

**Министерство образования
и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Математический факультет
кафедра алгебры и топологии

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ
КОМПЛЕКС**

по дисциплине

**Дискретная математика и математическая
логика**

для направления

511200 Математика. Прикладная математика

**Ижевск
2008**

УДК
ББК

Б

Б

Банникова Т.М., Баранова Н.А.

Дискретная математика и математическая логика:
учебно-методический комплекс, Ижевск., 2008, 50 с.

Учебно-методический комплекс по курсу «Дискретная математика и математическая логика» разработан на основе опыта преподавания данной дисциплины и современных методик обучения, содержит тематический план курса, краткий обзор лекционных и практических занятий, тщательно подобранный материал для организации, предусмотренных в рабочей программе, форм контроля и самостоятельной работы студентов, а также методических указаний для преподавателей и студентов. Учебно-методический комплекс предназначен для студентов 1 курса математического факультета.

УДК
ББК

© Банникова Т.М., Баранова Н.А., 2008
© ГОУ ВПО «Удмуртский государственный
университет», 2008

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
I. ТРЕБОВАНИЯ ГОС ВПО ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ 511200	
МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.....	5
I.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАПРАВЛЕНИЯ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.....	5
I.2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА.....	7
II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА	14
II. 1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ	14
II. 2. РАСПЕРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ ПО ТЕМАМ И ВИДАМ ЗАНЯТИЙ.....	16
II.3. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА.....	17
II.4. УЧЕБНО-МОТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КУРСА	22
III. ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ	
РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ КОНТРОЛЯ	23
III.1. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	23
III.4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ	25
IV. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ.....	28
IV.1. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ	29
IV.2. ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ 1 КУРС (2 СЕМЕСТР).....	38
IV.3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ	40

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методический комплекс курса «Дискретная математика и математическая логика» разработан в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования. Курс входит в цикл Общих профессиональных дисциплин, адресован студентам 1 курса математического факультета, обучающимся по направлению «Математика. Прикладная математика». Дискретная математика и математическая логика является одним из основных базовых разделов математики, без которых современное развитие математики было бы не мыслимо.

Он изучается на основе и в тесной связи с учебными дисциплинами, раскрывающими основные понятия математики, такими как «Математический анализ», «Алгебра», «Теория чисел». Курс строится, как непосредственное продолжение основных понятий теории множеств, введение на них линейных операций и изучение свойств полученных алгебраических структур.

Главной целью курса является ознакомление студентов с основными понятиями дискретной математики и логики, их фундаментальными методами, своеобразием мышления.

В процессе обучения студенты должны познакомиться с узловыми задачами из базовых разделов дискретной математики и ее приложений. Они должны усвоить понятия: функции k -значной логики и их особенности, детерминированные и ограниченно-детерминированные функции и операции над ними, вычислимые функции, их частичная рекурсивность. В курс включены основы теории кодирования.

Для успешного освоения данного курса студентам рекомендуется повторить основные разделы школьного курса алгебры и геометрии, такие как «Векторы», «Функции», «Множества», «Комбинаторика», «Элементы математической логики».

I. ТРЕБОВАНИЯ ГОС ВПО ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ 511200 МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

I.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАПРАВЛЕНИЯ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Направление утверждено приказом Министерства образования Российской Федерации от 02.03.2000 № 686.

2. Степень выпускника – **Бакалавр математики.**

Нормативный срок освоения основной образовательной программы подготовки бакалавра математики по направлению 511200 – Математика при очной форме обучения – 4 года.

3. Квалификационная характеристика выпускника.

Бакалавр математики подготовлен преимущественно к выполнению исследовательской деятельности, в областях, использующих математические методы и компьютерные технологии; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления; программно-управленческому обеспечению научно-исследовательской, проектно конструкторской и эксплуатационно-управленческой деятельности.

Объектами профессиональной деятельности бакалавра математики являются научно-исследовательские центры, органы управления, образовательные учреждения, промышленное производство. Исходя из своих квалификационных возможностей выпускник бакалавриата по направлению 510100 – Математика может занимать должности: математик, инженер-программист (программист) и другие в соответствии с требованиями Квалификационного справочника должностей руководителей, специалистов и других служащих, утвержденного постановлением Минтруда России от 21.08.98 №37.

Возможности продолжения образования бакалавра математики, освоившего основную образовательную программу высшего профессионального образования по направлению 511200 – Математика. Прикладная математика.

Бакалавр математики подготовлен:

– к обучению в магистратуре преимущественно по направлениям 510100 – Математика; 510200 – Прикладная математика и информатика; 510300 – Механика; 511200 – Математика. Прикладная математика; 511300 – Механика. Прикладная математика; 511600 – Прикладные математика и физика; 511800 – Математика. Компьютерные науки; 540100 – Естественнонаучное образование; 540200 – Физико-математическое образование; 553000 – Системный анализ и управление;

– к освоению образовательных профессиональных программ в сокращенные до года сроки преимущественно по специальностям 010100 – Математика; 010200 – Прикладная математика и информатика; 010500 – Механика; 030100 – Информатика; 032100 – Математика; 061800 – Математические методы и исследование операций в экономике; 070100 – Криптография; 070200 – Компьютерная безопасность, 351500 – Математическое обеспечение и администрирование информационных систем, а также по направлению подготовки дипломированных специалистов 657100 – Прикладная математика.

1.2. ТРЕБОВАНИЯ К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ 511200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Требования к профессиональной подготовленности бакалавра математики

Выпускник должен уметь решать задачи, соответствующие его степени, указанной в п.1.2. настоящего Государственного стандарта. Бакалавр математики отвечает следующим требованиям:

- знаком с основными учениями в области гуманитарных и социально-экономических наук, способен научно анализировать социально-значимые проблемы и процессы, умеет использовать на практике методы этих наук в различных видах профессиональной и социальной деятельности;
- знает этические и правовые нормы, регулирующие отношение человека к человеку, обществу, окружающей среде, умеет учитывать их при разработке экологических и социальных проектов;
- имеет целостное представление о процессах и явлениях, происходящих в неживой и живой природе, понимает возможности современных научных методов познания природы и владеет ими на уровне, необходимом для решения задач, имеющих естественнонаучное содержание и возникающих при выполнении профессиональных функций;
- способен продолжить обучение в магистратуре и по специальности, в соответствии с п.1.3., вести профессиональную деятельность в иноязычной среде (требование рассчитано на реализацию в полном объеме через 10 лет);
- имеет научное представление о здоровом образе жизни, владеет умениями и навыками физического самосовершенствования;

- владеет культурой мышления, знает его общие законы, способен в письменной и устной речи правильно (логически) оформить его результаты;
- умеет на научной основе организовать свой труд, владеет компьютерными методами сбора, хранения и обработки (редактирования) информации, применяемые в сфере его профессиональной деятельности;
- способен в условиях развития науки и изменяющейся социальной практики к переоценке накопленного опыта, анализу своих возможностей, умеет приобретать новые знания, обучаться в магистратуре, использовать другие формы обучения, включая самостоятельные и информационно образовательные технологии;
- понимает сущность и социальную значимость своей будущей профессии, основные проблемы дисциплин, определяющих конкретную область его деятельности, видит их взаимосвязь в целостной системе знаний;
- способен к проектной деятельности в профессиональной сфере на основе системного подхода, умеет строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ;
- способен поставить цель и сформулировать задачи, связанные с реализацией профессиональных функций, умеет использовать для их решения методы изученных им наук;
- готов к кооперации с коллегами и работе в коллективе, знаком с методами управления, умеет организовать работу исполнителей, находить и принимать управленческие решения в условиях различных мнений, знает основы педагогической деятельности;
- методических и психологически готов к изменению вида и характера своей профессиональной деятельности, работе над междисциплинарными проектами;
- способен к совершенствованию своей профессиональной деятельности в области математики.

1.3. ТРЕБОВАНИЯ К ОБЯЗАТЕЛЬНОМУ МИНИМУМУ СОДЕРЖАНИЯ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ 510200 – МАТЕМАТИКА. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
ОПД	Общепрофессиональные дисциплины	3 644
ОПД.Ф.00	Федеральный компонент	3 344
ОПД.Ф.04	Дискретная математика и математическая логика	160

Комбинаторика и графы: выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями; сочетания с повторениями; биномиальные коэффициенты, их свойства; биномиальная теорема; полиномиальная теорема; формула включения и исключения.

*Производящие функции и рекуррентные соотношения.

Графы: основные понятия; способы представления графов, перечисление графов; оценка числа неизоморфных графов с q ребрами; эйлеровы циклы; теорема Эйлера; укладки графов; укладка графов в трехмерном пространстве; планарность; формула Эйлера для плоских графов; деревья и их свойства; оценка числа неизоморфных корневых деревьев с q ребрами.

*Теорема Кюли о числе деревьев на нумерованных вершинах.

Потоки в сетях: теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе; алгоритм нахождения максимального потока; теорема о целочисленности; задача о назначениях; паросочетания; теорема Холла о паросочетаниях в двудольном графе.

*Дискретные экстремальные задачи, алгоритм Краскала нахождения минимального основного дерева; метод ветвей и границ.

Булевы функции: булевы функции; табличный способ задания; существенные и несущественные переменные;

формулы; эквивалентность формул; элементарные функции и их свойства; разложение функций по переменной; совершенная дизъюнктивная нормальная форма; полные системы функций; полиномы Жегалкина; представление булевых функций полиномами.

Замыкание; свойства операции замыкания; замкнутые классы; Классы T_0 и T_1 ; линейные функции; лемма о нелинейной функции; самодвойственные функции; принцип двойственности; лемма о несамодвойственной функции; монотонные функции; лемма о немонотонной функции; теорема о неполноте систем функций алгебры логики; предполные классы; базисы; примеры базисов.

*Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ); тупиковая, минимальная и сокращенная ДНФ; геометрическая интерпретация; алгоритм нахождения всех минимальных ДНФ; свойство сокращенной ДНФ для монотонных булевых функций; методы построения сокращенной ДНФ; градиентный алгоритм; локальные алгоритмы.

Функции k -значной логики; элементарные функции; полнота системы $\{0, 1, \dots, k-1, J_0(x),$

$J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), \max(x, y), \min(x, y)\}$; полнота систем $\{\max(x, y), x+1\}, V_k(x, y)\}$; алгоритм распознавания полноты конечных систем функций в P_k ; представление функций из P_k полиномами.

Особенности функций k -значной логики; пример замкнутого класса в P_k , не имеющего базиса; пример замкнутого класса в P_k , имеющего счетный базис; пример континуального семейства замкнутых классов в P_k .

*Теорема Кузнецова о функциональной полноте в P_k ; существенные функции; теорема Слупецкого.

Теория кодирования: побуквенное кодирование; разделимые коды; префиксные коды; критерий однозначности декодирования; неравенство Крафта – Макмиллана для разделимых кодов; условие существования разделимого кода с заданными длинами кодовых слов; оптимальные коды; методы построения оптимальных кодов; метод Хаффмана;

самокорректирующиеся коды; коды Хэмминга, исправляющие единичную ошибку.

Линейные коды и их простейшие свойства; коды Боуза – Чоудхури.

Синтез и сложность управляющих систем: схемы из функциональных элементов; сложность схем; синтез схем из функциональных элементов для индивидуальных функций; схемы сложения и умножения n -разрядных чисел; простейшие универсальные методы синтеза; метод Шеннона; мощный метод получения низких оценок сложности; функция $L_{сфэ}(n)$; порядок роста функции $L_{сфэ}(n)$.

*Асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{V, \&, -\}$; асимптотика функции $L_{сфэ}(n)$; контактные схемы; простейшие методы синтеза; контактное дерево; универсальный многополюсник; метод Шеннона для контактных схем; функция $L_{кк}(n)$; порядок роста функции $L_{кк}(n)$; метод каскадов.

*Нижняя оценка сложности линейной функции в классе контактных схем (метод Кардо).

Ограниченно-детерминированные функции: детерминированные функции; задание детерминированных функций при помощи деревьев; вес функций; ограниченно-детерминированные функции (ОДФ); задание ОДФ диаграммами переходов и каноническими уравнениями; конечные автоматы; автоматные функции; состояние автомата; эквивалентность состояний; теорема об эквивалентности состояний конечного автомата.

*Эквивалентность автоматов; построение автомата, эквивалентного данному, с минимальным числом состояний.

Преобразование автоматными функциями периодических последовательностей; операция суперпозиции; отсутствие полных относительно операции суперпозиции конечных систем автоматных функций; схемы из логических элементов и элементов задержки; реализация автоматных функций; события; операции над событиями; регулярные события и их представимость в автоматах; теорема Клини.

*Регулярные выражения; представимость событий регулярными выражениями; пример нерегулярного события.

Логические исчисления, модели: исчисление высказываний; аксиомы; правило вывода; производные правила вывода; тождественная истинность выводимых формул; непротиворечивость исчисления высказываний; теорема о полноте исчисления высказываний; предикаты; логические операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл; кванторы; геометрический смысл квантора существования; модели; формулы; свободные и связанные переменные; истинность формул в модели, на множестве; общезначимые формулы; эквивалентные формулы логики предикатов; правила преобразований формул в эквивалентные; нормальная форма; исчисление предикатов; аксиомы; правила вывода; производные правила вывода; тождественная истинность выводимых формул; непротиворечивость исчисления предикатов; формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.

*Теорема о полноте для случая одноместных предикатов.

Вычислимые функции: машины Тьюринга; вычислимые функции; тезис Черча; примеры вычислимых функций; рекурсивные, рекурсивно-перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика; теорема Поста; примеры алгоритмически неразрешимых проблем; неразрешимость проблем самоприменимости, применимости; теорема Поста – Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.

*Теорема о неразрешимости проблемы распознавания тождественно истинных формул исчисления предикатов; операции суперпозиции и примитивной рекурсии; примитивно-рекурсивные функции; операция минимизации; частично-рекурсивные функции; вычислимость частично-рекурсивных функций; частичная рекурсивность вычислимых функций; формула Клини.

Примечание. Содержание дисциплины может излагаться в 2-х вариантах: годовой и 1,5-годовой курсы. Вопросы годового курса содержат необходимый минимум материала и носит обязательный характер. Вопросы 1,5-годового курса отмечены (*).

**Министерство образования
и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Математический факультет
кафедра алгебры и топологии

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине

**Дискретная математика и математическая
логика**

для направления

511200 Математика. Прикладная математика

Курс.....	1
Семестр.....	2
Всего часов.....	160
Аудиторных часов.....	96
Самостоятельная работа.....	64
Зачет.....	—
Экзамен.....	2

**Ижевск
2008**

II. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

II. 1. Организационно-методический раздел

Дискретная математика и математическая логика является одним из основных базовых разделов математики, без которых современное развитие математики было бы не мыслимо.

Дискретная математика сегодня это не только фундамент математической кибернетики, но и важное звено математического образования. Главной ее спецификой является дискретность, т.е. антипод непрерывности. В широком смысле дискретная математика включает в себя и такие сложившиеся разделы математики, как теория чисел, алгебра, математическая логика и ряд разделов, которые наиболее интенсивно стали развиваться в последние десятилетия в связи с научно-техническим прогрессом, поставившим изучение сложных управляющих систем, в связи с внедрением ЭВМ. В узком смысле дискретная математика ограничивается этими новыми разделами: теория функциональных систем, теория графов и сетей, теория кодирования, комбинаторный анализ, целочисленное программирование.

Программа курса рассчитана на два семестра.

Цель курса: познакомить студентов с основными понятиями дискретной математики и логики, их фундаментальными методами, своеобразием мышления.

В процессе обучения студенты должны познакомиться с узловыми задачами из базовых разделов дискретной математики и ее приложений. Они должны усвоить понятия: функции k -значной логики и их особенности, детерминированные и ограниченно-детерминированные функции и операции над ними, вычислимые функции, их частичная рекурсивность. В курс включены основы теории кодирования. Курс построен таким образом, чтобы сократить число необходимых понятий до минимума и, с другой

стороны, дать достаточное количество серьезных теорем с непохожими доказательствами, а также познакомить с применениями понятия алгоритма, владение которым особенно важно для специалистов в области прикладной математики и информатики. Студенты также знакомятся с формальным языком математики, методами перевода с естественного языка на формальный и обратно, с простейшими методами преобразований и проверкой высказываний, изучают структуру математических доказательств, язык теории множеств, язык теории графов, элементы комбинаторики.

Все понятия курса, их свойства и характеристики научно обоснованы и преподносятся с надлежащей полнотой и строгостью изложения. Доказательства проводятся исключительно на основании уже пройденных свойств исследуемых объектов. Существенная особенность изложения данного курса - та, что важнейшие понятия курса рассматриваются с разных сторон при изучении различных тем, при этом они "обрастают" новыми свойствами и применением, обретая целостность и значимость.

При изучении данного курса невозможно ограничиться изучением теории, и приобретение твердых навыков в решении примеров и задач является совершенно необходимым. По всем теоретическим темам проводятся практические занятия (не менее 2-х часов на каждые 2 часа лекций).

Курс "Дискретная математика и математическая логика" непосредственно связан с курсами информатического цикла, математического анализа, алгебры, философии.

Знания, полученные в результате изучения данного курса, помогут студентам стать полноценными специалистами в выбранной области математических исследований.

II. 2. РАСПЕРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСОВ ПО ТЕМАМ И ВИДАМ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Наименование тем и разделов	Всего часов	Аудиторные занятия (час.)			СРС
			в том числе			
			лекц.	практ	лаб.	
1.	Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения. Бином Ньютона.	13	4	4		5
2.	Графы. Определения и примеры. Теорема Эйлера.	13	4	4		5
3.	Потоки в сетях. Теорема Холла.	13	4	4		5
4.	Булевы функции. Свойства и способы задания.	13	4	4		5
5.	Замыкание. Принцип двойственности.	9	2	2		5
6.	Функции k -значной логики. Полнота конечных систем. Континуальное семейство замкнутых классов в P_k .	13	4	4		5
7.	Теория кодирования.	13	4	4		5
8.	Линейные коды и их свойства.	9	2	2		5
9.	Синтез и сложность управляющих систем.	13	4	4		5
10.	Ограниченно-детерминированные функции.	13	4	4		5
11.	Автоматные функции и события.	13	4	4		5
12.	Логические исчисления. Модели. Формулы. Истинность. Теорема о полноте исчисления предикатов.	13	4	4		5
13.	Вычислимые функции. Теорема Поста.	12	4	4		4
	Всего:	160	48	48		64

II.3. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Методические рекомендации к занятиям.

Выбор методов обучения и закрепления практических навыков в ходе практических занятий зависит не только от содержания, цели, формы и организации занятия. Необходимо учитывать также двухсторонний характер процесса обучения: совместная деятельность преподавателя и студентов.

Одним из лучших приемов привлечения интереса, активизации внимания и мыслительной деятельности студентов на лекции является проблемный характер изложения, при котором студентам не преподносится готовый результат (готовая формулировка теоремы и готовое ее доказательство, кем-то и когда-то полученные), а ставится задача, проблема и при активном участии студентов выбирается способ решения, проводится решение и формулируется вывод.

Содержание лекционного курса должно быть продумано лектором на весь период обучения. При составлении рабочей программы следует иметь в виду, что результат обучения измеряется не количеством сообщенной информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием способностей обучаемого к дальнейшему самостоятельному образованию.

Темы лекционных занятий

1. Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания, размещения. Бином Ньютона.

Комбинаторика: выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями, биномиальные коэффициенты, их свойства. Биномиальная теорема; полимиальная теорема; формула включения и исключения.

2. Графы. Определения и примеры. Теорема Эйлера.

Графы: основные понятия; способы представления графов, перечисление графов. Оценка числа неизоморфных графов с q ребрами. Эйлеровы циклы, теорема Эйлера. Укладки графов, укладка графов в трехмерном пространстве. Планарность, формула Эйлера для плоских графов. Деревья и их свойства, оценка числа неизоморфных корневых деревьев с q ребрами. Сети.

3. Потоки в сетях. Теорема Холла.

Потоки в сетях: теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм нахождения максимального потока, теорема о целочисленности. Задача о назначениях. Паросочетания. Теорема Холла о паросочетаниях в двудольном графе.

4. Булевы функции. Свойства и способы задания.

Булевы функции, табличный способ задания. Существенные и несущественные переменные. Формулы, эквивалентность формул, элементарные функции и их свойства, разложение функций по переменной. Совершенная нормальная дизъюнктивная форма. Полные системы функций. Полиномы Жегалкина, представление булевых функций полиномами.

5. Замыкание. Принцип двойственности.

Замыкание, свойства операции замыкания, замкнутые классы. Классы T_0 и T_1 . Линейные функции, лемма о нелинейной функции. Самодвойственные функции, принцип двойственности, лемма о несамодвойственной функции. Монотонные функции, лемма о немонотонной функции. Теорема о неполноте систем функций алгебры логики. Предпольные классы. Базисы и их примеры.

6. Функции k -значной логики. Полнота конечных систем. Континуальное семейство замкнутых классов в P_k .

Функции k -значной логики; элементарные функции. Полнота системы $\{0, 1, \dots, k-1, J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), \max(x,y), \min(x,y)\}$. Полнота систем $\{\max(x,y), x+1, V_k(x,y)\}$. Алгоритм распознавания полноты конечных систем функций в P_k , представление функций из P_k полиномами. Особенности функций k -значной логики. Пример замкнутого класса в P_k , не имеющего базиса. Пример замкнутого класса в P_k , имеющего счетный базис. Пример континуального семейства замкнутых классов в P_k .

7. Теория кодирования.

Теория кодирования: побуквенное кодирование, разделимые коды, префиксные коды. Критерий однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана для разделимых кодов. Условие существования разделимого кода с заданными длинами кодовых слов. Оптимальные коды, методы построения оптимальных кодов. Метод Хаффмана. Самокорректирующиеся коды. Коды Хэмминга, исправляющие единичную ошибку.

8. Линейные коды и их свойства.

Линейные коды и их простейшие свойства. Коды Боуза-Чоудхури.

9. Синтез и сложность управляющих систем.

Синтез и сложность управляющих систем. Схемы из функциональных элементов. Сложность схем, синтез схем из функциональных элементов для индивидуальных функций, схемы сложения и умножения n -разрядных чисел. Простейшие универсальные методы синтеза. Метод Шеннона. Мощностный метод получения низких оценок сложности. Функция $L_{сфэ}(n)$ и порядок ее роста.

10. Ограниченно-детерминированные функции.

Детерминированные функции, задание детерминированных функций при помощи деревьев. Вес дерева. Ограниченно-детерминированные функции (ОДФ). Задание ОДФ диаграммами переходов и каноническими уравнениями. Конечные автоматы, автоматные функции, состояние автомата. Эквивалентность состояний, теорема об эквивалентности состояний конечного автомата.

11. Автоматные функции и события.

Преобразование автоматными функциями периодических последовательностей. Операция суперпозиции. Отсутствие полных относительно операции суперпозиции конечных систем автоматных функций. Схемы из логических элементов и элементов задержки. Реализация автоматных функций. События, операции над событиями, регулярные события и их представимость в автоматах. Теорема Клини.

12. Логические исчисления. Модели. Формулы.

Истинность. Теорема о полноте исчисления предикатов.

Исчисление высказываний, аксиомы, правило вывода, производные правила вывода. Тождественная истинность выводимых формул. Непротиворечивость исчисления высказываний. Теорема о полноте исчисления высказываний. Предикаты, логические операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл. Кванторы, геометрический смысл квантора существования. Модели. Формулы. Свободные и связанные переменные. Истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы, эквивалентные формулы логики предикатов, правила преобразований формул в эквивалентные. Нормальная форма. Исчисление предикатов, аксиомы, правила вывода, производные правила вывода, тождественная истинность выводимых формул. Непротиворечивость исчисления предикатов. Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.

13. Вычислимые функции. Теорема Поста.

Машины Тьюринга, вычислимые функции, тезис Черча, примеры вычислимых функций. Рекурсивные, рекурсивно-перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика. Теорема Поста. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем. Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости. Теорема Поста-Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.

II.4. УЧЕБНО-МОТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ КУРСА

Основная литература.

1. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы: (учебное пособие). М.: Акимова, 2005. -655с.
2. Капитонова Ю.В., Кривой С.Л., Липичевский А.А. и др. Лекции по дискретной математике: учебное пособие. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. -614с.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2002. - 384с.
4. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики: учебное пособие. М.: МЦНМО, 2004. -421с.
5. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. Новосибирск, 2000. - 643с.
6. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. М.: Наука, 1992. -327с.

Дополнительная литература.

1. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика. Графы, матроиды, алгоритмы. РХД, 2001. - 411с.
2. Дистель Р. Теория графов. Новосибирск, 2002. -335с.
3. Влэдуц С.П. Алгеброгеометрические коды. Основные понятия. М.: МЦНМО, 2003. -503с.
4. Дискретный анализ. Под редакцией А.Д. Коршунова. Новосибирск, 1994. -181с.
5. Избранные вопросы алгебры, геометрии и дискретной математики. Под редакцией О.Б. Ляпунова, А.И. Кострикина. М.: Московский университет, 1992. -198с.
6. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1990. -368с.

III. ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ КОНТРОЛЯ

Текущий контроль осуществляется в виде проведения самостоятельных работ по прохождении каждой темы; промежуточный - домашних и аудиторных контрольных работ.

Итоговый контроль состоит из экзамена в конце 2 семестра.

III.1. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольные работы проводятся на практических занятиях после изучения соответствующего блока и оцениваются по системе «зачет/незачет». Для того, чтобы контрольная работа была зачтена студенту необходимо выполнить 70% заданий.

Контрольная работа №1.

1. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15.
2. Каково хроматическое число дерева с $n \geq 2$ вершинами?
3. Найти число полиномов степени r над множеством переменных X^n .
4. Доказать, что если замкнутый класс в P_2 имеет конечный базис, то всякий базис этого класса конечен.

Контрольная работа №2.

1. Доказать, что система $\{h_{01}(x), h_{02}(x), \dots, h_{0(k-1)}(x), x+j_0(x)\}$ полна в $P_k^{(1)}$.
2. Показать, что при $n > 7$ не существует плотно упакованных $\langle n, 7 \rangle$ -кодов.
3. Доказать, что если $|B| \geq 2$, то множество $\Phi_{A, B}$ — счетно-бесконечно.
4. Проиллюстрировать на примере предиката порядка понятия истинного, ложного и переменного высказываний.
5. Показать, что функция Аккермана общерекурсивна, но не примитивно рекурсивна.

III.4. ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Элементы комбинаторики: выборки, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями; биномиальные коэффициенты, их свойства.
2. Биномиальная теорема; полиномиальная теорема; формула включения и исключения.
1. Графы: основные понятия; способы представления графов, перечисление графов. Оценка числа неизоморфных графов с q ребрами.
3. Эйлеровы циклы, теорема Эйлера. Укладки графов, укладка графов в трехмерном пространстве. Планарность, формула Эйлера для плоских графов.
4. Деревья и их свойства, оценка числа неизоморфных корневых деревьев с q ребрами.
5. Потоки в сетях: теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм нахождения максимального потока, теорема о целочисленности.
6. Задача о назначениях. Паросочетания. Теорема Холла о паросочетаниях в двудольном графе.
7. Булевы функции, табличный способ задания. Существенные и несущественные переменные. Формулы, эквивалентность формул, элементарные функции и их свойства, разложение функций по переменной.
8. Совершенная нормальная дизъюнктивная форма. Полные системы функций. Полиномы Жегалкина, представление булевых функций полиномами.
9. Замыкание, свойства операции замыкания, замкнутые классы. Классы T_0 и T_1 . Линейные функции, лемма о нелинейной функции.
10. Самодвойственные функции, принцип двойственности, лемма о несамодвойственной функции. Монотонные функции, лемма о немонотонной функции.
11. Теорема о неполноте систем функций алгебры логики. Предпольные классы. Базисы и их примеры.

12. Функции k -значной логики; элементарные функции. Полнота системы $\{0, 1, \dots, k-1, J_0(x), J_1(x), \dots, J_{k-1}(x), \max(x,y), \min(x,y)\}$. Полнота систем $\{\max(x,y), x+1, V_k(x,y)\}$. Алгоритм распознавания полноты конечных систем функций в P_k , представление функций из P_k полиномами.
13. Особенности функций k -значной логики. Пример замкнутого класса в P_k , не имеющего базиса. Пример замкнутого класса в P_k , имеющего счетный базис. Пример континуального семейства замкнутых классов в P_k .
14. Теория кодирования: побуквенное кодирование, разделимые коды, префиксные коды. Критерий однозначности декодирования. Неравенство Крафта-Макмиллана для разделимых кодов. Условие существования разделимого кода с заданными длинами кодовых слов.
15. Оптимальные коды, методы построения оптимальных кодов. Метод Хаффмана. Самокорректирующиеся коды. Коды Хэмминга, исправляющие единичную ошибку.
16. Линейные коды и их простейшие свойства. Коды Боуза-Чоудхури.
17. Синтез и сложность управляющих систем. Схемы из функциональных элементов. Сложность схем, синтез схем из функциональных элементов для индивидуальных функций, схемы сложения и умножения n -разрядных чисел.
18. Простейшие универсальные методы синтеза. Метод Шеннона. Мощностный метод получения низких оценок сложности. Функция $L_{сфэ}(n)$ и порядок ее роста.
19. Детерминированные функции, задание детерминированных функций при помощи деревьев. Вес дерева. Ограниченно-детерминированные функции (ОДФ). Задание ОДФ диаграммами переходов и каноническими уравнениями.
20. Конечные автоматы, автоматные функции, состояние автомата. Эквивалентность состояний, теорема об эквивалентности состояний конечного автомата.

21. Преобразование автоматными функциями периодических последовательностей. Операция суперпозиции. Отсутствие полных относительно операции суперпозиции конечных систем автоматных функций.
22. Схемы из логических элементов и элементов задержки. Реализация автоматных функций.
23. События, операции над событиями, регулярные события и их представимость в автоматах. Теорема Клини.
24. Исчисление высказываний, аксиомы, правило вывода, производные правила вывода. Тавтологическая истинность выводимых формул.
25. Непротиворечивость исчисления высказываний. Теорема о полноте исчисления высказываний.
26. Предикаты, логические операции над предикатами и их теоретико-множественный смысл. Кванторы, геометрический смысл квантора существования.
27. Модели. Формулы. Свободные и связанные переменные. Истинность формул в модели, на множестве. Общезначимые формулы, эквивалентные формулы логики предикатов, правила преобразований формул в эквивалентные. Нормальная форма.
28. Исчисление предикатов, аксиомы, правила вывода, производные правила вывода, тавтологическая истинность выводимых формул. Непротиворечивость исчисления предикатов. Формулировка теоремы о полноте исчисления предикатов.
29. Машины Тьюринга, вычислимые функции, тезис Черча, примеры вычислимых функций.
30. Рекурсивные, рекурсивно-перечислимые множества и их алгоритмическая характеристика. Теорема Поста.
31. Примеры алгоритмически неразрешимых проблем. Неразрешимость проблем самоприменимости, применимости. Теорема Поста-Маркова о существовании ассоциативного исчисления с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства.

IV. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа студентов заключается в выполнении ими домашних и лабораторных работ, изучению ими ряда тем, используя соответствующую литературу, выполнением курсовой работы по предмету. Самостоятельная работы организована, следующим образом:

- 1.** В начале семестра каждому студенту выдается набор лабораторных работ (список задач по выбранной тематике), которые они должны решить дома. Преподаватель в специально отведенное время проводит консультации, составляет график сдачи этих работ. Своевременная сдача лабораторных работ является необходимым условием для сдачи зачета по курсу.
- 2.** В течении 2-го семестра студент совместно с преподавателем выбирает тему курсовой работы, определяют необходимый список литературы для ее написания и время консультации. В конце 2-го семестра проводится защита курсовых работ.
- 3.** Преподаватель определяет список отдельных тем курса, которые студенты самостоятельно должны изучить более глубоко. Они могут использовать как основную так и дополнительную литературу. Контроль за этим видом самостоятельной работы осуществляется на коллоквиуме, вопросы к которому раздаются студентам в начале семестра. С возникающими в процессе изучения этих тем вопросами студенты могут обратиться к преподавателю во время отведенное для консультаций.

**Пакет заданий для организации
самостоятельной работы студентов**

**IV.1. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ
САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ**

Самостоятельная работа №1.

Элементы комбинаторики.

1. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен, а общее число имен равно 300?
2. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?
3. Пусть k и n – натуральные числа. Докажите равенства:

$$\sum_{k=0}^n C_k^n = 2^n; \text{ b) } \sum_{k=1}^n k C_k^n = n 2^{n-1}$$

4. Показать, что количество натуральных чисел, делящихся на n и не превосходящих x , равно $[x/n]$.
5. Найти общее решение рекуррентного соотношения $a_{n+2} - 4 \cdot a_{n+1} + 3 \cdot a_n = 0$.

Самостоятельная работа №2.

Графы и сети.

1. Показать, что в любом графе, имеющем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.
2. Доказать, что в графе Петерсена нет гамильтонова цикла, но в графе, полученном из него удалением одной вершины, имеется гамильтонов цикл.
3. Доказать, что в любом планарном графе существует вершина степени, не большей, чем 5.
4. Каково хроматическое число дерева с $n \geq 2$ вершинами?
5. Найти число попарно неизоморфных сетей $\Gamma(a, b)$ с n вершинами и m ребрами, обладающих свойствами: 1) сеть $\Gamma(a, b)$ является s -разложимой; 2) все вершины сети $\Gamma(a, b)$ минимальны.

Самостоятельная работа №3.

Булевы функции.

1. Найти число неупорядоченных пар соседних вершин B^n .
2. Каково число функций в $P_2(X^n)$, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения?
3. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для функций: 1) $f(\tilde{x}^2)=(1001)$; 2) $f(\tilde{x}^3)=(01101000)$; 3) $f(\tilde{x}^3)=(11111000)$.
4. Привести пример числа $k(0 < k \leq n2^n)$, такого, что не существует $f(\tilde{x}^n)$, имеющей минимальную д.н.ф. сложности k .
5. Найти число функций $f(\tilde{x}^n)$, из которых отождествлением переменных нельзя получить константу тогда и только тогда, когда $f(\tilde{0})=f(\tilde{1})$.

Самостоятельная работа №4.

Замкнутые классы и полнота.

1. Обосновать следующие свойства замыкания:
1) $[[M]] = [M]$;
2) если $M_1 \leq M_2$, то $[M_1] \leq [M_2]$;
3) $[M_1 \cup M_2] \geq [M_1] \cup [M_2]$; 4) $[\emptyset] = \emptyset$.
2. Подсчитать число самодвойственных функций, зависящих существенно от переменных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.
3. Сколькими способами можно расставить скобки в выражении $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$, чтобы получилась формула, реализующая функцию из T_0 ?
4. Доказать, что никакой простой импликант монотонной функции не содержит отрицаний переменных.
5. Привести по три примера базисов в P_2 , содержащих одну, две, три и четыре функции.

Самостоятельная работа №5.

***K*- значные логики.**

1. Найти число функций из P_4 , которые зависят только от переменной x и реализуемы многочленами по mod 4.
2. Доказать, что множество $N(R(x_1, \dots, x_n))$ при любом предикате R является замкнутым классом.
3. Верно ли, что если замкнутому классу в P_k ($k \geq 3$) принадлежит функция, существенно зависящая не менее чем от двух переменных, то в этом классе содержится либо функция x , либо константа?
4. Исследовать на полноту следующие подсистемы Россера-Туркетта в P_4 :
 - 1) $\{1, 2, J_0(x), J_1(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$;
 - 2) $\{1, 2, J_0(x), J_3(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$.
5. Доказать, что приводимые ниже системы полны в P_k тогда и только тогда, когда k – простое число:
 - 1) $\{1, x+y+xz\}$;
 - 2) $\{x-1, x+y, x^2 \cdot y\}$.

Самостоятельная работа №6.

Элементы теории кодирования.

1. Верно ли, что код $C \leq B^n$, исправляющий t ошибок, обнаруживает
 - 1) не менее $2t+1$ ошибок;
 - 2) не менее $2t$ ошибок;
 - 3) не более $2t$ ошибок?
2. Существует ли плотно упакованный $\langle n, 3 \rangle$ -код при $n=147$?
3. Показать, что кодовое расстояние (n, k) -кода не превосходит $\lceil n2^{k-1}/(2^k-1) \rceil$.
4. Пусть числа 1, 2, 4, 17, 98 кодируются своими двоичными разложениями (двоичная система). Является ли это кодирование разделимым?
5. Доказать, что код, построенный по методу Шеннона, является префиксным.

Самостоятельная работа №7.

Конечные автоматы.

1. Доказать, что если $|A| > 1$ и $|B| > 1$, то мощность множества $\Phi_{A,B}$ равна мощности континуума.
2. Пусть о.-д. операторы φ_1 и φ_2 имеют веса γ_1 и γ_2 соответственно. Чему равен вес оператора ψ , получающегося из φ_1 и φ_2 с помощью операции объединения?
3. Пусть φ —автономный оператор веса γ ($\gamma < \infty$). 1) Показать, что выходное слово оператора φ является квазипериодическим. 2) Доказать, что сумма длин периода и предпериода выходного слова оператора φ не превосходит γ .
4. Существует ли функция, которая принадлежит каждому предпольному в $\hat{\Phi}_{(K)}$ классу?

Самостоятельная работа №8. Логические исчисления.

1. Составьте формулу сложного суждения: "Если мальчик любит мыло и зубной порошок, этот мальчик очень милый, поступает хорошо".

2. Проверьте истинность формулы, составив таблицу истинности: $((a \rightarrow b) \wedge (\neg b)) \rightarrow (\neg a)$.

3. Проверьте истинность формулы, составив семантическую таблицу:
 $((A \rightarrow (B \& (C \vee D))) \& A) \rightarrow (C \vee D)$.

4. Используя кванторы, составьте предикатную формулу высказывания: "Для всякого натурального числа есть большее".

5. Приведите пример иллюстрирующий выполнимость теоремы о полноте исчисления предикатов.

Самостоятельная работа №9.

Элементы теории алгоритмов

1. Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, обладающую следующим свойством: 1) машина применима к любому непустому слову в алфавите $\{0, 1\}$;
2. 2) машина не применима ни к какому слову в алфавите $\{0, 1\}$ и зона работы на каждом слове - бесконечна.
3. Показать, что по всякой машине Тьюринга можно построить эквивалентную ей машину, в программе которой не содержатся заключительные состояния.
4. Привести пример примитивно рекурсивной функции, из которой двукратным применением операции минимизации можно получить нигде неопределенную функцию.
5. Доказать, что не существует частично рекурсивной универсальной функции для семейства всех n -местных общерекурсивных функций.
6. Привести пример преобразования конечных слов, которое может быть совершено подходящей машиной Тьюринга, но не может быть совершено никаким детерминированным оператором

IV.2. ТЕМЫ КУРСОВЫХ РАБОТ 1 КУРС (2 СЕМЕСТР)

1. Цепные дроби.
2. Дроби Фарея.
3. Пифагоровы тройки.
4. Неравенство Адамара.
5. Алгоритм Кронекера для разложения многочленов над $\mathbb{Z}$.
6. Результат 2-х многочленов.
7. Дискриминант многочленов.
8. Решение кубических уравнений по методу Кардано.
9. Уравнения 4-й степени: метод Феррари-Тарталья.
10. Вращения 3-х мерного пространства, углы Эйлера.
11. Доказательство основной теоремы алгебры.
12. Различные оценки вещественных корней многочленов.
13. Доказательство основной теоремы о симметрических многочленах.
14. Метод неопределенных коэффициентов для симметрических многочленов.
15. Линейное представление НОД многочленов: метод неопределенных коэффициентов.
16. Степенные суммы: формулы Ньютона для суммы k -х степеней.
17. Полиномиальная формула $(a+b+c)^n$; $(a_1 + a_2 \dots + a_k)^n$.
18. Биномиальные коэффициенты, их свойства и вычисление сумм биномиальных коэффициентов.
19. Приводимость многочленов над конечными полями.
20. Неединственность разложения на простые множители.
21. Разложение на неприводимые множители многочленов от нескольких переменных.
22. Кватернионы.
23. Неравенство Коши и его применение к задачам на экстремум.
24. Метод бесконечного спуска.
25. Конечные поля.
26. Поле алгебраических чисел.

27. Поле разложения многочлена.
28. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело.
29. Графы-деревья и их свойства.
30. Эйлеровы графы.
31. Гамильтоновы графы.
32. Теорема Эйлера о роде графа и ее использование в решении задач.
33. Лемма Холла о паросочетаниях.
34. Теорема Форда-Фолкерсона о максимальном потоке.
35. Формула включений и исключений.
36. Теорема Шпернера и ее следствие о максимальнойности числа невкладываемых друг в друга подмножеств конечного множества.
37. Аксиома выбора и лемма Цорна.
38. Аксиоматическое построение теории определителей.
39. Различные методы вычисления определителей n -го порядка»
40. Неравенства для ранга матриц.
41. Несовместные системы линейных уравнений и метод наименьших квадратов.
42. Приведение вещественных матриц к каноническому виду.
43. Скалярные матрицы, их внешняя характеристика.
44. Некоторые оценки величины определителей.
45. Булевы тождества и диаграммы Эйлера-Венна.
46. Аксиома Евклида. Неевклидовы поля и бесконечно малые элементы.
47. Решение функциональных уравнений с использованием групп подстановок.
48. Метод производящих функций.
49. Различные виды индукции: полная индукция, возвратная индукция.
50. Конечные геометрии: аффинная и проективная геометрия.

IV.3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Планарность, формула Эйлера для плоских графов.
2. Деревья и их свойства, оценка числа неизоморфных корневых деревьев с q ребрами.
3. Алгоритм нахождения максимального потока, теорема о целочисленности.
4. Задача о назначениях.
5. Паросочетания.
6. Самодвойственные функции, принцип двойственности, лемма о несамодвойственной функции.
7. Монотонные функции, лемма о немонотонной функции.
8. Теорема о неполноте систем функций алгебры логики.
9. Предпольные классы.
10. Оптимальные коды, методы построения оптимальных кодов.
11. Метод Хаффмана.
12. Самокорректирующиеся коды.
13. Коды Хэмминга, исправляющие единичную ошибку.
14. Линейные коды и их простейшие свойства.
15. Коды Боуза-Чоудхури.