**Министерство образования
и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Математический факультет
кафедра алгебры и топологии

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

по дисциплине

Алгебра

для направления

511200 Математика. Прикладная математика

**Ижевск
2008**

УДК
ББК
Б

Б **Банникова Т.М., Баранова Н.А., Мерзляков А.С.**
Алгебра: учебно-методический комплекс, Ижевск,, 2008, 50 с.

Учебно-методический комплекс по курсу «Алгебра» разработан на основе опыта преподавания данной дисциплины и современных методик обучения, содержит тематический план курса, краткий обзор лекционных и практических занятий, тщательно подобранный материал для организации, предусмотренных в рабочей программе, форм контроля и самостоятельной работы студентов, а также методических указаний для преподавателей и студентов. Учебно-методический комплекс предназначен для оказания помощи студентам 1-2 курсов математического факультета.

УДК
ББК

© Банникова Т.М., Баранова Н.А., Мерзляков А.С., 2008
© ГОУ ВПО «Удмуртский государственный университет», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

I. ТРЕБОВАНИЯ ГОС ВПО ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА 5

I.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАПРАВЛЕНИЯ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА 5

I.2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА 7

I.3. ТРЕБОВАНИЯ К ОБЯЗАТЕЛЬНОМУ МИНИМУМУ СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРАПО НАПРАВЛЕНИЮ 510200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА 9

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА 12

II. 1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ 12

II. 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ КУРСА ПО ТЕМАМ И ВИДАМ ЗАНЯТИЙ 14

II.3. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА 17

II.4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КУРСА 23

III. ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ КОНТРОЛЯ 24

III.1. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ 24

III.2. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА 29

III.3. ПРИМЕРНЫЕ ЗАЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ 32

III.4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ 34

IV. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ 39

IV.1. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ 40

IV.2. ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ 1 КУРС (2 СЕМЕСТР) 47

IV.3. ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ 49

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс курса «Алгебра» разработан в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Курс входит в цикл Общих профессиональных дисциплин, адресован студентам 1-2 курса математического факультета, обучающимся по направлению «Математика. Прикладная математика». Он изучается на основе и в тесной связи с учебными дисциплинами, раскрывающими основные понятия математики, такими как «Математический анализ», «Дискретная математика и математическая логика», «Аналитическая геометрия». Курс строится как непосредственное продолжение основных понятий теории множеств, введение на них линейных операций и изучение свойств полученных алгебраических структур.

Главной целью курса является ознакомление студентов с основными алгебраическими структурами, такими как группа, кольцо, векторное пространство и т.п., изучение их свойств, а также показ их взаимосвязи с основными понятиями и задачами других математических дисциплин.

Для успешного освоения данного курса студентам рекомендуется повторить основные разделы школьного курса алгебры и геометрии, такие как «Тригонометрия», «Векторы», «Функции».

I. ТРЕБОВАНИЯ ГОС ВПО ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ 511200 МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

I.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАПРАВЛЕНИЯ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Направление утверждено приказом Министерства образования Российской Федерации от 02.03.2000 № 686.
2. Степень выпускника – **Бакалавр математики.**

Нормативный срок освоения основной образовательной программы подготовки бакалавра математики по направлению 511200 – Математика при очной форме обучения – 4 года.

3. Квалификационная характеристика выпускника.

Бакалавр математики подготовлен преимущественно к выполнению исследовательской деятельности, в областях, использующих математические методы и компьютерные технологии; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления; программно-управленческому обеспечению научно-исследовательской, проектно конструкторской и эксплуатационно-управленческой деятельности.

Объектами профессиональной деятельности бакалавра математики являются научно-исследовательские центры, органы управления, образовательные учреждения, промышленное производство. Исходя из своих квалификационных возможностей выпускник бакалавриата по направлению 510100 – Математика может занимать должности: математик, инженер-программист (программист) и другие в соответствии с требованиями Квалификационного справочника должностей руководителей, специалистов и других служащих, утвержденного постановлением Минтруда России от 21.08.98 №37.

Возможности продолжения образования бакалавра математики, освоившего основную образовательную программу высшего профессионального образования по направлению 511200 – Математика. Прикладная математика.

Бакалавр математики подготовлен:

– к обучению в магистратуре преимущественно по направлениям 510100 – Математика; 510200 – Прикладная математика и информатика; 510300 – Механика; 511200 – Математика. Прикладная математика; 511300 – Механика. Прикладная математика; 511600 – Прикладные математика и физика; 511800 – Математика. Компьютерные науки; 540100 – Естественнонаучное образование; 540200 – Физико-математическое образование; 553000 – Системный анализ и управление;

– к освоению образовательных профессиональных программ в сокращенные до года сроки преимущественно по специальностям 010100 – Математика; 010200 – Прикладная математика и информатика; 010500 – Механика; 030100 – Информатика; 032100 – Математика; 061800 – Математические методы и исследование операций в экономике; 070100 – Криптография; 070200 – Компьютерная безопасность, 351500 – Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, а также по направлению подготовки дипломированных специалистов 657100 – Прикладная математика.

I.2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Требования к профессиональной подготовленности бакалавра математики

Выпускник должен уметь решать задачи, соответствующие его степени, указанной в п.1.2. настоящего Государственного стандарта. Бакалавр математики отвечает следующим требованиям:

– знаком с основными учениями в области гуманитарных и социально-экономических наук, способен научно анализировать социально-значимые проблемы и процессы, умеет использовать на практике методы этих наук в различных видах профессиональной и социальной деятельности;

– знает этические и правовые нормы, регулирующие отношение человека к человеку, обществу, окружающей среде, умеет учитывать их при разработке экологических и социальных проектов;

– имеет целостное представление о процессах и явлениях, происходящих в неживой и живой природе, понимает возможности современных научных методов познания природы и владеет ими на уровне, необходимом для решения задач, имеющих естественнонаучное содержание и возникающих при выполнении профессиональных функций;

– способен продолжить обучение в магистратуре и по специальности, в соответствии с п.1.3., вести профессиональную деятельность в иноязычной среде (требование рассчитано на реализацию в полном объеме через 10 лет);

– имеет научное представление о здоровом образе жизни, владеет умениями и навыками физического самосовершенствования;

– владеет культурой мышления, знает его общие законы, способен в письменной и устной речи правильно (логически) оформить его результаты;
– умеет на научной основе организовать свой труд, владеет компьютерными методами сбора, хранения и обработки (редактирования) информации, применяемые в сфере его профессиональной деятельности;
– способен в условиях развития науки и изменяющейся социальной практики к переоценке накопленного опыта, анализу своих возможностей, умеет приобретать новые знания, обучаться в магистратуре, использовать другие формы обучения, включая самостоятельные и информационно образовательные технологии;
– понимает сущность и социальную значимость своей будущей профессии, основные проблемы дисциплин, определяющих конкретную область его деятельности, видит их взаимосвязь в целостной системе знаний;
– способен к проектной деятельности в профессиональной сфере на основе системного подхода, умеет строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ;
– способен поставить цель и сформулировать задачи, связанные с реализацией профессиональных функций, умеет использовать для их решения методы изученных им наук;
– готов к кооперации с коллегами и работе в коллективе, знаком с методами управления, умеет организовать работу исполнителей, находить и принимать управленческие решения в условиях различных мнений, знает основы педагогической деятельности;
– методических и психологически готов к изменению вида и характера своей профессиональной деятельности, работе над междисциплинарными проектами;
– способен к совершенствованию своей профессиональной деятельности в области математики.

I.3. ТРЕБОВАНИЯ К ОБЯЗАТЕЛЬНОМУ МИНИМУМУ СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ 510200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
ОПД	Общепрофессиональные дисциплины	3 644
ОПД.Ф.00	*Федеральный компонент*	3 344
ОПД.Ф.02	**Алгебра**	300

Понятие группы, кольца и поля; поле комплексных чисел; кольцо многочленов; деление многочленов с остатком; теорема Безу; кратность корня многочлена, ее связь со значениями производных; разложение многочлена на неприводимые множители над полями комплексных и действительных чисел; формулы Виета; наибольший общий делитель многочленов, его нахождение с помощью алгоритма Евклида; кольцо многочленов от нескольких переменных; симметрические многочлены.

Группа подстановок; четность подстановки; циклические группы; разложение группы на смежные классы по подгруппе; теорема Лагранжа.

Системы линейных уравнений; свойства линейной зависимости; ранг матрицы; определители, их свойства и применение к исследованию и решению систем линейных уравнений; кольцо матриц и группа невырожденных матриц.

Векторные пространства; базис и размерность; подпространства; сумма и пересечение подпространств; прямые суммы; билинейные и квадратичные формы; приведение квадратичной формы к нормальному виду;

закон инерции; положительно определенные квадратичные формы; критерий Сильвестра; ортонормированные базисы и ортогональные дополнения; определители Грамма и объем параллелепипеда.

Линейные операторы; собственные векторы и собственные значения; достаточные условия приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду; понятие о жордановой нормальной форме; самосопряженные и ортогональные (унитарные) операторы; приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к каноническому виду.

Аффинные системы координат; линейные многообразия, их взаимное расположение; квадрики (гиперповерхности второго порядка); их аффинная и метрическая классификация и геометрические свойства.

Примеры групп преобразований: классические линейные группы, группа движений и группа аффинных преобразований, группы симметрии правильных многоугольников и многогранников в трехмерном пространстве; классификация движений плоскости и трехмерного пространства.

Министерство образования
и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математический факультет
кафедра алгебры и топологии

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине
Алгебра

для направления
511200 Математика. Прикладная математика

Курс……1,2
Семестр……..……..1,2,3
Всего часов…….300
Аудиторных часов…….206
Самостоятельная работа……..……....94
Зачет…….……1,2
Экзамен……..……1,2,3

Ижевск
2008

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

II. 1. Организационно-методический раздел

Дисциплина "Алгебра" знакомит студентов с основными понятиями и методами одной из фундаментальных математических дисциплин, а также более подробно рассматривается один из подразделов алгебры - линейная алгебра. Курс лекций строится как непосредственное продолжение основных понятий теории множеств, введение на них линейных операций и изучение свойств полученных алгебраических структур.

Цель.

Главной целью курса лекций является ознакомление студентов с основными алгебраическими структурами, такими как группа, кольцо, векторное пространство и т.п., изучение их свойств, а также показ их взаимосвязи с основными понятиями и задачами других математических дисциплин.

Задачи.

Основная задача курса лекций вытекает из основной цели: показать взаимосвязь алгебры, с остальным курсом фундаментальной математики, с одной стороны, как одной из составляющих этого фундамента математики, с другой – как зависимую от остальных направлений математики, т.е. использующую приемы и методы других фундаментальных разделов математики.

Задачи курса практических занятий связаны с усвоением всего лекционного материала, который изучается студентами на лекциях, с их самостоятельными исследованиями по этой дисциплине. Все это проверяется в ходе выполнения студентами контрольных работ, коллоквиумов, зачетов и экзаменов, а также курсовых и лабораторных работ.

Межпредметные связи.

Алгебра непосредственно связана с дисциплиной "Математический анализ" и является базой для таких дисциплин, как "Дискретная математика", "Дифференциальные уравнения", "Уравнения математической физики", "Комплексный анализ", "Численные методы", "Теория вероятностей и математическая статистика", "Исследование операций", а также для многочисленных спецкурсов, которые студенты будут в дальнейшем изучать.

Знания, умения и навыки студентов.

В процессе обучения студенты должны усвоить методику построения алгебраических структур, внутреннюю логику, связывающую линейную алгебру и аналитическую геометрию, приобрести навыки исследования и решения задач алгебры.

Содержание курса требует от студентов хороших знаний элементарной математики, и основ математической логики.

По окончании курса студент будет иметь представление обо всех основных алгебраических структурах и их взаимосвязях, которые изучаются в курсе математики и решать задачи по всему курсу алгебры.

II. 2. Распределение часов курса по темам и видам занятий

	Наименование разделов и тем	всего	лекции	лабораторные	практические	СРС
1	Понятие группы, кольца и поля;	5	4	2	0	2
2	поле комплексных чисел;	10	4	3	1	2
3	кольцо многочленов;	7	2	3	1	2
4	деление многочленов с остатком; теорема Безу;	2	4	4	1	2
5	кратность корня многочлена, ее связь со значениями производных;	2	4	2	1	2
6	разложение многочлена на неприводимые множители над полями комплексных и действительных чисел; формулы Виета;	4	4	4	0	2
7	наибольший общий делитель многочленов, его нахождение с помощью алгоритма Евклида;	2	2	2	0	2
8	кольцо многочленов от нескольких переменных;	2	2	2	0	4
9	симметрические многочлены.	2	2	2	0	6
10	Группа подстановок; четность подстановки;	4	2	4	0	6
11	циклические группы;	6	6	4	2	6
12	разложение группы на смежные классы по подгруппе;	2	2	4	0	2
13	теорема Лагранжа.	2	1	2	0	2
14	Системы линейных уравнений;	6	2	10	2	2
15	свойства линейной зависимости;	2	2	2	0	2
16	ранг матрицы;	2	0	2	0	4

17	определители, их свойства и применение к исследованию и решению систем линейных уравнений;	10	2	6	1	6
18	кольцо матриц и группа невырожденных матриц.	2	2	2	0	2
19	Векторные пространства; базис и размерность; подпространства;	4	2	2	0	2
20	сумма и пересечение подпространств; прямые суммы;	4	2	4	0	2
21	билинейные и квадратичные формы;	4	2	2	2	4
22	приведение квадратичной формы к нормальному виду;	6	2	4	2	2
23	закон инерции; положительно определенные квадратичные формы; критерий Сильвестра;	6	4	5	2	4
24	ортонормированные базисы и ортогональные дополнения; определители Грама и объем параллелепипеда.	6	4	4	1	2
25	Линейные операторы; собственные векторы и собственные значения;	4	2	4	0	2
26	достаточные условия приводимости матрицы линейного оператора к диагональному виду;	4	3	4	0	2
27	понятие о жордановой нормальной форме;	4	4	4	0	0

28	самосопряженные и ортогональные (унитарные) операторы;	2	4	2	0	2
29	приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к каноническому виду.	4	4	4	0	2
30	Аффинные системы координат;	2	2	2	0	2
31	линейные многообразия, их взаимное расположение; квадрики (гиперповерхности второго порядка); их аффинная и метрическая классификация и геометрические свойства.	4	4	4	0	2
32	Примеры групп преобразований: классические линейные группы, группа движений и группа аффинных преобразований, группы симметрии правильных многоугольников и многогранников в трехмерном пространстве; классификация движений плоскости и трехмерного пространства.	4	4	0	0	0
	Итого	**300**	**86**	**104**	**16**	**94**

II.3. Содержание курса

Методические рекомендации к занятиям.

Выбор методов обучения и закрепления практических навыков в ходе практических занятий зависит не только от содержания, цели, формы и организации занятия. Необходимо учитывать также двухсторонний характер процесса обучения: совместная деятельность преподавателя и студентов.

Одним из лучших приемов привлечения интереса, активизации внимания и мыслительной деятельности студентов на лекции является проблемный характер изложения, при котором студентам не преподносится готовый результат (готовая формулировка теоремы и готовое ее доказательство, кем-то и когда-то полученные), а ставится задача, проблема и при активном участии студентов выбирается способ решения, проводится решение и формулируется вывод.

Содержание лекционного курса должно быть продумано лектором на весь период обучения. При составлении рабочей программы следует иметь в виду, что результат обучения измеряется не количеством сообщенной информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию.

Темы лекционных занятий

1. Множество и подмножества.

Комбинаторные свойства множеств. Теорема Шпернера и ее следствие. Отображения множеств: инъекция, сюръекция и биекция и их свойства. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности и его свойства.

2. Алгебраические структуры.
Понятие о группе, кольце, поле и их примеры: группа подстановок, кольцо классов вычетов по модулю m, поле классов вычетов по простому модулю.

3. Поле комплексных чисел.
Формы записи и свойства комплексных чисел. Формула Муавра и корней n-ой степени из 1. Корни n-ой степени из 1. Круговые многочлены.

4. Сравнения.
Сравнения по модулю и их свойства. Линейные диофантовые уравнения и сравнения по модулю и методы их решения. Алгоритм Евклида.

5. Кольцо многочленов.
Кольцо многочленов от одной и нескольких переменных. Делители многочленов, алгоритм Евклида. Корни многочленов и их кратность. Основная теорема алгебры. Каноническое разложение многочленов над полем комплексных чисел и над полем вещественных чисел. Вопрос интерполяции многочленами таблицы значений.

6. Алгебра матриц.
Понятие матрицы над полем К. Виды матриц, преобразование матриц и операции над ними. Кольцо матриц. Алгебра квадратных матриц.

7. Определители.
Понятие инверсии и теорема о свойствах четности перестановок и о числе четных и нечетных перестановок. Понятие определителя матрицы и его свойства. Методы вычисления определителей. Свойства определителя произведения матриц.

8. Обратная матрица.
Понятие алгебраического дополнения элементов матрицы. Разложение определителя по элементам строки и столбца. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства. Понятие обратной матрицы и методы ее вычисления.

9. Системы линейных уравнений.
Матрица и определитель системы уравнений. Системы уравнений от n уравнений с n неизвестными и ее разрешимость. Метод Крамера. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность и фундаментальная система решений. Системы уравнений от n уравнений с m неизвестными. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы уравнений. Понятие многообразия и его свойства. Множество решений системы линейных уравнений, как линейное многообразие.

10. Векторное пространство.
Понятие векторного пространства и его модели. Понятие линейной зависимости и независимости и их свойства. Система образующих и базис векторного пространства. Размерность векторных пространств. Подпространства векторных пространств и их свойства. Сумма и пересечение как подпространства векторного пространства. Свойства их размерности. Прямая сумма векторных подпространств и ее свойства.

11. Евклидовы векторные пространства.
Скалярное умножение на векторных пространствах и его свойства. Ортогональные дополнения подпространства и ортогонализация базиса. Евклидовы векторные пространства. Норма вектора и ее свойства. Ортонормированный базис и его свойства. Определитель Грама.

12. Отображение на структурах.
Отображение на алгебраических структурах. Понятие линейных отображений и линейных операторов, действующих на векторном пространстве. Их свойства. Ядро и образ линейного оператора и их свойства. Теорема о размерностях ядра и образа. Изоморфизмы векторных пространств и его свойства.

13. Матрица линейного оператора.
Подобные матрицы и их свойства. Матрица линейного оператора в данном базисе и определитель линейного оператора в данном базисе. Инвариантные подпространства линейного оператора. Связь пространства квадратных матриц и матриц линейных операторов. Изменение координат векторов и матриц линейного оператора при изменении базиса и теорема об изменении определителя оператора при изменении базиса.

14. Собственные числа и собственные вектора линейного оператора.
Собственные числа и собственные вектора, соответствующие данному собственному значению. Нахождение собственных значений линейного оператора. Собственные подпространства и свойства собственных векторов. Линейная независимость собственных векторов и базис из собственных векторов для оператора с простым спектром. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

15. Билинейные квадратичные формы.
Линейные операторы в евклидовом пространстве и унитарном пространстве. Сопряженный оператор. Нормальный оператор. Самосопряженный и унитарный операторы. Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции. Критерий Сильвестра.

16. Группы.
Определение и примеры групп: Z, Z/nZ, Sn, GLn, SLn, On, группы симметрий. Прямое произведение групп.

17. Циклические группы.
Теорема: Группа простого порядка циклическая. Симметрическая группа. Четность перестановки. Знакопеременная группа.

18. Подгруппы и смежные классы.
Теорема Лагранжа и ее следствия: порядок элемента группы делит порядок группы, малая теорема Ферма, теорема Эйлера.

19. Гомоморфизмы групп.
Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теоремы о гомоморфизмах.

20. Действие группы на множестве.
Орбиты, стационарные подгруппы. Формула классов. Теорема Кэли.

21. Абелевы группы.
Структура конечно порожденных абелевых групп.

22. Свободные группы.
Задание группы образующими и соотношениями.

Примерный перечень практических занятий

Практические занятия проходят в форме практикума по решению задач. Во время занятия преподаватель демонстрирует подробное решение нескольких типов задач по данной теме далее в процессе коллективного обсуждения студенты решают подобные задачи. На практических занятиях проводятся различные формы контроля знаний студентов (контрольная и самостоятельные работы, устный опрос). Темы практических занятий и основные типы задач,

решаемых на этом занятии должны быть в свободном доступе для студентов, то есть находиться на кафедре в печатной либо электронной форме.

Преподаватель может выбирать задачи из предложенного пакета контрольных заданий или из задачников, приведенных в списке литературы.

При подготовке к практическому занятию студентам рекомендуется повторить лекционный материал по соответствующей теме.

Примерные темы практических занятий

1. Множества, подмножества, комбинаторные свойства.
2. Отображения на множествах и их свойства.
3. Теория делимости на целых числах.
4. Сравнения. Решение линейных диофантовых уравнений и сравнений.
5. Комплексные числа.
6. Кольцо многочленов. Делимость на кольце многочленов и корни многочленов.
7. Линейные пространства. Линейная зависимость.
8. Матрицы и определители. Ранг матрицы.
9. Системы линейных уравнений.
10. Линейные операторы. Ядро и образ линейных операторов.
11. Евклидово пространство.
12. Декартовы координаты, движение систем координат.
13. Циклические группы.
14. Симметрическая группа.
15. Подгруппы и смежные классы. Теорема Лагранжа и ее следствия.
16. Нормальные подгруппы и факторгруппы. Теоремы о гомоморфизмах.
17. Абелевы группы и структура конечно порожденных абелевых групп.
18. Задание группы образующими и соотношениями.

II.4. Учебно-методическое обеспечение курса.

Литература

Основная.

1. ДАДАЯН А.А., ДУДАРЕНКО В.А. Алгебра и геометрия. Минск "Высшая школа". 1989г.
2. ИЛЬИН В.А., ПОЗНЯК Э.Г. Линейная алгебра: Учеб. М.: Наука, 2005, 278с.
3. КОСТРИКИН А.И. Введение в алгебру (основы алгебры) М.: Наука 2004г, 271с.
4. КУЛИКОВ Л.Я. Алгебра и теория чисел М.: Высшая школа.1994, 560с.
5. КУРОШ А.Г. Курс высшей алгебры. М.:Наука.2006, 432с.
6. ФАДДЕЕВ Д.К. Лекции по алгебре М.: Наука 2005г. 416с.
7. ИКРАМОВ Х.Д. Задачник по линейной алгебре: М.: Наука, 2006, 320 с.
8. КОСТРИКИН А.И. Сборник задач по алгебре М.: Наука 1987г.352с.
9. ЛЯПИН Е.С., АЙЗЕНШТАТ А.Я.,ЛЕСОХИН М.М. Упражнения по теории групп. М.Наука.1967г.264с.
10. ПРОСКУРЯКОВ И.В. Сборник задач по линейной алгебре: Учеб. пособие. М.: Наука, 2006, 480с.
11. ФАДДЕЕВ Д.К., СОМИНСКИЙ И.С. Задачи по высшей алгебре М.: Наука 2006г. 288с.

Дополнительная.

1. ВАН ДЕР ВАРДЕН Б.Л. Алгебра М.: Наука, 2006, 624 с.
2. ЛЕНГ С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

III. ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ КОНТРОЛЯ

Формы итогового контроля

Данный курс рассчитан на 3 семестра. В каждом из семестров предусматривается аттестация в форме контрольной работы, домашнего задания, коллоквиума, зачета и экзамена. Во 2 семестре предусмотрено выполнение курсовой работы.

III.1. Примерные варианты контрольных работ

Ориентировочное число контрольных работ - 6.

Контрольные работы проводятся на практических занятиях после изучения соответствующего блока и оцениваются по системе «зачет/незачет». Для того, чтобы контрольная работа была зачтена студенту необходимо выполнить 70% заданий.

1 СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНАЯ №1

1. Доказать, что для любого натурального n неотрицательного k: $0 \le k \le n$, справедливо равенство
$$n\,C_n^k=(k+1)C_n^{k+1}+kC_n^k.$$
2. Установить биекцию между [O ,2) и $(0,+\infty)$
3. Пусть A={a, b, c}, B={x, y, z, t}. Сколько: а) сюръекций; б) инъекций из $A \to B$ существует?
4. Привести пример полугруппы из 5 элементов. (Указать множество элементов и операцию на нем).

5. Выписать все элементы прямого произведения трех множеств A, B, C, если A={-1,1}, B={a,b ,c }, C={a}.

КОНТРОЛЬНАЯ № 2

1. Написать тригонометрическую форму чисел -7, 3-4i, $\cos(-2\alpha) + i \sin 2\alpha$.
2. Решить уравнение $(2x - i)^n - (2x + i)^n = 0$.
3. Вычислить $((1-2i)/(\sqrt{7} + i))^{1/5}$, $((1-2i\}/(1+ i\sqrt{7}))^{1/5}$.
4. Вычислить sinx+sin2x+sin3x+. . . +sin nx.
5. Выписать первообразные корни из 1 степени 18, 26 и написать круговой многочлен X_6 (x), X_{10} (x).
6. Извлечь квадратные корни из чисел 1+i, -2+3i.
7. Найти геометрическое место точек
   a) arq (z (2i+l)) = $\pi/3$; 6) |z— 3i|=2.

КОНТРОЛЬНАЯ № 3

1. Разложить многочлен $x^5+7x^3+x^2+3x-6$ по степеням x+1.
2. Найти значения многочлена $x^5-8x^4+7x^3-7x^2-4x-3$ и всех его производных в точке x=2.
3. Разложить на неприводимые над полем R
   $$p(x)=x^8 -2x^4+2.$$
4. Исследовать многочлен на наличие у него рациональных корней $-14x^5-13x^4+11x^3+4x^2-11x-9$
5. Отделить корни многочленов методом Штурма x^3+x^2+x-3.
6. Устранить иррациональность в знаменателе $1/(1+\sqrt{4} + \sqrt{3})$
7. Какое наибольшее количество различных вещественных корней может иметь уравнение вида $x^n+ax^2+bx+c =0$?

2 СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНАЯ № 1

1. Проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{c}$ в этом базисе $\vec{a}=\{2,3\}$ $\vec{b}=\{-1,2\}$ $\vec{c}=\{5,6\}$
2. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.
3. $\vec{a}=\{1,0,0\}$ $\vec{b}=\{1,1,0\}$ $\vec{c}=\{1,1,1\}$ $\vec{d}=\{3,3,3\}$

4. Найти размерность линейной оболочки, образованной векторами.

$$<\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}>$$

5. Не развертывая определителей, доказать следующее тождество.

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix} = (a + b + c)(b-a)(c-b)$$

6. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix}n & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\ n-2 & 0 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & x & -1\\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & x\end{vmatrix}$$

7. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

8. Рядом Фибоначчи называется числовой ряд, который начинается числами 1, 2 и в котором каждое число равно сумме двух предыдущих, т.е. ряд 1, 2, 3, 5, 8 …. Доказать, что n–й член ряда Фибоначчи равен определителю n -ого порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & .. & .. & .. & .. & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

КОНТРОЛЬНАЯ № 2

1. Пусть R_n [x]- пространство многочленов степени ≤n. Определим отображение A: R_n [x] → R_n [x] по правилу A(f(x))= f(x+1).

А) доказать, то A линейное отображение.

Б) найти его матрицу относительно базиса $\{1, x, x^2, \ldots x^n\}$.

2. Найти матрицу проектирования R^3 на плоскость x=y=2z.
3. Найти собственные числа и вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Найти жорданову форму матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Имеются три центра грузовых перевозок. Каждый месяц половина грузовиков Бостона и Лос-Анджелеса едут в Чикаго, другая половина остается на месте. Чикагские грузовики распределяются поровну между Бостоном и Лос-Анджелесом. Найти матрицу перевозок и найти предельное соотношение грузовиков.

3 СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНАЯ № 1

1. Записать все подстановки группы S_4 в циклической форме записи в виде произведения непересекающихся циклов.
2. Составить таблицу умножения для группы G. G – группа симметрий квадрата (I,II).
3. Пусть G – группа, $x,y \in G$ $xy=yx$, $|x|=m$, $|y|=n$, $t=$ н.о.к.(m,n). Покажите, что $\exists$ целые k,e, такие, что $|x^k y^e|=t$.
4. Пусть H и K – нормальные делители группы G и $K \subset H$. Докажите, что $G/H \approx (G/K)(H/K)$. (Указ.: устройте H_{om} f: $G/K \to G/H$ с K_{er} $f=H/K$).
5. Пусть H – собственная подгруппа группы G. $|G|=n<\infty$. Покажите, что группа G содержит по меньшей мере 1 элемент, который по не содержится ни в одной подгруппе сопряженной с H.

Результаты выполнения контрольных работ учитываются при выставлении промежуточной аттестации.

К зачету по курсу студент должен выполнить все проводимые контрольные работы.

Переписывание контрольных работ проходит в часы, отведенные для консультаций или дополнительное время, назначенное преподователем.

III.2. Примерные вопросы для коллоквиума

В середине каждого семестра проводится коллоквиум. В начале семестра преподаватель выдает вопросы для подготовки, включающие в себя отдельные темы лекционных и практических занятий и темы, изучаемые студентами самостоятельно. Коллоквиум проводится в устной форме. Студенту предлагается два вопроса, дается время на подготовку, после которой преподаватель заслушивает ответ студента.

1 семестр

1. Множества и подмножества, объединение и пересечение подмножеств и их свойства. Аксиоматика множества натуральных чисел. Принцип математической индукции.
2. Комбинаторные свойства подмножеств конечного множества. Перестановки и их число. Бином ньютона и теорема о числе подмножеств конечного множества.
3. Отношения на множествах. Отношение эквивалентности и фактор-множества по отношению эквивалентности.

4. Отображения множеств (виды отображений и свойства отображений). Доказательство равносильности определений инъекции. Свойства инъекции, сюръекции и биекции.
5. Обратимые отображения. Свойства обратимости отображений на множествах.
6. Алгебраические структуры. Полугруппы и группы. Виды и примеры групп (нетривиальные, подгруппы, коммутативные группы; группа биекций из X в X) . Все подгруппы в Z.
7. Алгебраические структуры. Кольца и поля. Виды колец (коммутативные, с единицей, области целостности). Z, и произвольное поле – примеры области целостности.
8. Поле комплексных чисел, его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Лемма 10.1 и 10.2.
9. Формула Муавра и формула извлечения корней N-ой степени из комплексного числа. Вычисление суммы биноминальных коэффициентов: $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots$ и $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots$
10. Корни N-ой степени из 1. Группа корней N-й степени из 1. Первообразные корни N-ой степени из 1. Круговые многочлены порядка N.

<u>2 семестр</u>

1. Понятие матрицы над полем К . Виды матриц, преобразование матриц и операции над ними. Кольцо матриц. Алгебра матриц.
2. Понятие инверсии и теорема о свойствах четности перестановок и о числе четных и нечетных перестановок.
3. Понятие определителя матрицы и его свойства.

4. Методы вычисления определителей (простейших матриц, n=2,n=3, приведение матрицы к треугольному виду, М.М.И., рекурсия).
5. Понятие алгебраического дополнения элементов матрицы. Разложение определителя по элементам строки и столбца.
6. Понятие обратной матрицы и методы ее вычисления и построения. Критерии существования обратной матрицы и число обратных матриц.
7. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства.
8. Системы уравнений от n уравнений с n неизвестными и ее разрешимость. Матрица и определитель системы уравнений. Метод Крамера.
9. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородной системы линейных уравнений? его размерность и фундаментальная система решений.
10. Системы уравнений от n уравнений с m неизвестными. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы уравнений.
11. Понятие многообразия и его свойства. Множество решений системы линейных уравнений, как линейное многообразие.

<u>3 семестр</u>

1. Бинарное отношение на множестве.
2. Отображение множеств.
3. Бинарная операция.
4. Фактор множества.
5. Ассоциативность бинарной операции. Закон обобщенной ассоциативности.
6. Действие со степенями.
7. Обратимые элементы.
8. Определение и примеры групп.
9. Подгруппы. Определение свойства подгруппы.

10. Гомоморфизм групп.
11. Ядро и образ гомоморфизма.
12. Нормальный делитель группы.
13. Фактор группы.
14. Действия с подмножествами групп.
15. 1-я теорема об изоморфизме групп.
16. 2-я и 3-я теорема об изоморфизме.
17. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.
18. Группы порожденные множеством.
19. Циклические группы.
20. Свободные группы.
21. Соотношения в группе. Задание группы с помощью соотношений и образующих.

III.3. Примерные зачетные задания

Зачет выставляется по результатам сдачи всех лабораторных и контрольной работ. А так же успешного выполнения зачетной контрольной работы, примерные варианты которой приведены ниже.

1 семестр

1. Если комплексное число $z = x + iy$ расположено в четвертой четверти, то как можно определить его аргумент?
2. Постройте круговой многочлен $X_{20}(x)$.
3. Дайте определение последовательности Штурма для многочлена $f(x)$ на интервале $[a,b]$.
4. Образует ли множество неотрицательных степеней какого-нибудь рационального положительного числа группу по умножению? Ответ пояснить.

5. Верно ли, что если два многочлена совпадают в n точках, где n – натуральное число больше 3, то они равны? Ответ поясните.
6. Пусть A – конечное множество порядка n, $f:A\to A$, сюръекция. Следует ли отсюда, что f – биекция. Ответ поясните.

2 семестр

1. С каким знаком войдет в определитель произведение a_{34} a_{21} a_{42} a_{13}?
2. Верно ли равенство det (kA) = k det A, где A - матрица порядка n?
3. Чему равна сумма произведений элементов любого столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов этого столбца?
4. Приведите пример линейного многообразия.
5. Рассмотрим два различных многообразия по данному направлению W_k. Что можно сказать об их пересечении?
6. Пусть $V_R=R$, $A:R\to R$. $A(x)= x+2$. Найти $A^{-1}(x)$.
7. Пусть rangA=3, A - матрица линейного оператора в базисе $\{e_i\}$. Чему равна dimImA?
8. Пусть U_k и W_k - векторные пространства V_k и $V_k= U_k\oplus W_{k-1}$ - прямая сумма. Чему равна $\dim (U^{\perp} \cap W^{\perp})$?

III.4. Вопросы к экзамену

Экзамен проводится в форме устной беседы с преподавателем. Студент выбирает билет, содержащий два вопроса и одну задачу.

1 семестр

1. Множества и подмножества, объединение и пересечение подмножеств и их свойства. Аксиоматика множества натуральных чисел. Принцип математической индукции.
2. Комбинаторные свойства подмножеств конечного множества. Перестановки и их число. Бином Ньютона и теорема о числе подмножеств конечного множества.
3. Отношения на множествах. Отношение эквивалентности и фактор-множества по отношению эквивалентности.
4. Отображения множеств (виды отображений и свойства отображений). Доказательство равносильности определений инъекции. Свойства инъекции, сюръекции и биекции.
5. Обратимые отображения. Свойства обратимости отображений на множествах.
6. Алгебраические структуры. Полугруппы и группы. Виды и примеры групп (нетривиальные, подгруппы, коммутативные группы; группа биекций из X в X). Все подгруппы в Z.
7. Алгебраические структуры. Кольца и поля. Виды колец (коммутативные, с единицей, области целостности).
8. Поле комплексных чисел, его конструкция. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.
9. Формула Муавра и формула извлечения корней n-ой степени из комплексного числа. Вычисление суммы биноминальных коэффициентов.

10. Корни n-ой степени из 1. Группа корней n-й степени из 1. Первообразные корни n-ой степени из 1. Круговые многочлены порядка n.
11. Кольцо многочленов над областью целостности. Конструкция кольца многочленов от одной и нескольких переменных над областью целостности. Свойства области целостности.
12. Функция Эйлера ее свойства и методы вычисления.
13. Делимость в кольце многочленов. Ассоциированные элементы. Наибольший общий делитель двух многочленов и его нахождение. Алгоритм Евклида и представление наибольшего общего делителя в виде линейной комбинации.
14. Неприводимость многочленов над полем рациональных чисел. Критерий неприводимости Эйзенштейна.
15. Производная многочлена и ее свойства.
16. Кратность корней. Критерий кратности корня.
17. Теорема и схема Горнера. Теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами.
18. Разложение многочлена в кольце многочленов над областью целостности.
19. Основная теорема алгебры и ее следствия.
20. Задача интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполяционная формула Ньютона.
21. Последовательность многочленов Штурма. Ее конструкция и теорема о числе корней многочлена на интервале [a,b].
22. Векторные пространства и его свойства. Модели векторных пространств.
23. Линейная комбинация и оболочка векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Свойства линейной зависимости.
24. Система образующих и базис линейного пространства. Размерность векторного пространства.
25. Векторные подпространства. Пересечение и сумма векторных подпространств и их свойства.

2 семестр

1. Понятие матрицы над полем К. Виды матриц, преобразование матриц и операции над ними. Кольцо матриц. Алгебра матриц.
2. Понятие инверсии и теорема о свойствах четности перестановок и о числе четных и нечетных перестановок.
3. Понятие определителя матрицы и его свойства.
4. Методы вычисления определителей (простейших матриц, n=2,n=3, приведение матрицы к треугольному виду, М.М.И., рекурсия).
5. Понятие алгебраического дополнения элементов матрицы. Разложение определителя по элементам строки и столбца
6. Понятие обратной матрицы и методы ее вычисления и построения. Критерии существования обратной матрицы и число обратных матриц
7. Ранг матрицы, его свойства и методы вычисления. Базисный минор и его свойства
8. Системы уравнений от n уравнений с n неизвестными и ее разрешимость. Матрица и определитель системы уравнений. Метод Крамера.
9. Однородные системы линейных уравнений. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, его размерность и фундаментальная система решений
10. Системы уравнений от n уравнений с m неизвестными. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли о разрешимости системы уравнений
11. Понятие многообразия и его свойства. Множество решений системы линейных уравнений, как линейное многообразие.
12. Подпространства векторных пространств и их свойства. Сумма и пересечение как подпространства векторного пространства. Свойства их размерности.
13. Прямая сумма векторных подпространств и ее свойства.
14. О прямой сумме и базисах подпространств.

15. Скалярное умножение на векторных пространствах и его свойства. Ортогонализация базиса.
16. Евклидовы векторные пространства. Норма вектора и ее свойства. Ортонормированный базис и его свойства.
17. Отображение на алгебраических структурах. Понятие линейных отображений и линейных операторов, действующих на векторном пространстве. Их свойства. Изоморфизмы векторных пространств и его свойства
18. Ядро и образ линейного оператора и их свойства. Теорема о размерностях.
19. Подобные матрицы. Свойства определителя произведения матриц и свойства определителей подобных матриц. Матрица линейного оператора в данном базисе и определитель линейного оператора в данном базисе. Связь пространства квадратных матриц и матриц линейных операторов
20. Изменение координат векторов и матриц линейного оператора при изменении базиса и теорема об изменении определителя оператора при изменении базиса.
21. Собственные числа и собственные вектора, соответствующие данному собственному значению. Нахождение собственных значений линейного оператора.
22. Собственные подпространства и свойства собственных векторов. Линейная независимость собственных векторов и базис из собственных векторов для оператора с простым спектром.
23. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

3 семестр

1. Бинарное отношение на множестве.
2. Отображение множеств.
3. Бинарная операция.
4. Фактор множества.
5. Ассоциативность бинарной операции. Закон обобщенной ассоциативности.
6. Действие со степенями.
7. Обратимые элементы.
8. Определение и примеры групп.
9. Подгруппы. Определение свойства подгруппы.
10. Гомоморфизм групп.
11. Ядро и образ гомоморфизма.
12. Нормальный делитель группы.
13. Фактор группы.
14. Действия с подмножествами групп.
15. 1-я теорема об изоморфизме групп.
16. 2-я и 3-я теорема об изоморфизме.
17. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.
18. Группы порожденные множеством.
19. Циклические группы.
20. Свободные группы.
21. Соотношения в группе. Задание группы с помощью соотношений и образующих.
22. Прямое произведение групп.
23. Автоморфизмы и эндоморфизмы.
24. Характеристические и вполне характеристические подгруппы.
25. Центр группы.
26. Коммутант группы.
27. Разрешимые группы.
28. Действия группы на множестве.
29. Группа подстановок.
30. Конечно-порожденные абелевы группы.
31. Конечные абелевы группы.

IV. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов заключается в выполнении ими домашних и лабораторных работ, изучению ими ряда тем, используя соответствующую литературу, выполнением курсовой работы по предмету. Самостоятельная работы организована, следующим образом:

1. В начале семестра каждому студенту выдается набор лабораторных работ (список задач по выбранной тематике), которые они должны решить дома. Преподаватель в специально отведенное время проводит консультации, составляет график сдачи этих работ. Своевременная сдача лабораторных работ является необходимым условием для сдачи зачета по курсу.

2. В течении 2-го семестра студент совместно с преподавателем выбирает тему курсовой работы, определяют необходимый список литературы для ее написание и время консультации. В конце 2-го семестра проводится защита курсовых работ.

3. Преподаватель определяет список отдельных тем курса, которые студенты самостоятельно должны изучить более глубоко. Они могут использовать как основную так и дополнительную литературу. Контроль за этим видом самостоятельной работы осуществляется на коллоквиуме, вопросы к которому раздаются студентам в начале семестра. С возникающими в процессе изучения этих тем вопросами студенты могут обратиться к преподавателю во время отведенное для консультаций.

Пакет заданий для организации самостоятельной работы студентов

IV.1. Примерные варианты лабораторных работ

I СЕМЕСТР

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.
ОТОБРАЖЕНИЯ МНОЖЕСТВ

1. Пусть A - конечное множество состоящее из m элементов, а B - конечное множество, состоящее из n элементов.
2. а) Когда (при каких условиях на A и B) существует отображение из A на B?
   б) Определить число различных отображений из A в B.
3. Установить биекцию для множеств [0,1] и (0,1)
4. Найдите множества X из равенства $X \cap A = A \cup X$, где A - данное множество.
5. Множество A состоит из натуральных чисел, причем:
   1) 1 принадлежит A;
   2) если n принадлежит A, то 2n+1 также принадлежит A;
   3) если 3n+1 принадлежит A, то n принадлежит A.
6. Верно ли, что 8 принадлежит A?
7. После контрольного опроса 1000 человек телезрителей, выяснилось, что 100 имеют нарушенное пространственное воображение, 75 - имеют нарушение слуховой системы, 80 имеют дефекты в системе ориентации, 20 имеют нарушения в системе пространственного воображения и системе ориентации, 30 - в системе пространственного воображения и слуховой системе, 15 - плохо слышат и нарушена система ориентации, а 5 человек обладают нарушением во всех трех рассматриваемых характеристиках. Сколько человек имеют не менее одного дефекта?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы 3x3 $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 11 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель разложением по первой строке

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & -1 & 2 \\ 8 & 8 & 11 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Доказать, что $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos^2 a & \cos 2a \\ \sin^2 b & \cos^2 b & \cos 2b \\ \sin^2 c & \cos^2 c & \cos 2c \end{vmatrix} = 0$

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & .. & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & .. & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & .. & n \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -2 & -3 & .. & .. & 0 \end{vmatrix}$

5. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 & 0 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

7. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

II СЕМЕСТР

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. Пусть A:R→R -линейное отображение.

а) показать, что найдется число t, зависящее от A такое, что A(x)=tx (для любого x из R).

б) Пусть A(3)= - 4. Найти A(-7).

Пусть B:R^2—>R - линейное отображение**.**

в) Показать, что существуют числа a и b, зависящие только от B, такие что для любого вектора $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ из R^2 B$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ =ax+by

г) Пусть B $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ =3, B $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ =4. Вычислить B $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу поворота R^3 на 90° вокруг прямой x=y-z.
3. Найти собственные числа и вектора матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$
5. Дана тройка чисел (x, y, z). Она заменяется на ((y+z)/2, (x+z)/2, (y+z)/2). Что произойдет с исходной тройкой после бесконечного числа таки операции?

III СЕМЕСТР

ЛАБОРАТОРНАЯ №1
ГРУППА S_4 И ЕЁ ПОДГРУППЫ

1) Записать все подстановки группы S_4 в циклической форме записи в виде произведения непересекающихся циклов.
2) Составить таблицу умножения для группы S_4.
3) В дальнейшем подгруппа $H \subset S_4$ для каждого будет своя.

а) Написать все левые и правые классы смежности группы S_4 по подгруппе H.

б) Найти нормализатор N_H для подгруппы H и составить таблицу умножения для N_H / H

в) Найти все циклические подгруппы H и определить их индексы в H и в S_4, определить порядок каждого элемента из подгруппы H.

г) Найти в подгруппе H все ее нормальные делители H и составить таблицу умножения H/H_i $\forall_i$. Какие из них являются нормальным делителем в S_4?

д) Найти разбиение подгруппы H на классы сопряженных элементов и найдите Z(H).

Подгруппа H – одна из нетривиальных подгрупп наименьшего индекса из индивидуального задания.

1. Найти все подгруппы группы S_4 индекса 2 и 12.
2. Найти все подгруппы группы S_4 индекса 8.
3. Найти все подгруппы группы S_4 индекса 6.
4. Найти все подгруппы группы S_4 индекса 4.
5. Найти все подгруппы группы S_4 индекса 3.

ЛАБОРАТОРНАЯ №2
ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Обозначим через G- группу симметрий геометрической фигуры. Группа G будет определена в индивидуальном задании.

1. Найти все элементы группы G и определить ее порядок: (G)
2. Составить таблицу умножения для группы G.
3. Найти изоморфный образ группы G в группе подстановок S_n
4. Найти изоморфный образ группы G в группе GL_n (C).
5. Найти разбиения группы G на сопряженные классы, центр группы и индекс нормализатора каждого элемента

В скобках указываются задания из раздела I и II, которые необходимо выполнить.

1. G – группа симметрий квадрата (I,II).
2. Группа симметрий правильного 5-ти угольника (I,II).
3. Группа симметрий правильного 6-ти угольника (I,II-1,2).
4. Группа симметрий правильного 8-ми угольника (I,II-1,2).
5. Группа симметрий куба (I-1,3;II-1,2).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ПОРЯДОК ЭЛЕМЕНТА И ПОРЯДОК ГРУППЫ. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ.

1. Пусть G – группа, a,b $\in$G |a|=6, |b|=10. Покажите на примере, что порядок ab не обязательно равен 30, даже если ab=ba.

2. Пусть G – группа, x,y $\in$G xy=yx, |x|=m, |y|=n, t= н.о.к.(m,n). Покажите, что $\exists$ целые k,e, такие, что $|x^k y^e|=t$.

3. Покажите, что группа четного порядка должна содержать нечетное число элементов 2-го порядка (Указ. $x^2= e \Leftrightarrow x = x^{-1}$).

4. Пусть G – группа, x,y $\in$G. Покажите, что, если ord x = ord y = ord xy =2, то xy=yx.

5. Обозначим SL (Z) = $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a,b,c,d $\in$ Z ad – bc=1}.

а) Покажите, что SL_2 (Z) – группа. Обозначим A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

б) Найти ord A ord B ord AB y ord BA.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
ГОМОМОРФИЗМЫ ГРУПП

1. Пусть f: G→G' эпиморфизм групп, H$\subset$G -подгруппа в G, H'$\subset$G' – подгруппа в G'. Обозначим – f^{-1}(H') - множество прообразов множества H'.
   (!), что если:
   а) HΔG, то f(H)ΔG';
   б) H'ΔG', то f^{-1}(H')ΔG.
2. В условиях и обозначениях задачи 1 покажите, что f^{-1}(H') – подгруппа группы G. Покажите, что, если $K_{er}f\subset H$, то $H=f^{-1}(f(H))$.

3. Используя задачи 1 и 2 покажите, что соответствие $H \to f(H)$ есть взаимно однозначное соответствие между семейством подгрупп группы G и семейством подгрупп группы G'. Более того, нормальным подгруппам группы G соответствуют нормальные подгруппы группы G' .
4. Пусть $N \Delta G$ и $H' \subset G/N$ – подгруппа фактор-группы G/N. Докажите, что существует единственная подгруппа H в группе G, такая, что $H'=H/N$. Покажите, кроме того, что $H \Delta G \Leftrightarrow H/N \Delta G/N$ (Указ.:используйте задачи 1-3).
5. Пусть H и K – нормальные делители группы G и $K \subset H$. Докажите, что $G/H \approx (G/K)(H/K)$. (Указ.: устройте H_{om} $f: G/K \to G/H$ с K_{er} $f=H/K$).

ЛАБОРАТОРНАЯ № 5
ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ НА МНОЖЕСТВЕ

1. Доказать, что стационарные подгруппы точек, лежащих на одной орбите сопряжены.
2. Пусть H – собственная подгруппа группы G. $|G|=n<\infty$. Покажите, что группа G содержит по меньшей мере 1 элемент, который по не содержится ни в одной подгруппе сопряженной с H.
3. Пусть H – подгруппа группы G конечного индекса (!), что подгруппа H содержит нормальную подгруппу $N \Delta G$, конечного индекса.
4. Пусть G – группа, в которой каждая собственная подгруппа содержится в максимальной подгруппе конечного индекса в G. Доказать, что G – циклическая, если $\forall$ две максимальные подгруппы группы G сопряжены в G.
5. Доказать, что в $\forall$ группе подмножество всех элементов, которые имеют лишь конечное число сопряженных элементов, образуют подгруппу.

IV.2. Темы курсовых работ 1 курс (2 семестр)

1. Цепные дроби.
2. Дроби Фарея.
3. Пифагоровы тройки.
4. Неравенство Адамара.
5. Алгоритм Кронекера для разложения многочленов над Z.
6. Результант 2-х многочленов.
7. Дискриминант многочленов.
8. Решение кубических уравнений по методу Кардано.
9. Уравнения 4-й степени: метод Феррари-Тарталья.
10. Вращения 3-х мерного пространства, углы Эйлера.
11. Доказательство основной теоремы алгебры.
12. Различные оценки вещественных корней многочленов.
13. Доказательство основной теоремы о симметрических многочленах.
14. Метод неопределенных коэффициентов для симметрических многочленов.
15. Линейное представление НОД многочленов: метод неопределенных коэффициентов.
16. Степенные суммы: формулы Ньютона для суммы k–х степеней.
17. Полиномиальная формула $(a+b+c)^n$;$(a_1 +a_2 \ldots+a_k)^n$.
18. Биномиальные коэффициенты, их свойства и вычисление сумм биномиальных коэффициентов.
19. Приводимость многочленов над конечными полями.
20. Неединственность разложения на простые множители.
21. Разложение на неприводимые множители многочленов от нескольких переменных.
22. Кватернионы.
23. Неравенство Коши и его применение к задачам на экстремум.
24. Метод бесконечного спуска.
25. Конечные поля.
26. Поле алгебраических чисел.
27. Поле разложения многочлена.

28. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело.
29. Графы-деревья и их свойства.
30. Эйлеровы графы.
31. Гамильтоновы графы.
32. Теорема Эйлера о роде графа и ее использование в решении задач.
33. Лемма Холла о паросочетаниях.
34. Теорема Форда-Фолкерсона о максимальном потоке.
35. Формула включений и исключений.
36. Теорема Шпернера и ее следствие о максимальности числа невкладываемых друг в друга подмножеств конечного множества.
37. Аксиома выбора и лемма Цорна.
38. Аксиоматическое построение теории определителей.
39. Различные методы вычисления определителей n-го порядка»
40. Неравенства для ранга матриц.
41. Несовместные системы линейных уравнений и метод наименьших квадратов.
42. Приведение вещественных матриц к каноническому виду.
43. Скалярные матрицы, их внешняя характеризация.
44. Некоторые оценки величины определителей.
45. Булевы тождества и диаграммы Эйлера-Венна.
46. Аксиома Евклида. Неевклидовы поля и бесконечно малые элементы.
47. Решение функциональных уравнений с использованием групп подстановок .
48. Метод производящих функций.
49. Различные виды индукции: полная индукция, возвратная индукция.
50. Конечные геометрии: аффинная и проективная геометрия.

IV.3. Примерные темы для самостоятельного изучения

1. Множество и подмножества
2. Алгебраические структуры
3. Поле комплексных чисел
4. Сравнения
5. Кольцо многочленов
6. Алгебра матриц
7. Определители
8. Обратная матрица
9. Системы линейных уравнений
10. Векторное пространство
11. Евклидовы векторные пространства
12. Отображение на структурах
13. Матрица линейного оператора
14. Собственные числа и собственные вектора линейного оператора
15. Билинейные и квадратичные формы
16. Группы
17. Циклические группы
18. Подгруппы и смежные классы
19. Гомоморфизмы групп
20. Действие группы на множестве
21. Абелевы группы
22. Свободные группы