

**Федеральное агентство по образованию**

**ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ДЕЙСТВИЯ НАД  
НИМИ**

**Методические указания и задачи по теории  
обобщенных функций**

**Ижевск 2008**

УДК 517.5

ББК 22.16

Ф 94

Составитель Ю.П.Чубурин

**Ф 94 Обобщенные функции и действия над ними.  
Методические указания и задачи по теории обобщенных  
функций / Сост. Ю.П.Чубурин. Ижевск, 2008. 14 с.**

В методическую разработку включены задачи по теории обобщенных функций. Более сложные задачи снабжены указаниями. Для удобства приводятся сведения из теории. Задачник предназначен для студентов-математиков и преподавателей.

УДК 517.5

ББК 22.16

© Ю.П.Чубурин, сост., 2008

© Удмуртский государственный  
университет, 2008

## Предисловие

При чтении и слушании курса по обобщенным функциям (важность этого курса в самой математике и ее приложениях не нуждается в доказательствах) возникает потребность в более или менее стандартном задачнике. Данная методическая разработка – это попытка составления первой части (без преобразования Фурье и свертки) такого задачника. В разработке, в основном, собраны задачи из книг, перечисленных в списке литературы, но есть и новые. Более сложные задачи снабжены указаниями. Для удобства пользования приведены необходимые сведения из теории. Предложенные задачи могут быть использованы при чтении спецкурса по обобщенным функциям как на семинарских занятиях, так и для семестровых заданий.

### 1. Пространства гладких функций

Через  $C^\infty(\mathbf{R})$  будет обозначаться линейное постраницство всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на числовой оси. (Эти функции могут принимать как вещественные, так и комплексные значения; соответственно, пространство будет рассматриваться над  $\mathbf{R}$  или над  $\mathbf{C}$ ).

Пусть  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ . Носителем функции  $\varphi$  называется множество

$$\text{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbf{R} : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Функция  $\varphi$  имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда она тождественно равна нулю вне некоторого (ограниченного) интервала. Функции с компактными носителями называются еще финитными функциями.

Пространство всех финитных функций из  $C^\infty(\mathbf{R})$  обозначается через  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ . Сходимость в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  определяется следую-

щим образом:  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  при  $n \rightarrow \infty$  тогда и только тогда, когда существует компакт  $K \subset \mathbf{R}$  такой, что  $\text{supp} \varphi_n \subset K$  сразу для всех  $n$  и для любого  $k = 0, 1, \dots$

$$\sup_{x \in K} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Пространство всех функций из  $C^\infty(\mathbf{R})$ , удовлетворяющих оценкам вида

$$p_{k,m}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^k \varphi^{(m)}(x)| < \infty$$

где  $k, m = 0, 1, \dots$ , обозначается через  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ . Эти функции убывают на  $\pm\infty$  вместе со всеми своими производными быстрее любой степени  $|x|$ . Говорят, что  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ , если для любых целых  $k, m \geq 0$

$$p_{k,m}(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть  $\Omega \subset \mathbf{R}$ . Пространство функций  $\mathcal{D}(\Omega)$  и сходимость в нем определяются подобно тому, как это было сделано для числовой оси.

Наконец, пространства  $\mathcal{D}(\Omega)$ , где  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ , а также  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ , аналогично определяются в многомерном случае, при этом в определениях сходимости обычные производные

$$\varphi^{(m)}(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

всех порядков следует заменить на частные производные любого порядка по каждой из переменных

$$\partial^{m_1 + \dots + m_n} \varphi(x) / \partial x_1^{m_1} \dots, \partial x_n^{m_n},$$

где  $m_i \geq 0$  – целые числа,  $i = 1, \dots, n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ .

*Теорема о разбиении единицы.* Пусть  $\Omega$  – открытое множество в  $\mathbf{R}^n$ , причем  $\Omega = \cup_{i \in I} \Omega_i$ , где  $\Omega_i, i \in I$  – семейство открытых

множеств. Тогда существуют такие функции  $\alpha_i(x) \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ , что 1)  $0 \leq \alpha_i(x) \leq 1$ ,  $i \in I$ ; 2) для каждого  $x \in \Omega$  отлично от нуля лишь конечное число функций  $\alpha_i(x)$ ; 3)  $\sum_{i \in I} \alpha_i(x) \equiv 1$ ,  $x \in \Omega$ .

## Задачи и упражнения

1. Какие функции принадлежат  $C^\infty(\mathbf{R})$ : а)  $x^k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $e^{x^2}$ ; в)  $|x|$ ; г)  $\frac{\sin x}{x}$ ?
2. Какие функции принадлежат  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ : а)  $e^x$ ; б)  $e^{-x^2}$ ; в)  $\frac{1}{1+x^2}$ ; г)  $x^k e^{-x^2}$ ?
3. Доказать, что умножение на функцию из того же пространства и взятие производной являются (линейными) непрерывными отображениями: а) в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ; б) в  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  (т. е., например, если  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  ( $n \rightarrow \infty$ ) в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  и  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ , то  $\psi\varphi_n \rightarrow \psi\varphi$  ( $n \rightarrow \infty$ )).
4. Доказать, что отображение  $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi$ ,  $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{R})$  непрерывно по каждой переменной в отдельности.
5. Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ . Доказать, что: а)  $(\varphi(x))/n \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ; б)  $(\varphi(x/n))/n$  не стремится к нулю в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ; в)  $(\varphi(x))/n \rightarrow 0$  в  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ .
6. Доказать, что

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\varphi - \psi\|_n}{2^n(1 + \|\varphi - \psi\|_n)},$$

где

$$\|\varphi\|_n = \sup_{-n \leq |x| \leq n} \sum_{k=1}^n |\varphi^{(k)}(x)|,$$

является метрикой в  $C^\infty(\mathbf{R})$ , причем сходимость в  $C^\infty(\mathbf{R})$  совпадает со сходимостью в этой метрике. (Указание. Для

проверки аксиомы треугольника использовать монотонное возрастание функции  $f(t) = t/(1+t)$  при  $t \geq 0$ .

7. Доказать, что

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|\varphi - \psi\|_n}{2^n(1 + \|\varphi - \psi\|_n)},$$

где

$$\|\varphi\|_n = \sup_{x \in \mathbf{R}} \sum_{k=1}^n |x^k \varphi^{(k)}(x)|,$$

является метрикой в  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ , причем сходимость в  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  совпадает с сходимостью в этой метрике. (*Указание.* См. указание к предыдущей задаче).

8. Доказать, что а)  $\varphi(x - \frac{1}{n}) \rightarrow \varphi(x)$  в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  ( $n \rightarrow \infty$ ); б)  
 $\varphi((1 + \frac{1}{n})x) \rightarrow \varphi(x)$  в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  
9. Доказать непрерывность вложения  $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$  (т. е.  
если  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ , то  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  в  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$  ( $n \rightarrow \infty$ )).

## 2. Обобщенные функции

Линейные непрерывные функционалы на  $\mathcal{D}(\mathbf{R})$  называются *обобщенными функциями* (или *распределениями*). Линейное пространство обобщенных функций обозначается через  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ . Значение обобщенной функции  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$  (как функционала) на элементе  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  будем обозначать через  $\langle T, \varphi \rangle$ .

Рассмотрим примеры обобщенных функций.

- 1) Так называемая  $\delta$ -функция Дирака определяется равенством

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

2) Пусть  $f(x)$  – локально интегрируемая функция на  $\mathbf{R}$  (т. е. функция, интегрируемая по Лебегу на любом отрезке  $[a, b]$ ), тогда она определяет обобщенную функцию  $T_f$  следующим равенством:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x) \varphi(x) dx.$$

При этом  $T_f$  называется *регулярной* обобщенной функцией. Если  $T_f = T_g$ , то  $f = g$  п. в.

В пространстве  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$  вводится (поточечная или слабая) сходимость:  $T_n \rightarrow T$  при  $n \rightarrow \infty$ , если для любой функции  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad (n \rightarrow \infty).$$

Произведение функции  $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$  на обобщенную функцию  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$  определяется формулой

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle.$$

Производная обобщенной функции  $T$  вводится равенством

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle.$$

Все обобщенные функции дифференцируемы любое число раз.

Пусть  $T = T_f$  – регулярная обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией  $f$ , и  $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ . Тогда  $\alpha T_f = T_{\alpha f}$ . Если при этом существует обычная производная  $f'$ , которая является локально суммируемой функцией, то  $(T_f)' = T_{f'}$ . В дальнейшем вместо  $T = T_f$  будем писать  $f$ , отождествляя, таким образом, функцию  $f$  с порожденной ею обобщенной функцией. Если  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ , то существует последовательность функций  $f_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  таких, что  $f_n \rightarrow T$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим примеры.

$$1) \langle \delta', \varphi \rangle = -\varphi'(0).$$

2) Пусть  $\vartheta(x) = \chi_{[0,\infty)}(x)$  – функция Хевисайда. Тогда  $\vartheta' = \delta$ .

Пусть  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}$  – открытое множество. Говорят, что  $T|_\Omega = 0$ , если  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  для всех  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  таких, что  $\text{supp}\varphi \in \Omega$ . (Имеем естественное вложение  $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbf{R})$ ). Очевидно, что  $T|_\Omega = 0$  тогда и только тогда, когда  $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} = 0$ ). Существует максимальное открытое множество  $\Omega_{\max}$  такое, что  $T|_{\Omega_{\max}} = 0$ . *Носителем* обобщенной функции  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$  называется множество  $\text{supp}T = \mathbf{R} \setminus \Omega_{\max}$ .

Примеры.

- 1)  $\text{supp}\vartheta = [0, \infty)$ .
- 2)  $\text{supp}\delta = \{0\}$ .

Соотношение  $\text{supp}T = \{0\}$  справедливо тогда и только тогда, когда  $T = \sum_{n=0}^N c_n \delta^{(n)}$  для некоторого целого  $N \geq 0$  и некоторых констант  $c_n$ .

В целях удобства (см. ниже) пишем  $T(x)$  и т.п. вместо  $T$ .

Пусть  $T(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ . Обобщенные функции  $T(x-x_0)$ ,  $T(kx)$ , где  $k \neq 0$ , определяются равенствами

$$\langle T(x-x_0), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x+x_0) \rangle,$$

$$\langle T(kx), \varphi(x) \rangle = (1/k) \langle T(x), \varphi(x/k) \rangle.$$

В частности,  $\langle \delta(x-x_0), \varphi \rangle = \varphi(x_0)$ . Мотивация этого определения, как и определения умножения обобщенной функции на обычную и дифференцирования обобщенной функции, – это аналогичные равенства для регулярных обобщенных функций.

Пусть  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ . Для любых  $a < b$  существует функция  $f \in L_2[a, b]$  и число  $m$  такие, что

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_a^b f(x) \varphi^{(m)} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(a, b).$$

Наименьшее  $m$  в данном представлении называется порядком обобщенной функции  $T$  на промежутке  $(a, b)$ . Заметим, что функция  $f$  определяется с точностью до слагаемого – многочлена степени  $m - 1$ . Для некоторых обобщенных функций понятие порядка имеет смысл для  $a = -\infty$  и (или)  $b = \infty$ .

Пространство обобщенных функций  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$  вводится аналогично пространству  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$  как пространство линейных непрерывных функционалов на  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ . (Элементы пространства  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$  называются обобщенными функциями медленного роста). Для обобщенных функций из  $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$  производная, умножение на функцию  $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ , носитель определяются как и для обобщенных функций из  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ , требуется лишь (при определении умножения), чтобы функция  $\alpha$  удовлетворяла оценкам вида

$$\alpha^{(n)}(x) \leq C_n(1 + |x|)^{M_n}, n = 0, 1, \dots$$

Заметим, что локально интегрируемая функция  $f(x)$  не всегда определяет элемент из  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ , достаточное условие этому – выполнение для некоторого  $m \geq 0$  оценки

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|(1 + |x|)^{-m} dx < \infty.$$

Пусть  $\Omega \subset \mathbf{R}$ . Пространство обобщенных функций  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , сходимость в нем и операции определяются аналогично тому, как это было сделано для числовой оси.

Наконец, пространства  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  и  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ , определяются аналогично одномерному случаю.

## Задачи и упражнения

10. Доказать, что  $\delta$ -функция не является регулярной обобщенной функцией. (*Указание.* В предположении противного

рассмотреть последовательность функций  $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  таких, что  $\text{supp} \subset [-1, 1]$ ,  $\varphi_n(0) = 1$ ,  $\varphi_n \rightarrow 0$  п.в. при  $n \rightarrow \infty$ ).

11. Доказать, что следующие функции стремятся к  $\delta$ -функции в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ : а)  $(2\varepsilon)^{-1}\chi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(x)$ ; б)  $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ ; в)  $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\pi\varepsilon}}$ ; г)  $\frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . (*Указание* к п. б), в), г). Сделать замену переменной  $x/\varepsilon = y$  и применить теорему Лебега о сходимости под знаком интеграла).

12. Найти последовательность функций из  $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ , стремящуюся к  $\delta'$  в  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ . (*Указание*. Использовать задачу 11, пункт в)).

13. Пусть  $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ . Доказать равенство  $\alpha(x)\delta = \alpha(0)\delta$ .

14. Доказать существование пределов в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ : а)

$$\frac{1}{x + i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\varepsilon};$$

б)

$$\frac{1}{x - i0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon}.$$

(*Указание*. Рассмотреть для  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(x)dx}{x + i\varepsilon} = \int_{-a}^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)dx}{x + i\varepsilon} + \int_{-a}^a \frac{\varphi(0)dx}{x + i\varepsilon}, \quad (1)$$

где  $\text{supp} \varphi \subset [-a, a]$ . Далее числитель и знаменатель во втором интеграле в правой части (1) умножить на сопряженный знаменатель. После этого см. указание к задаче 11).

15. Доказать формулы Сохоцкого:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \frac{1}{x} \mp \pi i\delta(x).$$

(*Указание*. Использовать указание к предыдущей задаче).

16. Доказать для любых чисел  $a_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  сходимость рядов в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ : а)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(x - n),$$

б)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta^{(n)}(x - n).$$

17. Доказать для любых чисел  $a_n$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , сходимость  $a_n \delta(x - n) \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ .

18. Пусть функция  $f(x)$  определена на числовой прямой всюду, кроме точки  $x_0$ . Тогда главным значением интеграла от  $f(x)$  по всей числовой прямой называется

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} f(x) dx,$$

если выражение в правой части равенства существует. Доказать, что следующие равенства определяют обобщенные функции в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ : а)

$$\left\langle \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx;$$

б)

$$\left\langle \frac{1}{x^2}, \varphi \right\rangle = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$$

(Указание. Нужно разложить функцию  $\varphi(x)$  по формуле Тейлора до нужного порядка).

19. Найти производные следующих обобщенных функций:  
а)  $(x\delta')'$ ; б)  $\operatorname{sgn} x$ ; в)  $[x]$ .

20. Найти вторые производные следующих обобщенных функций: а)  $|x|$ ; б)  $|\sin x|$ .

21. Пусть  $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ . Доказать формулу:  $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$ .

22. Доказать, что оператор дифференцирования непрерывен в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ : из  $T_n \rightarrow T$  вытекает, что  $T'_n \rightarrow T'$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

23. Доказать, что оператор умножения на функцию непрерывен в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ : из  $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $T_n \rightarrow T$  вытекает, что  $\alpha T_n \rightarrow \alpha T$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

24. Доказать, что

$$\frac{\sin \lambda x}{x} \rightarrow \pi \delta, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

(Указание. Доказать сначала, что для непрерывно дифференцируемой функции  $\psi$

$$\int_a^b \sin \lambda x \cdot \psi(x) dx, \quad \int_a^b \cos \lambda x \cdot \psi(x) dx \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Также использовать равенство  $\varphi(x) = \varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0))$ .

25. Доказать формулу:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

(Указание. Разложить функцию  $\frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$  в ряд Фурье на отрезке  $[0, 2\pi]$ , после чего продифференцировать равенство в смысле обобщенных функций).

26. Вычислить  $x^k \delta^{(l)}$ .

27. Найти, в смысле теории обобщенных функций: а)

$$\left( \frac{d}{dx} - \lambda \right) (\vartheta(x) e^{\lambda x});$$

б)

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) (\vartheta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega});$$

в)

$$\frac{d^m}{dx^m} \vartheta(x) \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$\Gamma) \frac{d^m}{dx^m} |x|.$$

28. Доказать, что: а)

$$\frac{\partial^2 \vartheta(x)\vartheta(y)}{\partial x \partial y} = \delta(x,y);$$

б)

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{1}{x+iy} \right) = 2\pi \delta(x,y).$$

29. Доказать, что если  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$  и  $T' = 0$ , то  $T = \text{const.}$

(Указание. Вначале доказать, что  $\varphi = \psi'$ , где  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ , тогда и только тогда, когда  $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)dx = 0$ . Затем представить всякую функцию  $\xi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$  в виде  $\xi = \varphi + C\varphi_0$ , где  $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)dx = 0$ ,  $\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)dx = 1$ ).

30. Доказать, что все решения уравнения  $xT = 0$  в обобщенных функциях  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$  пропорциональны  $\delta$ -функции.  
(Указание. Вначале доказать, что  $\text{supp } T = \{0\}$ . Затем воспользоваться теоремой о структуре обобщенной функции с носителем в одной точке и формулой Тейлора для функции  $\varphi$ ).

31. Доказать, что если существуют константы  $A, B$  и целое число  $m \geq 0$  такие, что для всех целых  $n$  справедливо неравенство  $|a_n| \leq A|n|^m + B$ , то ряд  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$  сходится в  $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ .  
(Указание. Вначале доказать сходимость для первообразной (в формальном смысле) данного ряда).

32. Пусть  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ . Доказать, что  $\text{supp } T' \subset \text{supp } T$ .

33. Пусть  $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ,  $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ . Доказать, что  $\text{supp } \alpha T \subset \text{supp } \alpha \cap \text{supp } T$ .

34. Вычислить  $\langle \delta(kx+a), \varphi(x) \rangle$ .

35. Найти носители обобщенных функций: а)  $\delta(x - x_0)$ ; б)  $x^2$ ; в)  $\delta'(x)$ ; г)  $3\delta(x - x_0) - \vartheta(x)$ .

36. Доказать, что обобщенная функция  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(x - n)$  не является обобщенной функцией конечного порядка на числовой прямой.

37. Каковы носитель и порядок на числовой прямой обобщенных функций: а)

$$\varphi \mapsto \int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx;$$

б)

$$\varphi \mapsto \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \varphi'(x) dx?$$

38. Каков порядок на числовой прямой обобщенных функций: а)  $\delta^{(m)}$ ; б)  $\frac{1}{x}$ ; в)  $\frac{1}{x + i0}$ ? (*Указание* к пп. б), в). См. задачу 15).

39. Каков порядок обобщенной функции  $\frac{1}{x}$ : а) в интервале  $(a, b) \ni 0$ ? б) В интервале  $(a, b)$ , не содержащим нуля? (*Указание* к п. а). См. задачу 15).

40. Каков порядок обобщенной функции  $\frac{1}{x + i0}$ : а) в интервале  $(a, b) \ni 0$ ? б) В интервале  $(a, b)$ , не содержащим нуля? (*Указание* к п. а). См. задачу 15).

41. Какие функции принадлежат  $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ : а)  $e^x$ ; б)  $e^{-x^2}$ ; в)  $\frac{1}{1+x^2}$ ; г)  $x^k e^{-x^2}, k = 1, 2, \dots$ ?

42. Пусть  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  и  $T|_{\Omega_n} = 0$  для всех  $n$ , где  $\Omega$  и  $\Omega_n, n = 1, 2, \dots$  – открытые множества в  $\mathbf{R}$ . Доказать, что  $T = 0$ . (*Указание*. Использовать разбиение единицы).

## Список литературы

1. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.

2. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
3. Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Вышэйш. шк., 1978.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
5. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.

Юрий Павлович Чубурин

Обобщенные функции и действия над ними. Методические  
указания и задачи по теории обобщенных функций

Подписано в печать

Формат  $60 \times 84 \frac{1}{16}$ .

Печать офсетная. Усл. печ. л. 0,9. Уч.-изд. л. 0,65.

Тираж 80 экз. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел УдГУ.

Типография ГОУ ВПО "Удмуртский госуниверситет".

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.