С.А. ЛОГУНОВ

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ В ОБРАЗАХ И РИСУНКАХ

Ижевск 2007

Федеральное агентство по образованию

ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»

С.А. Логунов

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ
В ОБРАЗАХ И РИСУНКАХ

Учебное пособие

Ижевск 2007

УДК 519.1(075)
ББК 22.152я73
Л 698

Логунов С.А., 2007

Л 698 Общая топология в образах и рисунках: Учеб. пособие/УдГУ.
Ижевск, 2007. ??? с.

Данное учебное пособие представляет собой краткое и доступное введение в курс "Общая топология". Оно предназначено для студентов Математического факультета очной формы обучения. Пособие является хорошей базой для дальнейшего самостоятельного изучения этой дисциплины и может быть полезно широкому кругу читателей.

УДК 519.1(075)
ББК 22.152я73

Введение

В настоящее время топологические методы все больше проникают во многие области математики и естествознания. Это связано с тем, что топологии удалось в чистом виде выделить геометрические свойства объектов, фундаментальные для всей математики в целом и сформулировать их ясно и лаконично. Общая топология является неотъемлемой частью математической культуры.

Однако нет, по-видимому, литературы, в достаточной степени сочетающей в себе наглядность и лаконичность изложения, содержательность материала и его доступность.

Учебное пособие предназначено, в основном, для студентов второго курса математического факультета специальности "Математика", начинающих изучать дисциплину "Общая топология", а также всем желающим познакомиться с основами общей топологии. Оно снабжено множеством иллюстраций и призвано рассказать о предмете в наглядной и доступной форме.

1 Множества и семейства

Занятия математикой во многом состоят в том, что мы стремимся выразить на некотором формальном языке свой внутренний мир, его категории и связи между ними в их динамическом развитии. При этом сами категории могут быть проинтерпретированы как определения, законы их развития – как теоремы, а адекватность интерпретации – как справедливость теорем. Особенно отчетливо это можно увидеть на примере ярких и образных топологических построений. По-видимому, математика здесь особенно тесно соприкасается с философией, психологией и т.д., и знание основных закономерностей этих наук может быть большим подспорьем в процессе математических исследований. Поскольку современная наука не может удовлетворительно объяснить происхождение внутреннего мира человека, то тем самым открывается большой простор для мистики в вопросе о том, каким образом возникают в математике новые идеи, отражением чего именно они являются. Многие великие математики были также известны как философы, как правило, мистики и идеалисты или даже как весьма религиозные люди.

Как наш читатель уже, по-видимому, почувствовал, мы постепенно подводим его к мысли о том, что множество – категория весьма мистическая и рациональному объяснению не поддающаяся. Рассуждая не очень строго, можно сказать, что множество X определено, если задано некоторое правило, позволяющее относительно любого объекта сказать, является он элементом X или нет (в теории множеств это называется аксиомой объемности: множество определено, если определены его элементы). Если некий объект является элементом множества X, то про него говорят, что он является точкой множества X или что он принадлежит множеству X. Этот упрощенный подход приводит к многочисленным парадоксам теории множеств, необходимости более строго анализа исходного определения и того интуитивного смысла, который мы в него вкладываем.

В результате возникают весьма громоздкие аксиоматические конструкции, выходящие далеко за рамки стандартного курса университета. Все объекты, которые нам в дальнейшем встретятся, являются множествами в самом строгом понимании этого термина.

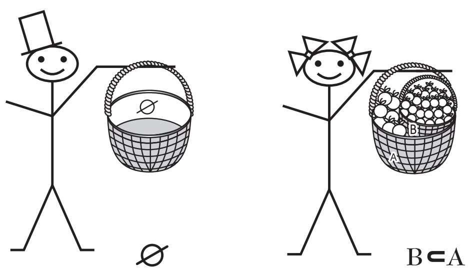
Продолжая упражняться в нестрогих определениях, мы можем сказать следующее: если элементами множества X в свою очередь являются множества, то X называется семейством множеств. Все, что мы будем говорить о множествах, в равной степени можно сказать и о семействах множеств.

Итак, прежде всего,буквами $A, B, C, X, Y, Z, U, V, F, G$ и т.д. мы будем обозначать множества, буквами a, b, c, x, y, z, u, v и т.д. – точки этих множеств, а $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ и т.д. – семейства множеств.

Мы считаем, что читатель знаком с кванторами $\forall$ – "для любого"и $\exists$ – "существует", бинарными логическими связками $\vee$ – "или", $\wedge$ – "и", $\Rightarrow$ – "следует"или "влечет", $\Leftrightarrow$ – "равносильно"или "тогда и только тогда", единственной унарной связкой $\neg$ – "отрицание"или "не"и законами элементарной логики высказываний.

Определение. Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается символом $\emptyset$:

$A = \emptyset \leftrightarrow \forall x (x \notin A)$.



Например, множество коров, пасущихся на Марсе, пусто. Для многих математических проблем пустым является множество математиков, знающих их решение. В этом плане мы возлагаем определенные надежды на нашего читателя. Пустым также является множество собственных идей в головах некоторых политиков. Но с этим трудно бороться, "так было и так будет".

Определение. Множество A называется подмножеством множества B (A лежит в B), если каждая точка множества A является точкой множества B:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

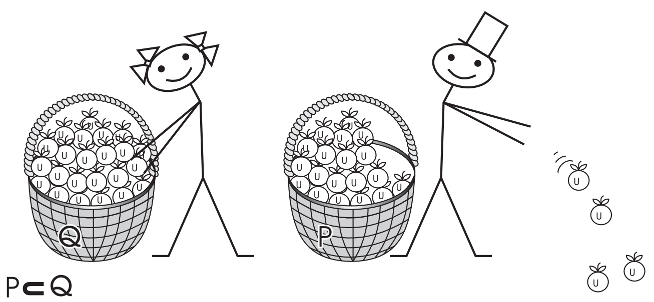
Да простит нас наш читатель, если мы посчитаем его точкой некоторого множества. Ну, допустим, множества людей, живущих в Российской

Федерации. Тогда множество людей, живущих в городе Ижевске, является подмножеством первого множества. А множество населяющих Российскую Федерацию блондинов - другим подмножеством, очевидно, пересекающим первое. Итак, подмножество может быть выделено по самым разным признакам.

Особенно важным для нас будет это определение на языке семейств.

Определение. Семейство $\mathcal{P}$ называется подсемейством семейства $\mathcal{Q}$, если каждое множество U, принадлежащее семейству $\mathcal{P}$, принадлежит также и семейству $\mathcal{Q}$:

$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \Leftrightarrow \forall U (U \in \mathcal{P} \Rightarrow U \in \mathcal{Q})$.

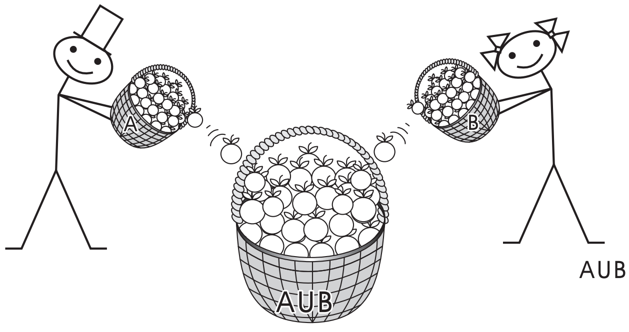


Для наглядности представим себе следующую картину: если каждое U – это яблоко, а $\mathcal{Q}$ – корзина с яблоками, то $\mathcal{P}$ – это то, что останется, если часть яблок выбросить. При этом каждому выбрасыванию соответствует ровно одно подсемейство $\mathcal{P}$. Важно только, чтобы в корзине не появилось ни одного нового фрукта. Возникает интересный вопрос: Как отличить точку - человека от множества - яблока? Оказывается никак. Один и тот же объект может быть точкой в одной совокупности и множеством - в другой. Все зависит от определения этой совокупности.

Напомним основные операции над множествами.

Определение. Объединением множеств A и B называется множество точек x таких, что x принадлежит A или x принадлежит B (выполняется хотя бы одно из двух условий или оба условия одновременно):

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.



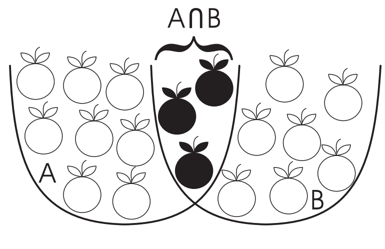
Определение. Объединением произвольной совокупности множеств $\{A_\alpha : \alpha \in \sigma\}$ называется множество точек x таких, что x принадлежит хотя бы одному из множеств A_α этой совокупности(выполняется хотя бы одно из σ условий или некоторое количество условий одновременно):

$\bigcup_{\alpha\in\sigma} A_\alpha = \{x : \exists\alpha \in \sigma(x \in A_\alpha)\}$.

Например, если множество людей, живущих в российских городах, объединить с множеством людей, живущих в поселках городского типа, множеством людей, живущих в деревнях, и так далее, объединить с персонами, не живущими вообще ни в одном из населенных пунктов, и проделать все это достаточно тщательно, то в конце концов получится все население России.

Определение. Пересечением множеств A и B называется множество точек x таких, что x принадлежит A и x принадлежит B (оба условия выполняются одновременно):

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.



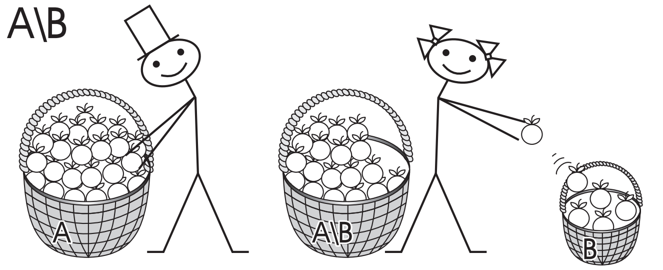
Определение. Пересечением произвольной совокупности множеств $\{A_\alpha : \alpha \in \sigma\}$ называется множество точек x таких, что x принадлежит каждому из множеств A_α этой совокупности (все σ условий выполняются одновременно):

$\bigcap_{\alpha\in\sigma} A_\alpha = \{x : \forall\alpha \in \sigma(x \in A_\alpha)\}$.

Например, если множество девушек баскетбольного роста пересечь с множеством блондинок, пересечь с множеством "вешалок", пересечь с множеством персон, у которых ноги "растут от ушей", то получится множество девиц, пригодных для съемок в Голливуде.

Определение. Разностью множеств A и B называется множество точек x таких, что x принадлежит A и x не принадлежит B:

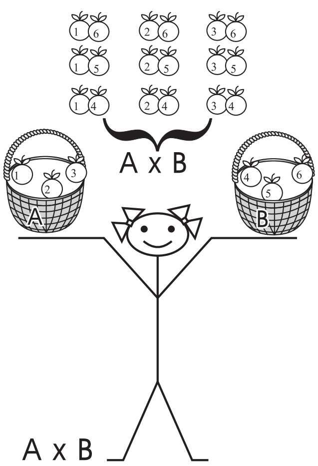
$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.



С этой операцией чаще всего сталкиваются работники военкоматов. Они берут множество юношей призывного возраста, вычитают из него множество юношей, не пригодных по состоянию здоровья, множество юношей, обремененных семейными проблемами, множество чрезвычайно религиозных юношей, множество чад замминистров, множество чад олигархов и так далее. О, бедняжки, право же, у них остается совсем немного.

Определение. Произведением множеств A и B называется множество формальных пар, в которых на первом месте находится точка множества A, а на втором - точка множества B:

$A \times B = \{(a, b) : a \in A \bigwedge b \in B\}$.



Определение. Произведением произвольной совокупности множеств $\{A_\alpha : \alpha \in \sigma\}$ называется множество формальных наборов из σ элементов, в которых на месте с индексом α находится точка множества A_α:

$\prod_{\alpha \in \sigma} A_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \sigma} : \forall \alpha \in \sigma (x_\alpha \in A_\alpha)\}$.

Например, умножим множество кошек на множество собак. Каждая точка полученного множества будет парой (кошка, собака). Да, теплая получится семейка!

Определение. Пусть $\alpha_0 \in \sigma$. Ортогональной проекцией на сомножитель A_{α_0} называется отображение $\pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha\in\sigma} A_\alpha \to A_{\alpha_0}$, которое каждой точке произведения ставит в соответствие ее координату с индексом α_0:

$\pi_{\alpha_0}((x_\alpha)_{\alpha\in\sigma}) = x_{\alpha_0}$.

Внимание! А теперь нечто совершенно особое!

Определение. Экспонентой множества A называется семейство подмножеств множества A:

$\exp A = \{B : B \subseteq A\}$.

В свою очередь, $\exp A$ также является множеством, не лучше и не хуже чем само A. (Да, я слышу, мы еще не ввели на множествах отношения "лучше"и "хуже"). А раз так, то можно найти экспоненту этого нового множества, потом еще одну экспоненту и продолжать до тех, пока есть желание, возможно, бесконечное число раз. Будем обозначать $exp^2A = exp(expA)$, $exp^3A = exp(exp(expA))$ и так далее.

Теперь перейдем к следующему важному понятию топологии.

Определение. Отображением (функцией) f множества X в множество Y называется правило, по которому каждой точке $x \in X$ соответствует ровно одна точка множества Y, которая называется образом точки x при отображении f и обозначается $f(x)$. $\forall x \in X(f(x) \in Y)$.

Обозначают: $f : X \to Y$ - отображение из X в Y. Множество $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ называют образом множества $A \subseteq X$ при отображении f. Множество $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ называют прообразом множества $B \subseteq Y$ при отображении f (хотя это и не совсем правильно, f и f^{-1}, если оно существует, определены на точках, а не на множествах).

(!) Прообразом точки $f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ является множество, а не точка.

Определение. Отображение f взаимно однозначно (инъективно, инъекция), если всякие две точки из X имеют разные образы в Y:

$\forall x, y \in X(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$.

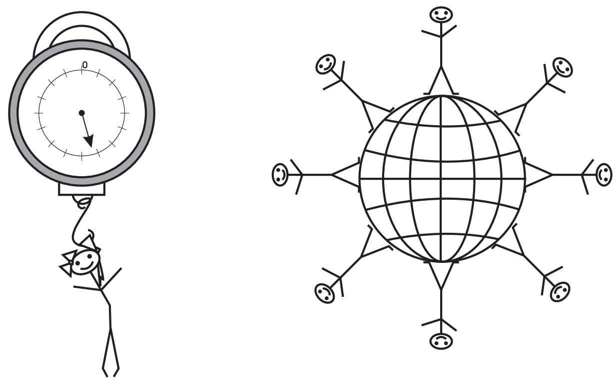
(!) f инъективно $\leftrightarrow \forall x, y \in X(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.

Определение. f – отображение "на"(сюръективно, сюръекция), если каждая точка множества Y является образом некоторой точки множества X:

$\forall y \in Y \exists x \in X(f(x) = y)$.

Определение. Если f одновременно инъективно и сюръективно, то f биективно (биекция). Тогда правило $f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$ задает обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$.

Например, каждому человеку в фиксированный момент времени соответствует его вес. Получаем отображение из множества людей в множество положительных чисел. Соответствует также точка на карте или глобусе, в которой этот человек сейчас находится. Получаем отображение в плоскость или сферу. Но множества положительных чисел, точек на карте или глобусе бесконечны, а людей существует лишь конечное число. Поэтому построенные отображения не могут быть сюръективными.



Криминалисты свято верят, что правило, по которому каждому человеку соответствуют отпечатки его пальцев или радужная оболочка глаз, является инъекцией. Более того, они уверены, что существует обратное отображение, по которому можно найти человека, имея его отпечатки пальцев.

Все перечисленные выше характеристики функциональны: для каждого человека они определяются однозначным образом и ни от чего более не зависят. Позволим теперь неумолимому времени продолжить свой бег. Тогда зависимость точки на карте или глобусе от конкретного человека перестанет быть функциональной.

Точка будет зависеть также и от момента времени, в который мы определяем положение человека.

Определение. Отображения f и $g : X \to Y$ равны, если их значения в каждой точке совпадают:

$f = g \Leftrightarrow \forall x \in X(f(x) = g(x))$.

Определение. $Y^X = \{f/f : X \to Y\}$ — множество всех отображений из X в Y.

Поговорим теперь о мощности множества X, то есть, грубо говоря, о количестве его элементов. Это понятие не вызывает трудностей для конечных множеств, но становится пока еще не вполне ясным для бесконечных.

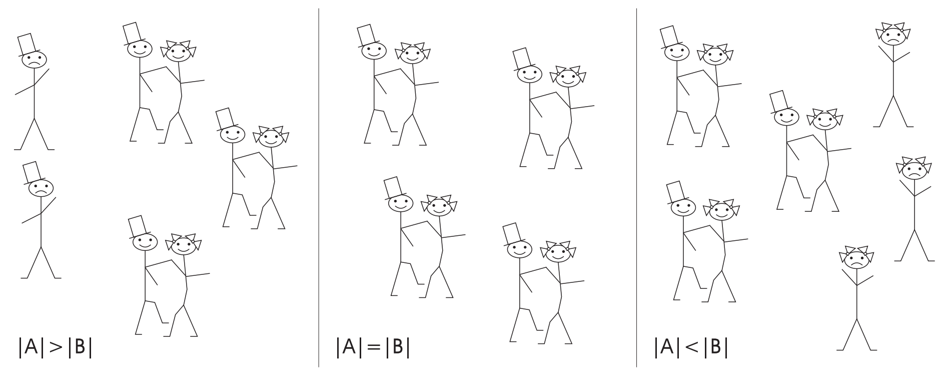
Проанализируем процесс счета. Прежде всего имеется некоторое эталонное множество — множество натуральных чисел N, с которым мы сравниваем произвольное множество X. Мы выбираем в X произвольный 1-й элемент, среди оставшихся элементов множества X мы выбираем 2-й, снова

среди оставшихся — 3-й и т.д. Другими словами мы начинаем строить взаимно однозначное отображение из X в N. При этом могут быть 3 исхода: Либо процесс прекратится на каком-то конечном шаге – тогда множество X конечно. Либо процесс можно организовать так, что он продлиться бесконечно долго, но все элементы множества X получат после этого свой номер – тогда множество X счетно.
Или, наконец, при любом способе нумерации будут оставаться незанумерованные элементы множества X, тогда X не является счетным.

Пусть A и B — конечные множества и мы хотим узнать в каком из них больше элементов. Для этого мы используем третье множество N как показано выше. Пусть процесс нумерации закончился в A на шаге m , а в B – на шаге n. Тогда остается сравнить числа m и n в смысле естественного порядка на множестве N.

Но наша основная идея состоит в том, что число элементов в A и B можно сравнить и не привлекая третье множество. Для наглядности представим себе, что A — множество юношей, а B — множество девушек на танцплощадке. Во время перерыва между танцами мы не знаем, какое множество больше. Пусть теперь заиграет музыка и максимальное возможное число пар начнет танцевать. Может быть три исхода. Либо танцуют все юноши и все девушки. Тогда множества A и B равны по числу элементов. Либо танцуют все юноши, но есть незанятые девушки.

Тогда в множестве B элементов больше,чем в A. Либо танцуют все девушки и есть незанятые юноши.Тогда элементов больше в множестве A.



Переходя к сравнению бесконечных множеств, следует все-таки соблюдать известную осторожность. Причина в том, что в отличие от конечного множества бесконечное может быть равно по числу элементов своей собственной части.

Действительно, пусть каждое натуральное число n танцует с числом $2n$. Тогда, по сформулированному выше правилу, всех натуральных чисел существует столько же, сколько существует четных чисел. В дальнейшем вместо "число элементов в множестве A"будем говорить "мощность множества A"и обозначать "$|A|$".

Теперь становятся естественными следующие определения.

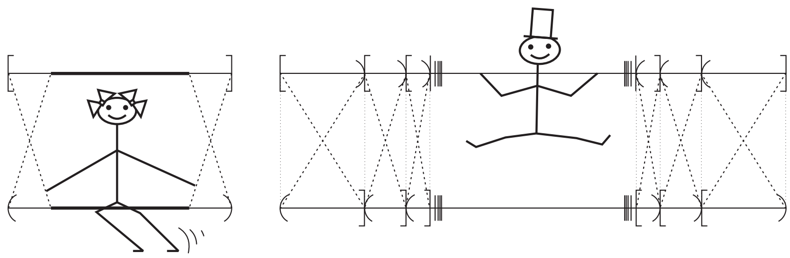
Определение. Мощность множества A равна мощности множества B, если существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B.

Говорят также, что A и B имеют одинаковую мощность, A и B равномощны или A и B эквивалентны и обозначают $|A| = |B|$.

Определение. Мощность множества A меньше мощности множества B, если существует взаимно однозначное отображение множества A на часть множества B и не существует взаимно однозначного отображения множества A на все множество B.

Обозначают $|A| < |B|$.

Теперь представим себе следующую картину: легко построить взаимно однозначное отображение интервала $(0,1)$ на часть отрезка $[0,1]$, и наоборот.



В то же время для того чтобы построить взаимно однозначное отображение интервала $(0,1)$ на весь отрезок $[0,1]$, требуется уже некоторое искусство. Не означает ли это, что одновременно $|(0,1)| < |[0,1]|$, $|(0,1)| > |[0,1]|$ и $|(0,1)| \neq |[0,1]|$? Другими словами, насколько корректно наше сравнение? От подобных неприятностей гарантирует теорема Кантора–Бернштейна.

Теорема 1.1 *Если множество A равномощно части множества B и множество B равномощно части множества A, то множество A равномощно множеству B.*

Пример (Перевертыши). Построить в явном виде взаимно однозначное отображение интервала на отрезок.

Определение. Класс равномощных множеств называется кардинальным числом или кардиналом.

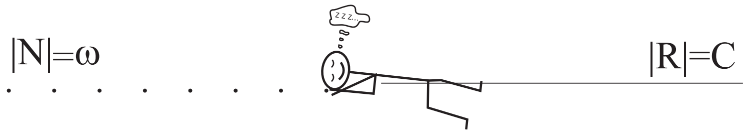
Пусть δ и σ — кардинальные числа. Для произвольных представителей A и B этих классов вместо $A \in \delta$ и $B \in \sigma$ пишут обычно $|A| = \delta$ и $|B| = \sigma$. Введем операции с кардинальными числами:

$\delta + \sigma = |A \cup B|$,
$\delta \times \sigma = |A \times B|$ и
$\delta^{\sigma} = |A^B|$.
В частности, $2^{\sigma} = |2^B|$, где $2 = \{0, 1\}$ - двоеточие.

Можно считать, что множества A и B не пересекаются, приписав, если необходимо, к каждой точке множества A индекс 0, а к каждой точке множества B – индекс 1. В результате наших операций получаются классы, содержащие множества $A \cup B$, $A \times B$ и A^B соответственно.

Выделяются два класса, содержащие уникальных представителей: класс ω (омега), содержащий множество натуральных чисел N, и класс C (континуум), содержащий прямую R.

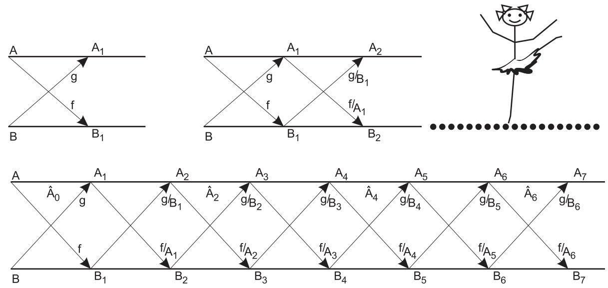
Другими словами, множество A счетно и пишем $|A| = \omega$, если A равномощно множеству натуральных чисел N. Множество A имеет мощность континуум: $|A| = C$, если A равномощно прямой R.



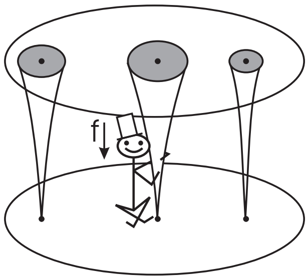
На языке кардинальных чисел теорему Кантора-Бернштейна можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.2 *Если* $\delta \leq \sigma$ *и* $\delta \geq \sigma$, *то* $\delta = \sigma$.

Доказательство теоремы схематично показано на рисунке.

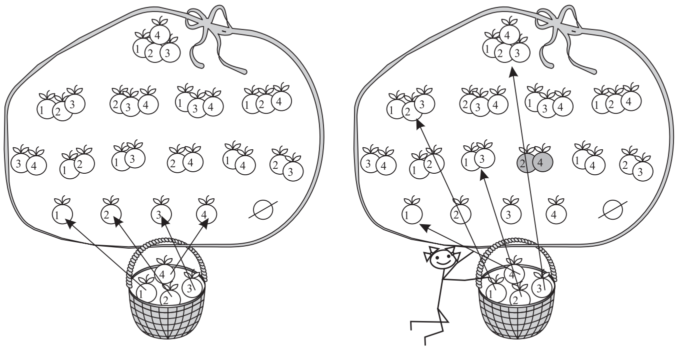


Теорема 1.3 *При отображении мощность множества не возрастает.*



Доказательство. Пусть $Y = f(X)$. Для каждой точки $y \in Y$ зафиксируем единственную точку $x_y \in f^{-1}(y)$ в пространстве X и положим $\tilde{Y} = \{x_y : y \in Y\}$. Но тогда $|Y| = |\tilde{Y}| \leq |X|$.

Теорема 1.4 *Мощность произвольного множества X строго меньше, чем мощность его экспоненты:* $|X| < |\exp X|$.



Доказательство. Покажем сначала, что мощность X не больше, чем мощность экспоненты. Другими словами, что X можно взаимно однозначно отобразить на часть множества $\exp X$. Но это легко: пусть образ произвольной точки $x \in X$ равен одноточечному множеству $\{x\} \in \exp X$.

Покажем, что мощность X не равна мощности экспоненты. То есть X нельзя взаимно однозначно отобразить на все множество $\exp X$. Действительно, пусть при некотором отображении образ произвольной точки $x \in X$ равен $A_x \in \exp X$. Построим множество $A \in \exp X$ по следующему правилу: $x \in A \Leftrightarrow x \notin A_x$.

Так как $A \neq A_x$ для любой $x \in X$, то A не является образом точки x. Получаем бесконечный набор кардинальных чисел:

$$|X| < |\exp X| < |exp^2 X| < |exp^3 X| < ...$$

Теорема 1.5 $|2^X| = |\exp X|$, *где* $2 = \{0, 1\}$.

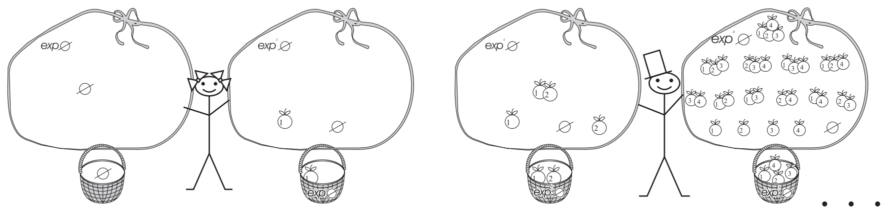
Доказательство. Построим биекцию σ из 2^X на $\exp X$ по следующему правилу: $\sigma(f) = f^{-1}(0)$ для каждого $f \in 2^X$.

Пусть $|X| = \sigma$. Теперь мы можем положить $2^\sigma = |2^X| = |\exp X|$.

Задания для самоконтроля

1. Хорошо ли мы понимаем определение подмножества?

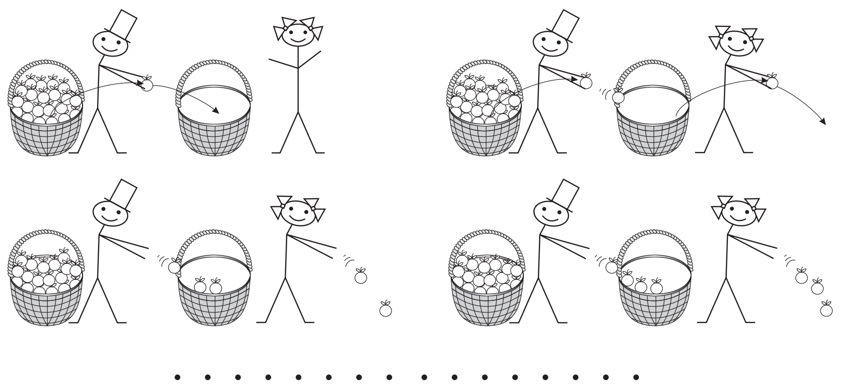
Мечта бизнесмена. Как из ничего сделать миллион?



Для какого минимального числа n множество $exp^n\emptyset$ содержит более чем миллион элементов?

2. Хорошо ли мы понимаем, что такое множество натуральных чисел?

Башмачок Золушки. Золушки, которым будет впору этот башмачок, вполне могут стать топологическими принцессами.



Пусть имеется две корзины с вишнями: Корз1, в которой бесконечно много вишен, и Корз2 - пустая в начале построения, и еще - пустое место Пуст0, в которое эти вишни можно выбрасывать. Между собой эти емкости не сообщаются. Представим себе следующий процесс:

Шаг 1: Возьмем одну вишню из Корз1 и положим в Корз2.

Шаг 2: Выбросим содержимое Корз2 в Пуст0, возьмем две вишни в Корз1 и положим в Корз2.

...

Шаг n: Выбросим содержимое Корз2 в Пуст0, возьмем n штук вишен в Корз1 и положим в Корз2.

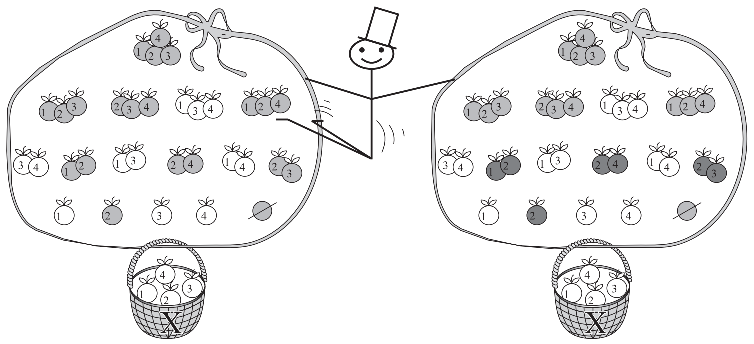
...

Сколько вишен будет лежать в Корз2 после того, как этот шаг будет проделан для каждого натурального n?

3. Хорошо ли мы понимаем, что такое отображение?

Много шуму из ничего. Сколько существует отображений на пустом месте? Пусть $X = \emptyset$ — пустое множество и Y — двоеточие $2 = \{0, 1\}$. Сколько существует отображений $f : X \to Y$?

2 Топологическое пространство



В течение многих веков математики имели традиционный набор объектов для своих исследований. Они получались, как правило, если на произвольном множестве X определить норму, метрику, скалярное произведение, алгебраические операции и т.д. В первой половине двадцатого века такое положение перестало быть удовлетворительным. Возникла необходимость в каком-то новом способе построения объектов и новой науке об их свойствах. Постепенно выработался следующий подход: пусть τ - некоторое семейство подмножеств множества X, возможно не всех. Другими словами, τ - подсемейство семейства $\exp X$. Для получения содержательной теории необходимо, чтобы τ обладало какими-то хорошими свойствами. В дальнейшем эти свойства оформились в виде трех аксиом, семейство τ получило название топологии, а пара (X, τ) - топологического пространства. Наука о свойствах топологических пространств стала называться общей или теоретико-множественной топологией. Она всегда была тесно связана с теорией множеств и булевыми алгебрами. Постепенно в нее стали проникать все более изощренные логические методы, составляющие сегодня весьма существенную и динамически развивающуюся ее часть. В Советском Союзе начальный период развития топологии связан, прежде всего, с именами

Павла Сергеевича Александрова, Павла Самуиловича Урысона и их первой совместной книгой "Мемуар о компактных топологических пространствах".

Определение. Пусть X — произвольное множество. Семейство τ подмножеств множества X называется топологией на множестве X, если выполняются следующие условия:

1) τ содержит пустое множество и все множество X:
$\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$;

2) τ содержит конечные пересечения:
если $U_1, ..., U_k \in \tau$, то $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tau$;

3) τ содержит произвольные объединения:
если $U_\alpha \in \tau$ для всех $\alpha \in A$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Пара (X, τ) называется топологическим пространством.

(!) Каждая топология является семейством множеств, но не всякое семейство множеств является топологией.

Часто топологическое пространство (X, τ) обозначают для краткости одной буквой X. Для произвольного $U \subseteq X$ существует теперь только две возможности: либо U принадлежит семейству τ, либо нет.

Определение. Множество $U \subseteq X$ называется открытым в топологическом пространстве (X, τ), если $U \in \tau$.

(!) Не бывает открытых множеств, а бывают множества, открытые в конкретном топологическом пространстве. Если U открыто в X, то U лежит в X. Все открытые множества образуют топологию на множестве X.

Определение. Множество $V \subseteq X$ называется замкнутым в топологическом пространстве (X, τ), если $X - V \in \tau$.

(!) Дополнения до открытых множеств замкнуты (и наоборот).

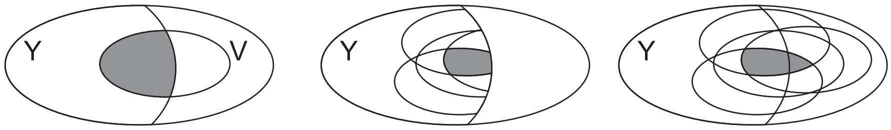
Определение. Окрестностью точки x называется произвольное открытое множество, содержащее точку x.

(!) U – окрестность точки x в топологическом пространстве (X, τ) $\Leftrightarrow$ $x \in U$ и $U \in \tau$. В дальнейшем произвольную окрестность точки x будем обозначать Ox.

(!) Не бывает окрестностей точек, а бывают окрестности точек в конкретном топологическом пространстве.

Предложение 1 *Пусть (X, τ) - топологическое пространство и $Y \subset X$ - произвольное подмножество X. Тогда семейство $\tau_Y = \{V \cap Y : V \in \tau\}$ является топологией на Y.*

(!) $U \in \tau_Y \Leftrightarrow U = V \cap Y$ для некоторого $V \in \tau$.



Доказательство. 1) $\emptyset \in \tau_Y$, так как $\emptyset = \emptyset \cap Y$ и $\emptyset \in \tau$.

$Y \in \tau_Y$, так как $Y = X \cap Y$ и $X \in \tau$.

2) если $U_1, ..., U_k \in \tau_Y$ и $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, то $U \in \tau_Y$.

Действительно, $U_i = V_i \cap Y$ для некоторых $V_i \in \tau$. Но тогда $V = \bigcap_{i=1}^{k} V_i$ принадлежит τ и $U = V \cap Y$.

3) если $U_\alpha \in \tau_Y$ для каждого $\alpha \in A$ и $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, то $U \in \tau_Y$.

Действительно, $U_\alpha = V_\alpha \cap Y$ для некоторых $V_\alpha \in \tau$. Но тогда $V = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ принадлежит τ и $U = V \cap Y$.

Определение. Топология τ_Y называется индуцированной из X топологией или топологией подпространства на Y.

Среди различных способов задания топологии рассмотрим следующий: нужно дать описание некоторой "достаточно большой"части семейства τ, что часто является более простой задачей.

Определение. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство $\mathcal{B} \subseteq \tau$ называется базой топологии τ (базой в X), если произвольное $U \in \tau$ можно представить в виде объединения множеств $V \in \mathcal{B}$:

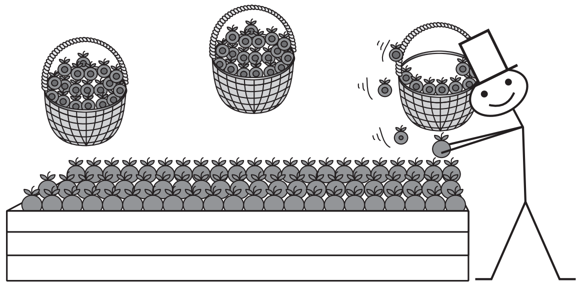
$U \in \tau \Leftrightarrow U = \bigcup \{V \in \mathcal{B} : V \subseteq U\}$.

Представим себе экспоненту в виде корзинки с яблоками. Тогда в топологию войдет только часть яблок в этой корзинке (серые яблоки). А в базу – часть яблок, вошедших в топологию (темно-серые).

Изучая локальные свойства пространства X, удобно использовать следующее эквивалентное (как будет показано несколько позже) определение.

Определение. Семейство $\mathcal{B} \subseteq \tau$ называется базой топологии τ (базой в X), если для любой точки $x \in X$ и произвольной ее окрестности Ox найдется множество $U \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in U \subseteq Ox$.

(!) Как правило, для одной и той же топологии существуют различные базы, которые могут не пересекаться между собой.



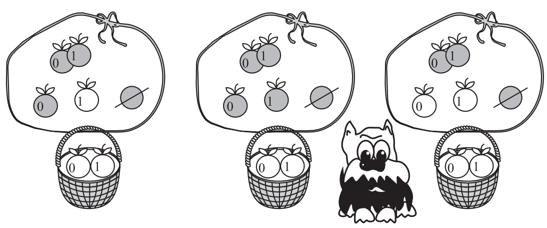
Создадим некоторый запас топологических пространств, свойства которых будем изучать в последующих главах. Как правило, мы будем задавать базу топологии. Сама топология совпадает с семейством произвольных объединений множеств из базы.

Склеенное двоеточие $(2, \tau)$**,**
где $\tau = \{\emptyset, 2, \{0\}\}$.

Дискретное двоеточие $(2, \tau_d)$**,**
где $2 = \{0, 1\}$ и $\tau_d = \{\emptyset, 2, \{0\}, \{1\}\}$.

Дискретное пространство (X, τ_d)**.**
Пусть X -произвольное множество и $\mathcal{B}_{\lceil} = \{\{d\} : d \in X\}$ – семейство всех одноточечных подмножеств X. Топология τ_d называется дискретной и совпадает с $\exp X$.

Антидискретное пространство (X, τ_a)
Антидискретная топология $\tau_a = \{\emptyset, X\}$ состоит всего из двух множеств: пустого множества и всего X.



Прямая с естественной (интервальной) топологией $R^1 = (R^1, \tau_e)$**.**

База топологии $\mathcal{B}_e = \{(x, y) : x, y \in R\}$ – семейство интервалов на прямой.

Прямая Зоргенфрея (R^1, τ_s)

База топологии $\mathcal{B}_s = \{[x, y) : x, y \in R\}$ – семейство открытых вправо полуинтервалов. Топология τ_s называется топологией стрелки.

Пространство Зарисского (R^1, τ_z)

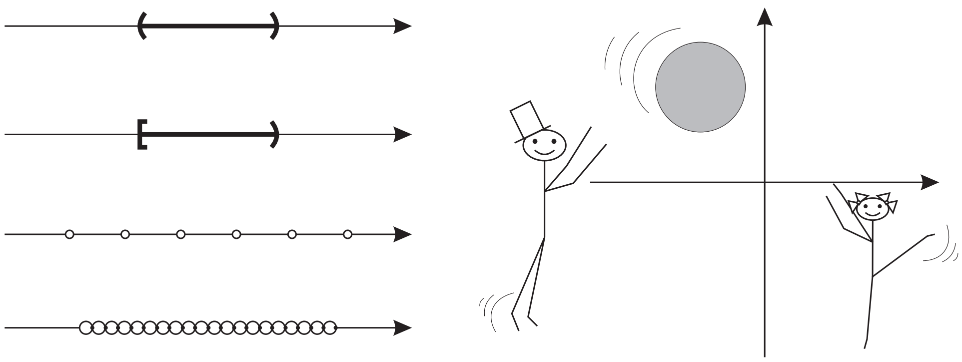
Топология Зарисского $\tau_z = \{U \subset R : U = \emptyset \bigvee U = R \bigvee R \setminus U$ конечно $\}$.

Пространство (R^1, τ_ω)**,**

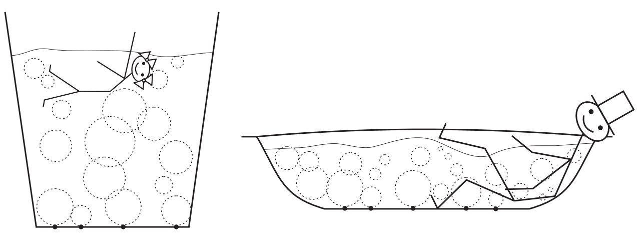
где $\tau_\omega = \{U \subset R : U = \emptyset \bigvee U = R \bigvee R \setminus U$ конечно $\bigvee R \setminus U$ счетно $\}$.

Плоскость с естественной топологией (R^2, τ_E)**.**

База $\mathcal{B}_E = \{O(P, \varepsilon) : P \in R^2 \bigwedge \varepsilon > 0\}$ - семейство всех открытых кругов на плоскости $O(P, r) = \{Q \in R^2 : r(Q, P) < \varepsilon\}$.



Плоскость Немыцкого $(R^2_+, \tau_{\mathcal{N}})$

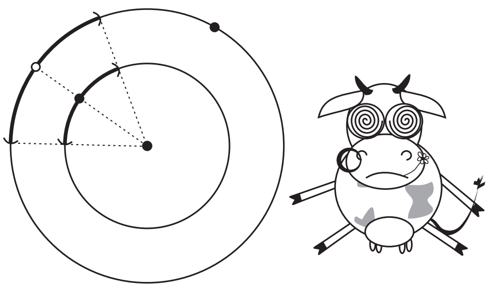


На верхней полуплоскости $R^2_+ = \{(x, y) \in R^2 : y \geq 0\}$ база топологии Немыцкого $\mathcal{B}_{\mathcal{N}}$ состоит из следующих множеств:

1) открытых кругов $O(P,r)$, полностью лежащих в R^2_+;

2) множеств вида $O_L(Q,r) = O(P,r) \cup \{Q\}$, где круг $O(P,r) \subset R^2_+$ касается прямой $L = \{(x,y) \in R^2 : y = 0\}$ в единственной точке $Q \in L$. Другими словами, Q – единственная точка прямой L, для которой $\rho(Q,P) \leq r$. Это пространство называют также пространством пузырей.

Двойная окружность Александрова



Пусть $X = S_1 \cup S_2$ – объединение двух концентрических окружностей и $\pi : S_1 \to S_2$ – проектирование из общего центра O внутренней окружности S_1 на внешнюю S_2.

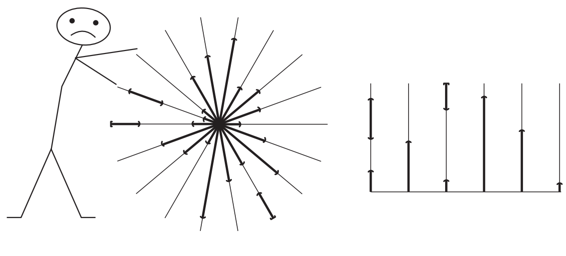
1) точки внешней окружности изолированы: если $x \in S_2$, то $\{x\}$ открыто;

2) базу в произвольной точке $x \in S_1$ образуют множества вида

$$Ox = (a,b)_{S_1} \cup (\pi(a), \pi(b))_{S_2} \setminus \{\pi(x)\},$$

где $(a,b)_{S_1}$ – криволинейный интервал на окружности S_1, содержащий точку x.

Еж колючести σ

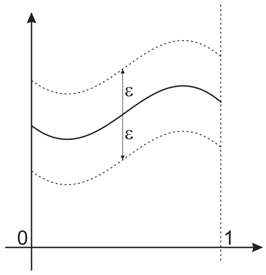


Пусть σ экземпляров отрезка [0,1], где σ – произвольное кардинальное число, склеены по одному концу – точке 0. Тогда склеенные точки 0 называются центром ежа, а отрезки [0,1] – его иголками. Базу $\mathcal{B}$ топологии образуют множества следующего вида:

1) лежащие на отдельных иголках интервалы (a, b) и полуинтервалы $(a, 1]$;

2) полуинтервалы $[0, a)$, выбранные независимо на каждой иголке и склеенные в точке 0. То есть $U \subset X$ является окрестностью центра O $\Leftrightarrow$ для каждой иголки [0,1], пересечение $U \cap [0,1]$ является окрестностью точки 0 в отрезке [0,1].

Пространство непрерывных функций на отрезке с топологией равномерной сходимости $(C[0,1], \tau)$**.**

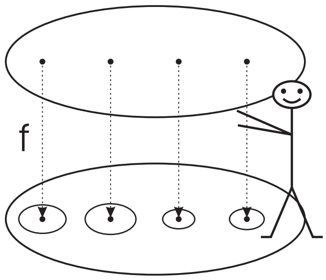


Для произвольных $f, g \in C[0,1]$ определим расстояние

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [0,1]} \mid f(x) - g(x) \mid .$$

Метрика ρ порождает топологию равномерной сходимости τ.

Пространство непрерывных функций с топологией поточечной сходимости $(C(X, Y), \tau_p)$

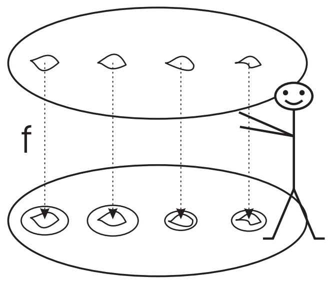


Пусть X и Y – топологические пространства, $C(X, Y)$ – множество непрерывных отображений из X в Y. Базу $\mathcal{B}_p$ образуют множества вида

$$O(x_1, ..., x_k, U_1, ..., U_k) = \{f \in C(X, Y) : f(x_1) \in U_1, ..., f(x_k) \in U_k\},$$

где $x_1, ..., x_k \in X$ – конечный набор точек и $U_1, ..., U_k$ – произвольные открытые в Y множества.

Пространство непрерывных функций с компактно-открытой топологией $(C(X,Y),\tau_c)$

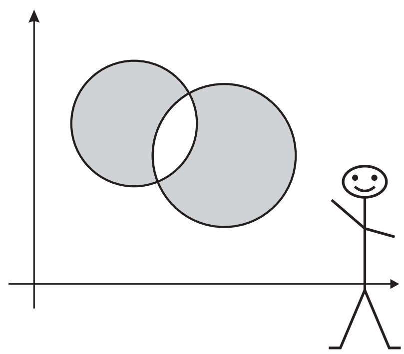


Базу $\mathcal{B}_c$ образуют множества вида

$$O(F_1,...,F_k,U_1,...,U_k)=\{f\in C(X,Y):f(F_1)\subset U_1,...,f(F_k)\subset U_k\},$$

где $F_1,...,F_k\subset X$ компактны и и $U_1,...,U_k\subset Y$ открыты.

Пространство дисков (X,τ)



Пусть $X=\{D(P,\varepsilon):P\in R^2\vee\varepsilon>0\}$ - множество замкнутых дисков положительного радиуса $D(P,\varepsilon)=\{Q\in R^2:r(P,Q)\le\varepsilon\}$ на плоскости R^2. Для произвольных $D_1,D_2\in X$ расстояние между ними определим как площадь симметрической разности:

$$\rho(D_1,D_2)=mes((D_1\setminus D_2)\cup(D_2\setminus D_1)).$$

База топологии $\mathcal{B}=\{O_\rho(D,\varepsilon):\varepsilon>0\}$ - семейство ε - окрестностей в этой метрике.

Рассмотрим топологические свойства этих пространств.

Определение. Топология τ слабее, чем топология σ (σ сильнее, чем τ), если семейство τ является подсемейством семейства σ: $\tau \prec \sigma \Leftrightarrow \tau \subseteq \sigma$.

Введенное отношение является частичным порядком на множестве топологий, которые можно определить на данном множестве X. Если ни одна из двух топологий не является более слабой, чем другая, то говорят, что они не сравнимы между собой.

Предложение 2 $\tau_e \prec \tau_s$ *и* $\tau_e \neq \tau_s$.

Доказательство. Пусть $U \in \tau_e$. Тогда U можно представить в виде объединения интервалов в силу определения топологии τ_e. Каждый интервал можно представить в виде $(a,b) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[a+\frac{1}{i}, b)$. Но тогда и само U можно представить в виде объединения открытых вправо полуинтервалов. Следовательно, $U \in \tau_s$. Остается заметить, что $[0,1) \in \tau_s$ и $[0,1) \notin \tau_e$.

Предложение 3 $\tau_z \prec \tau_e$ *и* $\tau_z \neq \tau_e$.

Доказательство. Пусть $U \in \tau_z$. Тогда $U = \emptyset$, $U = R^1$ или $U = R^1 - \{x_1, ..., x_k\}$ для конечного множества $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq R^1$ в силу определения топологии Зарисского. Имеем $\emptyset \in \tau_e$ и $R^1 \in \tau_e$ по определению топологии. Пусть $x_1 < ... < x_k$. Но тогда $U = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup ... \cup (x_k, \infty)$ принадлежит τ_e в силу определения естественной топологии. С другой стороны, $(0,1) \in \tau_e$ и $(0,1) \notin \tau_z$.

Предложение 4 *Топологии* τ_e *и* τ_ω *не сравнимы между собой.*

Доказательство. С одной стороны $(0,1) \in \tau_e$ и $(0,1) \notin \tau_\omega$, а с другой $R^1 - Q \in \tau_\omega$ и $R^1 - Q \notin \tau_e$.

Задания для самоконтроля

1. Сравнить каждую пару введенных на прямой и на плоскости топологий.
2. Существуют ли среди введенных нами пространств пространства, имеющие конечную базу? Не имеющие конечной базы?
3. Существуют ли среди введенных нами пространств пространства, имеющие счетную базу? Не имеющие счетной базы?
4. Построить на прямой R непересекающиеся счетные базы. Сколько непересекающихся баз может существовать?
5. Верно ли, что если семейства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{D}$ не являются базами в R, то их объединение $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ тоже не будет базой?
6. Верно ли, что если семейство $\mathcal{B}$ не является базой в R, а семейство $\mathcal{D}$ конечно, то объединение $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ тоже не будет базой?

7. Верно ли, что если семейство $\mathcal{B}$ является базой в R, а семейство $\mathcal{D}$ конечно, то разность $\mathcal{B} \setminus \mathcal{D}$ будет базой?
8. Повторить все вопросы для локальной базы на прямой.
9. Повторить все вопросы для других определенных выше пространств.

3 Элементарные операции в топологических пространствах

Теорема 3.1 *Маша ела кашу.*

Доказательство. Каша была. Сейчас её нет. Значит, её съели. Но кто же будет есть эту гадость, кроме Бедной Маши, у которой опять отобрали стипендию?

Другими словами, внутри каждого мира должна быть своя динамика. Для её появления в топологических пространствах мы введём две основные операции: вычисление внутренности и замыкания. Естественным образом они порождают третью – вычисление границы, а потом, размножаясь в геометрической прогрессии, – всё богатство и многообразие топологической терминологии, шокирующее неспециалиста и не свойственное никакой другой области математики, кроме общей топологии.

Пусть в дальнейшем Ox — произвольная окрестность точки x в топологическом пространстве (X, τ), то есть произвольное множество из семейства τ, содержащее x. На языке окрестностей Ox можно выделить следующие три типа точек для каждого множества $U \subseteq X$.

Определение. Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества U, если существует окрестность Ox такая, что $Ox \subseteq U$. Множество внутренних точек называется внутренностью множества U в пространстве X:

$< U >_X = \{x \in U : \exists Ox(Ox \subseteq U)\}$.

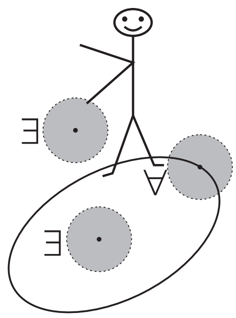
(!) Ox — окрестность в X.

Определение. Точка $x \in X$ называется внешней точкой множества U, если существует окрестность Ox такая, что $Ox \cap U = \emptyset$.

Определение. Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества U, если любая окрестность Ox пересекается с U и с $X \setminus U$. Множество граничных точек называется границей множества U в пространстве X:

$Bd_X U = \{x \in X : \forall Ox(Ox \cap U \neq \emptyset \wedge Ox \cap (X \setminus U) \neq \emptyset)\}$.

(!) x – граничная точка $\Leftrightarrow$ x не внутренняя и не внешняя точка.



Определение. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества U, если любая окрестность Ox пересекается с U. Множество точек прикосновения называется замыканием множества U в пространстве X:

$[U]_X = \{x \in X : \forall Ox (Ox \cap U \neq \emptyset)\}$.

(!) x — точка прикосновения $\Leftrightarrow$ x — внутренняя точка или граничная точка.

Определение. Множество $U \subseteq X$ называется всюду плотным в X, если $[U]_X = X$.

Определение. Множество $U \subseteq X$ называется нигде не плотным в X, если $< [U]_X >_X = \emptyset$.

Определение. Пространство X называется сепарабельным, если в X существует счетное всюду плотное множество.

Задания для самоконтроля

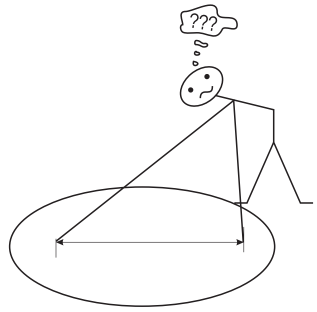
1. Пусть имеется некоторый набор подмножеств прямой: конечное множество $\{1, 2, 3\}$, множество натуральных чисел N, рациональных чисел Q, иррациональных чисел $R \setminus Q$, отрезок $[0, 1]$, интервал $(0, 1)$, последовательности $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\frac{-1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ и $\{\frac{-1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ и их произвольные объединения. Определить мощность каждого из этих множеств, найти внутренность, замыкание и границу в каждой из введенных на прямой топологий. Определить, будут ли они всюду плотными и нигде не плотными. Произвольные попарные произведения этих множеств рассмотреть на плоскости и в пространстве Немыцкого.
2. Существуют ли среди введенных нами пространств сепарабельные?
3. Может ли график отображения $f : R \to R$ быть всюду плотным подмножеством плоскости?

4 Метризуемость

Теорема 4.1 *Мама мыла раму.*

Доказательство. Рама была грязная. Сейчас она чистая. Значит, её вымыли. Папа пил пиво. Маша учила уроки. Вовочка бегал по двору. Но кто же тогда мог вымыть раму, кроме бедной мамы, на которую опять свалили всю домашнюю работу?

Выясним теперь, из чего состоит ближайшее окружение топологических пространств. Оказывается, ближайшими их родственниками являются метрические пространства. Как это часто бывает и в живой природе, за широкой спиной метрических пространств математики долгое время не желали замечать топологические. В конце концов, последние заставили себя признать. Они отстояли свой суверенитет и своё жизненное пространство – общую топологию. При этом они поглотили метрические пространства, объявили их своей собственной частью. Воистину, поглощение себе подобных встречается не только в живой природе!



Мы покажем, что каждое метрическое пространство можно рассматривать как топологическое. В то же время существуют топологические пространства, в которых нельзя определить согласованную с топологией метрику. В этом смысле класс топологических пространств шире, чем класс метрических.

Определение. Отображение $f : X^2 \to [0, \infty)$ называется метрикой на множестве X, если для любых точек $x, y, z \in X$ выполняются следующие условия:

1) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) симметричность: $f(x, y) = f(y, x)$;

3) аксиома треугольника: $f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z)$.

Как правило, метрика обозначается буквами r или ρ.

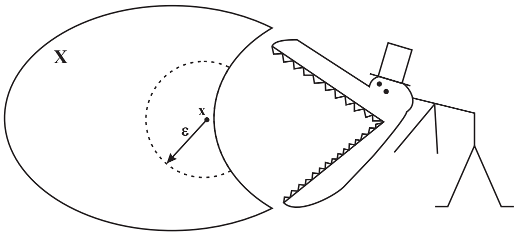
Определение. Метрическим пространством называется пара (X, ρ), где X — произвольное множество, а ρ — метрика на этом множестве.

Для краткости мы будем иногда обозначать метрическое пространство одной буквой: $X = (X, \rho)$. Будем внимательны со следующим тривиальным на первый взгляд определением.

Определение. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Тогда ε – окрестностью точки x в пространстве X называется множество

$O_X(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$.

(!) Точки y выбираются только из X, и больше – ниоткуда.



Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Метрика ρ порождает топологию τ_ρ на множестве X, если семейство всех ε-окрестностей $\mathcal{B}_\rho = \{O_X^\rho(x, \varepsilon) : x \in X \wedge \varepsilon > 0\}$ является базой топологии τ_ρ.

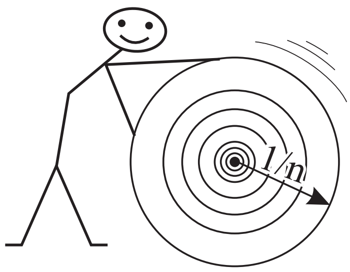
Иногда говорят, что множество U открыто в метрическом пространстве (X, ρ), если $U \in \tau_\rho$. Очевидно,

$U \in \tau_\rho \Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 (O_X^\rho(x, \varepsilon) \subset U)$.

(!) ε-окрестности точек в метрических пространствах являются открытыми множествами.

Определение. Топологическое пространство (X, τ) называется метризуемым, если на множестве X можно определить метрику ρ, порождающую топологию τ.

(!) В произвольной точке метризуемого пространства $x \in X$ существует счетная база $\mathcal{B}(x) = \{O_X^\rho(x, \frac{1}{n}) : n \in N\}$.



(!) Всякие две различные точки x и y в метризуемом пространстве X имеют непересекающиеся окрестности $O_X^\rho(x, \frac{\varepsilon}{2})$ и $O_X^\rho(y, \frac{\varepsilon}{2})$, где $\varepsilon = \rho(x, y)$.

Выясним, какие из определенных выше топологических пространств являются метризуемыми.

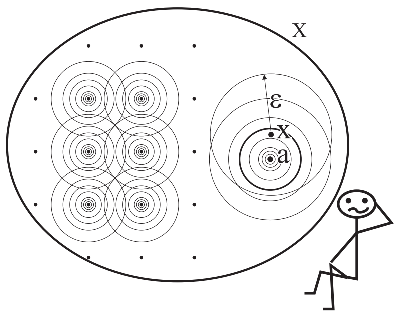
Прямая R метризуема. Стандартная метрика $\rho_e(x, y) = | x - y |$ порождает естественную топологию τ_e.

Плоскость R^2 метризуема. Метрика $\rho(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}$ порождает естественную топологию τ_E.

Дискретное пространство X метризуемо. Дискретная метрика $\rho_d(x, y) = 1(x \neq y) \vee 0(x = y)$ порождает дискретную топологию τ_d.

Пространство Зарисского, антидискретное пространство в случае $|X| > 1$, (R, τ_ω) и склеенное двоеточие не метризуемы, так как в них не существует дизъюнктных непустых открытых множеств.

Еж с бесконечным числом иголок не метризуем. Покажем, что никакое счетное семейство окрестностей центра $\{U_i\}_{i \in N}$ не является базой в точке O. Действительно, выберем попарно различные иголки $[0, 1]_i$ и в каждой из них зафиксируем единственную точку $x_i \in (0, 1]_i \cap U_i$. Тогда окрестность центра $X \setminus \{x_i\}_{i \in N}$ не содержит множеств U_i.



Теорема 4.2 *В сепарабельном метрическом пространстве* (X, ρ) *существует счетная база.*

Доказательство. Пусть множество A счетно и всюду плотно в X. Тогда семейство ε – окрестностей $\mathcal{B} = \{O_X(a, \varepsilon) : a \in A \bigwedge \varepsilon \in Q_+\}$ является счетной базой.

Действительно, так как отображение $f : \mathcal{B} \to A \times Q_+$, определенное по правилу $f(O_X(a, \varepsilon)) = (a, \varepsilon)$, взаимно однозначно, то $|\mathcal{B}| = |A \times Q_+| = |A| \times |Q_+| = \omega \times \omega = \omega$.

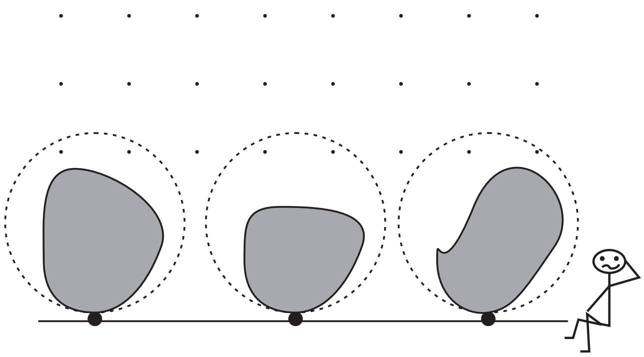
Для произвольной точки $x \in X$ и ее окрестности Ox имеем $O_X(x, \delta) \subseteq Ox$ для некоторого $\delta > 0$. Выберем $\varepsilon \in Q_+$, $\varepsilon < \delta$ и $a \in A \cap O_X(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Но тогда $x \in O_X(a, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq O_X(x, \varepsilon) \subseteq Ox$.

Предложение 5 *Пространство "прямая Зоргенфрея"не метризуемо.*

Доказательство. Множество Q счетно и всюду плотно в X. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная база. Для каждой точки $x \in R$ найдется такое $U_x \in \mathcal{B}$, что $x \in U_x \subseteq [x, x+1)$. При этом $x \neq y$ влечет $U_x \neq U_y$. Так как $\{U_x : x \in R\} \subseteq \mathcal{B}$, то $|\mathcal{B}\,| \geq |R| = C$.

Аналогично доказывается следующий результат:

Предложение 6 *Пространство "плоскость Немыцкого"не метризуемо.*



Доказательство. Множество $Q \times Q_+$ счетно и всюду плотно в X. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная база. Для каждой точки $x \in L$ найдется $U_x \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in U_x \subseteq O_L(x, 1)$. Но тогда $x \neq y$ влечет $U_x \neq U_y$. Так как $\{U_x : x \in L\} \subseteq \mathcal{B}$, то $|\mathcal{B}| \geq \mathcal{C}$.

Задачи для самоконтроля

1. Являются ли метриками отображения $f : R^2 \to [0, \infty)$, определённые для произвольных точек $x = (x^1, x^2)$ и $y = (y^1, y^2)$ плоскости R^2 по следующим правилам:

1) $f_1(x, y) = 0$, если $x = y$ и $f_1(x, y) = 1$, если $x \neq y$ (дискретная метрика).

2) $f_2(x, y) = \max\{|\ x^1 - y^1\ |, |\ x^2 - y^2\ |\}$ (метрика максимума).

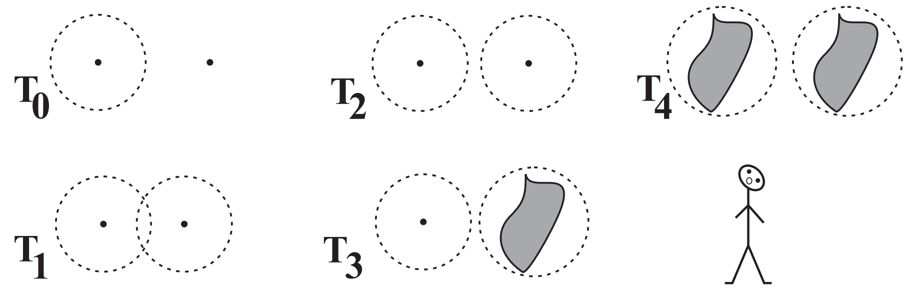
3) $f_3(x, y) =|\ x^1 - y^1\ | + |\ x^2 - y^2\ |$ (метрика таксиста).

4) $f_4(x, y) = (|\ x^1 - y^1\ |^2 + |\ x^2 - y^2\ |^2)^{\frac{1}{2}}$ (естественная метрика).

5) $f_i^*(x, y) = \min\{f_i(x, y), 1\}$ для $i = 1, 2, 3, 4$. (ограниченная метрика).

6) Изобразить $\varepsilon-$ окрестности точек в каждой из перечисленных выше метрик.

5 Аксиомы отделимости



Для того, чтобы продемонстрировать естественность создаваемого нами идеального мира, мы хотим показать, что его свойства в точности соответствуют свойствам реального мира. После осознания своего собственного "я", себе подобных и попытки поглощения их, весьма успешной в нашем случае, следующей естественной потребностью живых организмов является стремление к независимости. В топологии оно привело к возникновению аксиом отделимости.

Определение. Пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, если для всяких двух различных точек $x, y \in X$ хотя бы у одной из них существует окрестность, не содержащая другую точку.

$X \in T_0 \Leftrightarrow \forall x \in X \forall y \in X (x \neq y \Rightarrow (\exists Ox(y \notin Ox)) \bigvee (\exists Oy(x \notin Oy)))$.

Антидискретное пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 $\Leftrightarrow$ множество X является одноточечным.

Определение. Пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1, если для всяких двух различных точек $x, y \in X$ у каждой из них существует окрестность, не содержащая другую точку.

$X \in T_1 \Leftrightarrow \forall x \in X \forall y \in X (x \neq y \Rightarrow (\exists Ox(y \notin Ox)) \bigwedge (\exists Oy(x \notin Oy)))$.

Склеенное двоеточие удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, но не удовлетворяет T_1. Каждое одноточечное множество замкнуто $\Leftrightarrow$ пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_1.

Определение. Пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_2 (хаусдорфово), если для всяких двух различных точек $x, y \in X$ существуют непересекающиеся окрестности этих точек.

$X \in T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \forall y \in X (x \neq y \Rightarrow \exists Ox \exists Oy (Ox \cap Oy = \emptyset))$.

Пространство Зарисского и пространство (R, τ_ω) удовлетворяют аксиоме отделимости T_1, но не удовлетворяют T_2.

Определение. Пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_3, если для всякой точки $x \in X$ и не содержащего ее замкнутого множества $F \subseteq X$ существуют непересекающиеся окрестности.

(!) Состоящее из одной точки множество не всегда замкнуто.

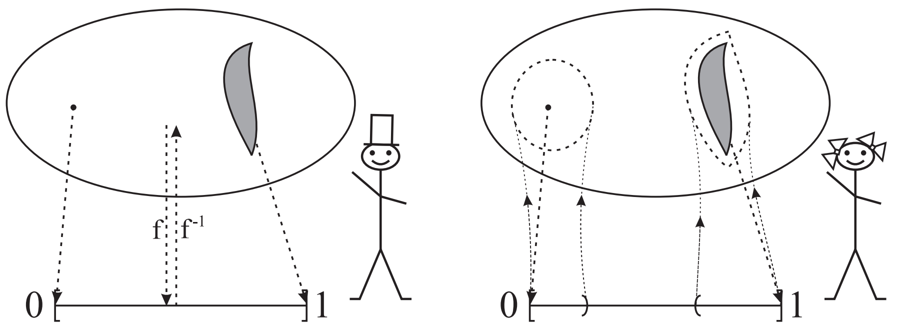
Определение. Пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости T_4, если для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств $F, G \subseteq X$ существуют непересекающиеся окрестности.

Определение. Пространство X называется регулярным, если оно удовлетворяет одновременно аксиомам отделимости T_1 и T_3.

Определение. Пространство X называется нормальным, если оно удовлетворяет одновременно аксиомам отделимости T_1 и T_4.

В отличие от всех остальных внешний характер (за пределами X) носит следующее определение.

Определение. Пространство X называется вполне регулярным, если для каждой точки $x \in X$ и не содержащего ее замкнутого множества $F \subseteq X$ существует непрерывное отображение $f : X \to [0,1]$ такое, что $f(x) = 0$ и $f(F) = 1$.



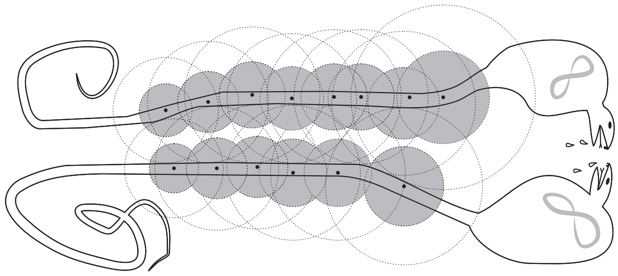
Говорят также, что пространство X принадлежит классу отделимости T_i и пишут $X \in T_i$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4$. При этом, если $X \in T_1$, то

X нормально $\Rightarrow X$ вполне регулярно$\Rightarrow X$ регулярно $\Rightarrow X \in T_3 \Rightarrow X \in T_2 \Rightarrow X \in T_1 \Rightarrow X \in T_0$.
Ox и $Oy = X \setminus [Ox]$ – непересекающиеся окрестности.

Предложение 7 *Вполне регулярное пространство X регулярно.*

Доказательство. Пусть точка $x \in X$ не принадлежит замкнутому множеству $F \subseteq X$. Если существует непрерывное отображение $f : X \to [0,1]$ такое, что $f(x) = 0$ и $f(F) = 1$, то окрестности $Ox = f^{-1}[0, \frac{1}{3})$ и $OF = f^{-1}(\frac{2}{3}, 1]$ не пересекаются.

Теорема 5.1 *Метрическое пространство X нормально.*



Доказательство. Мы уже проверили хаусдорфовость X. Пусть $F, G \subseteq X$ – непересекающиеся замкнутые множества. Для каждой точки $x \in F$ найдется $\varepsilon_x > 0$ такое, что $O(x, \varepsilon_x) \cap G = \emptyset$ и для каждой точки $y \in G$ найдется $\varepsilon_y > 0$ такое, что $O(y, \varepsilon_y) \cap F = \emptyset$. Но тогда окрестности $OF = \bigcup_{x \in F} O(x, \frac{\varepsilon_x}{2})$ и $OG = \bigcup_{y \in G} O(y, \frac{\varepsilon_y}{2})$ не пересекаются. Действительно, пусть $O(x, \frac{\varepsilon_x}{2}) \cap O(y, \frac{\varepsilon_y}{2}) \neq \emptyset$ для некоторых точек $x \in F$ и $y \in G$. Но тогда $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$, очевидно, влечет $x \in O(y, \varepsilon_y)$ и наоборот.

Нам остается исследовать только неметризуемые пространства, не рассмотренные ранее.

Предложение 8 *Пространство "прямая Зоргенфрея"нормально.*

Доказательство. Очевидно, $X \in T_1$. Пусть $F, G \subseteq X$ — непересекающиеся замкнутые множества. Для каждой точки $x \in F$ найдется $\varepsilon_x > x$ такое, что $[x, \varepsilon_x) \cap G = \emptyset$ и для каждой точки $y \in G$ найдется $\varepsilon_y > y$ такое, что $[y, \varepsilon_y) \cap F = \emptyset$. Но тогда окрестности $OF = \bigcup_{x \in F} [x, \varepsilon_x)$ и $OG = \bigcup_{y \in G} [y, \varepsilon_y)$ не пересекаются. Действительно, пусть $[x, \varepsilon_x) \cap [y, \varepsilon_y) \neq \emptyset$ для некоторых точек $x \in F$ и $y \in G$. Но тогда $x < y$, очевидно, влечет $y \in [x, \varepsilon_x)$ и наоборот.

Более тонкий вопрос об отделимости плоскости Немыцкого мы разрешим несколько позже.

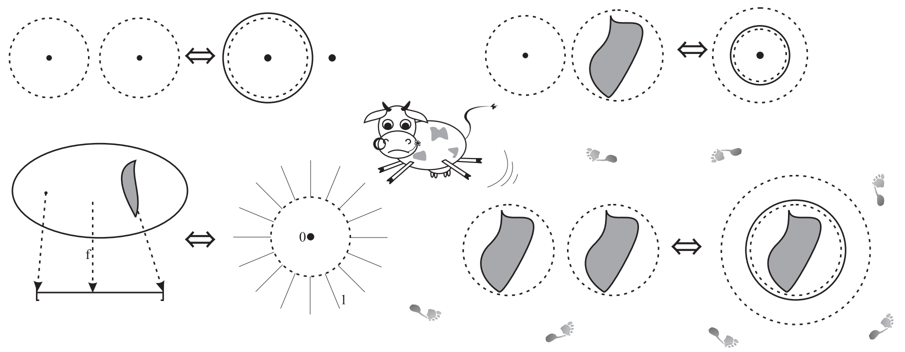
Предложение 9 *Следующие условия эквивалентны:*

1) $X \in T_2 \Leftrightarrow$ для всяких двух различных точек $x, y \in X$ найдется окрестность $Ox \subseteq X$ такая, что $y \notin [Ox]_X$;

2) $X \in T_3 \Leftrightarrow$ для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $Ox \subseteq X$ найдется окрестность $\check{O}x \subseteq X$ такая, что $[\check{O}x]_X \subseteq Ox$;

3) X вполне регулярно $\Leftrightarrow$ для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $Ox \subseteq X$ найдется непрерывное отображение $f : X \to [0, 1]$ такое, что $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$ для каждой точки $y \in X \setminus Ox$.

4) $X \in T_4 \Leftrightarrow$ для любого замкнутого множества $F \subseteq X$ и произвольной его окрестности $OF \subseteq X$ найдется окрестность $\check{O}F \subseteq X$ такая, что $[\check{O}F]_X \subseteq OF$.



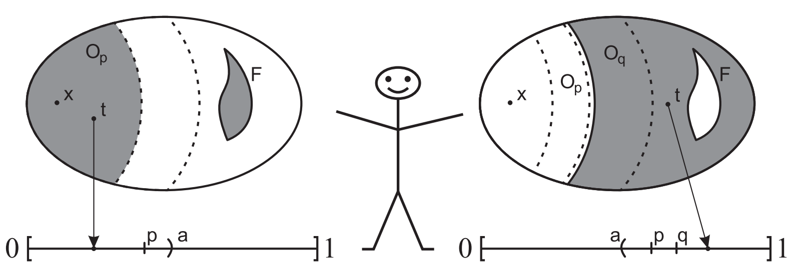
Доказательство. Рассмотрим (1). Все остальные пункты доказываются абсолютно аналогично.

Пусть $x, y \in X$ — различные точки. Если существуют непересекающиеся окрестности Ox и Oy, то $y \notin [Ox]$. Если выполняется условие в правой части, то есть найдется Ox, такая что $y \notin [Ox]$, а значит, найдется Oy, непересекающаяся с Ox.

Предложение 10 *Пусть при отображении $f : X \to [0,1]$ множества $f^{-1}[0,a)$ и $f^{-1}(a,1]$ открыты для любого $a \in (0,1)$. Тогда f непрерывно.*

Доказательство. Для каждого интервала $(a,b) \subseteq [0,1]$ прообраз $f^{-1}(a,b) = f^{-1}[0,b) \cap f^{-1}(a,1]$ открыт. Но интервалы и содержащие концы отрезка полуинтервалы образуют базу на отрезке.

Теорема 5.2 *(Лемма Урысона). Нормальное пространство X вполне регулярно.*



Доказательство. Положим $Q \cap [0,1] = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$,где $q_0 = 0$ и $q_1 = 1$. Пусть точка $x \in X$ не принадлежит замкнутому множеству $F \subseteq X$. Построим окрестности O_{q_n} точки x по следующему правилу.

Положим $[O_{q_0}] \cap F = \emptyset$ и $O_{q_1} = X \setminus F$.

Пусть O_{q_i} построено для всех $i < n$. Выберем среди чисел $\{q_i : i < n\}$ самое большое число q_{i_0} и самое маленькое q_{i_1} такие, что $q_{i_0} < q_n < q_{i_1}$. По индукционному предположению $[O_{q_{i_0}}] \subseteq O_{q_{i_1}}$. В силу нормальности существует O_{q_n} такая, что $[O_{q_{i_0}}] \subseteq O_{q_n} \subseteq [O_{q_n}] \subseteq O_{q_{i_1}}$.

Пусть все O_q построены так, что $q < p$ влечет $[O_q] \subseteq O_p$. Определим отображение $f : X \to [0,1]$ по следующему правилу: $f(t) = 1$, если $t \notin O_1$ и $f(t) = \inf\{q : t \in O_q\}$ в противном случае.

Если $t \in f^{-1}[0,a)$, то $f(t) < p < a$ для некоторого $p \in Q$. Так как $f(t) < p$, то $t \in O_p$ в силу определения f. Для любого $s \in O_p$ имеем $f(s) \leq p$. Следовательно, $t \in O_p \subseteq f^{-1}[0,a)$.

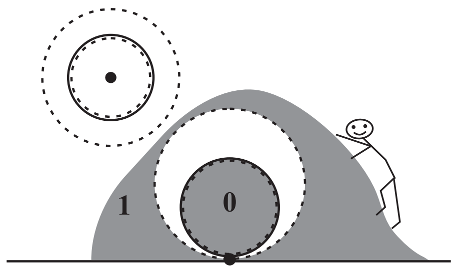
Если $t \in f^{-1}(a,1]$, то $f(t) > p > q > a$ для некоторых $p,q \in Q$. Так как $f(t) > p$, то $t \notin O_p$ и $t \notin [O_q]$. Если $s \notin O_q$, то $f(s) \geq q$. Но тогда $t \in X \setminus [O_q] \subseteq f^{-1}(a,1]$.

Так как $f(x) = 0$, $f(F) = 1$ и f непрерывно в силу предыдущего предложения, теорема доказана.

Заменив в этом построении точку x на произвольное замкнутое множество G и повторив его дословно, получим следующий результат.

Теорема 5.3 *Пусть пространство X нормально. Тогда для произвольных замкнутых непересекающихся множеств G и F из X найдется непрерывное отображение $f : X \to [0,1]$ такое, что $f(G) = 0$ и $f(F) = 1$.*

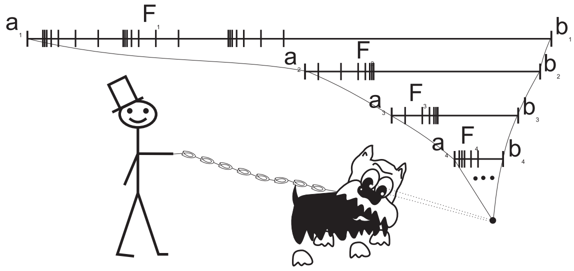
Предложение 11 *Плоскость Немыцкого вполне регулярна.*



Доказательство. В силу нормальности плоскости R^2 и предложения 7 достаточно рассмотреть произвольную точку $x \in L$ и ее окрестность вида $O_L(x,r)$ в плоскости Немыцкого. Пусть $0 < r' < r$. Тогда замкнутые в верхней полуплоскости $R^2_+ = \{(t,s) \in R^2 : s > 0\}$ множества $G = [O_L(x,r') \cap R^2_+]_{R^2_+}$ и $F = R^2_+ \setminus O_L(x,r)$ не пересекаются. В силу предыдущей теоремы существует непрерывное отображение $f : R^2_+ \to [0,1]$ такое, что $f(G) = 0$ и $f(F) = 1$. Доопределим f до непрерывного отображения $\tilde{f} : X \to [0,1]$ следующим образом: $\tilde{f}(x) = 0$ и $\tilde{f}(y) = 1$ для любой точки $y \in L \setminus \{x\}$.

Мы рассмотрим два доказательства того, что плоскость Немыцкого не нормальна. Первое из них более геометрическое.

Предложение 12 *Прямую R нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств.*



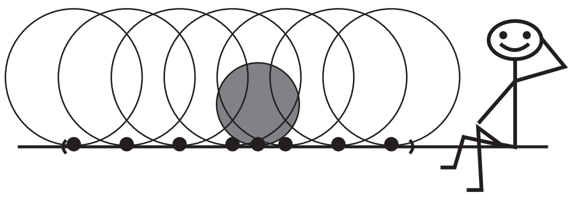
(!) То есть R является множеством второй категории.

Доказательство. Пусть множество F_n нигде не плотно в R для каждого $n \in N$. Построим вложенную последовательность отрезков по следующему правилу: $[a_1, b_1]$ не пересекается с F_1. Если построен $[a_n, b_n]$, то найдется $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, не пересекающийся с F_{n+1}. Произвольная точка $x \in \bigcap_{n \in N} [a_n, b_n]$ не принадлежит ни одному из множеств F_n.

Предложение 13 *Множество иррациональных чисел $\mathcal{I}$ является множеством второй категории.*

Доказательство. Если $\mathcal{I}$ можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств: $\mathcal{I} = \bigcup_{n \in N} F_n$, то и прямую R можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств: $R = \bigcup_{n \in N} F_n \cup \bigcup_{n \in N} \{q_n\}$, где $Q = \{q_n : n \in N\}$.

Предложение 14 *Плоскость Немыцкого не нормальна.*

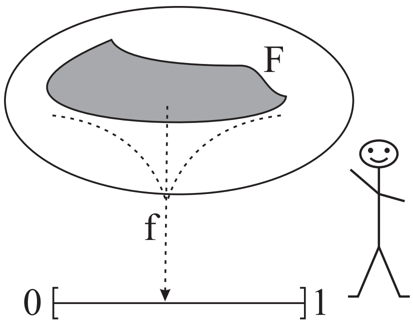


Доказательство. Покажем, что замкнутые подмножества Q и $\mathcal{I}$ прямой L нельзя разделить непересекающимися окрестностями в плоскости Немыцкого. Рассмотрим произвольную окрестность $O\mathcal{I}$.

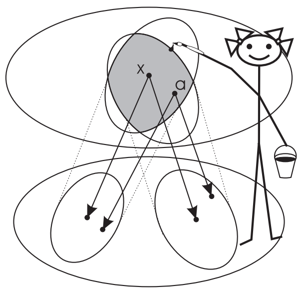
По определению топологии для каждой точки $x \in \mathcal{I}$ найдется такое $r_x \in Q_+$, что $O_L(x, r_x) \subseteq O\mathcal{I}$. Для каждого $r \in Q$ обозначим $F_r = \{x \in \mathcal{I} : r_x = r\}$. В силу предыдущего утверждения найдутся интервал $(a, b) \subseteq L$ и множество F_{r_0}, всюду плотное в этом интервале в естественной топологии прямой R. Но тогда геометрически очевидно, что для произвольных $y \in (a, b) \cap Q$ и $r > 0$ окрестность $O_L(y, r)$ пересекает множество $\bigcup_{x \in F_{r_0}} O_L(x, r_0)$ а, следовательно, и $O\mathcal{I}$.

Приведем теоретико-множественное доказательство ненормальности плоскости Немыцкого.

Теорема 5.4 *(Титце – Урысона). Пусть F - замкнутое подмножество нормального пространства X. Тогда для произвольного непрерывного отображения $f : F \to [0, 1]$ существует непрерывное продолжение $\tilde{f} : X \to [0, 1]$.*



Предложение 15 *Пусть множество A всюду плотно в пространстве X, а пространство Y хаусдорфово. Тогда, если отображения $f, g : X \to Y$ непрерывны и различны, то $f(a) \neq g(a)$ для некоторой $a \in A$.*



Доказательство. Пусть различные образы точки $x \in X$ имеют непересекающиеся окрестности $O = Of(x)$ и $O' = Og(x)$ в Y. Тогда найдется $a \in f^{-1}O \cap g^{-1}O' \cap A$. Так как $f(a) \in O$ и $g(a) \in O'$, то $f(a) \neq g(a)$.

Предложение 16 *Плоскость Немыцкого не нормальна.*

Доказательство. Так как $|L| = C$, то существует $C^C = 2^C$ различных отображений из L в $I = [0,1]$. Так как L дискретно в индуцированной топологии, то каждое из них непрерывно. Если X нормально, то все они имеют непрерывные продолжения на X. Если отображения $f, g : X \to I$ непрерывны и различны, то $f/A \neq g/A$ для $A = Q \times Q_+$. Следовательно, $|C(A,I)| \geq |C(X,I)| \geq 2^C$. Но так как A счетно, то всех отображений из A в I существует не более чем $C^\omega = C < 2^C$.

Задачи для самоконтроля

1. Показать, что квадрат пространства прямая Зоргенфрея вполне регулярен, но не нормален.

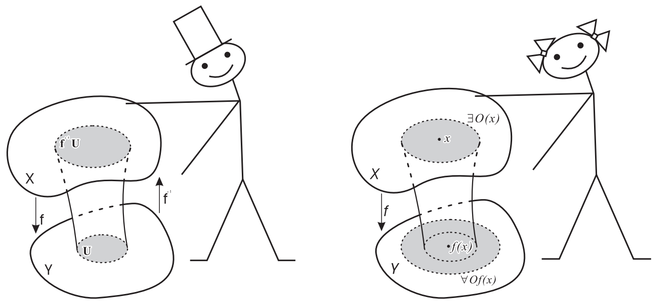
6 Непрерывные отображения

До появления топологических пространств все стандартные определения непрерывного отображения являлись, фактически, незначительными вариациями на тему так называемого определения на языке $\varepsilon - \delta$. Общей топологии удалось взглянуть на это одно из центральных в математике понятий с новой стороны. Появился целый ряд эквивалентных, но существенно различающихся между собой по форме характеристик. Подобная ситуация представляется уникальной в естествознании, когда существенное расширение класса изучаемых объектов (появились топологические пространства) одновременно позволило существенно расширить изобразительные средства, которыми описываются эти объекты. Это еще раз говорит о необходимости концепции топологического пространства.

По-видимому, наиболее стандартным в топологии является следующее определение непрерывного отображения.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным, если прообраз любого открытого подмножества Y открыт в X:

$f : X \to Y$ непрерывно $\Leftrightarrow \forall U \subset Y (U$ открыто в $Y \Rightarrow f^{-1}U$ открыто в $X)$.



Оценим лаконичность и, одновременно, более широкую применимость этого определения в сравнении с определением на языке $\varepsilon - \delta$!

Теорема 6.1 *Пусть X и Y – топологические пространства и f – отображение X на Y. Следующие условия эквивалентны:*

1) f непрерывно;

2) прообраз любого замкнутого подмножества Y замкнут в X;

3) (условие Коши). Для любой точки $x \in X$ и произвольной окрестности ее образа $Of(x) \subseteq Y$ найдется такая окрестность $Ox \subseteq X$, что $f(Ox) \subseteq Of(x)$;

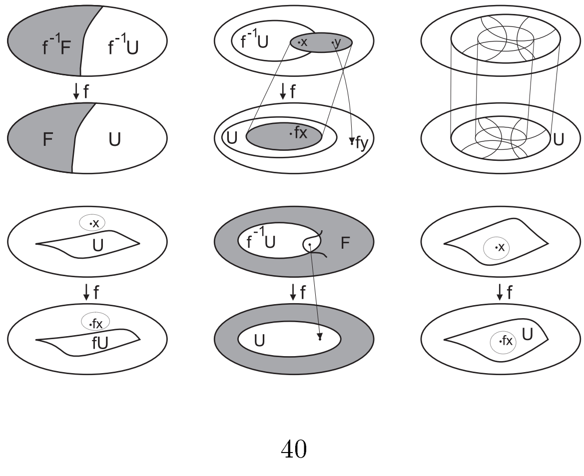
4) в Y существует такая база $\mathcal{B}$, что прообраз любого множества $U \in \mathcal{B}$ открыт в X;

5) для любого $U \subseteq X$ справедливо $f[U]_X \subseteq [fU]_Y$;

6) для любого $U \subseteq Y$ справедливо $[f^{-1}U]_X \subseteq f^{-1}[U]_Y$;

7) для любого $U \subseteq Y$ справедливо $< f^{-1}U >_X \supseteq f^{-1} < U >_Y$.

Доказательство.



$(1 \Leftrightarrow 2)$. Пусть $F \subset Y$ замкнуто. Тогда $U = Y \setminus F$ открыто и $f^{-1}U$ открыто в силу условия 1. Но $f^{-1}F = X \setminus f^{-1}U$. Действительно, $x \in f^{-1}F \Leftrightarrow f(x) \in F \Leftrightarrow f(x) \notin U \Leftrightarrow x \notin f^{-1}U$. Обратное рассуждение абсолютно аналогично.

$(1 \Rightarrow 3)$. Пусть $x \in X$ и $Of(x) \subset Y$ - произвольная окрестность. Тогда для $Ox = f^{-1}Of(x)$ имеем $f(Ox) = Of(x)$.

$(3 \Rightarrow 1)$. Пусть $U \subset Y$ открыто. Покажем, что произвольная точка $x \in f^{-1}U$ является внутренней. Для $Of(x) = U$ в силу условия Коши найдется такая окрестность $Ox \subset X$, что $f(Ox) \subset Of(x)$. Но тогда $Ox \setminus f^{-1}U$. Действительно, если $y \in Ox \setminus f^{-1}U$, то $f(y) \in f(Ox) \setminus U$.

$(1 \Rightarrow 4)$. Пусть $\mathcal{B}$ совпадает с топологией пространства Y.

$(4 \Rightarrow 1)$. Для произвольного открытого $U \subset Y$ рассмотрим $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{V \in \mathcal{B} : V \subset U\}$. По определению базы имеем $U = \bigcup \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$. Но тогда $f^{-1}U = \bigcup \{f^{-1}V : V \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ открыто как объединение открытых множеств.

$(1 \Rightarrow 5)$. Для произвольной точки $x \in [U]_X$ покажем, что $f(x) \in [f(U)]_Y$. Если $Of(x) \cap fU = \emptyset$ для некоторой окрестности $Of(x) \subset Y$, то $Ox \cap f^{-1}fU = \emptyset$ для $Ox = f^{-1}Of(x)$. Так как $U \subset f^{-1}fU$, то $Ox \cap U = \emptyset$.

$(5 \Rightarrow 1)$. Пусть $U \subset Y$ открыто и $F = Y \setminus U$. Для $G = f^{-1}F$ имеем $f^{-1}U \cap G = \emptyset$ и $f^{-1}U \cup G = X$. Более того, $f[G]_X \subset [fG]_Y = [F]_Y = F$. Если G не замкнуто, то $x \in [G]_X$ для некоторой точки $x \in f^{-1}U$. Но тогда $f(x) \in ff^{-1}U = U$ и $f(x) \in F$.

$(1 \Rightarrow 6)$. Для произвольной точки $x \in [f^{-1}U]_X$ условие $x \in f^{-1}[U]_Y$ эквивалентно $f(x) \in [U]_Y$. Но если $Of(x) \cap U = \emptyset$ для некоторой окрестности $Of(x) \subset Y$, то $Ox \cap f^{-1}U = \emptyset$ для $Ox = f^{-1}Of(x)$.

$(6 \Rightarrow 1)$. Пусть $U \subset Y$ открыто и $F = Y \setminus U$. Имеем $[f^{-1}F]_X \subset f^{-1}[F]_Y = f^{-1}F$. Но тогда $f^{-1}F$ замкнуто в X и $f^{-1}U$ открыто.

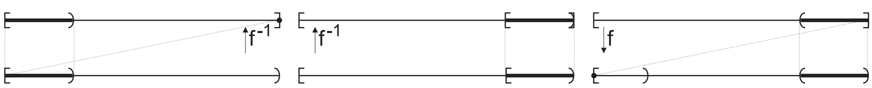
$(1 \Rightarrow 7)$. Если $x \in f^{-1} < U >_Y$, то $f(x) \in< U >_Y$ и $Of(x) \subset U$ для некоторой окрестности $Of(x) \subset Y$. Но тогда $Ox \subset f^{-1}U$ для $Ox = f^{-1}Of(x)$ и $x \in< f^{-1}U >_X$.

$(7 \Rightarrow 1)$. Пусть $U \subset Y$ открыто. Так как $< f^{-1}U >_X \supset f^{-1} < U >_Y = f^{-1}U$, то $f^{-1}U$ открыто в X.

Посмотрим как действуют эти критерии на конкретных примерах.

Предложение 17 *Отображение* $f : [0,1] \to [0,1)$ *по правилу* $f(x) = x$, *если* $x \neq 1$ *и* $f(1) = 0$ *не является непрерывным.*

Доказательство.



$\neg$ 1) полуинтервал $U = [0; \frac{1}{2})$ открыт в $Y = [0;1)$, но его прообраз $f^{-1}U = [0; \frac{1}{2}) \cup \{1\}$ не открыт в $X = [0;1]$, так как точка $\{1\}$ не является внутренней.

$\neg$ 2) полуинтервал $U = [\frac{1}{2};1)$ замкнут в $Y = [0;1)$, но его прообраз $f^{-1}U = [\frac{1}{2};1)$ не замкнут в $X = [0;1]$, так как содержит в замыкании точку $\{1\}$.

$\neg$ 3) для точки $x = 1$, окрестности образа $Of(x) = [0;1)$ и произвольной $Ox \subset X$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $(1-\varepsilon;1] \subset Ox$ по определению топологии метрического пространства. Но тогда $fOx \supset f(1-\varepsilon;1] = \{0\} \cup (1-\varepsilon;1)$ не лежит в $Of(x)$.

$\neg$ 4) пусть $\mathcal{B}$ - произвольная база в Y. Тогда $0 \in U \in [0;\frac{1}{2})$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$ и $f^{-1}U = U \cup \{1\}$ не открыто в X.

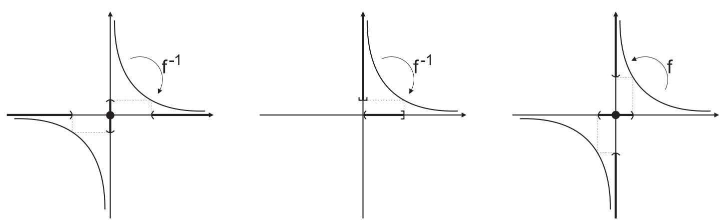
$\neg$ 5) пусть $U = [\frac{1}{2};1)$. Тогда $f[U]_X = \{0\} \cup [\frac{1}{2};1)$ не лежит в $[fU]_Y = [\frac{1}{2};1)$.

$\neg$ 6) пусть $U = [\frac{1}{2};1)$. Тогда $[f^{-1}U]_X = [\frac{1}{2};1]$ не лежит в $f^{-1}[U]_Y = [\frac{1}{2};1)$.

$\neg$ 7) пусть $U = [0;\frac{1}{2})$. Тогда $< f^{-1}U >_X = [0;\frac{1}{2})$ не содержит $f^{-1} < U >_Y = [0;\frac{1}{2}) \cup \{1\}$.

Предложение 18 *Отображение* $f : R \to R$ *по правилу* $f(x) = \frac{1}{x}$, *если* $x \neq 0$ *и* $f(0) = 0$ *не является непрерывным.*

Доказательство.



$\neg$ 1) интервал $U = (-1;1)$ открыт в Y, но его прообраз $f^{-1}U = (-\infty;-1) \cup \{0\} \cup (1;\infty)$ не открыт в X.

$\neg$ 2) полуинтервал $U = [1;\infty)$ замкнут в Y, но его прообраз $f^{-1}U = (0;1]$ не замкнут в X.

$\neg$ 3) для точки $x = 0$ рассмотрим окрестность образа $Of(x) = (-1;1)$. Для произвольной $Ox \subset X$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $(-\varepsilon;\varepsilon) \subset Ox$ по определению топологии метрического пространства. Но тогда fOx содержит $f(-\varepsilon;\varepsilon) = (-\infty;\frac{-1}{\varepsilon}) \cup \{0\} \cup (\frac{1}{\varepsilon};\infty)$ и не лежит в $Of(x)$.

$\neg$ 4) если $\mathcal{B}$ - произвольная база в Y, то $0 \in U \in (-1;1)$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$. Но тогда $0 \in f^{-1}U \setminus < f^{-1}U >_X$, так как $f^{-1}U \subset f^{-1}(-1;1) = (-\infty;-1) \cup \{0\} \cup (1;\infty)$.

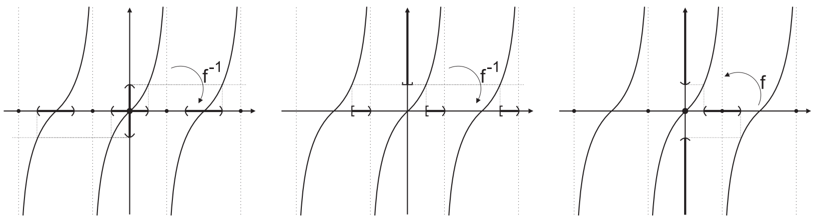
$\neg$ 5) пусть $U = (0;1]$. Тогда $f[U]_X = \{0\} \cup [1;\infty)$ не лежит в $[fU]_Y = [1;\infty)$.

$\neg$ 6) пусть $U = [1;\infty)$. Тогда $[f^{-1}U]_X = [0;1]$ не лежит в $f^{-1}[U]_Y = (0;1]$.

$\neg$ 7) пусть $U = (-1;1)$. Тогда $< f^{-1}U >_X = (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ не содержит $f^{-1} < U >_Y = (-\infty;-1) \cup \{0\} \cup (1;\infty)$.

Предложение 19 *Отображение $f : R \to R$ по правилу $f(x) = \tan(x)$, если $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z$ и и $f(x) = 0$ если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z$ не является непрерывным.*

Доказательство.



$\neg$ 1) интервал $U = (-1;1)$ открыт в Y, но его прообраз

$$f^{-1}U = \bigcup_{k \in N} (-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k) \cup \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}_{k \in N}$$

не открыт в X, так как точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$ не являются внутренними.

$\neg$ 2) полуинтервал $U = [1;\infty)$ замкнут в Y, но его прообраз $f^{-1}U = \bigcup_{k \in N} [\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k)$ не замкнут в X, так как имеет в дополнении предельные точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$.

$\neg$ 3) пусть $x = \frac{\pi}{2}$ и $Of(x) = (-1;1)$. Произвольная окрестность $Ox \subset X$ содержит интервал $(-\varepsilon;\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon < 1$. Но тогда fOx содержит $f(-\varepsilon;\varepsilon) = (-\infty; \tan(\frac{\pi}{2} + \varepsilon)) \cup (\tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon);\infty)$ и не лежит в $Of(x)$.

$\neg$ 4) если $\mathcal{B}$ - база в Y, то $0 \in U \subset (-1;1)$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$. Но тогда точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$ принадлежат $f^{-1}U$ и не являются внутренними в $f^{-1}U$, так как $f^{-1}U \subset f^{-1}(-1;1) = \bigcup_{k \in N} (-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k) \cup \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}_{k \in N}$.

$\neg$ 5) пусть $U = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$. Тогда $f[U]_X = \{0\} \cup [1;\infty)$ не лежит в $[fU]_Y = [1;\infty)$.

$\neg$ 6) пусть $U = [1;\infty)$. Тогда $[f^{-1}U]_X = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ не лежит в $f^{-1}[U]_Y = [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.

$\neg$ 7) пусть $U = (-1;1)$. Тогда точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi k$ принадлежат $f^{-1} < U >_Y$ и не принадлежат $< f^{-1}U >_X$.

Предложение 20 *Отображение $f : R \to [0,1]$ по правилу $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ не является непрерывным.*

Доказательство. Легко видеть, что $P = \{x \in R : f(x) = 1\}$ - сходящаяся к 0 последовательность.

$\neg$ 1) полуинтервал $U = [-1;1)$ открыт в Y, а его прообраз $f^{-1}U = R\backslash P$ не открыт в X, так как точка 0 не является внутренней.

$\neg$ 2) множество $U = \{1\}$ замкнуто в Y, а его прообраз $f^{-1}U = P$ не замкнут в X, так как имеет в дополнении предельную точку 0.

$\neg$ 3) для точки $x = 0$ рассмотрим $Of(x) = [-1;1)$. Произвольная $Ox \subset X$ содержит некоторый интервал $(-\varepsilon;\varepsilon)$. Но тогда $fOx \not\subseteq Of(x)$, так как $fOx \supseteq f(-\varepsilon;\varepsilon) \ni 1$.

$\neg$ 4) пусть $\mathcal{B}$ - произвольная база в Y. Тогда $0 \in U \in [-1;1)$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$ и $0 \in f^{-1}U$. Так как $f^{-1}U \subset f^{-1}[-1;1) = R \setminus P$, то $0 \notin < f^{-1}U >_X$.

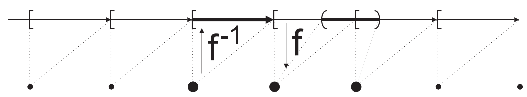
$\neg$ 5) для множества $P \subset X$ получаем $f[P]_X = \{0,1\}$ и $[fP]_Y = \{1\}$.

$\neg$ 6) пусть $U = \{1\}$. Тогда $[f^{-1}U]_X = P \cup \{0\}$ не лежит в $f^{-1}[U]_Y = P$.

$\neg$ 7) пусть $U = [-1;1)$. Тогда $0 \notin < f^{-1}U >_X$ и $0 \in f^{-1} < U >_Y$.

Предложение 21 *Отображение $f : R \to Z$ по правилу $f(x) = [x]$ - целая часть числа x, не является непрерывным.*

Доказательство.



$\neg$ 1) множество $\{0\}$ открыто в Z, а его прообраз $[0;1)$ не открыт в X.

$\neg$ 2) множество $\{0\}$ замкнуто в Z, а его прообраз $[0;1)$ не замкнут в X.

$\neg$ 3) для точки $x = 0$ рассмотрим $Of(x) = \{0\}$. Произвольная $Ox \subset X$ содержит некоторый интервал $(-\varepsilon;\varepsilon)$, но тогда fOx содержит $\{-1,0\}$ и не лежит в $Of(x)$.

$\neg$ 4) пусть $\mathcal{B}$ — произвольная база в Y. Тогда $0 \in U \subset \{0\}$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$, то есть $U = \{0\}$. Прообраз $f^{-1}U = [0;1)$ не открыт в X.

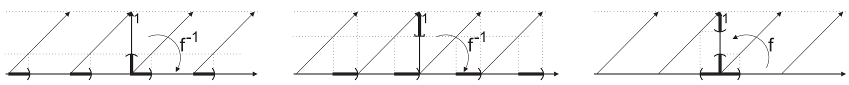
$\neg$ 5) для множества $U = [0,1)$ имеем $f[U]_X = \{0,1\}$ и $[fU]_Y = \{0\}$.

$\neg$ 6) для $U = \{0\}$ получаем $[f^{-1}U]_X = [0,1]$ и $f^{-1}[U]_Y = [0,1)$.

$\neg$ 7) пусть $U = \{0\}$. Тогда $< f^{-1}U >_X = (0,1)$ и $f^{-1} < U >_Y = [0,1)$.

Предложение 22 *Отображение $f : R \to [0,1)$ по правилу $f(x) =< x >$ — дробная часть числа x, не является непрерывным.*

Доказательство.



$\neg$ 1) полуинтервал $[0;\frac{1}{2})$ открыт в Y, а его прообраз $\bigcup_{z\in Z}[z,z+\frac{1}{2})$ не открыт в X, так как точки z не являются внутренними.

$\neg$ 2) полуинтервал $[\frac{1}{2};1)$ замкнут в Y, а его прообраз $\bigcup_{z\in Z}[z+\frac{1}{2};z+1)$ не замкнут в X, так как точки z являются предельными.

$\neg$ 3) для точки $x=0$ рассмотрим $Of(x)=[0;\frac{1}{2})$. Произвольная $Ox\subset X$ содержит некоторый интервал $(-\varepsilon;\varepsilon)$. Но тогда $fOx\not\subseteq Of(x)$, так как $fOx\supseteq f(-\varepsilon;\varepsilon)=[0;\varepsilon)\cup(1-\varepsilon;1)$.

$\neg$ 4) если $\mathcal{B}$ — произвольная база в Y, то $0\in U\in[0;\frac{1}{2})$ для некоторого $U\in\mathcal{B}$. Но тогда $0\in f^{-1}U\setminus <f^{-1}U>_X$, так как $f^{-1}U\subset f^{-1}[0;\frac{1}{2})=\bigcup_{z\in Z}[z,z+\frac{1}{2})$.

$\neg$ 5) для множества $U=[\frac{1}{2};1)$ имеем $f[U]_X=\{0\}\cup[\frac{1}{2};1)$ и $[fU]_Y=[\frac{1}{2};1)$.

$\neg$ 6) пусть $U=[\frac{1}{2};1)$. Тогда $[f^{-1}U]_X=\bigcup_{z\in Z}[z+\frac{1}{2};z+1]$ не лежит в $f^{-1}[U]_Y=\bigcup_{z\in Z}[z+\frac{1}{2};z+1)$.

$\neg$ 7) пусть $U=[0;\frac{1}{2})$. Тогда $0\notin<f^{-1}U>_X$ и $0\in f^{-1}<U>_Y$.

Следующие предложения попробуйте доказать самостоятельно.

Предложение 23 *Отображение $f:R\to\{0,1\}$ по правилу $f(x)=0$, если $x\in Q$, и $f(x)=1$ если $x\in R\setminus Q$, не является непрерывным.*

Предложение 24 *Отображение $f:R\to Q$ по правилу $f(x)=x$, если $x\in Q$, и $f(x)=0$ если $x\in R\setminus Q$, разрывно во всех точках, кроме точки 0.*

Предложение 25 *Отображение $f:R\to\{\frac{1}{q}:q\in N\}\cup\{0\}$ по правилу $f(x)=\frac{1}{q}$, если $x\in Q$ и $x=\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, и $f(x)=0$, если $x\in R\setminus Q$, разрывно в рациональных точках и непрерывно в иррациональных.*

Подумайте, может ли существовать отображение, непрерывное во всех рациональных точках и разрывное во всех иррациональных?

Предложение 26 *Тождественное отображение f пространства (R,τ_ω) на прямую Зоргенфрея (R,τ_s) не является непрерывным.*

Доказательство. $\neg$ 1) имеем $[0,1)\in\tau_s$, но $f^{-1}[0,1)=[0,1)$ не принадлежит τ_ω, так как дополнение $R\setminus[0,1)$ несчетно.

$\neg$ 2) множество $U=R\setminus[0,1)$ замкнуто в Y, а его прообраз $f^{-1}U=U$ не замкнут в X. Более того, он даже всюду плотен. Действительно, $|U|=C$ и $|R\setminus O|\leq\omega<C$ для произвольного открытого $O\subseteq X$. Но тогда $U\not\subseteq R\setminus O$ и $U\cap O\neq\emptyset$.

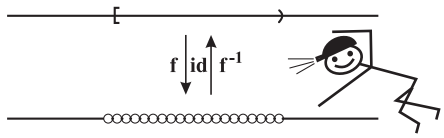
$\neg$ 3) пусть $x=0$ и $Of(x)=[0,1)$. Для произвольной окрестности $Ox\subseteq X$ имеем $f(Ox)\not\subseteq[0,1)$, так как $|R\setminus f(Ox)|\leq\omega$.

$\neg$ 4) для произвольной базы $\mathcal{B}$ в Y имеем $0\in U\subseteq[0,1)$ для некоторого $U\in\mathcal{B}$. Но тогда $|R\setminus U|=C$ и $f^{-1}U=U$ не открыто в X.

$\neg$ 5) пусть $U=[0,1)$. Тогда в левой части получаем $[U]_X=R$ и $f[U]_X=R.$, а в правой – $fU=[0,1)$ и $[fU]_Y=[0,1)$.

$\neg$ 6) пусть $U=[0,1)$. Тогда в левой части получаем $f^{-1}U=[0,1)$ и $[f^{-1}U]_X=R.$, а в правой – $[U]_Y=[0,1)$ и $f^{-1}[U]_Y=[0,1)$.

$\neg$ 7) пусть $U=[0,1)$. Тогда в левой части получаем $f^{-1}U=[0,1)$ и $<f^{-1}U>_X=\emptyset.$, а в правой – $<U>_Y=[0,1)$ и $f^{-1}<U>_Y=[0,1)$.



Предложение 27 *Тождественное отображение f прямой Зоргенфрея (R,τ_s) на пространство (R,τ_ω) не является непрерывным.*

Доказательство.

$\neg$ 1) множество $U=R\setminus Q$ принадлежит τ_ω, но его прообраз $f^{-1}U=U$ не принадлежит τ_s, так как не содержит ни одного полуинтервала.

$\neg$ 2) множество рациональных чисел Q счетно и, следовательно, замкнуто в Y, а его прообраз $f^{-1}Q=Q$ всюду плотен в X, так как любой полуинтервал содержит рациональные числа.

$\neg$ 3) пусть $x=0$ и $Of(x)=R\setminus Q$. Произвольная окрестность $Ox\subseteq X$ содержит некоторый полуинтервал $[0,\varepsilon)$. Так как $[0,\varepsilon)\nsubseteq R\setminus Q$, то $f(Ox)\nsubseteq Of(x)$.

$\neg$ 4) для произвольной базы $\mathcal{B}$ в Y имеем $0\in U\subseteq R\setminus Q$ для некоторого $U\in\mathcal{B}$, но тогда $f^{-1}U=U$ нельзя представить в виде объединения полуинтервалов.

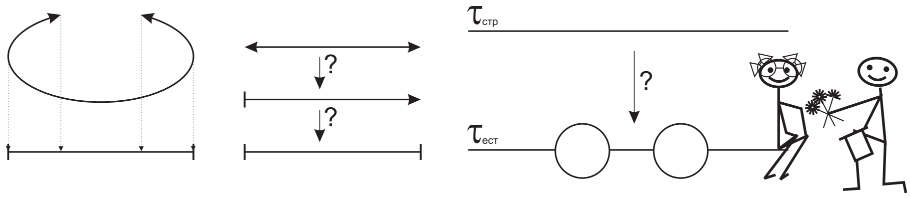
$\neg$ 5) имеем $[Q]_X=X$ и $f[Q]_X=Y$. С другой стороны, $fQ=Q$ и $[fQ]_Y=Q$.

$\neg$ 6) имеем $f^{-1}Q=Q$ и $[f^{-1}Q]_X=X$. С другой стороны, $[Q]_Y=Q$ и $f^{-1}[Q]_Y=Q$.

$\neg$ 7) для множества $U=R\setminus Q$ имеем $f^{-1}U=U$ и $<U>_X=\emptyset.$, но при этом $<U>_Y=U$ и $f^{-1}<U>_Y=U$.

Задания для самоконтроля

1. Для произвольной пары определенных на прямой R топологий τ_1 и τ_2 проверить критерии непрерывности для тождественного отображения $f:(R,\tau_1)\to(R,\tau_2)$.
2. Проверить критерии непрерывности для тождественного отображения $f:(R^2,\tau_E)\to(R^2,\tau_N)$ и обратного к нему отображения f^{-1}, где τ_E – естественная топология на плоскости R^2 и τ_N – топология Немыцкого.



7 Компактность

Пусть я на правый глаз кошу
И на носу очки ношу.
Зато я знаю - это факт,
Что существует змеевидный
Локально сигма трансфинитный
Неприводимый бикомпакт.

Трудно в наше время найти научный термин, более употребительный в обыденной речи. Как правило, при этом его значение близко к значениям слов "маленький", "небольшой", "миниатюрный"и т.д. В то же время, в действительности он, скорее, обозначает не размеры объекта, а некоторую его логическую завершенность, совершенство, невозможность естественным образом к нему что-либо добавить. Поясним сказанное на примерах следующих множеств.

1. Сходящаяся последовательность без предельной точки – $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ (ее предел–точка 0).

2. Открытый интервал – $(0,1)$ (его концы – точки 0 и 1, которые можно склеить в одну точку и получить из отрезка окружность).

3. Рациональные точки на отрезке $[0,1]$ (иррациональные точки на отрезке $[0,1]$).

4. Открытый круг – $\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<1\}$ (граничная окружность $\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2=1\}$).

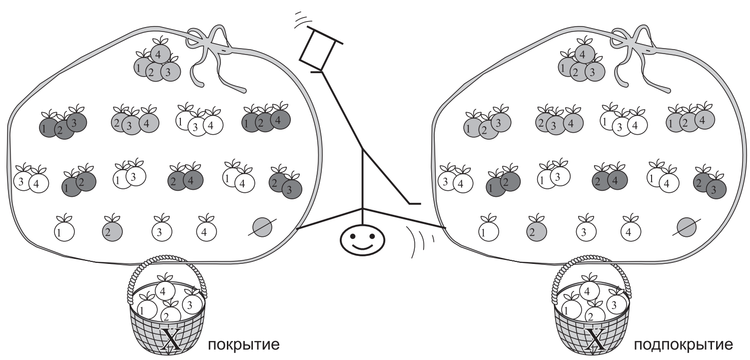
Приведенные множества не являются компактными в индуцированной из плоскости топологии. Но становятся компактными, если добавить к ним множества в круглых скобках.

Определение. Семейство $\mathcal{P}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется открытым покрытием пространства X, если

1) каждое U_α является открытым в X множеством;

2) каждая точка $x\in X$ принадлежит некоторому $U_\alpha\in\mathcal{P}$:

$\forall x\in X \exists U_\alpha\in\mathcal{P}\ \ (x\in U_\alpha)$.



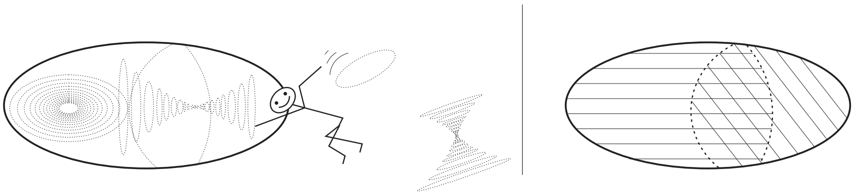
Пусть, например, вузом называется множество студентов, обучающихся в этом вузе (наша формулировка, разумеется, не выдерживает никакой критики). Тогда семейство вузов является покрытием множества студентов, так как каждый студент принадлежит к некоторому вузу. Для решения вопроса о том, будет ли это покрытие открытым, нужно сначала на множестве студентов ввести топологию, то есть превратить его в топологическое пространство или, как говорят, топологизировать.

(!) Каждое покрытие $\mathcal{P}$ является семейством множеств.

Определение. Покрытие $\mathcal{P}$ называется конечным, если оно является конечным семейством множеств (состоит из конечного числа элементов):

$\mathcal{P}\ =\{U_1,...,U_k\}$ для некоторого $k\in N$.

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — покрытие пространства X. Семейство $\mathcal{P}'$ называется подпокрытием $\mathcal{P}$, если

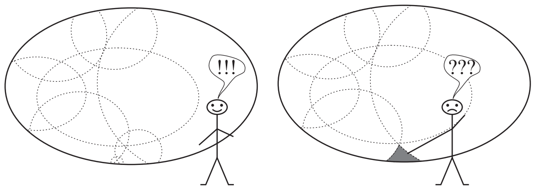


1) $\mathcal{P}'$ является подсемейством семейства $\mathcal{P}$ $(\forall U (U \in P' \Rightarrow U \in P))$;

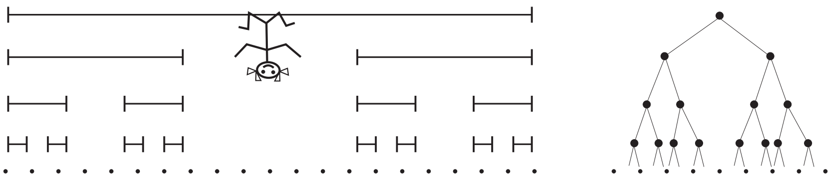
2) $\mathcal{P}'$ является покрытием пространства X.

(!) В пункте (2) мы должны забыть о существовании $\mathcal{P}$ и помнить только о $\mathcal{P}'$.

Определение. Пространство X называется компактным, если из любого открытого покрытия $\mathcal{P}$ пространства X можно выделить конечное подпокрытие $\mathcal{P}'$.



Определение. Семейство $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ называется центрированным, если любое конечное подсемейство $\mathcal{F}'$ семейства $\mathcal{F}$ имеет непустое пересечение: $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$.

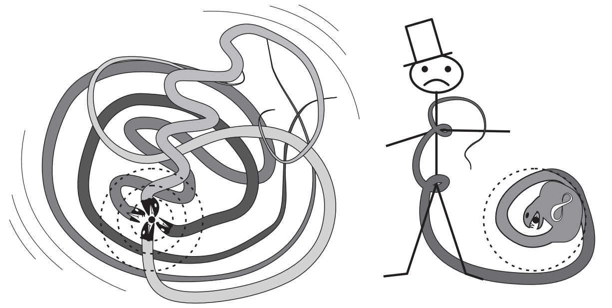


Другими словами, для любого конечного набора $U_1, ..., U_k \in \mathcal{F}$ справедливо $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset$.

Заметим, что в обоих случаях мы говорим о возможности перейти от произвольного сколь угодно большого семейства к его конечным подсемействам. Это напоминает логическую теорему компактности. Мы не вдаемся здесь в более глубокое изучение свойств центрированных систем.

Определение. Пусть семейство $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}\}$ центрировано. Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения семейства $\mathcal{F}$, если $x \in [U]_X$ для каждого $U \in \mathcal{F}$.

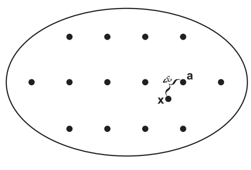
Определение. Точка $x \in X$ называется точкой полного накопления множества $U \subseteq X$, если для любой окрестности $Ox \subset X$ множество $Ox \cap U$ равномощно всему U:

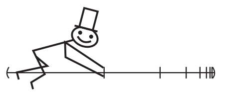


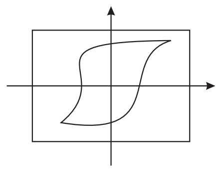
$\forall O \in \tau (x \in O \Rightarrow (|O \cap U| = |U|))$.

Заметим, что всякая точка полного накопления является предельной точкой. Обратное неверно.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $A \subseteq X$ называется ε-сетью в метрическом пространстве $X = (X, \rho)$ если







1) A конечно;

2) для любой точки $x \in X$ найдется такая точка $a \in A$, что $\rho(x, a) < \varepsilon$.

Определение. Метрическое пространство X называется вполне ограниченным, если в X для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-сеть.

Определение. Метрическое пространство X называется полным, если в X любая фундаментальная последовательность сходится (то есть в X найдется точка, которая является пределом этой последовательности).

Определение. Пусть $X \subseteq R^n$ для некоторого $n \in N$. Тогда X называется ограниченным, если $X \subseteq [-a; a]^n$ для некоторого $a > 0$ $\triangle$

Теорема 7.1 *Для произвольного топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) X компактно;

2) в пространстве X каждое центрированное семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение;

2') в пространстве X каждое центрированное семейство произвольных множеств имеет точку прикосновения;

3) в пространстве X каждое бесконечное множество имеет точку полного накопления;

4) (для метрических пространств.) Пространство X вполне ограничено и полно;

5) (для $X \subseteq R^n$.) X замкнуто и ограничено в R^n.

Мы докажем эту теорему несколько позже и только на счетном уровне, позволяющем увидеть всю геометрическую картину и избежать некоторых теоретико-множественных осложнений.

Предложение 28 *Пространство "прямая R"не компактно.*

Доказательство. $\neg$ 1) семейство ограниченных интервалов $\mathcal{P} = \{(a,b) : a,b \in R\}$ является открытым покрытием R, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие.

Действительно, для произвольной точки $x \in R$ имеем $x \in (x-1; x+1)$ и $(x-1; x+1) \in \mathcal{P}$. Пусть $\check{\mathcal{P}} = \{(a_1, b_1), ..., (a_k, b_k)\}$ – произвольное конечное подсемейство. Тогда для точки $x = |b_1| + ... + |b_k|$ имеем $x \notin \bigcup \check{P}$.

$\neg$2) центрированное семейство замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{R \setminus (a,b) : a,b \in R\}$ имеет пустое пересечение.

Действительно, так как $\mathcal{P}$ – покрытие, то в силу двойственности определений $\mathcal{F}$ имеет пустое пересечение. Так как $\mathcal{P}$ не содержит конечных подпокрытий, то $\mathcal{F}$ центрировано. Другими словами, для любого конечного подсемейства $\check{\mathcal{F}} = \{R \setminus (a_1, b_1), ..., R \setminus (a_k, b_k)\}$ и точки $x = |b_1| + ... + |b_k|$ имеем $x \in \bigcap \check{\mathcal{F}}$.

$\neg$3) множество натуральных чисел N бесконечно и не имеет в R предельных точек.

$\neg$4) Пространство R – метрическое, полное, но не вполне ограниченное. Более того, ни для какого $\varepsilon > 0$ в R не существует ε-сети. Действительно, рассмотрим произвольное конечное множество $A = \{a_1, ..., a_k\}$. Тогда точка $x = \max_{i=1,...,k} |a_i| + \varepsilon$ опровергает пункт (2) определения ε-сети.

$\neg$5) Пространство лежит в R^1, замкнуто в R^1, но не вполне ограничено.

По теореме Лебега отрезок $[0,1]$ с индуцированной из прямой топологией компактен. Рассмотрим теперь отрезок $[0,1]$ с топологией подпространства прямой Зоргенфрея $\tau_s^{'} = \{U \cap [0,1] : U \in \tau_s\}$.

Предложение 29 *Пространство $X = ([0,1], \tau_s^{'})$ не компактно.*

Доказательство. Отметим, что одноточечное множество $\{1\} = [1;2) \cap [0,1]$ открыто в X.

$\neg$ 1) из открытого покрытия $\mathcal{P} = \{\{1\}, [0; \frac{1}{2}), ..., [\frac{n}{n+1}; \frac{n+1}{n+2}), ...\}_{n \in N}$ нельзя выделить конечное подпокрытие.

$\neg$ 2) центрированное семейство замкнутых в X множеств $\mathcal{F} = \{[\frac{n}{n+1}; 1)\}_{n \in N}$ имеет пустое пересечение.

$\neg$3) множество $\{\frac{n}{n+1}\}_{n \in N}$ бесконечно и не имеет в X предельных точек.

Пространство X не является метризуемым, следовательно, в нем нельзя проверить условия 4), 5).

Предложение 30 *Пространство Зарисского $X = (R^1, \tau_z)$ компактно.*

Доказательство. Мы непосредственно проверим условия (1–5), избегая ссылки на общую теорему.

1) пусть $\mathcal{P} = \{U\}$ – произвольное открытое покрытие. Для любого $U_0 \in \mathcal{P}$ множество $R^1 \setminus U_0 = \{x_1, ..., x_k\}$ конечно по определению топологии Зарисского. Так как $\mathcal{P}$ – покрытие, то $x_1 \in U_1$,..., $x_k \in U_k$ для некоторых $U_1, ..., U_k \in \mathcal{P}$. Но тогда $\acute{\mathcal{P}} = \{U_0, U_1, ..., U_k\}$ – искомое конечное подпокрытие.

2) пусть $\mathcal{F} = \{U\}$ — произвольное центрированное семейство замкнутых множеств. Заметим, что в X замкнуты лишь пустое множество, конечные множества и все X. Так как $\mathcal{F}$ центрировано, то $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

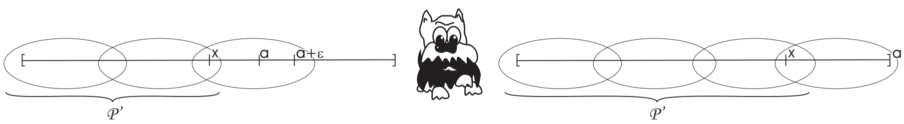
Пусть в $\mathcal{F}$ найдется конечное множество $U_0 = \{x_1, ..., x_k\}$. Если $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, то $x_1 \notin U_1$,..., $x_k \notin U_k$ для некоторых $U_1, ..., U_k \in \mathcal{F}$. Но тогда $U_0 \cap U_1 \cap ... \cap U_k = \emptyset$.

3) если множество $U \subseteq X$ бесконечно, то любая точка $x \in X$ является для U точкой полного накопления.

Пространство X также не является метризуемым.

Теорема 7.2 *(Лебега). Отрезок* $[0, 1]$ *компактен.*

Заметим, что если нет специальных упоминаний о топологии, то имеется в виду естественная топология на прямой τ_e, индуцированная на отрезок $[0, 1]$.



Доказательство. Воспользуемся следующим хорошо известным фактом: каждое множество A на отрезке $[0, 1]$ имеет точную верхнюю грань $\sup A$.

Для произвольного открытого покрытия $\mathcal{P} = \{U\}$ положим

$$a = \sup\{x : [0, x] \subseteq \bigcup \mathcal{P}' \text{ для некоторого конечного } \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}\}.$$

Очевидно, $a > 0$ и $a \in U_a$ для некоторого $U_a \in \mathcal{P}$. Найдутся $x \in U_a$ и конечное $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ такие, что $[0, x] \subseteq \bigcup \mathcal{P}'$.

Если $a < 1$, то $a + \varepsilon \in U_a$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Но тогда $[0, a + \varepsilon] \subseteq \bigcup \mathcal{P}' \cup U_a$, что противоречит выбору a.

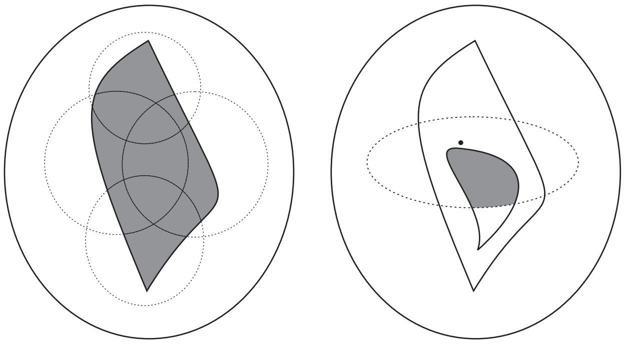
Если $a = 1$, то $\mathcal{P}' \cup \{U_a\}$ - искомое конечное подпокрытие покрытия $\mathcal{P}$.

Теорема 7.3 *Отрезок* $[0, 1]$ *связен.*

Доказательство. Пусть $[0,1] = U \cup V$ — произвольное разбиение. Для определенности положим $1 \in V$. Для $a = \sup U$ очевидно $a < 1$ и $a \in [U]$. Так как U замкнуто, то $a \in U$. Так как U открыто, то $a + \varepsilon \in U$ для некоторого $\varepsilon > 0$, что противоречит выбору a.

Последующие теоремы столь просты и наглядны, что автор не может отказать себе в удовольствии отдельно проверить каждый критерий компактности. Полученные при этом рассуждения столь типичны для общей топологии, что могут многое рассказать внимательному читателю.

Теорема 7.4 *Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*



Более точно: пусть пространство $X = (X, \tau)$ компактно и множество $F \subset X$ замкнуто. Тогда пространство $F = (F, \tau_F)$ компактно, где $U \in \tau_F \iff U = V \cap F$ для некоторого $V \in \tau$.

Доказательство. 1) пусть $\mathcal{P} = \{U\}$ – произвольное открытое покрытие пространства F. По определению индуцированной топологии τ_F для каждого множества $U \in \mathcal{P}$ найдется такое открытое в X множество $U^{'}$, что $U = U^{'} \cap F$. Покрытие $\{U^{'} : U \in \mathcal{P}\} \cup \{X \setminus F\}$ пространства X содержит конечное подпокрытие $\{U_1^{'}, ..., U_k^{'}\} \cup \{X \setminus F\}$. Но тогда $\{U_1, ..., U_k\}$ – искомое конечное подпокрытие пространства F.

2) $\mathcal{F} = \{U\}$ – произвольное центрированное семейство замкнутых подмножеств F. Так как F замкнуто в X, то каждое U замкнуто в X. Но тогда $\mathcal{F}$ – центрированное семейство замкнутых подмножеств компактного пространства X. Найдется точка $x \in X$ такая, что $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Но так как $U \subset F$ для каждого $U \in \mathcal{F}$, то $x \in F$.

3) пусть множество $U \subseteq F$ бесконечно. Тогда U — бесконечное подмножество компактного пространства X. Найдется точка полного накопления $x \in X$. Если $x \in X \setminus F$, то окрестность $O^{'}x = X \setminus F$ не пересекается с U. Следовательно, $x \in F$. Рассмотрим произвольную окрестность $Ox \subset F$.

Имеем $Ox = O^{'}x \cap F$ для некоторой окрестности $O^{'}x \subset X$. Но тогда

$$|U| = |O^{'}x \cap U| = |O^{'}x \cap U \cap F| = |(O^{'}x \cap F) \cap U| = |Ox \cap U|,$$

то есть x является точкой полного накопления множества U в пространстве F.

Теорема 7.5 *Компактное подпространство хаусдорфова пространства замкнуто.*

То есть для произвольного подмножества $F \subset X$ справедливо следующее утверждение: если (F, τ_F) компактно, то F замкнуто в X.

Пример Хаусдорфовость существенна. Пусть X — пространство Зарисского (R^1, τ_z). Для $F = [0, 1]$ получаем (F, τ_F) компактно и F всюду плотно в X.

Доказательство. От противного. Условие $x \in [F]_X \setminus F$ для некоторой точки $x \in X$ влечет отрицание каждого критерия.

$\neg 1)$ для каждой точки $y \in F$ найдется такая окрестность $Oy \subseteq X$, что $x \notin [Oy]_X$. Предположим, что из открытого покрытия $\{Oy \cap F : y \in F\}$ пространства F можно выделить конечное подпокрытие $\{Oy_1 \cap F, ..., Oy_k \cap F\}$. Но тогда $x \in [F]_X \subseteq [\bigcup_{i \le k} Oy_i]_X$. С другой стороны, $[\bigcup_{i \le k} Oy_i]_X = \bigcup_{i \le k} [Oy_i]_X \not\ni x$.

$\neg 2)$ рассмотрим семейство $\mathcal{F} = \{U\}$ замкнутых подмножеств $U \subseteq F$ таких, что $[Ox]_X \cap F \subseteq U$ для некоторой окрестности $Ox \subseteq X$. Тогда $\mathcal{F}$ центрировано:

$$U_1 \cap ... \cap U_k \supseteq ([O_1x]_X \cap F) \cap ... \cap ([O_kx]_X \cap F)$$

$$= ([O_1x]_X \cap ... \cap [O_kx]_X) \cap F \supseteq [Ox]_X \cap F,$$

где $Ox = O_1x \cap ... \cap O_kx$. Но $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Действительно, для произвольной точки $y \in F$ найдется окрестность $Ox \subseteq X$ такая, что $y \notin [Ox]_X$. Но тогда $y \notin U$ для $U = [Ox]_X \cap F$.

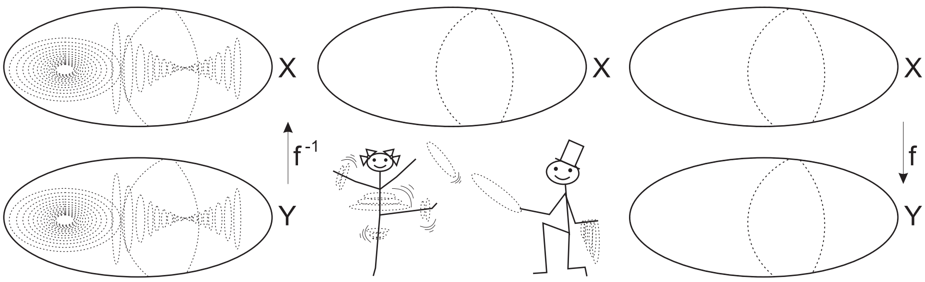
$\neg 3)$ только в предположении существования счетной базы $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ в точке x. Для произвольных $y_i \in O_1 \cap ... \cap O_i \cap F$ множество $U = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ не имеет в F предельных точек. Действительно, для каждой точки $p \in F$ найдется такая окрестность Ox, что $p \notin [Ox]_X$, найдется такое $i \in \omega$, что $O_i \subset Ox$. Тогда $Op = X \setminus [Ox]_X$ может содержать лишь точки $y_1, ..., y_{i-1}$ множества U.

Теорема 7.6 *Непрерывный образ компактного пространства компактен.*

То есть если отображение $f : X \to Y$ непрерывно и сюръективно, а пространство X компактно, то Y компактно.

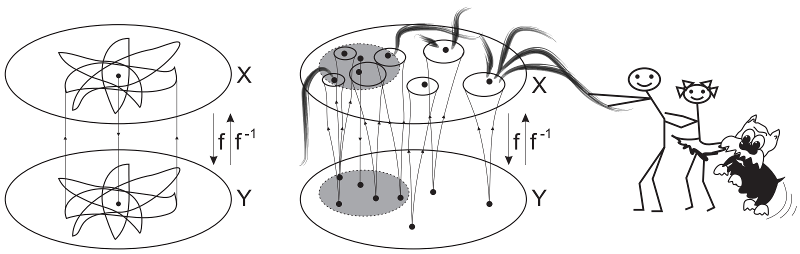
Доказательство. 1) пусть $\mathcal{P} = \{U\}$ — произвольное открытое покрытие пространства Y. Прообразы $V = f^{-1}U$ образуют открытое покрытие $\{V\}$ пространства X. Существует конечное подпокрытие $\{V_1, ..., V_n\}$. Но тогда $\{U_1 = fV_1, ..., U_n = fV_n\}$ — искомое конечное подпокрытие покрытия $\mathcal{P}$.

Действительно, произвольная точка $y \in Y$ является образом некоторой точки $x \in X$ принадлежащей некоторому V_k. Но тогда $y = f(x) \in fV_k = U_k$.



2) пусть $\mathcal{F} = \{U\}$ — произвольное центрированное семейство замкнутых подмножеств Y. Тогда $\{f^{-1}U\}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств X, так как всегда $f^{-1}U_1 \cap ... \cap f^{-1}U_n = f^{-1}(U_1 \cap ... \cap U_n) \neq \emptyset$. Для произвольной точки $x \in \bigcap\{f^{-1}U : U \in \mathcal{F}\}$ имеем $f(x) \in \bigcap \mathcal{F}$. Действительно, $x \in f^{-1}U$ влечет $f(x) \in ff^{-1}U = U$ для каждого $U \in \mathcal{F}$.

3) пусть множество $U \subset Y$ бесконечно. Для каждой точки $x \in U$ фиксируем единственную $t_x \in f^{-1}(x)$. Множество $V = \{t_x : x \in U\}$ имеет точку полного накопления $t \in X$. Для произвольной окрестности $O \subset Y$ точки $f(t)$ имеем $|O \cap U| = |f^{-1}O \cap V| = |V| = |U|$.



Доказательство теоремы 9.1 $\neg 1) \Rightarrow \neg 2)$. Пусть $\{U_i\}_{i \in N}$ - открытое покрытие пространства X, не содержащее конечных подпокрытий. Тогда центрированное семейство замкнутых множеств $\{X \setminus U_i\}_{i \in N}$ имеет пустое пересечение. Действительно, $(X \setminus U_1) \cap ... \cap (X \setminus U_n) = X \setminus \bigcup_{i \leq n} U_i \neq \emptyset$ для любого $n \in N$. Но при этом $\bigcap_{i \in N}(X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in N} U_i = \emptyset$.

$\neg 2) \Rightarrow \neg 3)$. Пусть центрированное семейство замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_i\}_{i\in N}$ имеет пустое пересечение.

Предположим, что некоторое конечное пересечение элементов $\mathcal{F}$ конечно: $U_1 \cap ... \cap U_n = \{x_1, ..., x_k\}$. Так как $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, то $x_1 \notin U_{i_1}, ..., x_k \notin U_{i_k}$ для некоторых $U_{i_1}, ..., U_{i_k} \in \mathcal{F}$. Но тогда $U_1 \cap ... \cap U_n \cap U_{i_1} \cap ... \cap U_{i_k} = \emptyset$, что противоречит центрированности семейства $\mathcal{F}$.

Для произвольных точек $x_1 \in U_1$ и $x_i \in U_1 \cap ... \cap U_i \setminus \{x_1, ..., x_{i-1}\}$ бесконечное множество $\{x_i\}_{i\in N}$ не имеет в X предельных точек. Действительно, любая точка $x \in X$ не принадлежит некоторому U_n. Но тогда окрестность $Ox = X \setminus U_n$ может содержать лишь точки $x_1, ..., x_{n-1}$.

$\neg 3) \Rightarrow \neg 1)$. Пусть бесконечное множество $\{x_i\}_{i\in N}$ не имеет в X предельных точек. Тогда $U_n = X \setminus \{x_i : i \geq n\}$ открыто в X для любого $n \in N$. Так как $U_1 \cup ... \cup U_n = U_n \not\ni x_{n+1}$, то покрытие $\{U_n\}_{n\in N}$ не содержит конечных подпокрытий.

$\neg 3) \Rightarrow \neg 4)$. Пусть пространство X метрическое и бесконечное множество $D \subset X$ не имеет предельных точек. Если X вполне ограничено, то для любого $n \in N$ существует $\frac{1}{n}$-сеть A_n. Тогда семейство $\mathcal{P}_n = \{O_X(a, \frac{1}{n}) : a \in A_n\}$ является открытым покрытием. Проделаем по индукции следующее построение:

так как $\mathcal{P}_1 = \{O_X(a, 1) : a \in A_1\}$ конечно, то $D_1 = O_X(a, 1) \cap D$ бесконечно для некоторого $a \in A_1$. Фиксируем произвольную точку $d_1 \in D_1$.

так как $\mathcal{P}_2 = \{O_X(a, \frac{1}{2}) : a \in A_2\}$ конечно, то $D_2 = O_X(a, \frac{1}{2}) \cap D_1$ бесконечно для некоторого $a \in A_2$. Фиксируем $d_2 \in D_2 \setminus \{d_1\}$.

так как $\mathcal{P}_3 = \{O_X(a, \frac{1}{3}) : a \in A_3\}$ конечно, то $D_3 = O_X(a, \frac{1}{3}) \cap D_2$ бесконечно для некоторого $a \in A_3$. Фиксируем $d_3 \in D_3 \setminus \{d_1, d_2\}$ и так далее.

В итоге фундаментальная последовательность $\{d_i\}_{i\in N}$ не имеет предела, то есть X не полно.

$\neg 4) \Rightarrow \neg 3)$. Если X не вполне ограничено, то для некоторого $\varepsilon > 0$ не существует ε-сети.

Фиксируем произвольную точку $d_1 \in X$. Так как $\{d_1\}$ не является ε-сетью, то найдется такая точка $d_2 \in X$, что $\rho(d_1, d_2) \geq \varepsilon$. Так как $\{d_1, d_2\}$ не является ε-сетью, то найдется такая $d_3 \in X$, что $\rho(d_1, d_3) \geq \varepsilon$ и $\rho(d_2, d_3) \geq \varepsilon$ и так далее. Для произвольной $x \in X$ окрестность $O_X(x, \frac{\varepsilon}{2})$ содержит не более одной точки множества $\{d_i\}_{i\in N}$.

Если фундаментальная последовательность не является сходящейся, то она также не имеет предельных точек.

Задания для самоконтроля

1. Существует ли в $R \setminus Q$ компакт мощности континуум?
2. Проверить компактность пространств, для которых она не была доказана.

8 Условия типа компактности

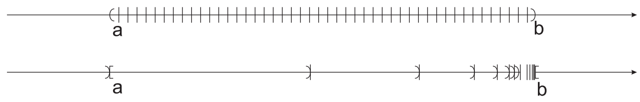
Компактность является одним из центральных понятий не только в общей топологии, но и во многих других областях современной математики и естествознания в целом. При этом она часто используется не в полном объёме и не во всей своей силе. В частности, для доказательства многих математических теорем, в которых упоминается компактность, в действительности бывает достаточно того, чтобы каждая точка обладала компактной окрестностью, каждая последовательность содержала фундаментальную подпоследовательность, каждая фундаментальная последовательность сходилась и так далее. Некоторые из этих свойств эквивалентны компактности в метрических пространствах, но отличаются от неё в топологических. Анализ этого положения привел к оформлению в виде строгих определений многих свойств топологических пространств, родственных компактности по своей сути и являющихся её обобщением в том или ином направлении, более слабых, чем сама компактность.

Определение. Пространство X называется σ-компактным, если его можно представить в виде $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, где каждое X_i компактно в индуцированной из X топологии.

Предложение 31 *Прямая $R = (R, \tau_e)$ σ-компактна.*

Доказательство. Имеем $R = \bigcup_{k=1}^{\infty}[-k, k]$ и каждый отрезок $[-k, k]$ компактен.

Предложение 32 *Множество $A \subset R$ нигде не плотно на прямой с естественной топологией (R, τ_e) $\Leftrightarrow$ A нигде не плотно в прямой Зоргенфрея (R, τ_s).*



Доказательство. Первое условие эквивалентно тому, что в каждом интервале (a,b) найдется интервал $(c,d) \subset (a,b)$, не пересекающийся с A, второе – тому, что в каждом полуинтервале $[a,b)$ найдется полуинтервал $[c,d) \subset [a,b)$, не пересекающийся с A. Очевидно, что эти условия совпадают.

Предложение 33 *Если $A \subset R$ компактно в топологии подпространства прямой Зоргенфрея (R,τ_s), то A нигде не плотно в (R,τ_s).*

Доказательство. Пусть $A \cap (a,b)$ всюду плотно в некотором интервале $(a,b) \subset R$. Тогда из открытого покрытия

$$\{(-\infty,a) \cap A, [b,\infty) \cap A\} \bigcup \{[b - \frac{1}{n}(b-a), b - \frac{1}{n+1}(b-a)) \cap A\}_{n=1}^{\infty}$$

множества A нельзя выделить конечное подпокрытие.

Предложение 34 *Прямая Зоргенфрея $R = (R,\tau_s)$ не σ - компактна.*

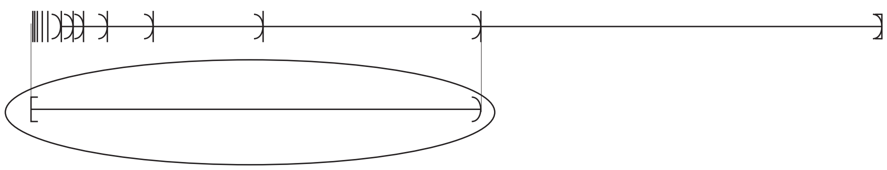
Доказательство. Пусть прямая представлена в виде счетного объединения своих подмножеств: $R = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. Так как R — множество 2-й категории, то некоторое X_i не является нигде не плотным. Но тогда оно не компактно.

Определение. Пространство X называется финально компактным, если из любого открытого покрытия пространства X можно выделить счетное подпокрытие.

Предложение 35 *Если X σ-компактно, то X финально компактно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P} = \{U\}$ — открытое покрытие X. Для каждого компактного подпространства X_i найдется такое конечное $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}$, что $X_i \subset \bigcup \mathcal{P}_i$. Но тогда $\tilde{\mathcal{P}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}_i$ — искомое счетное подпокрытие покрытия $\mathcal{P}$.

Предложение 36 *В любое открытое покрытие прямой Зоргенфрея $R = (R,\tau_s)$ можно вписать дизъюнктное открытое покрытие из открытых вправо полуинтервалов.*



Доказательство. Пусть $\mathcal{P} = \{U\}$ - произвольное открытое покрытие. Построим по индукции семейство $\tilde{\mathcal{P}}$ дизъюнктных вписанных в $\mathcal{P}$ полуинтервалов $[a, b)$ по следующему правилу:

для произвольного полуинтервала $[a, b)$, лежащего в некотором $U \in \mathcal{P}$, положим $\tilde{\mathcal{P}} = \{[a, b)\}$.

Пусть на произвольном шаге индукции существует точка $x \in R \setminus \bigcup \tilde{\mathcal{P}}$. Можно представить себе две возможности.

Полуинтервал $[x, x+\varepsilon)$ не пересекается с $\bigcup \tilde{\mathcal{P}}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда уменьшив, если необходимо, $\varepsilon > 0$, можно обеспечить условие $[x, x+\varepsilon) \subset U$ для некоторого $U \in \mathcal{P}$ и включить $[x, x+\varepsilon)$ в $\tilde{\mathcal{P}}$.

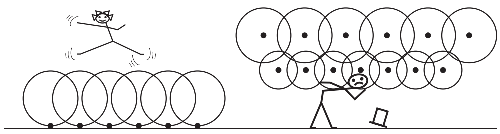
В противном случае геометрически очевидно, что дизъюнктные полуинтервалы $[a, b) \in \tilde{\mathcal{P}}$ образуют сходящуюся к точке x справа последовательность. Можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $[x, x+\varepsilon) \subset U$ для некоторого $U \in \mathcal{P}$ и $x + \varepsilon = b$ для некоторого $[a, b) \in \tilde{\mathcal{P}}$. Тогда любой полуинтервал $[a, b) \in \tilde{\mathcal{P}}$ либо не пересекается с $[x, x+\varepsilon)$, либо лежит в нем. Выбросим из $\tilde{\mathcal{P}}$ все лежащие в $[x, x+\varepsilon)$ полуинтервалы и включим вместо них $[x, x+\varepsilon)$ в $\tilde{\mathcal{P}}$.

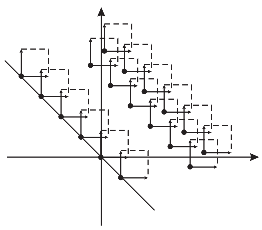
После этого шага еще одна точка x принадлежит $\bigcup \tilde{\mathcal{P}}$. Построение завершится тогда, когда семейство $\tilde{\mathcal{P}}$ станет покрытием.

Предложение 37 *Прямая Зоргенфрея $R = (R, \tau_s)$ финально компактна.*

Доказательство. В произвольное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{U\}$ можно вписать дизъюнктное покрытие $\tilde{\mathcal{P}} = \{[a, b)\}$. Очевидно, $\tilde{\mathcal{P}}$ счетно. Для каждого $[a, b) \in \tilde{\mathcal{P}}$ зафиксируем единственное $U_{[a,b)} \in \mathcal{P}$, содержащее $[a, b)$. Тогда $\{U_{[a,b)} : [a, b) \in \tilde{\mathcal{P}}\}$ — искомое счетное подпокрытие.

Предложение 38 *Плоскость Немыцкого не финально компактна.*





Доказательство. Из покрытия

$$\{O_L(P, 1) : x \in L\} \cup \{O((x, y), \frac{y}{2}) : y > 0\}$$

нельзя выделить подпокрытие мощности меньше C, так как каждое множество из этого покрытия содержит не более одной точки прямой L.

Совершенно аналогично можно показать, что квадрат прямой Зоргенфрея $(R, \tau_s)^2$ не финально компактен. Тем самым финальная компактность не сохраняется при умножении, в отличие от σ-компактности.

Определение. Пространство X называется счетно компактным, если из любого счетного открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подпокрытие.

Очевидно, что X компактно $\Leftrightarrow$ X финально компактно и счетно компактно.

Теорема 8.1 *Следующие условия эквивалентны:*

1) X счетно компактно;

2) каждое счетное центрированное семейство замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение.

3) каждое бесконечное множество $A \subset X$ имеет в X предельную точку.

Доказательство этой теоремы было приведено в предыдущей главе, посвященной компактности.

Определение. Пространство X называется псевдокомпактным, если любое непрерывное отображение $f : X \to R$ ограничено.

Предложение 39 *Если X счетно компактно, то X псевдокомпактно.*

Доказательство. Пусть $f : X \to R$ непрерывно и не ограничено. Тогда для каждого $n \in N$ найдется такое $x_n \in X$, что $f(x_n) > n$. Для бесконечного множества $\{x_n\}_{n \in N}$ найдется предельная точка $x \in X$. Но тогда f не может быть определено в точке x.

Интересным является вопрос о построении псевдокомпактных пространств, не являющихся счетно компактными. Если не требовать хорошей отделимости, то такой пример привести несложно.

Предложение 40 *Пространство $X = (R, \tau_\omega)$ псевдокомпактно, но не счетно компактно.*

Доказательство. При любом непрерывном отображении $f : X \to R$ образ $f(X)$ состоит не более чем из одной точки. Действительно, если $x, y \in f(X)$ различны, то множества $f^{-1}((-\infty; \frac{x+y}{2}) \cap f(X))$ и $f^{-1}((\frac{x+y}{2}; \infty) \cap f(X))$ открыты и дизъюнктны в X. Но в X всякие два открытые множества пересекаются.

Определение. Пусть $\mathcal{P} = \{U\}$ – произвольное семейство множеств в пространстве X, тогда а) $\mathcal{P}$ локально конечно в X, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $Ox \subseteq X$, пересекающая не более чем конечное число множеств из семейства $\mathcal{P}$.

б) $\mathcal{P}$ локально конечно в себе, если для любой точки $x \in \bigcup \mathcal{P}$ найдется окрестность $Ox \subseteq X$, пересекающая не более чем конечное число множеств из семейства $\mathcal{P}$.

в) $\mathcal{P}$ дискретно в X, если для любой точки $x \in X$ найдется окрестность $Ox \subseteq X$, пересекающая не более чем одно множество из семейства $\mathcal{P}$.

д) $\mathcal{P}$ дискретно в себе, если для любой точки $x \in \bigcup \mathcal{P}$ найдется окрестность $Ox \subseteq X$, пересекающая не более чем одно множество из семейства $\mathcal{P}$.

(!) Каждое дискретное семейство локально конечно.

е) $\mathcal{P}$ консервативно, если для любого подсемейства $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ справедливо $[\bigcup \tilde{\mathcal{P}}] = \bigcup \{[U] : U \in \tilde{\mathcal{P}}\}$.

Определение. Семейство $\mathcal{P} = \{U\}$ вписано в семейство $\mathcal{D} = \{V\}$, если для любого $U \in \mathcal{P}$ найдется такое $V \in \mathcal{D}$, что $U \subseteq V$:

$\mathcal{P} \succ \mathcal{D} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{P} \ \exists V \in \mathcal{D} \ (U \subseteq V)$.

Определение. Пространство X называется паракомпактным, если в любое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие.

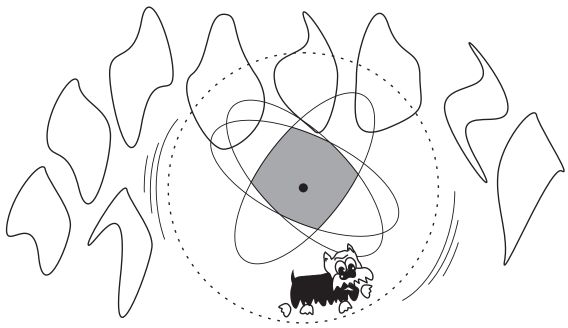
Пример. Пусть $X = R$ — прямая. Тогда

$\mathcal{P} = \{(1;2), (1;3)\}$ локально конечно в X, но не дискретно в себе;

$\mathcal{P} = \{(n; n+1)\}_{n \in N}$ дискретно в себе и локально конечно в X, но не дискретно в X;

$\mathcal{P} = \{(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n})\}_{n \in N}$ дискретно в себе и консервативно, но не локально конечно в X.

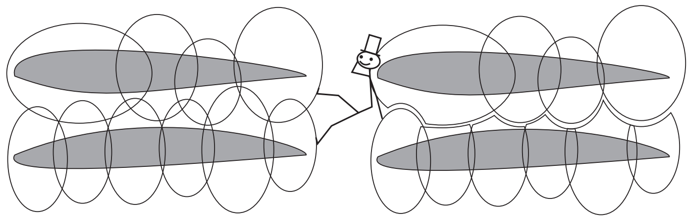
Предложение 41 *Локально конечное в X семейство $\mathcal{P} = \{U\}$ консервативно.*



Доказательство. Очевидно, что для произвольного подсемейства $\tilde{\mathcal{P}}$ достаточно проверить включение $[\bigcup \tilde{\mathcal{P}}] \subseteq \bigcup \{[U] : U \in \tilde{\mathcal{P}}\}$.

Пусть $x \notin \bigcup\{[U] : U \in \tilde{\mathcal{P}}\}$. Найдется окрестность O точки x, пересекающая лишь конечное число множеств $U_1, ..., U_n \in \tilde{\mathcal{P}}$. Найдутся окрестности $O_1, ..., O_n$ точки x такие, что $O_1 \cap U_1 = \emptyset$,..., $O_n \cap U_n = \emptyset$. Тогда для $O' = O \cap O_1 \cap ... \cap O_n$ получаем $O' \cap \bigcup \tilde{\mathcal{P}} = \emptyset$.

Теорема 8.2 *Регулярное финально компактное пространство нормально.*



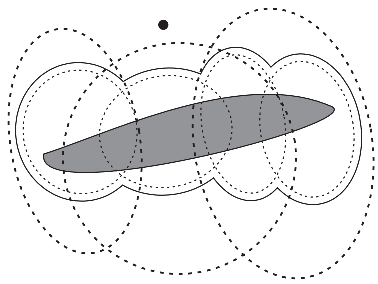
Доказательство. Пусть множества F и G замкнуты и не пересекаются. Для каждой точки $x \in F$ найдется такая окрестность U_x, что $[U_x] \cap G = \emptyset$, и для каждой точки $y \in G$ найдется такая окрестность V_y, что $[V_y] \cap F = \emptyset$. Покрытие $\mathcal{P} = \{U_x\}_{x \in F} \cup \{V_y\}_{y \in G} \cup \{X \setminus (F \cup G)\}$ пространства X содержит счетное подпокрытие $\tilde{\mathcal{P}} = \{U_i\}_{i \in N} \cup \{V_j\}_{j \in N} \cup \{X \setminus (F \cup G)\}$. При этом $F \subseteq \bigcup_{i \in N} U_i$ и $G \subseteq \bigcup_{j \in N} V_j$.

Положим теперь $U'_1 = U_1$, $V'_1 = V_1 \setminus [U_1]$. Для произвольного $n \in N$ пусть $U'_n = U_n \setminus [\bigcup_{j<n} V_j]$ и $V'_n = V_n \setminus [\bigcup_{i \leq n} U_i]$. Тогда $OF = \bigcup_{i \in N} U'_i$ и $OG = \bigcup_{j \in N} V'_j$ – непересекающиеся окрестности.

Теорема 8.3 *Хаусдорфово паракомпактное пространство X нормально.*

Доказательство теоремы состоит из двух предложений.

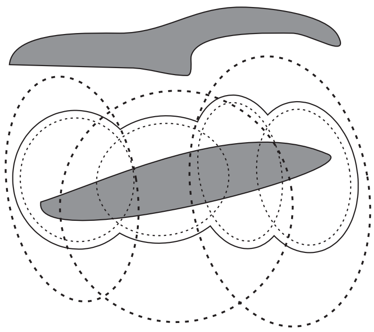
Предложение 42 *Хаусдорфово паракомпактное пространство X регулярно.*



Доказательство. Пусть точка x не принадлежит замкнутому множеству F. Для каждой точки $y \in F$ найдется окрестность $Oy \subset X$, для которой $x \notin [Oy]$. В открытое покрытие $\{Oy : y \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ пространства X впишем локально конечное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{U\}$. Пусть

$\mathcal{P}_F = \{U \in \mathcal{P} : U \cap F \neq \emptyset\}$. Если $U \in \mathcal{P}_F$, то $U \subset Oy$ для некоторого $y \in F$ и, следовательно, $x \notin [U]$. В силу консервативности $x \notin [\bigcup \mathcal{P}_F]$. Но тогда $OF = \bigcup \mathcal{P}_F$ и $Ox = X \setminus [\bigcup \mathcal{P}_F]$ – искомые непересекающиеся окрестности.

Предложение 43 *Регулярное паракомпактное пространство X нормально.*



Доказательство. Пусть замкнутые множества F и G не пересекаются. Для каждой точки $x \in F$ найдется окрестность $Ox \subset X$, для которой $[Ox] \cap G = \emptyset$. В открытое покрытие $\{Ox : x \in F\} \cup \{X \setminus F\}$ пространства X впишем локально конечное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{U\}$. Пусть $\mathcal{P}_F = \{U \in \mathcal{P} : U \cap F \neq \emptyset\}$. Если $U \in \mathcal{P}_F$, то $U \subset Ox$ для некоторого $x \in F$ и, следовательно, $[U] \cap G = \emptyset$. В силу консервативности $[\bigcup \mathcal{P}_F] \cap G = \emptyset$. Но тогда $OF = \bigcup \mathcal{P}_F$ и $OG = X \setminus [\bigcup \mathcal{P}_F]$ – искомые непересекающиеся окрестности.

Теорема 8.4 *Для регулярного пространства X следующие условия равносильны:*

1) X паракомпактно;

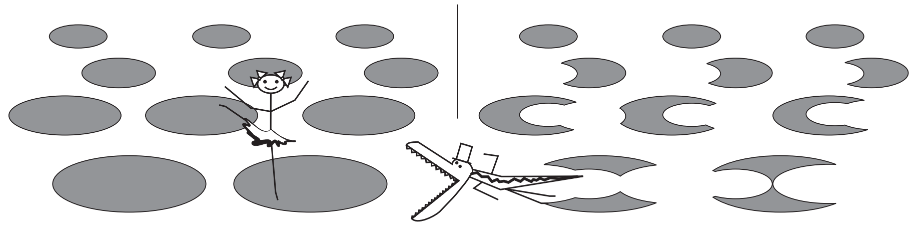
2) в любое открытое покрытие X можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие;

3) в любое открытое покрытие X можно вписать локально конечное покрытие произвольными множествами;

4) в любое открытое покрытие X можно вписать локально конечное замкнутое покрытие.

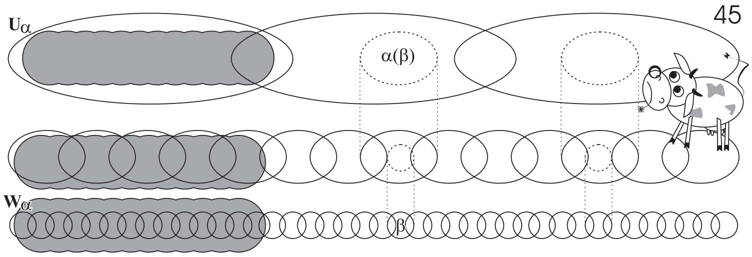
Доказательство теоремы состоит из трех предложений.

Предложение 44 *Если в каждое открытое покрытие $\mathcal{P}$ пространства X можно вписать σ-локально конечное открытое покрытие, то можно вписать и локально конечное покрытие (произвольными множествами).*



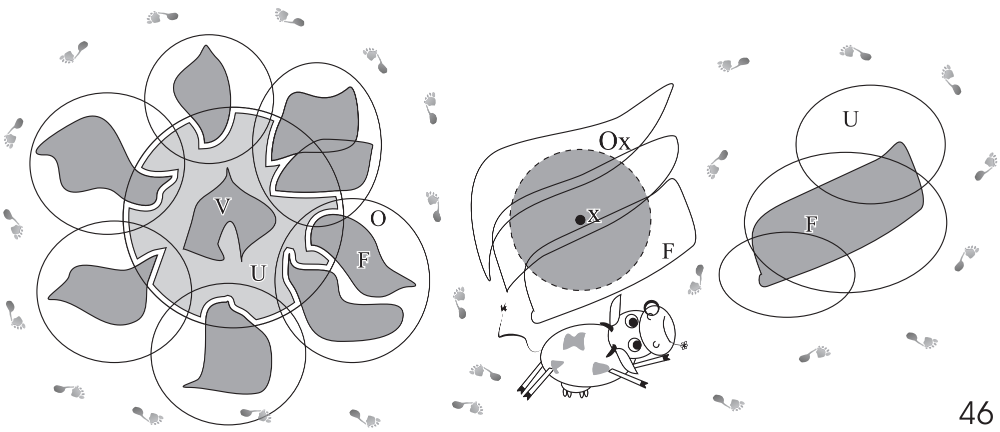
Доказательство. Пусть семейства открытых множеств $\mathcal{P}_i$ локально конечны, вписаны в $\mathcal{P}$ и их объединение $\bigcup_{i\in N}\mathcal{P}_i$ является покрытием. Для каждого $U\in\mathcal{P}_i$ положим $\tilde{U}=U\setminus\bigcup\bigcup_{j<i}\mathcal{P}_j$ и $\tilde{\mathcal{P}}_i=\{\tilde{U}:U\in\mathcal{P}_i\}$. Тогда $\bigcup_{i\in N}\tilde{\mathcal{P}}_i$ — искомое локально конечное покрытие. Действительно, для произвольной точки $x\in X$ рассмотрим $i_x=\min\{i\in N: x\in\bigcup\mathcal{P}_i\}$. Если $x\in U_x$ для некоторого $U_x\in\mathcal{P}_{i_x}$, то по построению $x\in\tilde{U_x}$. Для каждого $j<i_x$ зафиксируем окрестность O_jx, пересекающую конечное число элементов $\mathcal{P}_j$. Тогда $Ox=\bigcap_{j<i_x}O_jx\cap U_x$ пересекает конечное число элементов $\bigcup_{i\in N}\tilde{\mathcal{P}}_i$, так как $U_x\cap U=\emptyset$ для каждого $j>i$ и $U\in\mathcal{P}_j$.

Предложение 45 *Если в каждое открытое покрытие $\mathcal{P}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ регулярного пространства X можно вписать локально конечное покрытие (произвольными множествами), то можно вписать локально конечное замкнутое покрытие $\tilde{\mathcal{P}}=\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ так, что $W_\alpha\subset U_\alpha$.*



Доказательство. Для каждой точки $x\in X$ найдется окрестность Ox такая, что $[Ox]\subset U_\alpha$ для некоторого $U_\alpha\in\mathcal{P}$. В покрытие $\{Ox: x\in X\}$ впишем локально конечное покрытие произвольными множествами $\grave{\mathcal{P}}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$. Для каждого $\beta\in B$ выберем единственное $\alpha(\beta)\in A$ так, что $[V_\beta]\subset U_{\alpha(\beta)}$. Положим $W_\alpha=\bigcup\{[V_\beta]:\alpha(\beta)=\alpha$ и рассмотрим покрытие $\tilde{\mathcal{P}}=\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Так как $\grave{\mathcal{P}}$ локально конечно, то $\tilde{\mathcal{P}}$ локально конечно и каждое W_α замкнуто.

Предложение 46 *Если в каждое открытое покрытие $\mathcal{P}=\{U\}$ пространства X можно вписать локально конечное замкнутое покрытие, то можно вписать локально конечное открытое покрытие.*



46

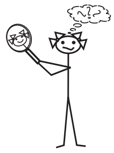
Доказательство. Пусть локально конечное покрытие $\mathcal{P}_1 = \{V\}$ вписано в $\mathcal{P}$. Для каждой точки $x \in X$ зафиксируем окрестность Ox, пересекающую конечное число элементов $\mathcal{P}_1$. В покрытие $\{Ox : x \in X\}$ впишем локально конечное замкнутое покрытие $\mathcal{P}_2 = \{F\}$. Для каждого $V \in \mathcal{P}_1$ положим $\grave{V} = X \setminus \bigcup\{F : F \cap V = \emptyset\}$. Тогда "раздутое"покрытие $\grave{\mathcal{P}}_1 = \{\grave{V}\}$ локально конечно. Действительно, для каждой точки $y \in X$ найдется окрестность Oy, пересекающая конечное число множеств $F \in \mathcal{P}_2$, каждое из которых пересекает лишь конечное число множеств $V \in \mathcal{P}_1$. Но если $F \cap V = \emptyset$, то $F \cap \grave{V} = \emptyset$. Для каждого $V \in \mathcal{P}_1$ и такого $U \in \mathcal{P}$, что $V \subset U$ положим $\tilde{V} = \grave{V} \cap U$. Тогда $\tilde{V} : V \in \mathcal{P}_1$ — искомое.

Задания для самоконтроля

1. Паракомпактна ли плоскость Немыцкого? Построить открытое покрытие, в которое нельзя вписать локально конечное покрытие.
2. Будут ли финально компактны или паракомпактны другие определенные нами пространства?

9 Кардинальные инварианты

Свет мой, зеркальце, скажи
Да всю правду доложи:
Я ль на свете всех милее,
Всех румяней и белее?



После возникновения и развития в рамках современной математики теории топологических пространств понадобились новые изобразительные средства для описания их свойств. Одной их наиболее ярких и геометричных характеристик топологических пространств стали кардинальные инварианты. Исследуя самые разные проблемы современной общей топологии, математики выражают свои идеи на языке кардинальных инвариантов – универсальном языке общей топологии. Кардинальные инварианты являются одной из наиболее наглядных характеристик топологических пространств. После доказательства А.В.Архангельским теоремы о том, что мощность компактного пространства счетного характера не превосходит континуум, теория кардинальных инвариантов получила бурное развитие и является сейчас одним из самых интригующих разделов общей топологии.

Определение. Кардинальным инвариантом называется кардинальнозначная функция, определенная на классе топологических пространств и принимающая на гомеоморфных пространствах равные значения.

Особое место занимает кардинальный инвариант $|X|$ – мощность пространства X.

Определение. Весом пространства X называется минимум мощностей баз в пространстве X:

$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} -$ база в $X\}$.

Пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, если в X есть счетная база.

Определение. Семейство $\mathcal{B} \subseteq \tau$ называется базой в точке $x \in X$, если для любой ее окрестности Ox найдется множество $U \in \mathcal{B}$ такое, что $x \in U \subseteq Ox$.

Определение. Характером пространства X в точке $x \in X$ называется минимум мощностей баз пространства X в точке x:

$\chi(x) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} -$ база X в точке $x\}$.

Определение. Характером пространства X называется супремум характеров в точках пространства X.

$\chi(X) = \sup\{\chi(x) : x \in X\}$.

Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности, если характер $\chi(X)$ счетен.

Определение. Семейство открытых множеств $\mathcal{B} = \{U\}$ называется π – базой в пространстве X, если каждое открытое $O \subseteq X$ содержит некоторое

$U \in \mathcal{B}$.

Определение. π-весом пространства X называется минимум мощностей π – баз в пространстве X:

$\pi w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} - \pi$ база в $X\}$.

Определение. Семейство открытых множеств $\mathcal{B} = \{U\}$ называется псевдобазой в пространстве X, если для любых двух точек $x, y \in X$ найдется такое $U \in \mathcal{B}$, что $x \in U$ и $y \notin U$.

Определение. Псевдовесом пространства X называется минимум мощностей псевдобаз в пространстве X:

$\psi w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} -$ псевдобаза в $X\}$.

(!) Семейство открытых множеств $\mathcal{B} = \{U\}$ является псевдобазой $\Leftrightarrow$ $\{x\} = \bigcap\{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$ для каждой точки $x \in X$.

(!) Всякая база является π – базой и псевдобазой.

Пример. Семейство интервалов, не содержащих точки 0, является π – базой, но не является псевдобазой на прямой. Семейство интервалов длины не меньше 1 является псевдобазой, но не является π – базой на прямой.

Определение. Числом Суслина называется супремум мощностей дизъюнктных семейств открытых множеств:

$c(X) = \sup\{|\mathcal{D}| : \mathcal{D} \subseteq \tau$ дизъюнктно $\}$.

Определение. Наследственным числом Суслина, или спрэдом, называется супремум чисел Суслина подпространств пространства X:

$hc(X) = s(X) = \sup\{c(Y) : Y \subseteq X\}$.

Определение. Плотностью пространства X называется минимум мощностей всюду плотных подмножеств X:

$d(X) = \min\{|A| : A$ всюду плотно в $X\}$.

Определение. Числом Линделефа $l(X)$ называется минимум кардинальных чисел σ таких, что из каждого открытого покрытия пространства X можно выделить подпокрытие мощности не больше σ.

Список кардинальных инвариантов можно продолжать очень долго, но сейчас мы этим ограничимся.

Определение. Если из каждого открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие, то пространство X называется финально компактным, или линделефовым.

Определение. Пространство X удовлетворяет условию Линделефа, если для любого семейства открытых множеств существует счетное подсемейство с тем же объединением.

Пространство X наследственно финально компактно $\Leftrightarrow$ X удовлетворяет условию Линделефа.

Теорема 9.1 *Справедливы следующие неравенства:*

1). $c(X) \leq d(X) \leq \pi w(X) \leq w(X)$;

2). $\psi w(X) \leq w(X)$;

3). $c(X) \leq hc(X) \leq w(X)$.

Доказательство. Так как всякая база является π-базой, то оценка $\pi w(X) \leq w(X)$ очевидна.

Пусть $\mathcal{B} = \{U\}$ произвольная π-база в пространстве X. Тогда для любых точек $x_U \in U$ множество $\{x_U : U \in \mathcal{B}\}$ всюду плотно в X. Действительно, всякое открытое множество $O \subseteq X$ содержит некоторое $U \in \mathcal{B}$ и, следовательно, точку x_U. Получаем $d(X) \leq |\mathcal{B}|$.

Пусть семейство открытых множеств $\mathcal{D} = \{\mathcal{U}\}$ дизъюнктно и множество $A \subseteq X$ всюду плотно. В каждом U зафиксируем единственную точку $a_U \in A$. Тогда $U \neq U'$ влечет $a_U \neq a_{U'}$ и, следовательно, $|\mathcal{D}| \leq |\mathcal{A}|$.

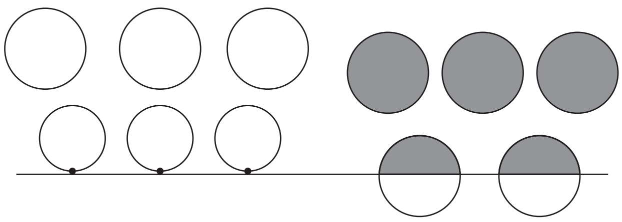
Проверить оставшиеся оценки совсем несложно.

Посчитаем кардинальные инварианты конкретных пространств.

Дискретная прямая

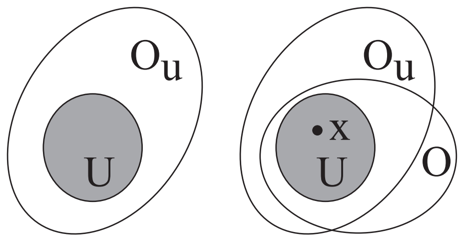
Семейство одноточечных множеств $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in R\}$ является базой. С другой стороны, $\mathcal{B}$ – дизъюнктное семейство открытых множеств максимальной мощности. Следовательно, $c(X) = d(X) = hc(X) = \pi w(X) = w(X) =$. Кроме того, $\mathcal{B}$ – открытое покрытие, из которого нельзя выделить подпокрытие меньшей мощности. То есть $l(X) = C$. Так как семейство интервалов с рациональными концами является псевдобазой, то $\psi w(X) = \omega$. Так как в каждой точке $x \in R$ семейство из одного множества $\mathcal{B} = \{\{x\}\}$ является базой, то $\chi(x) = 1$. В таких случаях топологи обычно пишут $\chi(x) = \omega$ и добавляют с улыбкой, что конечных кардинальных чисел не бывает.

Плоскость Немыцкого



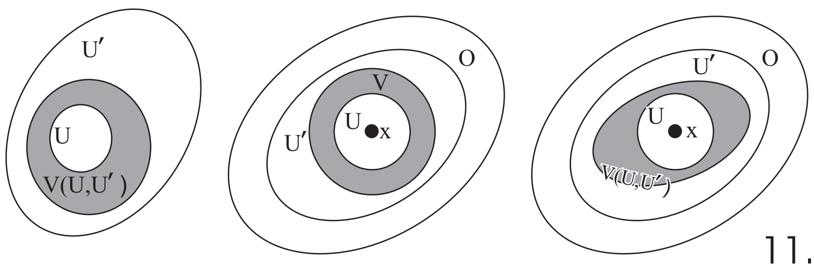
Мы уже показали, что $w(X) \geq C$. Семейство всех открытых кругов из верхней полуплоскости и всех множеств вида $O_L(Q, r)$ является базой мощности C. Следовательно, $w(X) = C$. Это же семейство является открытым покрытием, из которого нельзя выделить подпокрытие меньшей мощности. То есть $l(X) = C$. Топология τ_N сильнее, чем естественная, то есть индуцированная из плоскости, топология полуплоскости R^2_+. Следовательно, семейство пересечений открытых на плоскости кругов, имеющих рациональный радиус и центр в точке с двумя рациональными координатами, с R^2_+ является счетной π - базой и счетной псевдобазой. Но тогда $c(X) = d(X) = \pi w(X) = \psi w(X) = \omega$. Так как в каждой точке круги рациональных радиусов образуют счетную базу, то $\chi(X) = \omega$. Так как прямая L дискретна в индуцированной топологии, то $hc(X) = C(L) = C$.

Теорема 9.2 *Если пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то X удовлетворяет условию Линделефа.*



Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \{U\}$ — счетная база и $\mathcal{D} = \{O\}$ — произвольное семейство открытых множеств. Для каждого $U \in \mathcal{B}$ отметим такое $O_U \in \mathcal{D}$, что $U \subseteq O_U$, если это возможно. Рассмотрим семейство отмеченных множеств. Если $x \in O$ для некоторого $O \in \mathcal{D}$, то $x \in U \subseteq O$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$ и $x \in O_U$.

Теорема 9.3 *Если пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой базы пространства X можно выделить счетное подсемейство, которое также является базой.*



11.3

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \{U\}$ — счетная база и $\mathcal{D} = \{V\}$ — произвольная база. Для каждой пары $U, U' \in \mathcal{B}$ отметим такое $V(U, U') \in \mathcal{D}$, что $U \subseteq V(U, U') \subseteq U'$, если это возможно. Рассмотрим семейство отмеченных множеств. Для произвольной точки x и ее окрестности O последовательно можно выбрать $U' \in \mathcal{B}$, $V \in \mathcal{D}$ и $U \in \mathcal{B}$ так, что $x \in U \subseteq V \subseteq U' \subseteq O$. Тогда для отмеченного $V(U, U')$ получаем $x \in V(U, U') \subseteq O$.

Задания для самоконтроля

1. Посчитать кардинальные инварианты пространств, для которых они ещё не были вычислены.

10 Произведения топологических пространств

Умножение - это очень важная операция! Умножать людям нравится гораздо больше, чем делить. В том числе и математикам тоже. Поэтому в математике эта операция встречается гораздо чаще, чем деление. Еще бы! При умножении что-то увеличивается, а при делении - уменьшается.

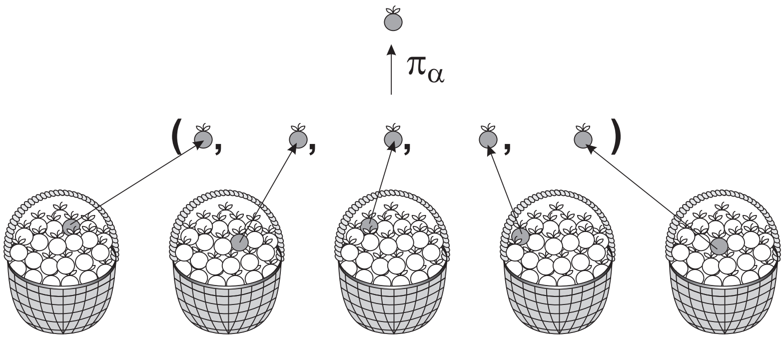
– У вас было пять яблок. Некто взял у вас три яблока. Сколько яблок осталось?

– Пять!

– Ответ неправильный!

– Но ведь я же не отдам Некто свое яблоко!

Вот только как быть с определением топологии?



Определение. Произведением множеств A и B называется множество формальных пар, в которых на первом месте находится точка множества A, а на втором – точка множества B:

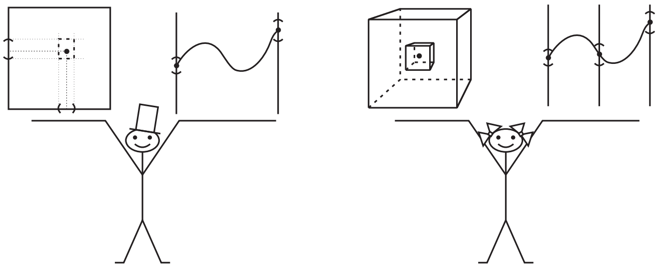
$A \times B = \{(a, b) : a \in A \bigwedge b \in B\}$.

Определение. Произведением произвольной совокупности множеств $\{A_\alpha : \alpha \in \sigma\}$ называется множество формальных наборов из σ элементов, в которых на месте с индексом α находится точка множества A_α:

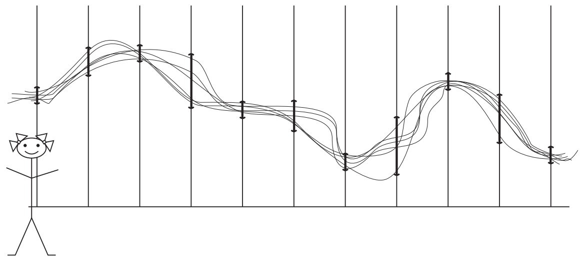
$\prod_{\alpha\in\sigma} A_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\sigma} : \forall\alpha \in \sigma(x_\alpha \in A_\alpha)\}$.

Существуют две основные топологии на произведении топологических пространств: ящичная топология и топология Тихонова. Они совпадают для конечных произведений.

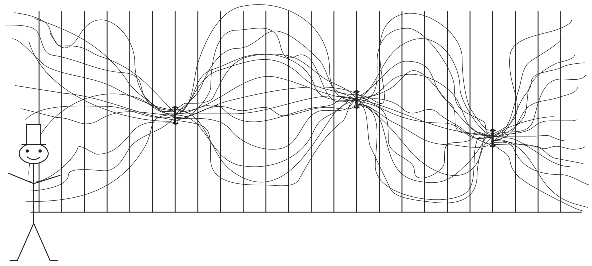
Определение. Пусть $X_1, ..., X_k$ — конечный набор топологических пространств. Выберем произвольные открытые множества $U_1 \subseteq X_1$,...,$U_k \subseteq X_k$. Тогда множества вида $U_1 \times ... \times U_k$ называются открытыми прямоугольными множествами в произведении $X_1 \times ... \times X_k$. Топология τ_{prod}, базу которой они образуют, называется топологией произведения.



Определение. Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in \sigma\}$ — произвольная совокупность топологических пространств. Выберем произвольные открытые множества $U_\alpha \subseteq X_\alpha$. Тогда множества вида $\prod_{\alpha\in\sigma} U_\alpha$ образуют базу ящичной топологии τ_{box} на произведении $\prod_{\alpha\in\sigma} X_\alpha$.



Определение. Пусть $\{X_\alpha : \alpha \in \sigma\}$ — произвольная совокупность топологических пространств. Для конечного набора индексов $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \sigma$ выберем произвольные открытые множества $U_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_k} \subseteq X_{\alpha_k}$. Тогда множества вида $U_{\alpha_1} \times ... \times U_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha\in\sigma\setminus\{\alpha_1,...,\alpha_k\}} X_\alpha$ образуют базу топологии Тихонова τ_{prod} на произведении $\prod_{\alpha\in\sigma} X_\alpha$.



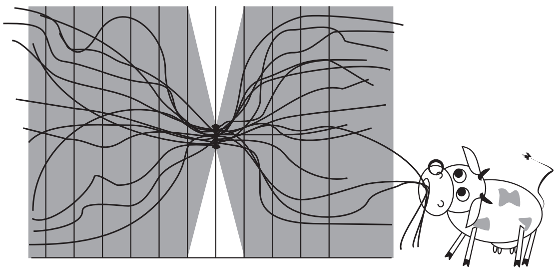
Предложение 47 *Пусть τ и σ — топологии на множестве X, δ — топология на множестве Y и $f : X \to Y$ - произвольное отображение. Тогда если $f : (X, \tau) \to (Y, \delta)$ непрерывно и τ слабее σ, то $f : (X, \sigma) \to (Y, \delta)$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $U \in \delta$. Так как f непрерывно, то $f^{-1}U \in \tau$. Так как τ слабее σ, то $f^{-1}U \in \sigma$.

Предложение 48 *Пусть* $f : X \to Y$ *— произвольное отображение множества* X *на множество* Y *. Тогда для каждой топологии* δ *на* Y *существует минимальная топология* τ *на* X *такая, что отображение* $f : (X, \tau) \to (Y, \delta)$ *непрерывно.*

Доказательство. Топология τ - это минимальное семейство множеств, содержащее семейство $\{f^{-1}U : U \in \delta\}$ и замкнутое относительно пунктов (1-3) определения топологии.

Предложение 49 *Для конечных произведений топологических пространств* $X = X_1 \times ... \times X_k$ *топология* τ_{prod} *совпадает с минимальной топологией* $\tau_{\min}$ *на* X *, для которой каждая проекция является непрерывным отображением.*



Доказательство. ($\Rightarrow$). Покажем, что каждая проекция $\pi_i : X \to X_i$, определенная на пространстве (X, τ_{prod}), является непрерывным отображением. Действительно, если $U \subset X_i$ открыто, то

$$\pi_i^{-1}U = X_1 \times ... \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times ... \times X_k$$

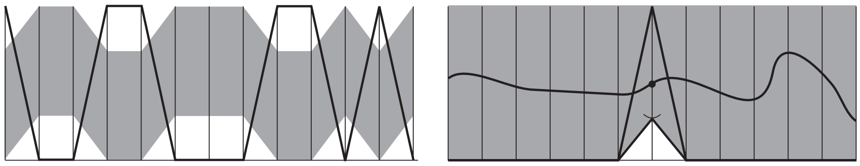
принадлежит τ_{prod}.

($\Leftarrow$). Если $U_1 \times ... \times U_k \in \tau_{\min}$ для каждого открытого прямоугольного множества, то $\tau_{prod} \subseteq \tau_{\min}$. Остается заметить, что $U_1 \times ... \times U_k = \pi_1^{-1}U_1 \cap ... \cap \pi_k^{-1}U_k$ открыто, если каждая проекция π_i непрерывна.

Практически без изменений доказывается следующее

Предложение 50 *Для произвольных произведений топологических пространств* $X = \prod_{\alpha \in \sigma} X_\alpha$ *топология Тихонова* τ_{prod} *совпадает с минимальной топологией* $\tau_{\min}$ *на* X *, для которой каждая проекция является непрерывным отображением.*

Предложение 51 *Пространство* $([0,1]^\omega, \tau_{box})$ *не компактно.*



Доказательство. $\neg 1)$ покрытие $\mathcal{P} = \{\prod_{j\in\omega} U_j : \forall j \in \omega(U_j = [0, \frac{2}{3}) \vee (\frac{1}{3}, 1])\}$ не содержит конечных и, более того, счетных, подпокрытий. Действительно, пусть $\tilde{\mathcal{P}} = \{U^i\}_{i\in N}$ - произвольное счетное подсемейство множеств вида $U^i = \prod_{j\in\omega} U^i_j$. Построим точку $x = (x_i)_{i\in N}$ при помощи диагонального процесса по следующему правилу: Если $U^i_i = [0, \frac{2}{3})$, то $x_i = 1$, если $U^i_i = (\frac{1}{3}, 1]$, то $x_i = 0$. Тогда $x \notin U^i$ для любого $U^i \in \tilde{\mathcal{P}}$, так как $x_i \notin U^i_i$, то есть $\tilde{\mathcal{P}}$ не является подпокрытием.

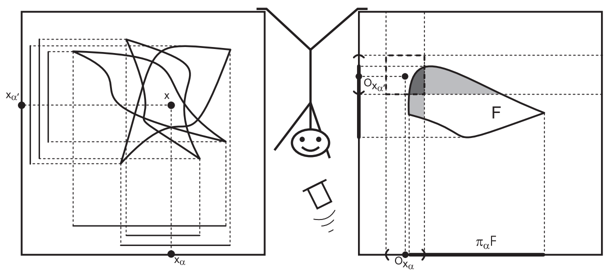
$\neg 2)$ дополнения до множеств $\prod_{j\in\omega} U_j$ образуют замкнутый счетно центрированный фильтр, имеющий пустое пересечение.

$\neg 3)$ множество $A = \{x_i\}_{i\in N}$ точек $x_i = (x_{ij})_{j\in N}$, определенных по следующему правилу: $x_{ij} = 0$, если $i \neq j$ и $x_{ij} = 1$, если $i = j$, не имеет предельных точек. Действительно, пусть $x = (x_j)_{j\in N}$ - произвольная точка. Если $x_j = 0$ для всех $j \in N$, то окрестность $Ox = [0, \frac{1}{2})^\omega$ не пересекается с A. Если $x_j \neq 0$ для некоторого $j \in N$, то окрестность

$$Ox = [0,1]_1 \times ... \times [0,1]_{j-1} \times (\frac{x_j}{2}, 1] \times [0,1]_{j+1} \times ...$$

содержит ровно одну точку из A.

Теорема 10.1 *(Теорема Тихонова). Произведение компактных пространств с топологией Тихонова компактно.*



Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{F\}$ — произвольный не обязательно замкнутый ультрафильтр в произведении компактных пространств $X = \prod_{\alpha\in\sigma} X_\alpha$. Так как для каждого $\alpha \in \sigma$ семейство проекций $\{\pi_\alpha F\}$ центрировано и X_α компактно, то найдется точка

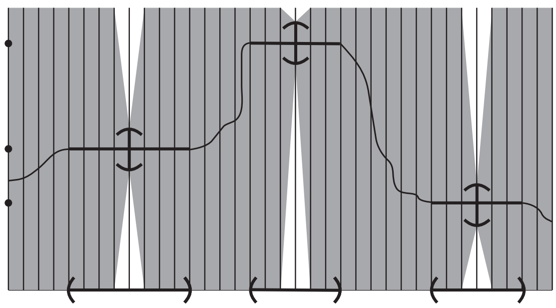
$$x_\alpha \in \bigcap\{[\pi_\alpha F]_{X_\alpha} : F \in \mathcal{F}\}.$$

Для $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\sigma}$ получаем $x \in \bigcap\{[F]_X : F \in \mathcal{F}\}$.

Действительно, для любого $F \in \mathcal{F}$ и произвольной окрестности $Ox_\alpha \subset X_\alpha$ условие $Ox_\alpha \cap \pi_\alpha F \neq \emptyset$ влечет $\pi_\alpha^{-1} Ox_\alpha \cap F \neq \emptyset$. В силу максимальности $\mathcal{F}$ имеем $\pi_\alpha^{-1} Ox_\alpha \in \mathcal{F}$. Для любого конечного набора окрестностей $Ox_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_1}$, ..., $Ox_{\alpha_k} \subset X_{\alpha_k}$ и $Ox = \pi_{\alpha_1}^{-1} Ox_{\alpha_1} \cap ... \cap \pi_{\alpha_k}^{-1} Ox_{\alpha_k}$ получаем $Ox \in \mathcal{F}$. Но тогда $Ox \cap F \neq \emptyset$ и $x \in [F]$ по определению топологии Тихонова.

Совершенно очаровательную теорему Хьюитта, Марчевского, Пондишери мы докажем для прямой в степени континуум.

Теорема 10.2 *Пространство* (R^C, τ_{prod}) *сепарабельно.*



Доказательство. Представим наше пространство в следующем виде: $R^C = \prod_{\alpha \in R} R_\alpha$, где $|R| = C$ и каждое R_α - экземпляр прямой R.

Для каждого конечного набора точек $r_1, ..., r_k \in Q$ и дизъюнктных интервалов с рациональными концами в множестве индексов $(a_1, b_1), ..., (a_k, b_k) \subseteq R$ определим точку

$$P(r_1, ..., r_k; (a_1, b_1), ..., (a_k, b_k)) = P(x_\alpha)_{\alpha \in R} \in \prod_{\alpha \in R} R_\alpha$$

по следующему правилу: если $\alpha \in (a_i, b_i)$, то $x_\alpha = r_i$ для $i = 1, ..., k$; если $\alpha \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i)$, то $x_\alpha = 0$. Построенное множество точек P имеет мощность $|Q|^k \times |Q^2|^k = \omega^k \times \omega^k = \omega$. Остается показать, что оно всюду плотно.

Рассмотрим произвольное множество из базы топологии Тихонова:

$$U = U_{\alpha_1} \times ... \times U_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha \in R \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}} R_\alpha,$$

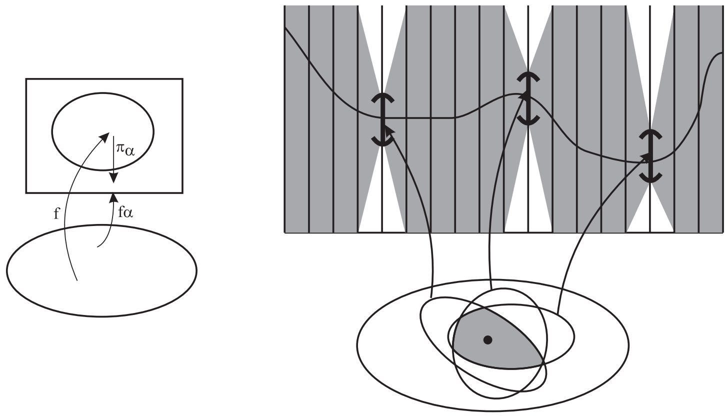
где $\alpha_i \in R$ и $U_{\alpha_i} \subset R_{\alpha_i}$ открыты для всех $i = 1, ..., k$. Найдутся рациональные точки $r_i \in U_{\alpha_i}$ и дизъюнктные интервалы с рациональными концами (a_i, b_i) такие, что $\alpha_i \in (a_i, b_i)$. Но тогда по построению $P(r_1, ..., r_k; (a_1, b_1), ..., (a_k, b_k)) \in U$.

Умножать можно не только пространства, но и отображения.

Определение. Пусть $f_1 : X \to Y_1$ и $f_2 : X \to Y_2$ – произвольные отображения. Отображение $f : X \to Y_1 \times Y_2$, определенное по правилу $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, называется диагональным произведением отображений f_1 и f_2 и обозначается $f = f_1 \triangle f_2$.

Определение. Пусть $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ – произвольное отображение для каждого $\alpha \in \sigma$. Отображение $f : X \to \prod_{\alpha\in\sigma} Y_\alpha$, определенное по правилу $f(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha\in\sigma}$, называется диагональным произведением отображений f_α и обозначается $f = \triangle_{\alpha\in\sigma} f_\alpha$.

Предложение 52 *Пусть $f : X \to (\prod_{\alpha\in\sigma} Y_\alpha, \tau_{prod})$ - диагональное произведение отображений $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Тогда f непрерывно $\Leftrightarrow$ каждое f_α непрерывно.*



Доказательство. ($\Rightarrow$) Несложно видеть, что $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$. Если f непрерывно, то f_α непрерывно как композиция непрерывных отображений π_α и f.

($\Leftarrow$) В силу определения топологии Тихонова достаточно проверить условие Коши для произвольной точки $x \in X$ и окрестности образа вида

$$Of(x) = Of_{\alpha_1}(x) \times ... \times Of_{\alpha_k}(x) \times \prod_{\alpha\in\sigma\setminus\{\alpha_1,...,\alpha_k\}} Y_\alpha,$$

где $Of_{\alpha_1}(x) \subseteq Y_{\alpha_1}$,..., $Of_{\alpha_k}(x) \subseteq Y_{\alpha_k}$ - открытые множества. В силу непрерывности отображений $f_{\alpha_1}, ..., f_{\alpha_k}$ найдутся окрестности $O_1x, ..., O_kx \subset X$, для которых $f_{\alpha_1}O_1x \subseteq Of_{\alpha_1}(x)$,..., $f_{\alpha_k}O_kx \subseteq Of_{\alpha_k}(x)$. Тогда для $Ox = O_1x \cap ... \cap O_kx$ получаем $fOx \subseteq Of(x)$. Действительно, для произвольного

$y \in Ox$ имеем $f(y) = (f_\alpha(y))_{\alpha\in\sigma} \in f_{\alpha_1}O_1x\times\ldots\times f_{\alpha_k}O_kx\times\prod_{\alpha\in\sigma\setminus\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}} f_\alpha X \subseteq Of(x)$.

Пусть в дальнейшем $I = [0,1]$, пространство X вполне регулярно, $\mathcal{F} = \{f\}$ – семейство всех непрерывных отображений $f : X \to I$ и $f_\mathcal{F}$ – диагональное произведение этого семейства: $f_\mathcal{F} = \triangle\mathcal{F} = \triangle_{f\in\mathcal{F}} f$. Тогда $f_\mathcal{F} : X \to \prod_{f\in\mathcal{F}} I_f$, где каждое I_f - экземпляр отрезка I.

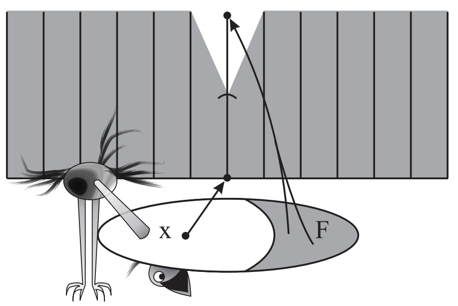
Предложение 53 *Отображение $f_\mathcal{F}$ разделяет точки и замкнутые множества.*

(!) Если $F \subset X$ замкнуто и $x \notin F$, то $f_\mathcal{F}(x) \notin f_\mathcal{F}(F)$.

Доказательство. Найдется такое $f \in \mathcal{F}$, что $f(x) = 0$ и $f(F) = 1$. Но тогда $f_\mathcal{F}(x) \in \pi_f^{-1}(0)$ и $f_\mathcal{F}(F) \in \pi_f^{-1}(1)$, где π_f - ортогональная проекция на I_f.

Следовательно, отображение $f_\mathcal{F}$ взаимно однозначно.

Предложение 54 *Отображение $f_\mathcal{F}$ открыто.*



(!) Если $U \subset X$ открыто, то $f_\mathcal{F}U$ открыто в $f_\mathcal{F}X$.

Доказательство. Покажем, что для каждой точки $x \in f_\mathcal{F}U$ найдется такая окрестность $Ox \subset f_\mathcal{F}X$, что $Ox \subset f_\mathcal{F}U$.

Действительно, найдется такое $f \in \mathcal{F}$, что $f(x) = 0$ и $f(X \setminus U) = 1$. Тогда $Ox = \pi_f^{-1}([0,1)) \cap f_\mathcal{F}X$ – искомая окрестность.

(!) Так как $f_\mathcal{F}$ взаимно однозначно, то существует обратное отображение $f_\mathcal{F}^{-1} : f_\mathcal{F}X \to X$. Так как $f_\mathcal{F}$ открыто, то $f_\mathcal{F}^{-1}$ непрерывно. То есть $f_\mathcal{F}$ является гомеоморфизмом. Но тогда пространства X и $f_\mathcal{F}X$ топологически эквивалентны. Другими словами, мы построили погружение $f_\mathcal{F}$ вполне регулярного пространства X в произведение отрезков $\prod_{f\in\mathcal{F}} I_f$.

Предложение 55 *Пусть τ – произвольный кардинал. Любое подпространство $X \subset I^\tau$ вполне регулярно.*

Доказательство. Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \notin F$. Тогда $x \notin [F]_{I^\tau}$. Так как I^τ нормально, найдется непрерывное отображение $g : I^\tau \to I$, для которого $g(x) = 0$ и $g([F]_{I^\tau}) = 1$. Но тогда $h = g/_X$ непрерывно, $h(x) = 0$ и $h(F) = 1$.

Следствие. Пространство X вполне регулярно $\Leftrightarrow$ $X \subset I^\tau$ для некоторого кардинального числа τ.

(!) Так как I^τ компактно, то $[X]_{I^\tau}$ компактно.

Предложение 56 *Для каждого непрерывного отображения* $f : X \to I$ *существует непрерывное продолжение* $\tilde{f} : [X]_{I^\tau} \to I$.

(!) Такое непрерывное отображение $\tilde{f} : [X]_{I^\tau} \to I$, что $\tilde{f}(x) = f(x)$ для каждого $x \in X$.

Доказательство. По построению $f = \pi_f/_{f_{\mathcal{F}}X} \circ f_{\mathcal{F}}$. Если отождествить X с $f_{\mathcal{F}}X$, то $f = \pi_f/_X$. Но для $\pi_f/_X$ существует непрерывное продолжение $\pi_f/_{[X]_{I^\tau}}$.

Определение. Компактное пространство B называется компактным расширением пространства X, если $X \subset B$ и X всюду плотно в B.

Определение. Компактное расширение B пространства X называют расширением Чеха-Стоуна, если для каждого непрерывного отображения $f : X \to I$ существует непрерывное продолжение $\tilde{f} : B \to I$.

Обычно обозначают bX - произвольное компактное расширение и βX - расширение Чеха-Стоуна. В главе "Компактность"построены некоторые примеры компактных расширений.

Пример. Отрезок $[0, 1]$ является компактным расширением интервала $(0, 1)$, но не является расширением Чеха-Стоуна.

Действительно, непрерывное отображение $f : (0, 1) \to [0, 1]$ по правилу $f(x) = |\sin \frac{1}{x}|$ нельзя продолжить на весь $[0, 1]$.

Предложение 57 *Пусть* βX *- расширение Чеха-Стоуна пространства* X *и* B *компактно. Тогда для каждого непрерывного отображения* $f : X \to B$ *существует непрерывное продолжение* $\tilde{f} : \beta X \to B$.

Доказательство. Пусть $B \subset \prod_{\alpha<\sigma} I_\alpha$. Для каждого $\alpha < \sigma$ рассмотрим композицию проекции π_α и исходного отображения: $f_\alpha = \pi_\alpha/_{f(X)} \circ f$.

Имеем $f_\alpha : X \to I_\alpha$ непрерывно. Пусть $\tilde{f} = \triangle_{\alpha<\sigma}\tilde{f}_\alpha$ - диагональное произведение непрерывных продолжений $\tilde{f}_\alpha : \beta X \to I_\alpha$. Тогда $\tilde{f} : \beta X \to \tilde{f}(\beta X)$ - искомое продолжение отображения f.

Действительно, для каждой точки $x \in X$ имеем $\tilde{f}(x) = (\tilde{f}_\alpha(x))_{\alpha<\sigma} = (f_\alpha(x))_{\alpha<\sigma} = f(x)$. Следовательно, $f(X) = \tilde{f}(X)$ всюду плотно в компактном $\tilde{f}(\beta X)$. Если $\tilde{f}(\beta X) \setminus B \neq \emptyset$, то произвольная точка x этого множества не является предельной для компактного B и, тем более, для $f(X) \subseteq B$. Но тогда $\tilde{f}(\beta X) \subseteq B$ и теорема доказана.

Определение. $U^\varepsilon = \beta X \setminus [X \setminus U]_{\beta X}$.

Предложение 58 *U^ε - максимальное открытое в βX множество, удовлетворяющее условию $U^\varepsilon \cap X = U$.*

(!) Если $V \subset \beta X$ открыто и $V \cap X = U$, то $V \subseteq U^\varepsilon$.

Доказательство. Если V открыто в βX и $V \cap (X \setminus U) = \emptyset$, то $V \cap [X \setminus U]_{\beta X} = \emptyset$.

Предложение 59 *Множества вида U^ε, где $U \subseteq X$ открыто, образуют базу в βX.*

Доказательство. Пусть $Ox \subset \beta X$ - произвольная окрестность точки x. Так как βX нормально, то $[\hat{O}x]_{\beta X} \subseteq Ox$ для некоторой окрестности $\hat{O}x \subset \beta X$. Для $U = \hat{O}x \cap X$ имеем $\hat{O}x \subseteq U^\varepsilon \subseteq [\hat{O}x]_{\beta X}$. Но тогда $x \in U^\varepsilon \subseteq Ox$.

Предложение 60 *Пространство X локально компактно $\Leftrightarrow$ X открыто в βX.*

Доказательство. ($\Leftarrow$). Для каждой точки $x \in X$ найдется такая окрестность $Ox \subseteq X$, что $[Ox]_{\beta X} \subseteq X$. Но тогда $[Ox]_X = [Ox]_{\beta X}$ компактно.

($\Rightarrow$). Для каждой точки $x \in X$ найдется такая окрестность $Ox \subseteq X$, что $[Ox]_X$ компактно. Тогда $[Ox]_X = [Ox]_{\beta X}$. Так как Ox открыто в X, то $Ox \cap [X \setminus Ox]_{\beta X} = \emptyset$. Так как $[Ox]_{\beta X} \cup [X \setminus Ox]_{\beta X} = \beta X$, то $Ox = \beta X \setminus [X \setminus Ox]_{\beta X}$ открыто в βX.

Предложение 61 *Пространство X нигде не локально компактно $\Leftrightarrow$ X нигде не плотно в βX.*

Предложение 62 *Пусть множества F и G замкнуты в нормальном пространстве X. Если $F \cap G = \emptyset$, то $[F]_{\beta X} \cap [G]_{\beta X} = \emptyset$.*

Доказательство. В силу леммы Урысона существует непрерывное отображение $f : X \to [0,1]$, для которого $f(F) = 0$ и $f(G) = 1$. Найдется непрерывное продолжение $\tilde{f} : \beta X \to [0,1]$. Но тогда $[F]_{\beta X} \subseteq f^{-1}(0)$ и $[G]_{\beta X} \subseteq f^{-1}(1)$.

Предложение 63 *Пусть множество F замкнуто в нормальном пространстве X. Тогда $[F]_{\beta X} = \beta F$.*

Доказательство. Пусть отображение $f : F \to [0,1]$ непрерывно. В силу теоремы Титце-Урысона для f существует непрерывное продолжение $f_1 : X \to [0,1]$. Для f_1 найдется непрерывное продолжение $\tilde{f}_1 : \beta X \to [0,1]$. Но тогда $\tilde{f} = \tilde{f}_1/_{[F]_{\beta X}}$ - непрерывное продолжение f на $[F]_{\beta X}$.

Предложение 64 *Если $X \subset Y \subset \beta X$, то $\beta X = \beta Y$.*

Доказательство. Пусть отображение $f : Y \to [0,1]$ непрерывно. Для $f_1 = f/_X$ существует непрерывное продолжение $\tilde{f}_1 : \beta X \to [0,1]$. Но тогда $\tilde{f}_1/_Y = f$, так как $\tilde{f}_1/_X = f/_X$ и X всюду плотно в Y. То есть $\tilde{f}_1$ - искомое продолжение отображения f.

Предложение 65 *Пусть пространство X локально компактно и σ-компактно. Если $F \subset X^*$ σ-компактно, то $[F]_{\beta X} = \beta F$.*

Доказательство. Пусть отображение $f : F \to [0,1]$ непрерывно. Так как X открыто в βX, то X открыто в $Y = X \cup F$. Так как Y регулярно и σ-компактно, то Y нормально. В силу теоремы Титце-Урысона для f существует непрерывное продолжение $f_1 : Y \to [0,1]$. Так как $X \subseteq Y \subseteq \beta X$, то для f_1 существует непрерывное продолжение $\tilde{f}_1 : \beta X \to [0,1]$. Тогда $\tilde{f} = \tilde{f}_1/_{[F]_{\beta X}}$ - искомое непрерывное продолжение f.

Предложение 66 *Пусть пространство X локально компактно и σ-компактно. Если множества $F, G \subset X^*$ σ-компактны, $[F]_{\beta X} \cap G = \emptyset$ и $F \cap [G]_{\beta X} = \emptyset$, то $[F]_{\beta X} \cap [G]_{\beta X} = \emptyset$.*

Доказательство. Множества F и G замкнуты в $Y = X \cup F \cup G$. Так как Y регулярно и σ-компактно, то Y нормально. Так как $X \subset Y \subset \beta X$, то $\beta Y = \beta X$. Но $[F]_{\beta Y} \cap [G]_{\beta Y} = \emptyset$.

Предложение 67 *Если X локально компактно и σ-компактно, то в X^* нет сходящихся последовательностей*

Доказательство. Пусть $x \in X^*$ и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x. Тогда для $F = \{x_n : n \text{ четно }\}$ и $G = \{x_n : n \text{ нечетно }\}$ получаем противоречие предыдущему предложению.

В действительности, это предложение справедливо в более сильной форме:

Предложение 68 *Пусть пространство X локально компактно и σ-компактно. Если множество $D \subset X^*$ счетно и дискретно в себе, то $[D]_{X^*} = \beta D$.*

Задания для самоконтроля

1. Докажите самостоятельно Предложение 68.

11 Фильтры и ультрафильтры

Как это ни парадоксально, одним из наиболее загадочных, мистических и с большим трудом поддающихся изучению в общей топологии является счетное дискретное пространство. Обычно его отождествляют с множеством натуральных чисел N или конечных ординалов ω. Напомним, что $\omega = N \cup \{0\}$. Очевидно, топологически ω и N эквивалентны. Нигде больше топология не соприкасается так близко с логикой, теорией множеств и булевыми алгебрами, как в теории расширения Чеха-Стоуна этого пространства βN. Самые умопомрачительные конструкции, простые с виду и неразрешимые в течение многих лет в реальности задачи и бесплодные усилия, направленные на их решение, связаны с этим пространством. Одним из фундаментальных в этой теории является понятие ультрафильтра, которое нагляднее всего можно изучать именно на примере пространства N.

Определение. Семейство $\mathcal{F}$ называется центрированным, если любое конечное подсемейство семейства $\mathcal{F}$ имеет непустое пересечение: $\forall F_1, ..., F_k \in \mathcal{F}(F_1 \cap ... \cap F_k \neq \emptyset)$.

Определение. Центрированное семейство $\mathcal{F}$ называется фильтром.

Определение. Фильтр $\mathcal{F}$ называется максимальным фильтром или ультрафильтром, если $\mathcal{F}$ совпадает с любым фильтром $\mathcal{G}$, содержащим $\mathcal{F}$:

$\mathcal{F}$ - ультрафильтр $\Leftrightarrow \forall \mathcal{G}(\mathcal{G}$ фильтр и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G})$.

Определение. Если $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$, то ультрафильтр $\mathcal{F}$ называется фиксированным. Если $\cap\mathcal{F} = \emptyset$, то ультрафильтр $\mathcal{F}$ называется свободным.

Пример. Семейство $\mathcal{F} = \{\{n, n+1, ...\} : n \in N\}$ является фильтром, но не является ультрафильтром. Действительно, если $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{2n : n \in N\}$, то $\mathcal{G}$ - фильтр и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, но $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$.

Рассмотрим свойства произвольного ультрафильтра $\mathcal{F}$.

Предложение 69 *Ультрафильтр $\mathcal{F}$ не содержит пустое множество.*

Предложение 70 *Ультрафильтр $\mathcal{F}$ замкнут относительно конечных пересечений: если $F_1, ..., F_k \in \mathcal{F}$, то $F_1 \cap ... \cap F_k \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup G$ является фильтром. Действительно, для произвольных $G_1, ..., G_m \in \mathcal{G}$ имеем $G_1 \cap ... \cap G_m \cap G = G_1 \cap ... \cap G_m \cap F_1 \cap ... \cap F_k \neq \emptyset$, так как все множества в последнем пересечении принадлежат $\mathcal{F}$.

Предложение 71 *Для произвольных $F, G \subset N$ справедливо следующее условие: если $F \in \mathcal{F}$ и $F \subset G$, то $G \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup G$ является фильтром. Действительно, для произвольных $G_1, ..., G_m \in \mathcal{G}$ имеем $G_1 \cap ... \cap G_m \cap G \supseteq G_1 \cap ... \cap G_m \cap F \neq \emptyset$, так как все множества в последнем пересечении принадлежат $\mathcal{F}$.

Предложение 72 *Если $G \subset N$ и $G \cap F \neq \emptyset$ для любого $F \in \mathcal{F}$, то $G \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup G$ является фильтром. Действительно, для произвольных $F_1, ..., F_m \in \mathcal{G}$ имеем $F_1 \cap ... \cap F_m \cap G \supseteq F \cap G \neq \emptyset$, так как $F = F_1 \cap ... \cap F_m$ принадлежат $\mathcal{F}$.

Предложение 73 *Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.*

Доказательство. Приведем основную идею доказательства, не вдаваясь в теоретико-множественные тонкости.

Пусть $\mathcal{F}$ - фильтр. Если найдется $G \in \exp N \setminus \mathcal{F}$, для которого $\mathcal{F} \cup \{\mathcal{G}\}$ является фильтром, то перейдем от $\mathcal{F}$ к $\mathcal{F} \cup \{\mathcal{G}\}$. Будем повторять этот шаг до тех пор, пока фильтр $\mathcal{F}$ не станет максимальным.

Предложение 74 *Содержащий конечное множество ультрафильтр фиксирован.*

Доказательство. Пусть конечное множество $F = \{n_1, ..., n_k\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathcal{F}$. Если $\cap \mathcal{F} = \emptyset$, то $n_1 \notin F_1$, ... , $n_k \notin F_k$ для некоторых $F_1, ..., F_k \in \mathcal{F}$. Но тогда $F \cap F_1 \cap ... \cap F_k = \emptyset$.

Предложение 75 *Пересечение фиксированного ультрафильтра состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. Пусть две различные точки x и y принадлежат пересечению ультрафильтра $\mathcal{F}$. Так как $x \in \cap \mathcal{F}$, то фильтр $\mathcal{F} \cup \{x\}$ совпадает с $\mathcal{F}$. Так как $y \in \cap \mathcal{F}$, то фильтр $\mathcal{F} \cup \{y\}$ совпадает с $\mathcal{F}$. Но тогда $\{x\} \in \mathcal{F}$,

$\{y\} \in \mathcal{F}$ и $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

Будем обозначать $\mathcal{F}_x$ такой фиксированный ультрафильтр, для которого $\{x\} = \cap\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}_x$ - все подмножества N, содержащие x. Очевидно, $|\mathcal{F}_x| = C$. Существует счетное число фиксированных ультрафильтров.

Предложение 76 *Любой ультрафильтр несчетен.*

Доказательство. Пусть существует счетный свободный ультрафильтр $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k\in N}$. Зафиксируем различные точки $x_1, y_1 \in F_1$. Для каждого $k \in N$ зафиксируем различные точки

$$x_k, y_k \in F_1 \cap ... \cap F_k \setminus (\{x_1, ..., x_{k-1}\} \cup \{y_1, ..., y_{k-1}\}).$$

Пусть $F = \{x_k\}_{k\in N}$. Но тогда $\mathcal{F} \cup \{F\}$ - фильтр и $F \notin \mathcal{F}$. Действительно, $y_k \in F_k$ для любого $k \in N$ и $y_k \notin F$.

Предложение 77 *Если $\mathcal{F}$ — ультрафильтр и $A \subset N$ - произвольное множество, то либо $A \in \mathcal{F}$, либо $(N \setminus A) \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Если $A \notin \mathcal{F}$, то $A \cap F = \emptyset$ для некоторого $F \in \mathcal{F}$. Если $(N \setminus A) \notin \mathcal{F}$, то $(N \setminus A) \cap G = \emptyset$ для некоторого $G \in \mathcal{F}$. Но тогда для $K = F \cap G$ получаем $K \in \mathcal{F}$ и $K \cap N = \emptyset$.

Важную роль в теории пространства βN играют семейства подмножеств N специального вида.

Определение. Семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\sigma}$ называется почти дизъюнктным, если

1) каждое A_α бесконечно;

2) пересечение $A_\alpha \cap A_\beta$ конечно или пусто при $\alpha \neq \beta$.

Предложение 78 *В N существует почти дизъюнктное семейство мощности континуум.*

Доказательство. Так как множество рациональных чисел Q счетно, то существует биекция $f : N \to Q$. Для каждой точки $x \in R$ зафиксируем сходящуюся к x последовательность рациональных чисел $P_x \subset Q$ и положим $A_x = f^{-1}P_x$. Тогда семейство $\{A_x : x \in R\}$ почти дизъюнктно.

Определение. Семейство $\mathcal{M} = \{A_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in C}$ называется независимой матрицей, если для каждого конечного подсемейства $\{A_{\alpha_i\beta_i} : i \leq k\} \subset \mathcal{M}$ эквивалентно:

1) $\bigcap_{i=1}^{k} A_{\alpha_i \beta_i}$ бесконечно;

2) $\{\beta_i : i \leq k\}$ попарно различны.

Существенно более тонкое построение независимой матрицы выходит за рамки нашего курса. В частности, независимые матрицы используются при построении в пространстве βN точек специального вида.

Определение. Символом N^N будем обозначать множество всех отображений из N в N:

$N^N = \{f/f : N \to N$ - отображение $\}$.

Определение. Для произвольных $f, g \in N^N$ положим $f <_* g \Leftrightarrow \{n \in N : f(n) \geq g(n)$ конечно $\}$.

Определение. Произвольный ультрафильтр $\mathcal{F}$ разбивает N^N на классы эквивалентности:

$$f =_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \{n \in N : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{F}$$

и задает на них следующий порядок:

$$f <_{\mathcal{F}} g \Leftrightarrow \{n \in N : f(n) < g(n)\} \in \mathcal{F}.$$

Определение. Пусть $\mathcal{F}$ - ультрафильтр. Семейство отображений $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\} \subset N^N$ называется $\mathcal{F}$-доминирующим, если

1). $f_\alpha <_{\mathcal{F}} f_\beta$ для любых $\alpha < \beta < \lambda$;

2). Для каждого $g \in N^N$ существует такое $\alpha < \lambda$, что $g <_{\mathcal{F}} f_\alpha$.

Предложение 79 *Произвольные $f, g \in N^N$ сравнимы в смысле порядка по ультрафильтру $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Легко видеть, что одно из следующих множеств: $A = \{n \in N : f(n) < g(n)\}$, $B = \{n \in N : f(n) = g(n)\}$ и $C = \{n \in N : f(n) > g(n)\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathcal{F}$. Если $A \in \mathcal{F}$, то $f <_{\mathcal{F}} g$ и так далее.

Предложение 80 *Для каждого ультрафильтра $\mathcal{F}$ существует $\mathcal{F}$-доминирующее семейство.*

Доказательство. Построим искомое семейство по трансфинитной индукции:

Выберем $f_0 \in N^N$ произвольно.

Пусть λ — ординал и f_α построены для всех $\alpha < \lambda$. Если существует $g \in N^N$ такое, что $f_\alpha <_{\mathcal{F}} g$ для всех $\alpha < \lambda$, то положим $f_\lambda = g$.

В противном случае, семейство $\{f_\alpha : \alpha < \lambda\}$ – искомое. Действительно, для произвольного $g \in N^N$ определим $\tilde{g} \in N^N$ по правилу $\tilde{g}(n) = g(n) + 1$. Имеем $\neg(f_\alpha <_{\mathcal{F}} g)$ для некоторого $\alpha < \lambda$. Тогда либо $A = \{n \in N : f_\alpha(n) = \tilde{g}(n)\}$, либо $A = \{n \in N : f_\alpha(n) > \tilde{g}(n)\}$ принадлежит ультрафильтру $\mathcal{F}$. В обоих случаях $A \subset \{n \in N : f_\alpha(n) > g(n)\}$, то есть $g <_{\mathcal{F}} f_\alpha$.

Ответы

Башмачок Золушки

Нисколько. Посмотрим повнимательнее на какую-нибудь вишню, лежащую в Корз2. Раз она там лежит, то ее туда положили на каком-то шаге n. Но тогда на шаге $n+1$ ее оттуда выбросили в Пуст0. То есть ее нет в Корз2.

Мечта бизнесмена.

Заметим, что множества $\exp\emptyset = \{\emptyset\}$, $\exp^2\emptyset = \{\{\emptyset\},\emptyset\}$ и $\exp^3\emptyset = \{\{\{\emptyset\},\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset\},\emptyset\}$ состоят из $2^0 = 1$, $2^1 = 2$ и $2^2 = 4$ элементов соответственно.

Покажем по индукции, что если конечное множество A содержит n элементов, то $\exp A$ содержит 2^n элементов.

Действительно, добавим к A еще одну точку: $B = A \cup \{b\}$. Тогда каждому множеству M из $\exp A$ будут соответствовать два множества M и $M \cup \{b\}$ из $\exp B$. Так можно получить любое множество из $\exp B$. То есть число множеств удваивается: $|\exp B| = 2 \times |\exp A| = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$.

Остается найти минимальное n, для которого $2^n > 1\ 000\ 000$. Оставим эту задачу алгебраистам.

Много шуму из ничего

Ровно одно. Действительно, мы можем определить отображение по следующему правилу: $\forall x \in X(f(x) = 0)$. После этого f определено. Значит, оно существует. И то, что множество X – пустое, ничего не меняет. С другой стороны, для произвольного отображения $g : X \to Y$ получаем $f = g$. Действительно, докажем это равенство от противного:

$$f \neq g \Leftrightarrow \exists x \in X(f(x) \neq g(x)).$$

Но правая часть этого высказывания заведомо ложна, поскольку в ней говорится о том, что в пустом множестве существует точка, да еще обладающая некоторыми дополнительными свойствами.

Перевертыши

Решение показано на рисунке.

Список литературы.

1. Александров П.С. Введение в общую топологию и теорию множеств. М.:Наука, 1979.
2. Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971
3. Архангельский А.В. Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.:Наука, 1974.
4. Бурбаки Н. Общая топология. М.:Наука, 1969.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.:Наука, 1979.
6. Келли Дж.Л. Общая топология. М.:Наука, 1981.
7. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. М.:МГУ, 1988.

Сергей Алексеевич Логунов

ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ
В ОБРАЗАХ И РИСУНКАХ

Учебное пособие

Подписано в печать ??.??.07. Формат 60 84 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. ??,?. Усл. п. л. ??,?.
Тираж 100 экз. Заказ № ???.