}\,dt\to\operatorname{extr},\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=\xi.$

5. $\int\limits_1^{e}(x-t\dot x^2)\,dt\to\operatorname{extr},\ \ x(1)=1,\ \ x(e)=2.$

6. $\int\limits_0^{T_0}(16\dot x^2-x^2-6\sin 2t)\,dt\to\operatorname{extr},\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=0.$

7. $\int\limits_0^{1}(\dot x_1^2+\dot x_2^2)\,dt\to\operatorname{extr},$

$x_1(0)=x_2(0)=0,\ \ x_1(1)=1,\ \ x_2(1)=3.$

8. $\int\limits_1^2 t^2\dot{x}^2\,dt - 2x(1) + x^2(2) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_0^T \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=0, \quad T^2x(T)=1.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt \geqslant 1, \quad x(0)=0.$

11. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0, \quad \dot{x}(\pi)=1+\mathrm{ch}(\pi).$

12. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}(0)=0, \quad x(1)=1, \quad \dot{x}(1)=2.$

13. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt \geqslant 1,$

$x(0)=\dot{x}(0)=0, \quad x(1)=0, \quad \dot{x}(1)=1.$

14. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + \dot{x}^2(0) \to \mathrm{extr}, \quad x(0)=1, \quad \ddot{x}-x=u.$

15. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \mathrm{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0)=\dot{x}(1)=0.$

16. $\int\limits_0^T (x^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0)=0, \quad x(T)=0.$

17. $\int\limits_0^{5\pi/4} x\sin 2t\,dt \to \mathrm{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0)=0, \quad x\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\pi.$

18. $T \to \inf, \quad -2 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3, \quad x(0)=\dot{x}(0)=4, \quad x(T)=\dot{x}(T)=0.$

19. $T \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0)=1, \quad x(T)+\dot{x}(T)=2, \quad \dot{x}(0)=1.$

20. $T \to \inf, \quad \int\limits_0^T x\,dt = 1, \quad \dot{x}=u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(T)=1.$

21. $\int\limits_0^{10} (x+u)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}=x-u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad x(0)=1.$

22. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1,$
$x_1(0) = \xi_1, \;\; x_2(0) = \xi_2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \;\; \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt = 1, \;\; x(0) = 1, \;\; x(1) = 0.$

24. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ найти расстояние от точки $A(1, \sqrt{8}, -1)$ до точки $B(\sqrt{8}, -1, 1)$.

25. $T \to \inf, \;\; \dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u,$
$x(0) = x_0, \;\; x(T) = 0, \;\; u \in [0,1].$

26. $\int\limits_0^6 (3u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \text{extr}, \;\; \dot{x} = -3x + 2u, \;\; u \in [0,1],$
$x(0) = 2, \;\; x(6) = 0.$

27. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1 \in [-3,4], \;\; u_2 \in [-3,2],$
$x_1(0) = 5, \;\; x_2(0) = -2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{22} (-3x_1 - 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \text{extr}, \;\; \dot{x}_1 = u_1,$
$\dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4, \;\; x_1(22) = x_2(22) = 0, \;\; x_1(0) = -2.$

29. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \;\; u_1 \geqslant -3, \;\; u_2 \geqslant -2,$
$|6u_1 + 5u_2| \leqslant 18, \;\; x_1(0) = 1, \;\; x_2(0) = -2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = -x_2, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + u, \;\; |u| \leqslant 1,$
$x_1(0) - x_2(0) = -1, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = u, \; u \in [-1,1],$
$x_1(0) = 8, \; x_2(0) = 10, \; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1 + |u_1| + |u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1, \; \dot{x}_2 = u_2, \;\; 3|u_1| + 2|u_2| \leqslant 6,$
$x_1(0) = 2, \;\; x_2(0) = -3, \;\; x_2(T) = -x_1(T).$

33. $\int\limits_\pi^{4\pi} x \cos 3t\,dt \to \min, \;\; \dot{x} = u, \; u \in [-2,4], \quad x(\pi) = -1, \; x(4\pi) = 2.$

34. $\int\limits_0^{\pi} \sin(24tu)\,dt \to \min, \quad u \in [-0,5, 0,5].$

Вариант 15

1. Показать, что оператор A является линейным и вычислить его норму

$$A\colon C[0,1] \to R^1, \quad (Ax)(t) = \int\limits_0^1 \tau x(\tau)\sin(\pi\tau)\,d\tau - x(1/2).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = \left(|x|e^{|y|}, |y|e^x\right),$$

$$F\colon C^2[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \ddot{x}^2(t) - \int\limits_0^t \sin x(\tau)\,d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке x_0, если

$$M = \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2,\ x_1x_2 \leqslant 1\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (tx - \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr}, \ \ x(0) = 0, \ \ x(1) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (25\dot{x}^2 - x^2 + 4x\cos 4t)\,dt \to \text{extr}, \ \ x(0) = 0, \ \ x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_1^3 (t\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + tx_1x_2)\,dt \to \text{extr},$

   $x_1(1) = x_2(1) = 0, \ \ x_2(3) = 0, \ \ x_1(3) = 1 + \ln 3.$

7. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt + x^2(0) - 2x^2(1) \to \text{extr}.$

8. $\int\limits_{\tau}^{T} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr}, \ \ x(T) = T - 5, \ \ x(\tau) = \tau^2.$

9. $\int\limits_0^1 (\dot x + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\int\limits_0^1 x e^{-t}\,dt = \frac{1-3e^{-2}}{4}$, $x(0)=0$, $x(1)=\frac{1}{e}$.

10. $\int\limits_0^\pi \dot x^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $\int\limits_0^\pi x\sin t\,dt \geqslant 1$, $x(0)=x(\pi)=0$.

11. $\int\limits_0^\pi (\ddot x^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}$, $x(0)=0$, $x(\pi)=1$, $\dot x(\pi)=0$.

12. $\int\limits_0^{T_0} \ddddot{x}^{\,2}\,dt \to \mathrm{extr}$, $\int\limits_0^{T_0} \ddot x^2\,dt = 1$,

$x(0)=1$, $x(T_0)=0$, $\ddot x(T_0)=4$.

13. $\int\limits_0^1 u^2\,dt + x^2(0) \to \mathrm{extr}$, $\ddot x - x = u$,

$x(0)=0$, $x(1)=0$, $\dot x(1)=1$.

14. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \mathrm{extr}$, $|\ddot x| \leqslant 2$, $x(0)+x(2)=1$, $\dot x(2)=0$.

15. $\int\limits_0^{T_0} (\dot x^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}$, $|\dot x| \leqslant 1$, $x(T_0)=\xi$.

16. $T \to \inf$, $|\ddot x| \leqslant 1$, $\dot x(0)=1$, $\dot x(T)=0$, $x(0)=1$.

17. $\int\limits_0^T u^2\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot x = ax+u$, $|u| \leqslant 1$, $x(0)=2$, $x(T)=0$.

18. $T \to \inf$, $-3 \leqslant \ddot x \leqslant 1$, $x(0)=x(T)=1$, $\dot x(0)=6$, $\dot x(T)=0$.

19. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x(1) \to \mathrm{extr}$, $\ddot x = u$, $|u| \leqslant 1$,

$x(0)=-1$, $\dot x(0)=0$, $\dot x(1)=1$.

20. $T \to \inf$, $\dot x_1 = u_1$, $\dot x_2 = u_2$, $|u_1| \leqslant 1$, $|u_2| \leqslant 1$,

$x_1(0)=\xi_1$, $x_2(0)=\xi_2$, $x_1(T)=x_2(T)=0$.

21. Найти расстояние от точки $A(0,1,2)$ до точки $B(1,0,10)$ на поверхности $x^2+y^2=1$.

22. Задано количество массы M, которое надо распределить по кривой $y = y(x)$, соединяющей две заданные точки плоскости A, B с заданной плотностью $\sigma(x,y) = x + y$. Найти форму кривой, чтобы ее момент инерции относительно оси OY был наименьшим.

23. $\int\limits_0^1 (u_1^2 - u_2^2)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = u_1$, $\dot{x}_3 = x_4$,

$\dot{x}_4 = u_2 - a$, $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0$,

$x_1(T) = x_2(T) = 0$, $x_3(T) = 0$, $x_4(T) = 0$.

24. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} u$,

$x(0) = x_0$, $x(T) = 0$, $u \in \mathrm{co}\{(1,1),(0,2),(-1,-1)\}$.

25. $\int\limits_0^6 (3u - 2u^2 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = -x - 2u$, $u \in [-1,1]$,

$x(0) = 2$, $x(6) = 0$.

26. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 4$,

$x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-5,4]$, $u_2 \in [-3,2]$,

$x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

28. $\int\limits_0^{27} (3x_1 - 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,

$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9$, $x_1(27) = x_2(27) = 0$, $x_1(0) = -2$.

29. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -3$, $u_2 \geqslant -5$,

$|6u_1 + u_2| \leqslant 15$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 8$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -x_2$, $\dot{x}_2 = x_1 + u$, $|u| \leqslant 1$,

$2x_1(0) - x_2(0) = -4$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\,dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-1,1]$,

$x_1(0) = 5$, $x_2(0) = -10$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot x_1 = u_1,\ \dot x_2 = u_2, \quad |u_1|+2|u_2| \leqslant 4,$
$x_1(0)=12,\ \ x_2(0)=-3,\ \ x_2(T)=x_1(T).$

33. $\int\limits_{\pi}^{5\pi/2} x\cos 7t\,dt \to \min,\ \ \dot x = u,\ u\in[-2,4], \quad x(\pi)=1,\ x(\frac{5\pi}{2})=2.$

34. $\int\limits_0^{\pi} (\cos tu - \sin tu)\,dt \to \min, \ \ u\in[-0,5,0,5].$

Вариант 16

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1]\to R^1, \quad Ax = \int\limits_0^1 x\,dt - 2x(1/2) + x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2\to R^3, \quad F(x,y) = (y\cos x, |x\cos y|, x^2-y^2),\ (\pi,\pi),$$
$$F\colon C[0,1]\to C[0,1], \quad (Fx)(t) = e^{x(t)} - \left(\int\limits_0^t x^2(\tau)\,d\tau\right)^2.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке $(0,0)$

$$M = \left\{(x_1,x_2)\mid (x_1,x_2)\in R^2,\ x_1^{2/3} \geqslant x_2^{3/2}\right\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot x^2 + x^2 + 2xe^{2t})\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0)=1, \ \ x(1)=\xi.$

5. $\int\limits_{T_0}^{3\pi/4} (\dot x^2 - 4x^2 + 4x\cos 2t)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(T_0)=0, \ \ x(3\pi/4)=0.$

6. $\int\limits_0^1 (1-\dot x^2)^2\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0)=0, \ \ x(1)=1.$

7. $\int\limits_0^\pi (\dot x_1^2 - \dot x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1\cos t + 2x_2^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; x_1(0) = -1,$
$x_2(0) = x_2(\pi) = 0, \;\; x_1(\pi) = 1 + \pi.$

8. $\int\limits_0^T (\dot x^2 + x^2)\,dt - 2\,\mathrm{sh}\,T x(T) \to \mathrm{extr}.$

9. $\int\limits_1^2 t^2 \dot x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; \int\limits_1^2 tx\,dt \geqslant \frac{7}{3}, \; x(1) = 1, \;\; x(2) = 2.$

10. $\int\limits_0^\pi \dot x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; \int\limits_0^\pi x\sin t\,dt = 1, \;\; \int\limits_0^\pi x\cos t\,dt = 0, \;\; x(0) = 0.$

11. $\int\limits_1^e t^2 \ddot x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; x(1) = e + \frac{1}{e}, \;\; \ddot x(1) = 1, \;\; x(e) = \frac{e^2}{2}.$

12. $\int\limits_0^\pi (\ddot x^2 - x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; x(0) = x(\pi) = 0, \;\; \dot x(\pi) = 1.$

13. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + \dot x^2(0) \to \mathrm{extr}, \;\; \ddot x + x = u, \;\; x(0) = 0, \;\; x(\pi/2) = 1.$

14. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; |\ddot x| \leqslant 2, \;\; x(0) + x(2) = 0, \;\; \dot x(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^T (\dot x^2 + x^2)\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; |\dot x| \leqslant 1, \;\; x(T) = \xi.$

16. $T \to \inf, \;\; -1 \leqslant \ddot x \leqslant 2, \;\; x(0) = 1, \;\; \dot x(0) = -2, \;\; x(T) + \dot x(T) = 0.$

17. $T \to \inf, \;\; -1 \leqslant \ddot x \leqslant 0, \;\; x(0) = \xi_1, \;\; \dot x(0) = \xi_2,$
$\dot x(T) = 0, \;\; x(T) = 0.$

18. $\int\limits_0^1 u^2\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; \dot x = x + u, \;\; |u| \leqslant 1, \;\; x(0) = 1, \;\; x(T) = 0.$

19. $\int\limits_0^{T_0} x^2\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; \int\limits_0^{T_0} u^2\,dt \geqslant 1, \;\; \dot x = u, \;\; |u| \leqslant 1, \;\; x(T) = 2.$

20. $\int\limits_0^3 (x - 6u)\,dt + 2x(3) \to \mathrm{extr}, \;\; \dot x = 2x + u, \;\; 0 \leqslant u \leqslant 1, \;\; x(0) = \frac{1}{2}.$

21. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ 0 \leqslant u_1 \leqslant 1, \ \ |u_2| \leqslant 1,$

$x_1(0) = \xi_1, \ \ x_2(0) = \xi_2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти расстояние между точками $A(2,2,2)$, $B(0,12,\sqrt{8})$ на поверхности $x^2 + z^2 = 8$.

23. Исходя из принципа Ферма — луч света из одной точки в другую проходит за минимально возможное время, — найти кривую, по которой луч света проходит из одной точки в другую, если скорость света пропорциональна расстоянию до начала координат.

24. $T \to \inf, \ \ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} u,$

$x(0) = x_0, \ \ x(T) = 0 \ \ u \in \operatorname{co}\{(2,0),(0,2),(-1,-1)\}.$

25. $\int\limits_0^{16} (u + 2u^2 + 5x)\, dt \to \operatorname{extr}, \ \ \dot{x} = -x - 2u, \ \ u \in [-1,1],$

$x(0) = -2, \ \ x(16) = 0.$

26. $T \to \inf \ \ \dot{x}_1 = -u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 4,$

$x_1(0) = -3, \ \ x_2(0) = 4, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

27. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 \in [-5,-4], \ \ u_2 \in [-3,1],$

$x_1(0) = 3, \ \ x_2(0) = 2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{7} (3x_1 - 2x_2 + 2u_1 - u_2)\, dt + 2x_2(0) \to \operatorname{extr}, \ \ \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \ \ x_1(7) = x_2(7) = 0, \ \ x_1(0) = -2.$

29. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \ \ u_1 \geqslant -4, \ \ u_2 \geqslant -5,$

$|6u_1 + u_2| \leqslant 18, \ \ x_1(0) = 1, \ \ x_2(0) = -8, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = -x_2, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u, \ \ |u| \leqslant 1,$

$x_1(0) - 2x_2(0) = 4, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min, \ \ \ \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ u \in [-1,1],$

$x_1(0) = -3, \ x_2(0) = 12, \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1+|u_1|+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot x_1 = u_1,\ \dot x_2 = u_2,\ \ |u_1|+|u_2| \leqslant 4,$
$x_1(0)=12,\ \ x_2(0)=-3,\ \ x_1(T)=0.$

33. $\int\limits_{\pi}^{7\pi/2} x\cos 5t\,dt \to \min,\ \ \dot x = u,\ u\in[-1,3], \quad x(\pi)=0,\ x(\frac{7\pi}{2})=2.$

34. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2tu - \sin tu)\,dt \to \min,\ \ u\in[-1,1].$

Вариант 17

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1]\to R^1,\ Ax = \int\limits_0^{1/2} x\,dt - \int\limits_{1/2}^{1} x\,dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2\to R^3, \quad F(x,y) = (xy, x^2+y^2, |x|),$$
$$F\colon C^2[0,1]\to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \big(\ddot x^2(t) - \cos x(t)\big)^2.$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке $(0,0)$

$$M = \{(x_1,x_2)\mid (x_1,x_2)\in R^2,\ x_1\leqslant 0,\ x_2\leqslant 0,\ x_1^3+x_2^3\leqslant 1\}.$$

4. $\int\limits_{2T_0}^{\pi/4} (8x\sin 2t + 4x^2 - \dot x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(2T_0)=0,\ \ x(\pi/4)=1.$

5. $\int\limits_{-T_0}^{\pi/2} (x^2+2x-\dot x^2)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(-T_0)=0,\ \ x(\pi/2)=0.$

6. $\int\limits_0^1 (\dot x_1^2 + \dot x_2^2 + 2\dot x_1 t + t^2)\,dt \to \mathrm{extr},$

$x_1(0)=x_2(0)=1,\ \ x_1(1)=\frac{3}{2},\ \ x_2(1)=1.$

7. $\int\limits_0^{T_0} (x^2 + \dot{x}^2 - 4x \sin t)\, dt - 2x(T_0) + 2x^2(0) - x^2(T_0) \to \text{extr}.$

8. $\int\limits_0^{T} (\dot{x}^3 + x)\, dt \to \text{extr}, \quad T - x(T) = 1, \quad x(0) = 0.$

9. $\int\limits_0^{1} \dot{x}^2\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^{1} x^2\, dt \geqslant 1, \quad x(0) = x(1) = 0.$

10. $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^{\pi} x \cos t\, dt = \frac{\pi}{2},$

$\int\limits_0^{\pi} x \sin t\, dt = -2, \quad x(0) = 0.$

11. $\int\limits_1^{e} t\ddot{x}^2\, dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1, \quad \dot{x}(e) = 2.$

12. $\int\limits_0^{T_0} (\ddot{x}^2 - x^2)\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(T_0) = 0, \quad \dot{x}(T_0) = 1.$

13. $\int\limits_0^{1} \dddot{x}^2\, dt \to \text{extr}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0), \quad x(1) = 1.$

14. $\int\limits_0^{1} (u^2 + x^2)\, dt \to \text{extr}, \quad \dot{x} + x = u, \quad x(1) = 1.$

15. $\int\limits_0^{1} x\, dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) + x(1) = 0, \quad \dot{x}(0) + \dot{x}(1) = 1.$

16. $x(2) \to \text{extr}, \quad -1 \leqslant \dot{x} \leqslant 1, \quad \int\limits_0^{2} \dot{x}^2\, dt = 2, \quad x(0) = 0.$

17. $T \to \inf, \quad -2 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -2,$

$\dot{x}(T) = 1, \quad x(T) = 0.$

18. $T \to \inf, \quad \dot{x} = x + u, \quad x(0) = \xi, \quad x(T) = 0.$

19. $\int\limits_0^{1} u^2\, dt + x(1) \to \text{extr}, \quad \ddot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

20. $T \to \inf, \ \ \dot{x} = u, \ \ \int\limits_0^T u^2\,dt \leqslant 1, \ \ x(T) = 2.$

21. $\int\limits_0^{10} (2u + u^2 + x)\,dt - 3x(10) \to \mathrm{extr}, \ \ \dot{x} = x + u,$

$x(0) = -1, \ \ |u| \leqslant 1.$

22. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \ \ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2, \ \ 0 \leqslant u_2 \leqslant 1, \ \ |u_1| \leqslant 1,$

$x_1(T) = x_2(T) = 0, \ \ x_1(0) = \xi_1, \ \ \dot{x}_2(0) = \xi_2.$

23. Найти расстояние между точками $A(1,0,1)$, $B(0,3,9)$ на поверхности $x^2 + y^2 - z = 0$.

24. Из начала координат плоскости XOY провести кривую OA длиной l, кончающуюся на прямой $x = h$ и образующую вместе с абциссой точки A и осью OY наибольшую площадь.

25. $T \to \inf, \ \ \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} u,$

$x(0) = x_0, \ \ x(T) = 0, \ \ u \in \mathrm{co}\{(2,1), (0,2), (-1,-1)\}.$

26. $\int\limits_0^9 (3u - 2u^2 - 5x)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ \dot{x} = -x - 4u, \ \ u \in [-1, 1],$

$x(0) = -2, \ \ x(9) = 0.$

27. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 4,$

$x_1(0) = 3, \ \ x_2(0) = -4, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 \in [-5, 4], \ \ u_2 \in [-1, 3],$

$x_1(0) = 3, \ \ x_2(0) = 2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

29. $\int\limits_0^{18} (3x_1 + 2x_2 - 2u_1 - u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}, \ \ \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \ \ x_1(18) = x_2(18) = 0, \ \ x_1(0) = 2.$

30. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 - 2u_1, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \ \ u_1 \geqslant -3, \ \ u_2 \geqslant -4,$

$|6u_1 + u_2| \leqslant 18, \ \ x_1(0) = 1, \ \ x_2(0) = 2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1+|u|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ u \in [-2,6],$
$x_1(0) = -2,\ x_2(0) = 7,\ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1+u_1+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2, \quad u_1 + 3|u_2| \leqslant 9,$
$u_1 \geqslant 0, \quad x_1(0) = -8, \quad x_2(0) = -2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

33. $\int\limits_{-\pi}^{\pi/2} x\cos 9t\,dt \to \min, \ \ \dot{x} = u,\ u \in [-2,3], \quad x(-\pi) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1.$

34. $\int\limits_{-1}^{1} (tu^2 - |u|)\,dt \to \min, \ \ u \in [-1,2].$

Вариант 18

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_{1/2}^{1} x\,dt + 2x(0) - x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^3,\ F(x,y) = (ax^{\frac{2}{3}} + b|y|, x, y),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to R^1, \quad Fx = \int\limits_0^1 \varphi(x^2(t), \dot{x}(t))\,dt, \quad \varphi \in C^1(R^2).$$

3. Найти касательное пространство к множеству M в точке z_0

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ f(x(0), x(1)) = 0,\ f \in C^1(R^2)\}.$$

4. $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 - 4\dot{x}^3 x + 2t\dot{x}^4)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0) = x(1) = 0.$

5. $\int\limits_{-T_0}^{\pi/2} (x^2 - 8\dot{x}^2 + 6x\cos 4t)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(-T_0) = 0, \ \ x(\pi/2) = \xi.$

6. $\int\limits_{-1}^{1} (\dot{x}^2 - x^2 - 2x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(-1) = -1, \quad x(1) = 0.$

7. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - 2x_1x_2)\,dt \to \text{extr},$

$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_2(\pi/2) = x_1(\pi/2) = 1.$

8. $\int\limits_{0}^{3} 4\dot{x}^2x^2\,dt + x^4(0) - 8x(3) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_{0}^{1} (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\,\mathrm{sh}\,t)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = \xi.$

10. $\int\limits_{0}^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos t\,dt \leqslant 1,$

$x(0) = 2, \quad x(\pi/2) = 4.$

11. $\int\limits_{0}^{1} \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_{0}^{1} e^t x\,dt = 1, \quad x(0) = 0.$

12. $\int\limits_{1}^{e} t^2\ddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1, \quad \dot{x}(e) = 2.$

13. $\int\limits_{0}^{\pi} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(\pi) = 0.$

14. $\int\limits_{0}^{1} \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_{0}^{1} \ddot{x}^2\,dt = 1, \quad x(0) = x(1) = 0.$

15. $\int\limits_{0}^{1} (x^2 + 2u^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \dot{x} = \frac{x}{\sqrt{2}} + u, \quad x(0) = 1.$

16. $\int\limits_{0}^{2} x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$

17. $\int\limits_{0}^{T} (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = \xi.$

18. $T \to \inf, \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 3, \quad x(T) = \dot{x}(T) = 0.$

19. $T \to \inf, \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(T) = 1, \quad \dot{x}(0) + x(T) = 3.$

20. $T \to \inf, \quad \dot{x} = 2x + u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 2, \quad x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^3 (x_1 + x_2 + 2u)\,dt - x_2(3) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}_1 = x_2 - u, \quad \dot{x}_2 = x_1,$

$-2 \leqslant u \leqslant 2, \quad x_1(0) = 2, \quad x_2(0) = 0.$

22. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = x_1 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad -1 \leqslant u_1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant u_2 \leqslant 1,$

$x_1(0) = \xi_1, \quad x_2(0) = \xi_2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. Найти расстояние между точками $A(\sqrt{2}, 1, 2)$, $B(1, 0, 0)$ на поверхности $x^2 - y^2 = 1$.

24. Дан угол с вершиной в начале координат. Соединить данную точку A на одной стороне угла с данной точкой B на другой стороне угла кривой длины l так, чтобы площадь между сторонами угла и кривой была максимальной.

25. $T \to \inf, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} u, \quad x(0) = x_0,$

$x(T) = 0, \quad u \in \mathrm{co}\{(1, -2), (0, 2), (-1, 1)\}.$

26. $\int\limits_0^{10} (4u + 2u^2 - 5x)\,dt \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x} = -x - 4u, \quad u \in [-1, 1],$

$x(0) = 2, \quad x(10) = 0.$

27. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad 2u_1^2 + 3u_2^2 \leqslant 24,$

$x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = -4, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad u_1 \in [-5, 4], \quad u_2 \in [-1, 3],$

$x_1(0) = -13, \quad x_2(0) = -2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

29. $\int\limits_0^8 (3x_1 + 2x_2 - 2u_1 + u_2)\,dt + 3x_2(0) \to \mathrm{extr}, \quad \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \quad x_1(8) = x_2(8) = 0, \quad x_1(0) = 2.$

30. $T \to \inf, \quad \dot{x}_1 = x_2 + 2u_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 - u_2, \quad u_1 \geqslant -3, \quad u_2 \geqslant -4,$

$|u_1 + 3u_2| \leqslant 18, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2, \quad x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ u \in [-4, 3],$

$x_1(0) = 6, \ x_2(0) = -1, \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1+u_1+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1,\ \dot{x}_2 = u_2,\ \ u_1 + 3|u_2| \leqslant 6,$
$u_1 \geqslant 0,\ \ x_1(0) = -2,\ \ x_2(0) = 0,\ \ x_1(T) = x_2(T) = 1.$

33. $\int\limits_{\pi/3}^{7\pi/2} x\cos 4t\,dt \to \min,\ \ \dot{x} = u,\ u \in [-2,4], \quad x(\frac{\pi}{3}) = 1,\ x(\frac{7\pi}{2}) = 0.$

34. $\int\limits_0^{2\pi} u_1^2 u_2 \sin t\,dt \to \min,\ \ u_1 \in [0,5,1],\ u_2(t) \in [-t,t].$

Вариант 19

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon L^2[0,1] \to R^1,\ Ax = \int\limits_0^1 x\sin^2 \pi t\,dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке z и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^3 \to R^2, \quad F(x,y,z) = (a|x| - b|y| - c|z|,\ x^2 - y^2 + z^2),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to R^1, \quad F(x) = \int\limits_0^1 \varphi(t,\dot{x}(t))\,dt, \quad \varphi \in C^1(R).$$

3. Найти касательное пространство к M в точке z_0

$$M = \{x \mid x \in C[0,1],\ f(x(0)+x(1)) = 0,\ f \in C^1(R)\}.$$

4. $\int\limits_0^{4/3} \frac{x}{\dot{x}^2}\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0) = 1,\ \ x(\frac{4}{3}) = \frac{1}{9}.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2 - tx)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(0) = \xi,\ \ x(T_0) = 0.$

6. $\int\limits_{-T_0}^{3\pi/2} (\dot{x}^2 - 8x^2 + 16x\sin 12t)\,dt \to \mathrm{extr},\ \ x(-T_0) = 0,\ \ x(3\pi/2) = 1.$

7. $\int\limits_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 4x_2)\,dt \to \text{extr},$

$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = x_1(1) = 1.$

8. $\int\limits_1^e 2\dot{x}(t\dot{x} + x)\,dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (x^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = \xi, \quad x(T) = 0.$

10. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^{\pi/2} x \sin t\,dt \leqslant 1, \quad x(0) = x(\pi/2) = 2.$

11. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 xe^t\,dt = 2, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 0.$

12. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = -1, \quad x(e) = \dot{x}(1) = e.$

13. $\int\limits_0^\pi (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \geqslant 4, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = 1.$

15. $\int\limits_0^1 (x^2 + u^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \ddot{x} + \sqrt{2}x = u, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(1) = 0.$

16. $\int\limits_0^2 x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = \xi, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(2) = 0.$

17. $\int\limits_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^\pi x\,dt \leqslant 1, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = 0.$

18. $T \to \inf, \quad -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 1,$

$x(T) = 1, \quad \dot{x}(T) = 0.$

19. $T \to \inf, \quad -4 \leqslant \ddot{x} \leqslant 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2, \quad \dot{x}(T) = 1.$

20. $T \to \inf, \quad \dot{x} = -x + u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = 2, \quad x(T) = 0.$

21. $\int\limits_0^{10} (2x - u)\, dt \to \text{extr}, \ \ \dot{x} = -2x + u, \ \ -1 \leqslant u \leqslant 1,$

$x(0) = 1, \ \ x(10) = \frac{1}{2}.$

22. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 \leqslant 2u_2 \leqslant 4u_1,$

$u_2 \leqslant 1 - u_1, \ \ x_1(0) = \xi_1, \ \ x_2(0) = \xi_2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. Найти расстояние от точки $A(0,2,0)$ до точки $B(0,1,\sqrt{3})$ на поверхности $y^2 + z^2 = 4$.

24. На стороне OA угла с вершиной O дана точка A. Требуется соединить ее кратчайшей линией ACB с неизвестной точкой B на стороне угла OB при условии, что площадь $OACB$ равна S.

25. $T \to \inf, \ \ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u,$

$x(0) = x_0, \ \ x(T) = 0, \ \ u \in \operatorname{co}\{(1,0),(0,1),(-1,-1)\}.$

26. $\int\limits_0^{18} (-u + 2u^2 - 5x)\, dt \to \text{extr}, \ \ \dot{x} = -x - 2u, \ \ u \in [-1,1],$

$x(0) = -2, \ \ x(18) = 0.$

27. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = -u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 28,$

$x_1(0) = -3, \ \ x_2(0) = -4, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 \in [-5,4], \ \ u_2 \in [-1,3],$

$x_1(0) = 13, \ \ x_2(0) = -2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 1.$

29. $\int\limits_0^{7} (3x_1 - 2x_2 + 2u_1 - u_2)\, dt + 2x_2(0) \to \text{extr}, \ \ \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \ \ x_1(7) = x_2(7) = 0, \ \ x_1(0) = -2.$

30. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = 2x_2 - u_1, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \ \ u_1 \geqslant -4, \ \ u_2 \geqslant -5,$

$|6u_1 + u_2| \leqslant 18, \ \ x_1(0) = 1, \ \ x_2(0) = -8, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^{T} (1 + |u|)\, dt \to \min, \ \ \ \dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = u, \ u \in [-1,1],$

$x_1(0) = -7, \ x_2(0) = 13, \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1+u_1+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot x_1 = u_1,\ \dot x_2 = u_2,\ \ 2u_1+|u_2| \leqslant 8,$ $u_1 \geqslant 0,\ \ x_1(0)=6,\ \ x_2(0)=-4,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

33. $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/2} x\cos 5t\,dt \to \min,\ \ \dot x = u,\ u\in[-2,3], \quad x(\frac{\pi}{4})=0,\ x(\frac{5\pi}{2})=3.$

34. $\int\limits_0^{T_0} (u_1^2+2u_2\sin t+u_1)\,dt \to \min, \quad u_1+u_2 \leqslant 4,\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0.$

Вариант 20

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1]\to R^1, \quad Ax = \int\limits_0^{1/2} x(t)\,dt - 2\int\limits_{1/2}^{1} x(\tau)\,d\tau + x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше в точке и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^3\to R^3, \quad F(x,y,z) = (x^2, -|y|, e^{-z}(x+y)),\ (1,1,0),$$
$$F\colon C^1[0,1]\to C[0,1], \quad F(x)(t) = \sqrt{x^2(t)+\dot x^2(t)}.$$

3. Найти касательное пространство к M в точке x_0

$$M = \Big\{x \mid x\in C[0,1],\ \int\limits_0^1 x^2(\tau)\,d\tau \leqslant 1\Big\},\ x_0(t)=1.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (4\dot x^2 - x^2 + 6x\,\mathrm{sh}\,2t)\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=0.$

5. $\int\limits_{\frac12}^{1} \frac{\sqrt{(1+\dot x^2)}}{x}\,dt \to \mathrm{extr}, \ \ x(\frac12)=\sqrt3,\ \ x(1)=1.$

6. $\int\limits_0^\pi (x^2 - 4\dot{x}^2 + 2x\sin 3t)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 1.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 1,$
$x_2(\pi/2) = -\pi/2, \quad x_1(\pi/2) = \pi/2.$

8. $\int\limits_0^1 e^{t+1}(\dot{x}^2 + 2x^2)\,dt + 2x(1)(x(0)+1) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 - x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = T^2.$

10. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \geqslant 1, \quad x(T_0) = x(-T_0) = 0.$

11. $\int\limits_1^e t^2\ddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = 1, \quad \dot{x}(e) = \frac{1}{e}.$

12. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = \dot{x}(\pi/2) = 0.$

13. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \leqslant 1, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 (u^2 + x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad \ddot{x} - \sqrt{2}\dot{x} = u, \quad x(0) = 1.$

15. $\int\limits_0^4 x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) + x(4) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(4) = 1.$

16. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad |\dot{x}| \leqslant 1, \; x(0) = x(T_0) = 0.$

17. $T \to \inf, \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 3, \quad x(T) = 1, \quad \dot{x}(T) = 0.$

18. $T \to \inf, \quad -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 1, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 3, \quad x(T) = \xi.$

19. $T \to \inf, \quad \dot{x} = -2x + u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(0) = -3, \quad x(T) = 0.$

20. $\int\limits_0^5 (u^2 - x)\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; \dot{x} = -x - u, \;\; 1 \leqslant u \leqslant 10,$

$x(0) = 0, \;\; x(5) = -2.$

21. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_2 \leqslant u_1 + 1,$

$0 \leqslant u_2 \leqslant 1 - u_1, \;\; x_1(0) = \xi_1, \;\; x_2(0) = \xi_2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. На поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 2$ найти расстояние между точками $A\left(2, 1, \frac{8}{3}\sqrt{2}\right), \;\; B(0, 3, 4).$

23. Среди всех кривых заданной длины l, соединяющих прямые $x = x_0, \;\; x = x_1$ и образующих вместе с ними и осью OX площадь с величиной не менее S, найти ту, у которой центр тяжести этой фигуры занимает наинизшее положение.

24. $T \to \inf, \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} u, \;\; x(0) = x_0,$

$x(T) = 0, \;\; u \in \mathrm{co}\{(-1, 1), (0, 1), (1, 3)\}.$

25. $\int\limits_0^{16} (u + 2u^2 + 5x)\,dt \to \mathrm{extr}, \;\; \dot{x} = -3x - 2u, \;\; u \in [-1, 2],$

$x(0) = 4, \;\; x(16) = 0.$

26. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = -u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 16,$

$x_1(0) = -3, \;\; x_2(0) = 4, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 1.$

27. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = u_1, \;\; \dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1 \in [-5, 2], \;\; u_2 \in [-3, 1],$

$x_1(0) = -3, \;\; x_2(0) = 2, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{10} (3x_1 - 2x_2 + 2u_1 - 3u_2)\,dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}, \;\; \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \;\; x_1(10) = x_2(10) = 0, \;\; x_1(0) = -2.$

29. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \;\; u_1 \geqslant -5, \;\; u_2 \geqslant -5,$

$|6u_1 + u_2| \leqslant 18, \;\; x_1(0) = 4, \;\; x_2(0) = -8, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

30. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = -x_2, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + 5u, \;\; |u| \leqslant 1,$

$2x_1(0) + 2x_2(0) = 4, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

31. $\int\limits_0^T (1+|u|)\,dt \to \min, \quad \dot x_1 = x_2,\ \dot x_2 = u,\ u \in [-1,1],$
$x_1(0)=0,\ x_2(0)=2,\ x_1(T)=3,\ x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^T (1+u_1+|u_2|)\,dt \to \min, \quad \dot x_1 = u_1,\ \dot x_2 = u_2,\ \ 2u_1+3|u_2| \leqslant 12,$
$u_1 \geqslant 0,\ \ x_1(0)=2,\ \ x_2(0)=6,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

33. $\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/2} x\cos 5t\,dt \to \min,\ \ \dot x = u,\ u \in [-2,5], \quad x(\frac{\pi}{6})=1,\ x(\frac{5\pi}{2})=0.$

34. $\int\limits_0^{2\pi} u_1 u_2 \sin 2t\,dt \to \min,\ \ u_1^2+u_2^2 \leqslant 4.$

Вариант 21

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму
$$A\colon C^1[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \dot x(t) - x(0).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.
$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (x\operatorname{sign} y, y),$$
$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = t\dot x(t) - \int\limits_0^t x^2(\tau)\,d\tau.$$

3. Найти касательное пространство к M в точке x_0
$$M = \{x \in C^1[0,1] \mid \dot x(t) \leqslant 0,\ \forall t \in [0,1]\}.$$

4. $\int\limits_0^{T_0} (\dot x^2 - x^2 + 4x\operatorname{ch} t)\,dt \to \operatorname{extr},\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=\xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} \frac{\sqrt{1+\dot x^2}}{x}\,dt \to \operatorname{extr},\ \ x(0)=x_0>0,\ \ x(T_0)=x_1>0.$

6. $\int\limits_0^\pi (x^2 - 4\dot{x}^2 + 8x\sin t)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = \xi.$

7. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1\dot{x}_2)\,dt \to \text{extr}, \quad x_1(0) = x_2(0) = -1,$
$x_2(\pi/2) = 0, \quad x_1(\pi/2) = 1.$

8. $\int\limits_0^1 e^x\dot{x}^2\,dt + 4e^{x(0)} + 32e^{-x(1)} \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = \xi, \quad x(T) + T - 1 = 0.$

10. $\int\limits_0^T \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{x}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 1, \quad x(T) = T - 1.$

11. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_{-T_0}^{T_0} \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \leqslant l,$
$x(-T_0) = x(T_0) = 0.$

12. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x^2(T) \to \text{extr}, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = 1.$

13. $\int\limits_0^{\pi/2} (\ddot{x}^2 - x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(\pi/2) = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

14. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = \dot{x}(1) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \geqslant 1.$

15. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \text{extr}, \quad \ddot{x} \geqslant -2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = -1, \quad \dot{x}(2) = -2.$

16. $\int\limits_0^4 x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = 0, \quad x(4) = 1.$

17. $T \to \inf, \quad -3 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2,$
$x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 1.$

18. $\int\limits_0^1 (x^2 - u^2)\,dt + x(0) \to \text{extr}, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \leqslant 1, \quad x(1) = 0.$

19. $\int\limits_0^5 (u^2 - x)\, dt \to \mathrm{extr}, \ \ \dot{x} = -x - u, \ \ 1 \leqslant u \leqslant 10,$

$x(0) = 0, \ \ x(5) = -2.$

20. $T \to \inf, \ \ \int\limits_0^T \ddot{x}^2\, dt \leqslant 1, \ \ x(0) = 2, \ \ \dot{x}(0) = 0,$

$x(T) + \dot{x}(T) = 1.$

21. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_2 \leqslant u_1 + 1,$

$0 \leqslant u_2 \leqslant -u_1 + 1, \ \ x_1(0) = \xi_1, \ \ x_2(0) = \xi_2, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

22. Найти расстояние между точками $A(0, 2, 2)$, $B(1, 1, \sqrt{3})$ на поверхности $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 2$.

23. Данную точку $(0, b)$ оси OY соединить с осью OX кривой, заключающей вместе с осями OX и OY фигуру данной площади S и образующей при вращении около оси OY поверхность наименьшей площади.

24. $T \to \inf, \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u,$

$x(0) = x_0, \ \ x(T) = 0, \ \ u \in \mathrm{co}\{(-1, 1), (0, 2), (2, 0)\}.$

25. $\int\limits_0^{16} (u + 2u^2 - 2x)\, dt \to \mathrm{extr}, \ \ \dot{x} = -3x - 2u, \ \ u \in [-2, 2],$

$x(0) = 4, \ \ x(16) = 0.$

26. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = -u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 16,$

$x_1(0) = -13, \ \ x_2(0) = 4, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 2.$

27. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = u_1, \ \ \dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1 \in [-5, 2], \ \ u_2 \in [-3, 3],$

$x_1(0) = -3, \ \ x_2(0) = 12, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

28. $\int\limits_0^{10} (3x_1 - 2x_2 - 2u_1 - 5u_2)\, dt + 2x_2(0) \to \mathrm{extr}, \ \ \dot{x}_1 = u_1,$

$\dot{x}_2 = u_2, \ \ u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4, \ \ x_1(10) = x_2(10) = 0, \ \ x_1(0) = -2.$

29. $T \to \inf, \ \ \dot{x}_1 = x_2 - u_1, \ \ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \ \ u_1 \geqslant -5, \ \ u_2 \geqslant -2,$

$|6u_1 + u_2| \leqslant 18, \ \ x_1(0) = 4, \ \ x_2(0) = -6, \ \ x_1(T) = x_2(T) = 0$

30. $T \to \inf, \;\; \dot{x}_1 = -x_2, \;\; \dot{x}_2 = x_1 + 5u, \;\; |u| \leqslant 1,$

$2x_1(0) + x_2(0) = 14, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 1.$

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \; \dot{x}_2 = u, \; u \in [-1, 1],$

$x_1(0) = -6, \; x_2(0) = -1, \; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

32. $\int\limits_0^T (1 + u_1 + |u_2|)\, dt \to \min, \quad \dot{x}_1 = u_1, \; \dot{x}_2 = u_2, \;\; 2u_1 + 3|u_2| \leqslant 24,$

$u_1 \geqslant 0, \;\; x_1(0) = -2, \;\; x_2(0) = 4, \;\; x_1(T) = x_2(T) = 0.$

33. $\int\limits_{\pi/4}^{7\pi/6} x \cos 9t\, dt \to \min, \;\; \dot{x} = u, \; u \in [-2, 4], \quad x(\frac{\pi}{4}) = 1, \; x(\frac{7\pi}{6}) = 2.$

34. $\int\limits_0^{2\pi} u_1 u_2 \cos 2t\, dt \to \min, \;\; u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4.$

Вариант 22

1. Показать, что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1], \;\; (Ax)(t) = t^2 x(t) - x(0) + x(1).$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x,y) = (xy, |x \cos y|),$$

$$F\colon C[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \int\limits_0^t x(\tau)\, d\tau + x^2(t).$$

3. Найти касательное пространство к M

$$M = \{x \in C^2[0,1] \mid \ddot{x}(t) \leqslant f(t), \forall t \in [0,1], \; f \in C[0,1]\}.$$

4. $\int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + x\dot{x})\, dt \to \text{extr}, \;\; x(1) = e, \;\; x(e) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{\pi/2} (x^2 - 16\dot{x}^2 + 6x\sin t)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = 0.$

6. $\int\limits_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr}, \quad x(-T_0) = x(T_0) = \xi.$

7. $\int\limits_0^1 (2x_2^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_1^2)\,dt \to \text{extr},$

$x_1(0) = x_2(1) = 1, \quad x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 2.$

8. $\int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\,dt + x^2(0) - x^2(\pi/2) + 4x(\pi/2) \to \text{extr}.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 + x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = -T + 1.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt \geqslant 1, \quad x(0) = \xi.$

11. $\int\limits_0^1 x_1x_2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x_1\,dt = 1, \quad \int\limits_0^1 x_2\,dt = 0,$

$x_1(0) = x_1(1) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 1.$

12. $\int\limits_1^e t^3\ddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad x(e) = \frac{3}{2}, \quad \dot{x}(e) = \frac{1}{2e}, \quad x(1) = \frac{e}{2}.$

13. $\int\limits_0^1 \dddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x\,dt \geqslant 1,$

$x(0) = \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{x}(1) = \ddot{x}(0) = \ddot{x}(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^{\pi/2} u^2\,dt + \dot{x}(0) \to \text{extr}, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(\pi/2) = 1, \quad x(0) = 0.$

15. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = 0, \quad x(2) = 8, \quad \dot{x}(0) = 0.$

16. $\int\limits_0^4 x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(4) = x(4) = 0.$

17. $T \to \inf$, $\int\limits_0^T \ddot{x}^2\,dt = 1$, $x(0) + \dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(T) = 1$.

18. $T \to \inf$, $0 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3$,
$x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$, $x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 1$.

19. $T \to \inf$, $-1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 3$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -2$, $x(T) = 3$.

20. $T \to \inf$, $\dot{x} = -2x + u$, $|u| \leqslant 1$, $x(0) = 2$, $x(T) = 0$.

21. $\int\limits_0^{10} (u + x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = -x + 2u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$,
$x(0) = 1$, $x(10) = 0$.

22. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = x_2 + u$, $\dot{x}_2 = -x_2 + u$, $|u| \leqslant 1$,
$x_1(0) = \xi_1$, $x_2(0) = \xi_2$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

23. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ найти расстояние между точками $A(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-2, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

24. Найти кратчайшую линию, соединяющую две данные точки плоскости, при условии, что данная линия должна отстоять от точки $A(1, 2)$ на расстоянии, не меньшем заданного числа a.

25. $T \to \inf$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u$,
$x(0) = x_0$, $x(T) = 0$, $u \in \mathrm{co}\{(-1, 2), (0, 3), (2, 1)\}$.

26. $\int\limits_0^{20} (u - 2u^2 - 2x)\,dt \to \mathrm{extr}$, $\dot{x} = -3x - 2u$, $u \in [-2, 2]$,
$x(0) = 4$, $x(20) = 0$.

27. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = -u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 16$,
$x_1(0) = -13$, $x_2(0) = 14$, $x_1(T) = x_2(T) = 2$.

28. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $u_1 \in [-5, 2]$, $u_2 \in [-1, 3]$,
$x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -12$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

29. $\int\limits_0^{10} (3x_1 - 2x_2 + u_1 - u_2)\,dt - 2x_1(0) \to \mathrm{extr}$, $\dot{x}_1 = u_1$,
$\dot{x}_2 = u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 4$, $x_1(10) = x_2(10) = 0$, $x_1(0) = -2$.

30. $T \to \inf$, $\dot{x}_1 = 2x_2 - u_1$, $\dot{x}_2 = x_1 + u_2$, $u_1 \geqslant -5$, $u_2 \geqslant -2$, $|6u_1 + u_2| \leqslant 18$, $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = -10$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

31. $\int\limits_0^T (1 + |u|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$, $u \in [-1, 1]$, $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = -8$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

32. $\int\limits_0^T (1 + u_1 + |u_2|)\, dt \to \min$, $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$, $2u_1 + |u_2| \leqslant 4$, $u_1 \geqslant 0$, $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$, $x_1(T) = x_2(T) = 0$.

33. $\int\limits_{-\pi/6}^{7\pi/4} x \sin 5t\, dt \to \min$, $\dot{x} = u$, $u \in [-2, 4]$, $x(-\frac{\pi}{6}) = 1$, $x(\frac{7\pi}{4}) = 0$.

34. $\int\limits_0^{3\pi} (u^2 - u\cos t)\, dt \to \min$, $u \in [-0,5, 0,5]$.

Вариант 23

1. Проверить,что оператор A является линейным и найти его норму

$$A\colon C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x(t) - \int\limits_0^1 tx(t)\, dt.$$

2. Исследовать отображение F на дифференцируемость по Фреше и в случае дифференцируемости найти производную по Фреше.

$$F\colon R^2 \to R^2, \quad F(x, y) = (|x + y|, \sin(x^2 + y^2)),$$

$$F\colon C^1[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \sin \dot{x}(t) - \int\limits_0^1 x^5(t)\, dt.$$

3. Найти касательное пространство к M в точке x_0

$$M = \{x \in C^1[0,1],\ \int\limits_0^1 \dot{x}^2\, dt \leqslant 1\}.$$

4. $\int\limits_1^e (t\dot{x}^2 + 2x)\,dt \to \text{extr}, \quad x(1) = 4, \quad x(e) = \xi.$

5. $\int\limits_0^{T_0} (\dot{x}^2 - 36x^2 - 2x\cos 2t)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad x(T_0) = \xi.$

6. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}\,dt \to \text{extr}, \quad x(t_0) = x_0 > 0, \quad x(t_1) = x_1 > 0.$

7. $\int\limits_0^{\pi} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\,dt \to \text{extr},$

$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1(\pi) = x_2(\pi) = 1.$

8. $\int\limits_0^T \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0, \quad T^2x(T) = 1.$

9. $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 - x^2 - 4x\cos t)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = 0.$

10. $\int\limits_0^1 \dot{x}_1\dot{x}_2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 tx_1\,dt = \int\limits_0^1 tx_2\,dt = 0,$

$x_1(1) = x_2(0) = 0, \quad x_2(1) = 1, \quad x_1(0) = -1.$

11. $\int\limits_0^1 x\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt = \frac{\pi}{2}, \quad x(1) = 0.$

12. $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 + 4x^2)\,dt \to \text{extr}, \quad x(0) = x(1) = 0, \quad \dot{x}(1) = \text{sh}1.$

13. $\int\limits_0^1 \ddot{x}^2\,dt \to \text{extr}, \quad \int\limits_0^1 x^2\,dt \leqslant 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 2, \quad x(1) = 0.$

14. $\int\limits_0^T u^2\,dt + x^2(0) \to \text{extr}, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(T) = \xi.$

15. $\int\limits_0^2 |\ddot{x}|\,dt \to \text{extr}, \quad \ddot{x} \leqslant 2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -2, \quad x(2) = 0.$

16. $\int\limits_0^8 x\,dt \to \text{extr}, \quad |\ddot{x}| \leqslant 2, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0,$

$x(8) = \dot{x}(8) = 1.$

17. $T \to \inf, \ \int\limits_0^T (\ddot{x}^2 + x)\, dt = 1, \ x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = x(T) = 0.$

18. $T \to \inf, \ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \ x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = -2, \ x(T) = 0, \ \dot{x}(T) = 1.$

19. $T \to \inf, \ -1 \leqslant \ddot{x} \leqslant 2, \ x(0) = \xi, \ \dot{x}(0) = 2, \ x(T) = 0.$

20. $\int\limits_0^{T_0} x \sin t\, dt \to \mathrm{extr}, \ |\ddot{x}| \leqslant 1, \ x(0) = -2.$

21. $\int\limits_0^4 (2x_1 - x_2 + 3u)\, dt \to \mathrm{extr}, \ \dot{x}_1 = x_2 + u, \ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2,$

$-1 \leqslant u \leqslant 1, \ x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 1.$

22. $T \to \inf, \ \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \ \dot{x}_2 = x_2 + u_2,$

$|u_2| \leqslant 1, \ 0 \leqslant u_1 \leqslant 2, \ x_1(0) = \xi_1, \ x_2(0) = \xi_2,$

$x_1(T) = x_2(T) = 0.$

23. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ найти расстояние между точками $A(0, 0, -2)$, $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

24. Пусть $\sigma(x, y) = x - y$ — плотность распределения массы вдоль кривой, соединяющей точки $A(0, 1)$, $B(2, 3)$. Найти такую кривую, для которой момент инерции относительно оси OX был бы минимальным.

25. $T \to \inf, \ \dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u,$

$x(0) = x_0, \ x(T) = 0, \ u \in \mathrm{co}\{(-1, 2), (0, 3), (2, 1)\}.$

26. $\int\limits_0^{20} (3u - u^2 - 2x)\, dt \to \mathrm{extr}, \ \dot{x} = -3x - 2u, \ u \in [-2, 2],$

$x(0) = -4, \ x(20) = 0.$

27. $T \to \inf, \ \dot{x}_1 = -u_1, \ \dot{x}_2 = u_2, \ 3u_1^2 + 4u_2^2 \leqslant 48,$

$x_1(0) = -13, \ x_2(0) = 1, \ x_1(T) = x_2(T) = 2.$

28. $T \to \inf, \ \dot{x}_1 = u_1, \ \dot{x}_2 = u_2, \ u_1 \in [-5, 2], \ u_2 \in [-1, 4],$

$x_1(0) = 8, \ x_2(0) = -12, \ x_1(T) = x_2(T) = 0.$

29. $\int\limits_0^{12}(3x_1+5x_2+u_1-u_2)\,dt-2x_1(0)\to\mathrm{extr},\ \ \dot x_1=u_1,$
$\dot x_2=u_2,\ \ u_1^2+u_2^2\leqslant 4,\ \ x_1(12)=x_2(12)=0,\ \ x_1(0)=-2.$

30. $T\to\inf,\ \ \dot x_1=2x_2-u_1,\ \ \dot x_2=x_1+u_2,\ \ u_1\geqslant -3,\ \ u_2\geqslant -2,$
$|6u_1+5u_2|\leqslant 18,\ \ x_1(0)=4,\ \ x_2(0)=-1,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

31. $\int\limits_0^T(1+|u|)\,dt\to\min,\quad \dot x_1=x_2,\ \dot x_2=u,\ u\in[-6,2],$
$x_1(0)=-2,\ x_2(0)=4,\ x_1(T)=x_2(T)=0.$

32. $\int\limits_0^T(1+u_1+|u_2|)\,dt\to\min,\quad \dot x_1=u_1,\ \dot x_2=u_2,\ \ u_1+2|u_2|\leqslant 4,$
$u_1\geqslant 0,\ \ x_1(0)=12,\ \ x_2(0)=1,\ \ x_1(T)=x_2(T)=0.$

33. $\int\limits_{-\pi/4}^{7\pi/2}x\sin 3t\,dt\to\min,\ \ \dot x=u,\ u\in[-2,1],\quad x(-\frac{\pi}{4})=2,$
$x(\frac{7\pi}{2})=0.$

34. $\int\limits_0^{T_0}(u_1^2+p(t)u_2+u_1)\,dt\to\min,\quad u_1+2u_2\leqslant 3,\ u_1\geqslant 0,\ u_2\geqslant 0.$

Дополнительные задачи

1. Привести пример отображения, имеющего в данной точке первую вариацию, но не являющегося дифференцируемым по Гато в данной точке.

2. Привести пример отображения, дифференцируемого по Гато в данной точке, но не дифференцируемого по Фреше в данной точке.

3. Пусть M — подмножество банахова пространства $X, x_0 \in X$. Верно ли, что $T_{x_0}M$ является линейным подпространством X ?

4. Пусть M — множество рациональных чисел R^1. Построить T_0M.

5. Пусть X — банахово пространство, $f : X \to R^1$ — выпуклый на X функционал. Верно ли, что для любой точки x_0 существует первая вариация $\delta f(x_0, h)$ функционала f ?

6. Пусть X — банахово пространство, $f : X \to R^1$ — выпуклый на X функционал. Верно ли, что для любой точки x_0 субдифференциал $\partial f(x_0)$ является непустым множеством?

7. Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство и $f : X \to R$. Доказать, что множество всех точек строгого локального экстремума функционала f не более чем счетно.

8. Пусть D — совокупность всех 2π периодических функций $f \in C^1(R)$. $\lambda > 0$ — фиксированное число. Найти глобальный минимум в следующей задаче:

$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \sin x)^2 dx + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx\Big) \to \min_{f \in D}.$$

9. Может ли простейшая задача вариационного исчисления иметь два решения?

10. Сформулировать задачу о нахождении геодезической на сфере и цилиндре как простейшую задачу вариационного исчисления. Найти решения поставленных задач.

11. Сформулировать задачу о нахождении геодезической на торе как простейшую задачу вариационного исчисления. Найти решения поставленной задачи.

12. Привести пример простейшей задачи вариационного исчисления, в которой слабый локальный минимум является сильным локальным минимумом, но не является глобальным минимумом.

13. Привести пример задачи оптимального быстродействия, имеющей более одного решения.

14. Привести пример задачи оптимального управления, имеющей сильный локальный минимум, но не имеющей глобального минимума.

15. Решить задачу

$$\int_0^{T_0} (1-u)\sqrt{x}\,dt \to \inf,$$

$$\dot{x} = u\sqrt{x} - ux,\ u \in [-1,1],\ x(0) = x_0,\ x(T_0) = x_0.$$

16. Показать, что для всякого дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = \varphi(t, x, \dot{x}), \quad \varphi \in C^2(R^3)$$

можно найти функцию $f : R^3 \to R^1$ такую, что решения этого уравнения будут экстремалями функционала

$$F : C^1[t_0, t_1] \to R^1,\ F(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt.$$

17. Решить задачу

$$\frac{\int_0^1 \dot{x}^2 dt}{\int_0^1 x^2 dt} \to \min, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

18. Рассматривается задача

$$\int_0^1 (1-(\dot{x})^2)^2 dt \to \text{extr}, \quad x(0)=x(1)=0.$$

Имеется ли в данной задаче:

а) слабый локальный экстремум;

б) сильный локальный экстремум.

19. Решить задачу

$$\int_0^1 tx(t)dt \to \text{extr},$$

$$x \in \{z : z \in C[0,1], z \geqslant 0, \int_0^1 z(t)dt = a,\ z - \text{вогнута}\}.$$

20. Решить задачу

$$\int_0^1 t^2 x(t)dt \to \text{extr},$$

$$x \in \{z : z \in C[0,1],\ z \geqslant 0,\ \int_0^1 z(t)dt = a,\ z - \text{вогнута}\}.$$

21. Привести пример простейшей задачи вариационного исчисления, в которой имеется слабый локальный экстремум, но нет сильного локального экстремума.

22. Решить задачу

$$\frac{\int_0^1 \dot{x}^2 dt}{\int_0^1 x^2 dt} \to \min, \quad \int_0^1 x dt = 0.$$

23. Пусть D — совокупность всех функций f, интегрируемых по Риману на отрезке $[0,2]$, для которых для всех целых n

$$\int\limits_0^2 f(x)e^{-2\pi inx}dx = 0.$$

Найти глобальный минимум в задаче

$$\int\limits_0^2 (f(x)+x-2)^2 dx \to \min_{f\in D}.$$

24. Пусть $D\subset R^2$, $F: C^1(D)\to R^1$, $f\in C^1(R^5)$,

$$F(z) = \iint\limits_D f(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})dxdy.$$

Вычислить первую вариацию функционала F.

25. Пусть $F: C[t_0,t_1]\to R^1$,

$$F(x) = \max_{t\in[t_0,t_1]} g(x(t),t).$$

Исследовать функционал F на дифференцируемость по Фреше.

26. Получить необходимые условия экстремума для задачи

$$\int\limits_0^T f(t,x(t),\dot{x}(t))dt \to \min,$$

$$\dot{x}(t) = g_1(t,x(t)) + \int\limits_0^t g(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))d\tau,\ t\in[0,T].$$

27. Получить необходимые условия экстремума для задачи

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt \ \to \min,\quad g(t,x(t),\dot{x}(t)) = \alpha$$

для всех $t\in[t_0,t_1]$.

28. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума для задачи

$$F_0 \to \min,\ F_i \leqslant 0,\ i = 1, \ldots k, F_i = 0, i = k+1, \ldots, n,$$

$$\dot{x} = \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau) u(\tau)) d\tau,\ u \in U,$$

где

$$F_i = \int\limits_0^T g_i(t, x(t), u(t)) dt + l_i(x(0), x(T)).$$

29. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума для задачи

$$\max_{t \in [0,T]} g(x(t), t) \to \min,$$

$$\dot{x} = \varphi(x, u), \quad u \in U, \quad x(0) = x_0.$$

30. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума для задачи

$$F_0 \to \min,\ F_i \leqslant 0,\ i = 1, \ldots k, F_i = 0, i = k+1, \ldots, n,$$

$$\dot{x} = f_1(t, x(t), u(t)) + \int\limits_0^t f_0(\tau, x(\tau) u(\tau)) d\tau,\ u \in U,$$

где F_i определены выше.

31. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Понтрягина и уточнить структуру оптимального управления для задачи

$$F(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{r} |u_i(t)| dt \to \min, \quad x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u_i \in [-1, 1],\ i = 1, \ldots r,$$

где A, B — заданные матрицы размерности соответственно $n \times n, n \times r$; x_0, x_1 — заданные векторы пространства R^n, t_0, t_1 — заданные моменты времени.

32. Получить необходимые условия экстремума в форме принципа максимума Понтрягина и уточнить структуру оптимального управления для задачи

$$\varphi(x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} (g(x,t) + (b(t),u))dt \to \min,$$

$$\dot{x} = f(x,t) + A(t)u,\ x(t_0) = x_0,\ u \in U$$

если t_0, t_1 — заданы и

$a)$ $U = \{u \in R^r,\ |u| \leqslant 1\}$,

$b)$ $U = \{u \in R^r,\ u_i \in [\alpha_i, \beta_i]$,

$c)$ $U = \{u \in R^r,\ \sum\limits_{i=1}^{r} u_i = 1, u_i \geqslant 0\}$.

Замечание. В предлагаемых задачах предполагается, что все входящие функции «достаточно хорошие», а именно такие, для которых выполнены требуемые выкладки и справедливы условия соответствующих теорем. x, u — вектор-функции. Следует рассматривать два варианта соответствующих задач: момент T задан и момент T не задан.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.

2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука,1979.

3. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

5. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

6. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1977.

7. Альбрехт Э.Г., Каюмов Р.И., Соломатин А.М., Шелементьев Г.С. Методы оптимизации: Введение в теориию решения экстремальных задач. Екатеринбург.: Изд-во Урал. ун-та, 1993.

8. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

9. Понтрягин Л. С., Гамкрелизде Р. В., Болтянский В. Г., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

10. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1961.

11. Коша А. Вариационное исчисление. М.: Высш. шк., 1983.

12. Краснов М. Л., Макаренко Г. П., Киселев А. И. Вариационное исчисление: Задачи и упражнения. М.: Наука, 1961.

13. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М. Наука, 1950.

14. Матвеев А. С., Якубович В. А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. СПб.: ИЗд-во Санкт-Петерб. ун-та, 2003.

15. Мезенцев А. В. Сборник задач по теории оптимального управления. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

16. Лагоша Б. А., Лобанов С. М., Дементьев О. Н. Методы решения задач оптимального управления. М.: Изд-во Моск.экон.-статист. ин-та, 1989.

17. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Физматлит, 1999.

18. Белоусов Е.Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.

19. Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

20. Ахиезер Н.И. Вариационное исчисление. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1981.

21. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

22. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.

23. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. Ижевск: Изд-во РХД, 2001.

24. Ашманов С.А. Линейное программирование. М.: Наука, 1981.

25. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

26. Лутманов С.В., Аюпов В.В., Гамилова Л.В. Задачи оптимизации в конечномерных пространствах. Пермь. Изд-во Пермского ун-та, 2007.

27. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.

28. Заславский И.Л. Сборник задач по линейному программированию. М.: Наука, 1969.

29. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. М: Высшая школа, 1975.

Содержание

Н.Н. Петров

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Учебное пособие

Подписано в печать .05.08. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Печать офсетная. Уч.- изд. л. . Усл. п. л. .
Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно–издательский отдел УдГУ.
Типография УдГУ,
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.