

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математический факультет
Кафедра алгебры и топологии

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

для специальности

010200 Прикладная математика и информатика

дневной формы обучения

Курс	_____	1,2
Семестр	_____	1,2,3
Всего аудиторных часов	_____	244
Лекции, час	_____	122
Практические (семинарские).....	_____	122
Самостоятельная работа, час	_____	113
Контрольные работы, семестр	_____	1,2,3
Зачет, семестр	_____	1,2,3
Экзамен, семестр	_____	1,2,3

Ижевск 2008

УДК
ББК

Б

Б	Банникова Т.М., Баранова Н.А.
	Алгебра: учебно-методический комплекс, Ижевск,, 2008, 50 с.

Учебно-методический комплекс по курсу «Геометрия и алгебра» разработан на основе опыта преподавания данной дисциплины и современных методик обучения, содержит тематический план курса, краткий обзор лекционных и практических занятий, тщательно подобранный материал для организации, предусмотренных в рабочей программе, форм контроля и самостоятельной работы студентов, а также методических указаний для преподавателей и студентов. Учебно-методический комплекс предназначен для оказания помощи студентам 1-2 курсов математического факультета и факультета информационных технологий и вычислительной техники.

	УДК
	ББК

© Банникова Т.М., Баранова Н.А., 2008
© ГОУ ВПО «Удмуртский государственный
университет», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
I. ТРЕБОВАНИЯ ГОС ВПО ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ 511200	
МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.....	5
I.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАПРАВЛЕНИЯ 511200 –	
МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	5
I.2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРА	
ПО НАПРАВЛЕНИЮ 511200 – МАТЕМАТИКА.	
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА	5
II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА	10
II. 1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ	10
II. 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ КУРСА ПО ТЕМАМ И	
ВИДАМ ЗАНЯТИЙ	15
II.3. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА	16
II.4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КУРСА.	23
III.1. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ .	24
III.3. ПРИМЕРНЫЕ ЗАЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ.....	30
III.4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ	32
IV. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ.....	37
IV.2. ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО	
ИЗУЧЕНИЯ	47

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс курса «Алгебра» разработан в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Курс входит в цикл Общих профессиональных дисциплин, адресован студентам 1-2 курса математического факультета, обучающимся по направлению «Математика. Прикладная математика». Он изучается на основе и в тесной связи с учебными дисциплинами, раскрывающими основные понятия математики, такими как «Математический анализ», «Дискретная математика и математическая логика». Курс строится как непосредственное продолжение основных понятий теории множеств, введение на них линейных операций и изучение свойств полученных алгебраических структур.

Курс "Геометрия и алгебра" предназначен для студентов обучающихся по специальности прикладная математика и информатика. Программа курса рассчитана на три семестра.

Цель курса: познакомить студентов с основами высшей алгебры и аналитической геометрии и их фундаментальными методами.

В процессе обучения студенты должны усвоить методику построения алгебраических структур, их свойства и применение, внутреннюю логику, связывающую линейную алгебру и аналитическую геометрию, и приобрести навыки исследования и решения задач алгебры и аналитической геометрии.

Для успешного освоения данного курса студентам рекомендуется повторить основные разделы школьного курса алгебры и геометрии, такие как «Тригонометрия», «Векторы», «Функции».

I. ТРЕБОВАНИЯ ГОС ВПО ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 010200 – ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

I.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕЦИАЛЬНОСТИ 010200 – ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

1.1. Специальность утверждена приказом Министерства образования Российской Федерации от 02.03.2000 г. № 686.

1.2. Квалификация выпускника – **Математик, системный программист.**

Нормативный срок освоения основной образовательной программы подготовки математика, системного программиста по специальности 010200 – Прикладная математика и информатика при очной форме обучения – 5 лет.

1.3. Квалификационная характеристика выпускника.

Сферами профессиональной деятельности математика, системного программиста являются научно-исследовательские центры, государственные органы управления, образовательные учреждения и организации различных форм собственности, использующие методы прикладной математики и компьютерные технологии в своей работе.

Математик, системный программист подготовлен преимущественно к выполнению исследовательской деятельности в областях, использующих методы прикладной математики и компьютерные технологии; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке и применению современных математических методов и программного обеспечения для решения задач науки, техники, экономики и управления; использованию информационных технологий в проектно-конструкторской, управленческой и финансовой деятельности.

Математик, системный программист может занимать должности, требующие высшего образования в соответствии с законами РФ.

1.4. Возможности продолжения образования математика, системного программиста, освоившего основную образовательную программу высшего профессионального образования по специальности 010200 – Прикладная математика и информатика.

Выпускник подготовлен для продолжения образования в аспирантуре.

I.2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 010200 – ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

3.

3.1. Основная образовательная программа подготовки математика, системного программиста разрабатывается на основании настоящего Государственного образовательного стандарта и включает в себя учебный план, программы учебных дисциплин и практики.

3.2. Требования к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы подготовки математика, системного программиста, к условиям ее реализации и срокам ее освоения определяются настоящим Государственным образовательным стандартом.

3.3. Основная образовательная программа подготовки математика, системного программиста состоит из дисциплин федерального компонента, дисциплин национально-регионального (вузовского) компонента, дисциплин по выбору студента, а также факультативных дисциплин. Дисциплины и курсы по выбору студента в каждом цикле должны содержательно дополнять дисциплины, указанные в федеральном компоненте цикла.

3.4. Основная образовательная программа подготовки математика, системного программиста должна предусматривать изучение студентом следующих циклов дисциплин и итоговую государственную аттестацию:

цикл ГСЭ – Общие гуманитарные и социально-экономические дисциплины;

цикл ЕН – Общие математические и естественнонаучные дисциплины;

цикл ОПД – Общепрофессиональные дисциплины;

ДС – Дисциплины специализации;

ФТД – Факультативные дисциплины.

3.5. Содержание национально-регионального компонента основной образовательной программы подготовки математика, системного программиста должно обеспечивать подготовку выпускника в соответствии с квалификационной характеристикой, установленной настоящим Государственным образовательным стандартом.

ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 010200 – ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

7.1. Требования к профессиональной подготовленности специалиста.

Выпускник должен уметь решать задачи, соответствующие его квалификации, указанной в п.1.2 настоящего Государственного образовательного стандарта. Выпускник должен обладать теоретическими знаниями и практическими навыками, соответствующими основной образовательной программе подготовки п.4 настоящего Государственного образовательного стандарта.

Математик, системный программист должен знать и уметь использовать:

- дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных, теорию числовых и функциональных рядов, методы теории функций комплексного переменного;
- аналитическую геометрию и линейную алгебру;
- методы исследования основных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики;
- основные понятия и методы дискретной математики;
- методы теории вероятностей и математической статистики;
- методы решения задач оптимизации, теории игр и исследования операций;
- численные методы решения типовых математических задач и уметь применять их при исследовании математических моделей;
- основы теории алгоритмов и ее применения, методы построения формальных языков, основные структуры данных, основы машинной графики, архитектурные особенности современных ЭВМ;
- синтаксис, семантику и формальные способы описания языков программирования, конструкции распределенного и параллельного программирования, методы и основные этапы трансляции; способы и механизмы управления данными;

- принципы организации, состав и схемы работы операционных систем, принципы управления ресурсами, методы организации файловых систем, принципы построения сетевого взаимодействия, основные методы разработки программного обеспечения;
- основные модели данных и их организацию, принципы построения языков запросов и манипулирования данными, методы построения баз знаний и принципы построения экспертных систем;
- основные понятия, законы и модели классической механики, электродинамики, молекулярной и статистической физики, физические основы построения ЭВМ;
- основные тенденции развития современного естествознания, основы математического моделирования и его применения в исследовании физических, химических, биологических, экологических процессов.

Математик, системный программист должен иметь опыт работы на различных типах ЭВМ, применения стандартных алгоритмических языков, использования приближенных методов и стандартного программного обеспечения для решения прикладных задач, пакетов прикладных программ и баз данных, средств машинной графики, экспертных систем и баз знаний.

Математик, системный программист должен обладать знаниями и умениями, позволяющими применять современные математические методы и программное обеспечение для решения задач науки, техники, экономики и управления и использования информационных технологий в проектно-конструкторской, управленческой и финансовой деятельности.

Математик, системный программист должен обладать теоретическими знаниями и практическими навыками, соответствующими той специализации, по которой он проходил подготовку.

Математик, системный программист должен быть способен к совершенствованию своей профессиональной деятельности в области прикладной математики и информатики.

ТРЕБОВАНИЯ К ОБЯЗАТЕЛЬНОМУ МИНИМУМУ
СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ
ПОДГОТОВКИ МАТЕМАТИКА, СИСТЕМНОГО ПРОГРАММИСТА ПО
СПЕЦИАЛЬНОСТИ
010200 – ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

ЕН.Ф.01.2	<i>Геометрия и алгебра</i> Аналитическая геометрия; теория матриц; системы линейных алгебраических уравнений; линейные пространства и операторы; элементы общей алгебры.	357
-----------	--	-----

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математический факультет

Кафедра алгебры и топологии

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

**ПО ДИСЦИПЛИНЕ
ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА**

для специальности

010200 Прикладная математика и информатика

дневной формы обучения

Курс	_____	1,2
Семестр	_____	1,2,3
Всего аудиторных часов	_____	244
Лекции, час	_____	122
Практические (семинарские).....	_____	122
Самостоятельная работа, час	_____	113
Контрольные работы, семестр	_____	1,2,3
Зачет, семестр	_____	1,2,3
Экзамен, семестр	_____	1,2,3

Ижевск 2008

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

II. 1. Организационно-методический раздел

В настоящее время алгебраический язык проник, пожалуй, во все разделы математики и во многие из ее приложений. В свою очередь, алгебра обогатилась многими новыми идеями и результатами, как в классических ее областях (группы, кольца), так и в направлениях, развившихся за последнее пятидесятилетие (полугруппы, решетки, универсальные алгебры, категории). Аналитическая геометрия является одним из основных базовых разделов математики, без которых современное развитие математики было бы не мыслимо.

Курс "Геометрия и алгебра" предназначен для студентов обучающихся по специальности прикладная математика и информатика. Программа курса рассчитана на три семестра.

Цель курса: познакомить студентов с основами высшей алгебры и аналитической геометрии и их фундаментальными методами.

В процессе обучения студенты должны усвоить методику построения алгебраических структур, их свойства и применение, внутреннюю логику, связывающую линейную алгебру и аналитическую геометрию, и приобрести навыки исследования и решения задач алгебры и аналитической геометрии.

Курс начинается с тех тем, которые дают фундамент, на котором осуществляется дальнейшее изучение основных понятий алгебры и геометрии. Это "Множество и подмножества", "Алгебраические структуры", знакомство с алгебраическими структурами происходит при изучении тем "Поле комплексных чисел", "Кольцо многочленов", "Группа подстановок". Далее идут темы линейной алгебры. Это "Алгебра матриц", "Определители и их свойства", "Обратная

матрица", "Системы линейных уравнений", "Векторные пространства", "Отображения на алгебраических структурах", "Матрица линейного оператора", "Собственные числа и собственные векторы линейного оператора", "Евклидовы и унитарные векторные пространства", "Билинейные и квадратичные формы". Элементы общей алгебры изучаются в темах "Группы. Циклические группы", "Подгруппы и смежные классы", "Гомоморфизм групп", "Действие группы на множестве. Группы преобразований". Аналитическая геометрия представлена темами: "Векторы и координаты. Аффинные преобразования", "Прямая линия и плоскость", "Линии второго порядка. Канонический вид уравнения второго порядка", "Поверхности второго порядка. Канонический вид уравнения поверхности". При таком построении курса появляется возможность решать довольно просто ряд интересных задач как алгебры, так и аналитической геометрии.

Все понятия курса, их свойства и характеристики научно обоснованы и преподносятся с надлежащей полнотой и строгостью изложения. Доказательства проводятся исключительно на основании известных (из школьного курса) или уже пройденных (в курсе алгебры или других изучаемых курсах) свойств исследуемых объектов. Существенная особенность изложения данного курса - та, что важнейшие понятия курса рассматриваются с разных сторон при изучении различных тем, при этом они "обрастают" новыми свойствами и применением, обретая целостность и значимость.

При изучении данного курса невозможно ограничиться изучением теории, и приобретение твердых навыков в решении примеров и задач является совершенно необходимым. По всем теоретическим темам проводятся практические занятия (не менее 2-х часов на каждые 2 часа лекций).

Курс "Геометрия и алгебра" непосредственно связан с курсом "Математический анализ" и является базой для

дисциплин "Дифференциальные уравнения", "Уравнения математической физики", "Численные методы", "Теория вероятностей и математическая статистика", "Исследование операций".

Знания, полученные в результате изучения данного курса, помогут студентам стать полноценными специалистами в выбранной области математических исследований.

Требования к уровню освоения содержания курса.

Студент знает понятия:

Множество и подмножества. Комбинаторные свойства множеств. Теорема Шпернера и ее следствие. Отображения множеств: инъекция, сюръекция и биекция. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности и его свойства.

Понятие группы, кольца, поля и их примеры: группа подстановок, кольцо классов вычетов по модулю m , поле классов вычетов по простому модулю.

Формы записи и свойства комплексных чисел. Формула Муавра и корней n -ой степени из 1. Корни n -ой степени из 1.

Кольцо многочленов. Наибольший общий делитель многочленов, алгоритм Евклида. Корень многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, ее связь со значениями производных. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на неприводимые множители над полем комплексных чисел и над полем вещественных чисел. Формулы Виета. Интерполяционные многочлены. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены.

Группа подстановок. Понятие инверсии и четности подстановки. Теорема о свойствах четности перестановок и о числе четных и нечетных перестановок.

Понятие матрицы над полем K . Виды матриц, преобразование матриц и операции над ними. Кольцо матриц.

Понятие определителя матрицы и его свойства. Виды определителей. Методы вычисления определителей. Свойства определителя произведения матриц.

Понятие алгебраического дополнения элементов матрицы. Разложение определителя по элементам строки и столбца. Ранг матрицы, его свойства. Базисный минор и его свойства. Понятие обратной матрицы. Группа невырожденных матриц.

Матрица и определитель системы уравнений. Метод Крамера. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность и фундаментальная система решений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы уравнений. Понятие многообразия и его свойства.

Понятие векторного пространства и его модели. Понятие линейной зависимости и независимости и их свойства. Система образующих и базис векторного пространства. Размерность векторных пространств. Подпространства векторных пространств и их свойства. Сумма и пересечение как подпространства векторного пространства. Свойства их размерности. Прямая сумма векторных подпространств.

Понятие линейных отображений и линейных операторов, действующих на векторном пространстве. Их свойства. Ядро и образ линейного оператора, и их свойства. Изоморфизмы векторных пространств и его свойства.

Подобные матрицы и их свойства. Матрица линейного оператора в данном базисе и определитель линейного оператора в данном базисе. Инвариантные подпространства линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы, соответствующие данному собственному значению. Собственные подпространства и свойства собственных векторов. Линейная независимость собственных векторов и базис из собственных векторов для оператора с простым спектром. Понятие о нормальной жордановой форме.

Скалярное умножение на векторных пространствах и его свойства. Ортогональные дополнения подпространства и ортогонализация базиса. Евклидовы и унитарные векторные

пространства. Норма вектора. Ортонормированный базис. Ортогональное дополнение. Определитель Грама.

Линейные операторы в евклидовом пространстве и унитарном пространстве. Сопряженный оператор. Нормальный оператор. Самосопряженный и унитарный операторы. Билинейные и квадратичные формы. Нормальный вид квадратичной формы. Закон инерции. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Z , Z/nZ , S_n , GL_n , SL_n , O_n . Конечные и бесконечные группы. Прямое произведение групп. Циклическая группа. Группы простого порядка. Симметрическая группа. Знакопеременная группа.

Подгруппы и смежные классы. Теорема Лагранжа и ее следствия.

Гомоморфизмы групп. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теоремы о гомоморфизмах. Автоморфизмы и эндоморфизмы групп.

Примеры групп преобразований: классические линейные группы, группа движений, группы симметрий правильных многоугольников и многогранников в трехмерном пространстве. Орбиты, стационарные подгруппы. Формула классов. Теорема Кэли.

Аффинная и прямоугольная системы координат. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведение векторов. Формулы преобразования координат.

Уравнения прямой линии на плоскости и в пространстве, плоскости в пространстве. Их виды: канонический, общий, параметрический и др.

Линии второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Канонический вид.

Поверхность второго порядка. Каноническое уравнение. Метод вращений. Метод Лагранжа. Классификация поверхностей второго порядка.

Студент может применить полученные знания для решения задач по пройденным темам.

II. 2. Распределение часов курса по темам и видам занятий

№ п/п	Наименование тем и разделов	Всего часов	лекции	практ	СР С
1.	Множество и подмножества.	16	6	6	4
2.	Алгебраические структуры.	18	6	6	6
3.	Поле комплексных чисел.	18	6	6	6
4.	Кольцо многочленов.	22	8	8	6
5.	Группа подстановок.	16	6	6	4
6.	Алгебра матриц.	11	4	4	3
7.	Определители и их свойства.	18	6	6	6
8.	Обратная матрица.	12	4	4	4
9.	Системы линейных уравнений.	16	6	6	4
10.	Векторные пространства.	20	8	6	6
11.	Отображение на алгебраических структурах.	12	4	6	6
12.	Матрица линейного оператора.	12	4	4	4
13.	Собственные числа и собственные вектора линейного оператора	18	6	6	6
14.	Евклидовы и унитарные векторные пространства.	18	6	6	6
15.	Билинейные и квадратичные формы.	18	6	6	6
16.	Группы. Циклические группы.	18	6	6	6
17.	Подгруппы и смежные классы.	18	6	6	6
18.	Гомоморфизм групп.	12	4	4	4
19.	Группы преобразований. Действие группы на множестве.	12	4	4	4
20.	Векторы и координаты. Аффинные преобразования.	12	4	4	4
21.	Прямая линия и плоскость.	12	4	4	4
22.	Линии второго порядка. Канонический вид уравнения линии второго порядка.	12	4	4	4
23.	Поверхности второго порядка. Канонический вид уравнения поверхности.	12	4	4	4
24.	Итого:	357	122	122	113

II.3. Содержание курса

Методические рекомендации к занятиям.

Выбор методов обучения и закрепления практических навыков в ходе практических занятий зависит не только от содержания, цели, формы и организации занятия. Необходимо учитывать также двухсторонний характер процесса обучения: совместная деятельность преподавателя и студентов.

Одним из лучших приемов привлечения интереса, активизации внимания и мыслительной деятельности студентов на лекции является проблемный характер изложения, при котором студентам не преподносится готовый результат (готовая формулировка теоремы и готовое ее доказательство, кем-то и когда-то полученные), а ставится задача, проблема и при активном участии студентов выбирается способ решения, проводится решение и формулируется вывод.

Содержание лекционного курса должно быть продумано лектором на весь период обучения. При составлении рабочей программы следует иметь в виду, что результат обучения измеряется не количеством сообщенной информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию.

Темы лекционных занятий

1. Множество и подмножества.

Множество и подмножества. Комбинаторные свойства множеств. Теорема Шпернера и ее следствие. Отображения множеств: инъекция, сюръекция и биекция и их свойства. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности и его свойства.

2. Алгебраические структуры.

Понятие группы, кольца, поля и их примеры: группа подстановок, кольцо классов вычетов по модулю m , поле классов вычетов по простому модулю.

3. Поле комплексных чисел.

Формы записи и свойства комплексных чисел. Формула Муавра и корней n -ой степени из 1. Корни n -ой степени из 1.

4. Кольцо многочленов.

Кольцо многочленов. Деление многочленов с остатком. Наибольший общий делитель многочленов, его нахождение с помощью алгоритма Евклида. Корень многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, ее связь со значениями производных. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на неприводимые множители над полем комплексных чисел и над полем вещественных чисел. Формулы Виета. Интерполяционные многочлены. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены.

5. Группа подстановок.

Группа подстановок. Понятие инверсии и четности подстановки. Теорема о свойствах четности перестановок и о числе четных и нечетных перестановок.

6. Алгебра матриц.

Понятие матрицы над полем K . Виды матриц, преобразование матриц и операции над ними. Кольцо матриц. Алгебра квадратных матриц.

7. Определители и их свойства.

Понятие определителя матрицы и его свойства. Виды определителей. Методы вычисления определителей. Свойства определителя произведения матриц.

8. Обратная матрица.

Понятие алгебраического дополнения элементов матрицы. Разложение определителя по элементам строки и столбца. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства. Понятие обратной матрицы и методы ее вычисления. Группа невырожденных матриц.

9. Системы линейных уравнений.

Матрица и определитель системы уравнений. Системы уравнений от n уравнений с n неизвестными и ее разрешимость. Метод Крамера. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность и фундаментальная система решений. Системы уравнений от n уравнений с m неизвестными. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы уравнений. Понятие многообразия и его свойства. Множество решений системы линейных уравнений, как линейное многообразие.

10. Векторные пространства.

Понятие векторного пространства и его модели. Понятие линейной зависимости и независимости и их свойства. Система образующих и базис векторного пространства. Размерность векторных пространств. Подпространства векторных пространств и их свойства. Сумма и пересечение как подпространства векторного пространства. Свойства их размерности. Прямая сумма векторных подпространств и ее свойства.

11. Отображение на алгебраических структурах.

Отображение на алгебраических структурах. Понятие линейных отображений и линейных операторов, действующих на векторном пространстве. Их свойства. Ядро и образ линейного оператора, и их свойства. Теорема о размерностях ядра и образа. Изоморфизмы векторных пространств и его свойства.

12. Матрица линейного оператора.

Подобные матрицы и их свойства. Матрица линейного оператора в данном базисе и определитель линейного оператора в данном базисе. Инвариантные подпространства линейного оператора. Связь пространства квадратных матриц и матриц линейных операторов. Изменение координат векторов и матриц линейного оператора при изменении базиса и теорема об изменении определителя оператора при изменении базиса.

13. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Собственные числа и собственные векторы, соответствующие данному собственному значению. Нахождение собственных значений линейного оператора. Собственные подпространства и свойства собственных векторов. Линейная независимость собственных векторов и базис из собственных векторов для оператора с простым спектром. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Понятие о нормальной жордановой форме.

14. Евклидовы и унитарные векторные пространства.

Скалярное умножение на векторных пространствах и его свойства. Ортогональные дополнения подпространства и ортогонализация базиса. Евклидовы и унитарные векторные пространства. Норма вектора и ее свойства. Ортонормированный базис и его свойства. Ортогональное дополнение. Определитель Грама. Объем параллелепипеда.

15. Билинейные и квадратичные формы.

Линейные операторы в евклидовом пространстве и унитарном пространстве. Сопряженный оператор. Нормальный оператор. Самосопряженный и унитарный операторы. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к нормальному виду. Закон инерции. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к каноническому виду.

16. Группы. Циклические группы.

Определение и примеры групп: Z , Z/nZ , S_n , GL_n , SL_n , O_n . Конечные и бесконечные группы. Прямое произведение групп. Циклическая группа. Циклическость группы простого порядка. Симметрическая группа. Знакопеременная группа.

17. Подгруппы и смежные классы.

Подгруппы и смежные классы. Теорема Лагранжа и ее следствия: порядок элемента группы делит порядок группы, малая теорема Ферма, теорема Эйлера.

18. Гомоморфизм групп.

Гомоморфизмы групп. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теоремы о гомоморфизмах. Автоморфизмы и эндоморфизмы групп.

19. Группы преобразований. Действие группы на множестве

Примеры групп преобразований: классические линейные группы, группа движений, группы симметрий правильных многоугольников и многогранников в трехмерном пространстве. Действие группы на множестве. Орбиты, стационарные подгруппы. Формула классов. Теорема Кэли.

20. Векторы и координаты. Аффинные преобразования.

Аффинная и прямоугольная системы координат. Скалярное произведение векторов. Ориентированный объем параллелепипеда. Векторное и смешанное произведение векторов. Переход от одной системы координат к другой. Формулы преобразования координат.

21. Прямая линия и плоскость.

Уравнение прямой линии на плоскости и плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых на плоскости и плоскостей в пространстве. Прямая линия в пространстве.

22. Линии второго порядка. Канонический вид уравнения линии второго порядка.

Линии второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Приведение уравнений линий второго порядка к каноническому виду.

23. Поверхности второго порядка. Канонический вид уравнения поверхности.

Поверхности второго порядка: теорема о канонических уравнениях поверхностей второго порядка (без доказательства). Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду. Метод вращений.

Метод Лагранжа. Классификация и исследование поверхностей второго порядка.

Примерный перечень практических занятий

Практические занятия проходят в форме практикума по решению задач. Во время занятия преподаватель демонстрирует подробное решение нескольких типов задач по данной теме далее в процессе коллективного обсуждения студенты решают подобные задачи. На практических занятиях проводятся различные формы контроля знаний студентов (контрольная и самостоятельные работы, устный опрос). Темы практических занятий и основные типы задач, решаемых на этом занятии должны быть в свободном доступе для студентов, то есть находиться на кафедре в печатной либо электронной форме.

Преподаватель может выбирать задачи из предложенного пакета контрольных заданий или из задачников, приведенных в списке литературы.

При подготовке к практическому занятию студентам рекомендуется повторить лекционный материал по соответствующей теме.

Примерные темы практических занятий

1. Множества, подмножества, комбинаторные свойства.
2. Отображения на множествах и их свойства.
3. Теория делимости на целых числах.
4. Сравнения. Решение линейных диофантовых уравнений и сравнений.
5. Комплексные числа.
6. Кольцо многочленов. Делимость на кольце многочленов и корни многочленов.
7. Линейные пространства. Линейная зависимость.
8. Матрицы и определители. Ранг матрицы.
9. Системы линейных уравнений.
10. Линейные операторы. Ядро и образ линейных операторов.
11. Евклидово пространство.
12. Декартовы координаты, движение систем координат.

13. Циклические группы.
14. Симметрическая группа.
15. Подгруппы и смежные классы. Теорема Лагранжа и ее следствия.
16. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теоремы о гомоморфизмах.
17. Абелевы группы и структура конечно порожденных абелевых групп.
18. Задание группы образующими и соотношениями.

II.4. Учебно-методическое обеспечение курса.

V. Учебно-методическое обеспечение курса.

Основная литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник для вузов по специальности "Математика", "Прикладная математика". СПб.: Лань, 2006. -431с.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М. Физматлит, 2000. -271с.
3. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учебное пособие. СПб.: Лань, 2005. -415с.
4. Петрова В.Т. Лекции по алгебре и геометрии: учебник. М.: Владос, 1999. ч.1-311с, ч.2-342с.
5. Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. М.; Ижевск: РХД, 2001. -347с.
6. Зуланке Р.М. Алгебра и геометрия: (учебное пособие). М.: МЦНМО, 2004. -405с.
7. Сборник задач по алгебре: учебник для вузов. Под редакцией А.И. Кострикина. М. Физматлит, 2001. -463с.
8. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: учебное пособие. СПб.: Лань, 2001. -287с.
9. Овсянников А.Я. Задачник по алгебре и геометрии для студентов первого курса: учебное пособие для математических специальностей. Уральский университет, 2004. -197с.

Дополнительная литература

1. Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. Под редакцией О.Б. Ляпунова, А.И. Кострикина. М.: Московский университет, 1992. -198с.
2. Куликов Л.Я. и др. Сборник задач по алгебре и теории чисел: учебник для физико-математических специальностей. М.: Просвещение, 1993. -287с.

III. ФОРМЫ ТЕКУЩЕГО ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ.

Текущий контроль осуществляется в виде проведения самостоятельных и контрольных работ по прохождении 1-3 тем.

Итоговый контроль состоит из зачета и экзамена в конце 1, 2, 3 семестра.

III.1. Примерные варианты контрольных работ

Контрольные работы проводятся на практических занятиях после изучения соответствующего блока и оцениваются по системе «зачет/незачет». Для того, чтобы контрольная работа была зачтена студенту необходимо выполнить 70% заданий.

Примерные варианты контрольных работ.

1 СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНАЯ №1.

1. Доказать, что для любого натурального n неотрицательного k : $0 \leq k \leq n$, справедливо равенство $nC_n^k = (k+1)C_n^{k+1} + kC_n^k$.
2. Установить биекцию между $[0, 2)$ и $(0, +\infty)$.
3. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z, t\}$. Сколько: а) сюръекций; б) инъекций из $A \rightarrow B$ существует?
4. Привести пример полугруппы из 5 элементов. (Указать множество элементов и операцию на нем).
5. Выписать все элементы прямого произведения трех множеств A, B, C , если $A = \{-1, 1\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{a\}$.

КОНТРОЛЬНАЯ № 2.

1. Написать тригонометрическую форму чисел $-7, 3-4i$, $\cos(-2\alpha) + i \sin 2\alpha$.
2. Решить уравнение $(2x - i)^n - (2x + i)^n = 0$.
3. Вычислить $((1-2i)/(\sqrt{7} + i))^{1/5}$, $((1-2i) / (1 + i\sqrt{7}))^{1/5}$.
4. Вычислить $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.
5. Выписать первообразные корни из 1 степени 18, 26 и написать круговой многочлен $X_6(x)$, $X_{10}(x)$.
6. Извлечь квадратные корни из чисел $1+i$, $-2+3i$.
7. Найти геометрическое место точек а) $\arg(z(2i + 1)) = \pi/3$; б) $|z - 3i| = 2$.

КОНТРОЛЬНАЯ № 3.

1. а) Разложить многочлен $p(x) = x^5 + 7x^3 + x^2 + 3x - 6$ по степеням $x+1$.
б) Найти значения многочлена $p(x) = x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 4x - 3$ и всех его производных в точке $x=2$.
2. Разложить на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ $p(x) = x^8 - 2x^4 + 2$.
3. Исследовать многочлен на наличие у него рациональных корней
 $p(x) = -14x^5 - 13x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 11x - 9$.
4. Отделить корни многочленов методом Штурма
 $p(x) = x^3 + x^2 + x - 3$.
5. Устранить иррациональность в знаменателе
 $1/(1 + \sqrt{4} + \sqrt{3})$.
6. Какое наибольшее количество различных вещественных корней может иметь уравнение вида $x^n + ax^2 + bx + c = 0$?

КОНТРОЛЬНАЯ № 4.

1. Проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис.

Найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе $\vec{a}=\{2,3\}$ $\vec{b}=\{-1,2\}$ $\vec{c}=\{5,6\}$

2. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$\vec{a}=\{1,0,0\}$ $\vec{b}=\{1,1,0\}$ $\vec{c}=\{1,1,1\}$ $\vec{d}=\{3,3,3\}$

3. Найти размерность линейной оболочки, образованной векторами.

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

4. Не развертывая определителей, доказать следующее тождество.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-b)$$

5. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

6. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

7. Рядом Фибоначчи называется числовой ряд, который начинается числами 1, 2 и в котором каждое число равно сумме двух предыдущих, т.е. ряд 1, 2, 3, 5, 8 Доказать, что n -й член ряда Фибоначчи равен определителю n -ого порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

2 СЕМЕСТР КОНТРОЛЬНАЯ № 1

1. Пусть $R_n[x]$ - пространство многочленов степени $\leq n$.
Определим отображение $A: R_n[x] \rightarrow R_n[x]$ по правилу $A(f(x)) = f(x+1)$.
А) доказать, то A линейное отображение.
Б) найти его матрицу относительно базиса $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.
2. Найти матрицу проектирования R^3 на плоскость $x=y=2z$.
3. Найти собственные числа и вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти жорданову форму матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Имеются три центра грузовых перевозок. Каждый месяц половина грузовиков Бостона и Лос-Анджелеса едут в Чикаго, другая половина остается на месте. Чикагские грузовики распределяются поровну между Бостоном и Лос-Анджелесом. Найти матрицу перевозок и найти предельное соотношение грузовиков.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2.

1. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x(5, 2, -2, 2)$ на подпространство W , заданное своим базисом: $\{w_1(2, 1, 1, -1), w_2(1, 1, 3, 0)\}$.
2. Найти скалярное произведение векторов $x(5, 2, -2, 2)$, $y(0, -1, 1, 0)$ в пространстве с базисом $\{e_1(2, 1, 1, -1), e_2(1, 1, 3, 0), e_3(1, 1, 0, 0), e_4(1, 0, 0, 0)\}$.
1. Найти сигнатуру квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_3^2$.
2. Привести квадратичную форму к диагональному виду $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 x_3 - 4x_2 x_3 - x_3^2$; а) методом Лагранжа; б) методом Якоби.
5. Эквивалентны ли квадратичные формы над полем Q :

$$F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3,$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3?$$

3 СЕМЕСТР КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1.

1. Показать, что центр группы есть нормальная подгруппа этой группы.
2. Показать, что группа
 $Z_{10} = H \oplus K, \text{ где } H = \{0, 5\}, K = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$
3. Доказать, что группа всех корней n -й степени из 1 изоморфна группе $(Z_n, +)$
4. Пусть G группа такая, что $(ab)^2 = a^2b^2$. Доказать, что группа G абелева.
5. Доказать теорему Вильсона: для любого простого числа p справедливо сравнение $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
6. Найти все не изоморфные абелевы группы порядка 12.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2.

1. Найти объем параллелепипеда $ABCD$, если $AB \{2, 0, 0\}$, $AC \{3, 4, 0\}$, $AD \{3, 4, 2\}$.
2. Найти уравнение прямой линии симметричной прямой L относительно плоскости $5x+y+z-4=0$, $L: (x-2)/3=(y+1)/1=(z-2)/4$.
3. Найти уравнение прямой проходящей через точку $A(-2, 5)$ и отсекающей на координатных осях отрезки равной длины.
4. Составить уравнение перпендикуляра опущенного из точки $A(2, -1, 0)$ на прямую
 $L: (x-7)/3=(y-1)/4=(z-3)/2$.
5. Определить вид поверхности второго порядка
 $2x^2+y^2+3z^2+4xy+2xz+3=0$.

III.3. Примерные зачетные задания

Зачет выставляется по результатам сдачи всех лабораторных и контрольной работ. А так же успешного выполнения зачетной контрольной работы, примерные варианты которой приведены ниже.

Примерные зачетные задания

1 семестр

1. Если комплексное число $z = x + iy$ расположено в четвертой четверти, то как можно определить его аргумент?
2. Постройте круговой многочлен $X_{20}(x)$.
3. Дайте определение ряда Штурма для многочлена $f(x)$ на интервале $[a, b]$.
4. Образуется ли множество неотрицательных степеней какого-нибудь рационального положительного числа группу по умножению? Ответ пояснить.
5. Верно ли, что если два многочлена совпадают в n точках, где n – натуральное число больше 3, то они равны? Ответ поясните.
6. Пусть A – конечное множество порядка n , $f: A \rightarrow A$, сюръекция. Следует ли отсюда, что f – биекция. Ответ поясните.
7. С каким знаком войдет в определитель произведение $a_{34} a_{21} a_{42} a_{13}$?
8. Верно ли равенство $\det(kA) = k \det A$, где A – матрица порядка n ?
9. Чему равна сумма произведений элементов любого столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов этого столбца?

2 семестр

1. Приведите пример линейного многообразия.
2. Рассмотрим два различных многообразия по данному направлению W_k . Что можно сказать об их пересечении?

3. Пусть $V_R = \mathbb{R}$, $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $A(x) = x+2$. Найти $A^{-1}(x)$.
4. Пусть $\text{rang} A = 3$, A - матрица линейного оператора в базисе $\{e_i\}$. Чему равна $\dim \text{Im} A$?
5. Пусть U_k и W_k - векторные пространства V_k и $V_k = U_k \oplus W_{k-1}$ - прямая сумма. Чему равна $\dim (U^\perp \cap W^\perp)$?
6. Чем отличаются евклидово и унитарное пространства?
7. Как найти скалярное произведение (x, y) если известны координаты векторов и матрица Грама базиса, а если матрица Грама единичная?
8. Любую ли квадратичную форму можно привести к диагональному виду методом Якоби? Приведите примеры.
9. Какова сигнатура квадратичной формы $F(x, x, x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 x_2 - 4x_2 x_3$?

3 семестр

1. Укажите все подгруппы группы вращений тетраэдра.
2. Как вы считаете группа порядка p^2 циклическая? Ответ поясните.
3. Приведите примеры групп, обладающих свойствами: циклическая, не циклическая, конечная, бесконечная, конечного порядка, бесконечного порядка, абелева, не абелева.
4. Пусть $G = \langle a, b \mid a^2 = e, b^3 = e \rangle$. Докажите, что $|G| = \infty$.
5. Докажите, что группа четного порядка содержит элемент порядка 2.
6. Напишите формулы преобразования аффинных координат на плоскости.
7. Как определить взаимное расположение прямых линий в пространстве?
8. Укажите все известные вам применения векторного произведения векторов.
9. Определите вид поверхности $2x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 8xy - 4xz - 10yz = 1$.

III.4. Вопросы к экзамену

Экзамен проводится в форме устной беседы с преподавателем. Студент выбирает билет, содержащий два вопроса и одну задачу.

Вопросы к экзамену **1 семестр**

1. Множества и подмножества, объединение и пересечение подмножеств и их свойства. Аксиоматика множества натуральных чисел. Принцип математической индукции.
2. Комбинаторные свойства подмножеств конечного множества. Перестановки и их число. Бином Ньютона и теорема о числе подмножеств конечного множества.
3. Отношения на множествах. Отношение эквивалентности и фактор-множества по отношению эквивалентности.
4. Отображения множеств (виды отображений и свойства отображений). Доказательство равносильности определений инъекции. Свойства инъекции, сюръекции и биекции.
5. Обратимые отображения. Свойства обратимости отображений на множествах.
6. Алгебраические структуры. Полугруппы и группы. Виды и примеры групп (нетривиальные, подгруппы, коммутативные группы; группа биекций из X в X). Все подгруппы в Z .
7. Алгебраические структуры. Кольца и поля. Виды колец (коммутативные, с единицей, области целостности).
8. Поле комплексных чисел, его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.
9. Формула Муавра и формула извлечения корней n -ой степени из комплексного числа. Вычисление суммы биномиальных коэффициентов.

10. Корни n -ой степени из 1. Группа корней n -й степени из 1. Первообразные корни n -ой степени из 1. Круговые многочлены порядка n .
11. Кольцо многочленов над областью целостности. Конструкция кольца многочленов от одной и нескольких переменных над областью целостности. Свойства области целостности.
12. Функция Эйлера ее свойства и методы вычисления.
13. Делимость в кольце многочленов. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель двух многочленов и его нахождение. Алгоритм Евклида и представление наибольшего общего делителя в виде линейной комбинации.
14. Неприводимость многочленов над полем рациональных чисел. Критерий неприводимости Эйзенштейна.
15. Производная многочлена и ее свойства.
16. Кратность корней. Критерий кратности корня.
17. Теорема и схема Горнера. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.
18. Разложение многочлена в кольце многочленов над областью целостности.
19. Основная теорема алгебры и ее следствия.
20. Задача интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполяционная формула Ньютона.
21. Последовательность многочленов Штурма. Ее конструкция и теорема о числе корней многочлена на интервале $[a, b]$.
22. Векторные пространства и его свойства. Модели векторных пространств.
23. Линейная комбинация и оболочка векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Свойства линейной зависимости.
24. Система образующих и базис линейного пространства. Размерность векторного пространства.
25. Векторные подпространства. Пересечение и сумма векторных подпространств и их свойства.

2 семестр

1. Векторные пространства и его свойства. Модели векторных пространств.
2. Линейная комбинация и оболочка векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Свойства линейной зависимости.
3. Система образующих и базис линейного пространства. Размерность векторного пространства.
4. Векторные подпространства. Пересечение и сумма векторных подпространств и их свойства.
5. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность и фундаментальная система решений
6. Системы уравнений от n уравнений с m неизвестными. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы уравнений
7. Понятие многообразия и его свойства. Множество решений системы линейных уравнений, как линейное многообразие.
8. Подпространства векторных пространств и их свойства. Сумма и пересечение как подпространства векторного пространства. Свойства их размерности.
9. Прямая сумма векторных подпространств и ее свойства.
10. О прямой сумме и базисах подпространств.
11. Отображение на алгебраических структурах. Понятие линейных отображений и линейных операторов, действующих на векторном пространстве. Их свойства. Изоморфизмы векторных пространств и его свойства
12. Ядро и образ линейного оператора и их свойства. Теорема о размерностях.
13. Подобные матрицы. Свойства определителя произведения матриц и свойства определителей подобных матриц. Матрица линейного оператора в данном базисе и определитель линейного оператора в данном базисе.

Связь пространства квадратных матриц и матриц линейных операторов

14. Изменение координат векторов и матриц линейного оператора при изменении базиса и теорема об изменении определителя оператора при изменении базиса.
15. Собственные числа и собственные вектора, соответствующие данному собственному значению. Нахождение собственных значений линейного оператора.
16. Собственные подпространства и свойства собственных векторов. Линейная независимость собственных векторов и базис из собственных векторов для оператора с простым спектром.
17. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
18. Скалярное умножение на векторных пространствах и его свойства. Евклидовы и унитарные векторные пространства. Матрица Грама. Норма вектора и ее свойства. Теорема Коши-Буняковского.
19. Ортогонализация базиса. Ортонормированный базис и его свойства. Ортогональные и унитарные матрицы. Подпространства со скалярным произведением.
20. Операторы в евклидовом и унитарном пространствах. Диагонализируемость матрицы линейного оператора.
21. Билинейные формы. Матрица билинейной формы и ее свойства. Множество билинейных форм.
22. Квадратичные формы и их матрицы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Теорема Якоби. Закон инерции.

3 семестр

1. Определение и примеры групп: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, S_n , GL_n , SL_n , O_n .
2. Конечные и бесконечные группы. Прямое произведение групп.
3. Циклические группы. Теорема о группе простого порядка.

4. Группа подстановок и ее свойства.
5. Фактор группы и их свойства
6. Теорема Лагранжа и ее следствия.
7. Гомоморфизмы групп и их свойства.
8. Нормальные подгруппы и факторгруппы.
9. Теоремы о гомоморфизмах. Автоморфизмы и эндоморфизмы.
10. Примеры групп преобразований: классические линейные группы, группа движений, группы симметрий правильных многоугольников и многогранников в трехмерном пространстве.
11. Действие группы на множестве. Орбиты, стационарные подгруппы. Формула классов. Теорема Кэли.
12. Задание группы образующими и соотношениями.
13. Аффинная и прямоугольная системы координат. Линейная зависимость векторов (определения и свойства). Базис множества векторов.
14. Скалярное произведение векторов, его применение.
15. Векторное произведение векторов, его применение.
16. Смешанное произведение векторов, его применение.
17. Переход от одной системы координат к другой. Формулы преобразования координат.
18. Различные уравнения прямой линии на плоскости. Расстояние от точки до прямой линии.
19. Пучок прямых линий. Взаимное расположение прямых линий на плоскости. Угол между прямыми линиями, условия параллельности и перпендикулярности.
20. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Пучок и связка плоскостей.
21. Различные уравнения прямой линии в пространстве.
22. Взаимное расположение прямых линий в пространстве. Условие принадлежности одной плоскости. Уравнение содержащей плоскости.
23. Эллипс. Вывод канонического уравнения и исследование формы эллипса.

24. Гипербола. Каноническое уравнение и исследование формы гиперболы.
25. Парабола. Каноническое уравнение и исследование.
26. Эксцентриситет эллипса и гиперболы. Директриса эллипса и гиперболы.
27. Касательные к кривым второго порядка.
28. Приведение уравнения кривых второго порядка к каноническому виду.
29. Цилиндрические поверхности.
30. Конические поверхности.
31. Эллипсоид. Каноническое уравнение и исследование.
32. Гиперболоиды. Каноническое уравнение и исследование.
33. Параболоиды. Каноническое уравнение и исследование.
34. Касательные к поверхностям второго порядка.

IV. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов заключается в выполнении ими домашних самостоятельных работ, изучению ими ряда тем, используя соответствующую литературу. Самостоятельная работы организована, следующим образом:

1. В начале семестра каждому студенту выдается набор самостоятельных работ (список задач по выбранной тематике), которые они должны решить дома. Преподаватель в специально отведенное время проводит консультации, составляет график сдачи этих работ. Своевременная сдача лабораторных работ является необходимым условием для сдачи зачета по курсу.
2. Преподаватель определяет список отдельных тем курса, которые студенты самостоятельно должны изучить более глубоко. Они могут использовать как основную так и дополнительную литературу. Контроль за этим видом самостоятельной работы осуществляется на коллоквиуме,

вопросы к которому раздаются студентам в начале семестра. С возникающими в процессе изучения этих тем вопросами студенты могут обратиться к преподавателю во время отведенное для консультаций.

Пакет заданий для организации самостоятельной работы студентов

Примерные варианты самостоятельных работ

1 СЕМЕСТР

Самостоятельная работа №1.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ

1. Пусть A - конечное множество состоящее из m элементов, а B - конечное множество, состоящее из n элементов.
 - a. а) Когда (при каких условиях на A и B) существует отображение из A на B ?
 - b. б) Определить число различных отображений из A в B .
2. Установить биекцию для множеств $[0,1]$ и $(0,1)$
3. Найдите множества X из равенства $X \cap A = A \cup X$, где A - данное множество.
4. Множество A состоит из натуральных чисел, причем:
 - a. 1 принадлежит A ;
 - b. если n принадлежит A , то $2n + 1$ также принадлежит A ;
 - c. если $3n + 1$ принадлежит A , то n принадлежит A .
 - d. Верно ли, что 8 принадлежит A ?
5. После контрольного опроса 1000 человек телезрителей, выяснилось, что 100 имеют нарушенное пространственное воображение, 75 - имеют нарушение слуховой системы, 80 имеют дефекты в системе

ориентации, 20 имеют нарушения в системе пространственного воображения и системе ориентации, 30 - в системе пространственного воображения и слуховой системе, 15 - плохо слышат и нарушена система ориентации, а 5 человек обладают нарушением во всех трех рассматриваемых характеристиках.

Сколько человек имеют не менее одного дефекта?

Самостоятельная работа №2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

1. Написать тригонометрическую форму чисел $-2, 2+3i, -\cos\alpha + i\sin(-\alpha)$.
2. Решить уравнение $(x+2i)^n - (x-2i)^n = 0$.
3. Вычислить $((1-i)/(\sqrt{3}+i))^{1/6}, ((1-i)/(1+i\sqrt{3}))^{1/6}$.
4. Вычислить $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 2nx$.
5. Выписать первообразные корни из 1 степени 16, 21 и написать круговой
i. многочлен $X_{12}(x), X_{20}(x)$.
6. Извлечь квадратные корни из чисел $5+6i, -3+5i$.
7. Найти геометрическое место точек а) $\arg C z (i + 1) = \pi/2$; б) $|z-2i|=1$.
8. Доказать, что $(z/w)=z/w$, для любых двух комплексных чисел z и w .

Самостоятельная работа № 3. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ.

1. Найти Н.О. Д. многочленов $f(x)=x^4+6x^3+3x^2-6x-9$ и $g(x)=x^3+2x^2-4x-4$.
2. а) Разложить многочлен $f(x)=x^5+x^4+6x^3-7x^2-5x+7$ по степеням $x-1$.
б) Найти значения многочлена $f(x)=x^5-x^4-4x^3-6x^2+7x+7$ и всех его производных в точке $x=1$.
3. Разложить на неприводимые над полем R
 $p(x)=x^6-x^3+1$.

4. Исследовать многочлен на наличие у него рациональных корней

$$f(x) = -11x^5 + 16x^4 + 10x^2 + 5x - 15.$$

5. Отделить корни многочленов методом Штурма

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 5.$$

6. Устранить иррациональность в знаменателе

$$1/(x^2 + x + 2), \text{ где } x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0.$$

7. Дан многочлен $x^{kn} + a_{n-1} \cdot x^{k(n-1)} + a_{n-2} \cdot x^{k(n-2)} \dots + a_1 \cdot x^k + a_0$, который делится на $x-1$.

Докажите, что он делится на $x^k - 1$.

Самостоятельная работа №4.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

1. Найти алгебраические дополнения всех элементов

матрицы 3×3
$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 11 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить определитель разложением по первой

строке
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & -1 & 2 \\ 8 & 8 & 11 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Доказать, что
$$\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \cos 2a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \cos 2b \\ \sin^2 c & \cos^2 c & \cos 2c \end{vmatrix} = 0$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

5. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

7. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

2 СЕМЕСТР

Самостоятельная работа №1

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАЗИС. КООРДИНАТЫ.

1. Проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис.

Найти координаты вектора $\vec{c}$ в

этом базисе $\vec{a}=\{2,3\}$ $\vec{b}=\{-1,2\}$ $\vec{c}=\{5,6\}$

2. Проверить, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис пространства. Найти

координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$\vec{a}=\{1,0,0\}$ $\vec{b}=\{1,1,0\}$ $\vec{c}=\{1,1,1\}$ $\vec{d}=\{3,3,3\}$

3. Лежит ли вектор $\{5,3,1\}$ в плоскости векторов $\{2,0,1\}$, $\{4,-1,3\}$?

4. Найти размерность линейной оболочки, образованной

векторами $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

1. Найти размерность объединения и пересечения двух линейных оболочек H_1 H_2

$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, H_2 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

2. Является ли множество бесконечных последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ с элементами из R , удовлетворяющих данному условию $x_n = x_{n-1} + x_{n+1}$, для всех $n=2,3,\dots$ векторным пространством над полем R ?

7. Найдите какой-нибудь базис и определите размерность арифметического n -мерного векторного подпространства R^n , удовлетворяющих данному условию $x_1=0$.

Самостоятельная работа №2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Пусть $A: R \rightarrow R$ - линейное отображение.

а) показать, что найдется число t , зависящее от A такое, что $A(x)=tx$
(для любого x из R).

б) Пусть $A(3) = -4$. Найти $A(-7)$.

Пусть $B: R^2 \rightarrow R$ - линейное отображение.

в) Показать, что существуют числа a и b , зависящие только от B , такие что

для любого вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ из R^2 $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax+by$

г) Пусть $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$. Вычислить $B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу поворота R^3 на 90° вокруг прямой $x=y-z$.

3. Найти собственные числа и вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

1. Дана тройка чисел (x, y, z) . Она заменяется на $((y + z)/2, (x+z)/2, (y+z)/2)$. Что произойдет с исходной тройкой после бесконечного числа таких операций?

Самостоятельная работа №3.

ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

1. Найти матрицу Грама базиса $\{e_1(2, 1, 1, -1), e_2(1, 1, 3, 0), e_3(1, 1, 0, 0), e_4(1, 0, 0, 0)\}$.
2. Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $x(5, 2, -2, 2)$ на подпространство W , заданное своим базисом: $\{w_1(2, 1, 1, -1), w_2(1, 1, 3, 0)\}$.
3. Нормировать вектор $x(3, 1, 2, 1)$, заданный в евклидовом пространстве R_4 со стандартным базисом.
4. Дополнить до ортонормированного базиса пространства R_4 систему векторов $\{e_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2), e_2(1/6, 1/6, 1/2, -5/6)\}$.
5. Существует ли унитарная матрица, для каждого столбца которой имеется комплексно-сопряженный столбец?

Самостоятельная работа №4.

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ.

3. Найти матрицу квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$.
4. Привести квадратичную форму к диагональному виду $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 x_3 + 4x_2 x_3 - x_3^2$; а) методом Лагранжа; б) методом Якоби.
3. Эквивалентны ли квадратичные формы над полем R :
 $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1 x_2 - 4x_1 x_3 - 10x_2 x_3$,
 $G(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 8x_2 x_3$?

4. При каких α квадратичная форма отрицательно определена:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 + 4x_1 x_2 + 8x_2 x_3 ?$$

5. Найти симметрическую билинейную функцию, ассоциированную с квадратичной функцией

$$G(x) = F(x, x). F(x, y) = 2x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 4x_1 y_3 + x_2 y_1 - 5x_2 y_3 + x_3 y_3.$$

3 СЕМЕСТР

Самостоятельная работа №1. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ.

1. Найти порядки элементов группы Z_{12}^* .
2. Найти все неизоморфные группы порядка 8.
3. Доказать, что в группе вращений куба подгруппа вращений одной грани не является нормальной.
4. В группе симметрий правильного 8-угольника найти образующие и соотношения и написать таблицу умножения.
5. Доказать, что для любых a, b, c из G :
 - a) ab и ba имеют одинаковый порядок;
 - b) abc, bca, cab имеют одинаковый порядок.

Самостоятельная работа №2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

1. Найти объем тетраэдра $ABCD$ и площади всех его граней, если $AB \{2, 0, 0\}$, $AC \{3, 4, 0\}$, $AD \{3, 4, 2\}$.
2. Найти точку симметричную точке $A(1, 2, 3)$ относительно плоскости $2x + 3y + 5z - 68 = 0$.
3. Составить уравнения биссектрис, медиан и перпендикуляров треугольника ABC , если $A(0, 0)$, $B(6, 4)$, $C(3, 4)$.
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую L параллельно прямой M :

- L: $(x-1)/3=(y+2)/4=(z-1)/3$; M: $x/3=(y-1)/4=(z+1)/3$.
5. Определить вид кривой и построить ее график: $x^2-6xy+9y^2-2x+6y-3=0$.

IV.2. Примерные темы для самостоятельного изучения

1. Множество и подмножества
2. Алгебраические структуры
3. Поле комплексных чисел
4. Сравнения
5. Кольцо многочленов
6. Алгебра матриц
7. Определители
8. Обратная матрица
9. Системы линейных уравнений
10. Векторное пространство
11. Евклидовы векторные пространства
12. Отображение на структурах
13. Матрица линейного оператора
14. Собственные числа и собственные вектора линейного оператора
15. Билинейные и квадратичные формы
16. Группы
17. Циклические группы
18. Подгруппы и смежные классы
19. Гомоморфизмы групп
20. Действие группы на множестве
21. Абелевы группы
22. Свободные группы