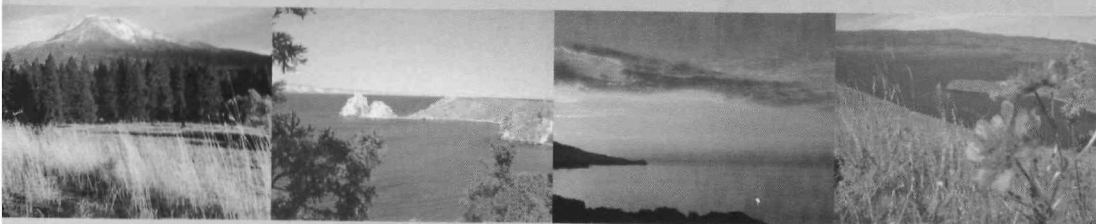


Школа-семинар
НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ
И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ



ТЕЗИСЫ

23-30 июня 2008 года

Иркутск

О НАЗНАЧЕНИИ СПЕКТРА В УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ

В.А. Зайцев

Удмуртский государственный университет
Ижевск, verba@udm.ru

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, замкнутую по принципу линейной неполной обратной связи:

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

и билинейную управляемую систему

$$\dot{x} = (A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Система (1) является частным случаем системы (2). Будем говорить, что *задача о назначении спектра в системе (2) разрешима*, если для произвольного многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$, найдется постоянное управление $u = \text{col}(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r$ такое, что характеристический многочлен $\chi(A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r; \lambda)$ матрицы $A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r$ совпадает с $p(\lambda)$.

Пусть коэффициенты систем (1) и (2) удовлетворяют следующим условиям: $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $a_{i,i+1} \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$; $a_{ij} = 0$, $j > i + 1$, $i = \overline{1, n-2}$; первые $(p-1)$ строк матрицы B и последние $(n-p)$ строк матрицы C нулевые, первые $(p-1)$ строк и последние $(n-p)$ столбцов матриц A_s , $s = \overline{1, r}$, — нулевые для некоторого $p \in \{\overline{1, n}\}$. Пусть $\chi(A; \lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$. По матрице A построим матрицу $S_1 = \{s_{ij}^1\}_{i,j=1}^n$, $s_{11}^1 := 1$; $s_{1j}^1 := 0$, $j = \overline{2, n}$; $s_{ij}^1 := a_{i-1,j}$, $i = \overline{2, n}$, $j = \overline{1, n}$. Далее для каждого $l = \overline{2, n}$ по матрице $S_{l-1} = \{s_{ij}^{l-1}\}_{i,j=1}^n$ построим матрицу $S_l = \{s_{ij}^l\}_{i,j=1}^n$ следующим образом: $s_{11}^l := 1$, $s_{1j}^l := s_{j1}^{l-1} := 0$, $j = \overline{2, n}$; $s_{ij}^l := s_{i-1,j}^{l-1}$, $i, j = \overline{2, n}$. Положим $S = S_n \cdot S_{n-1} \cdot \dots \cdot S_1$. Все матрицы S_l и S нижние треугольные, невырожденные. Пусть $J_1 = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$; $g_{i,i+1} = 1$, $i = \overline{1, n-1}$; $g_{ij} = 0$, $j \neq i + 1$; $J_k := J_1^k$; $J_0 := I$. Построим $G := \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} J_{i-1}^*$; $\alpha_0 := 1$. Далее построим матрицы $H_i := S A_i S^{-1}$, $i = \overline{0, r}$,

$H := S A S^{-1}$. Матрицы H_i имеют такой же вид, как и матрицы A_i , $i = \overline{1, r}$, а $H = J_1 + e_n \xi$, где $e_n = \text{col}(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (-\alpha_n, \dots, -\alpha_1) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $h_j^i \in \mathbb{R}^n$ — это j -й столбец матрицы H_i , $i = \overline{1, r}$. По $(n \times n)$ -матрицам $H_i = [h_1^i, h_2^i, \dots, h_n^i]$, $i = \overline{1, r}$, построим $(n \times r)$ -матрицы $P_1 = [h_1^1, \dots, h_n^1]$, $\dots$, $P_n = [h_1^n, \dots, h_n^n]$. Затем построим $(n \times r)$ -матрицу $Q = J_0 G P_1 + J_1 G P_2 + \dots + J_{n-1} G P_n$.

Теорема 1. *Задача о назначении спектра в системе (2) разрешима тогда и только тогда, когда строки матрицы Q линейно независимы; при этом управление u , приводящее $\chi(A + u_1 A_1 + \dots + u_r A_r; \lambda)$ к заданному многочлену $p(\lambda)$ с коэффициентами γ_i , находится из системы $\gamma = \alpha - Q u$, где $\gamma = \text{col}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\alpha = \text{col}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

Задача о назначении спектра в системе (1) разрешима тогда и только тогда, когда матрицы $C^ S^{-1} J_0 G S B$, $C^* S^{-1} J_1 G S B, \dots, C^* S^{-1} J_{n-1} G S B$ линейно независимы; при этом управление U , приводящее $\chi(A + BUC^*; \lambda)$ к заданному многочлену $p(\lambda)$ с коэффициентами γ_i , находится из системы $\gamma_i = \alpha_i - \text{Tr } S BUC^* S^{-1} J_{i-1} G$, $i = \overline{1, n}$.*

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 системы (1) и (2) стабилизируемы с помощью постоянного управления.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00258).