

УДК 517.977

В. А. Зайцев

РАВНОМЕРНАЯ ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ДВУМЕРНОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ¹

Доказано, что двумерная линейная управляемая система с ограниченными измеримыми коэффициентами, эквивалентная квазидифференциальному уравнению, равномерно вполне управляема и обладает свойством ляпуновской приводимости к произвольной заданной системе, эквивалентной обыкновенному дифференциальному уравнению.

Ключевые слова: управляемость, ляпуновская приводимость, квазидифференциальное уравнение.

§1. Обозначения

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Пусть выполнены следующие условия:

- 1) коэффициенты матриц (2) — измеримые функции;
- 2) $a_{21}(t)$, $a_{22}(t)$, $b_2^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — ограниченные функции;
- 3) $a_{11}(t)$, $b_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$ интегрально ограничены [1, с. 252], то есть

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} (|a_{11}(\xi)| + |b_1(\xi)|) d\xi \leq K < \infty;$$

4) функция $b_1(t)$ отделена от нуля, то есть существует $\varkappa > 0$ такое, что $|b_1(t)| \geq \varkappa > 0$ для почти всех (п.в.) $t \in \mathbb{R}$;

5) существует $l > 0$ такое, что $\mathbb{R}$ разбивается на отрезки (с общими концами) $\Delta_k = [\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$ такие, что $|\Delta_k| \geq l$ и $b_1(t)$ знакопостоянна для п.в. $t \in \Delta_k$ для каждого k .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

Условия 1–3 — это естественные условия, в частности, они обеспечивают для матрицы Коши $X(t, s)$, то есть для решения матричной задачи Коши $\dot{X} = A(t)X$, $X(s) = I$, следующее свойство:

$$\forall \vartheta > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad \forall t, s \in [\tau, \tau + \vartheta] \\ (0 < c^{-1} \leq |X(t, s)| \leq c) \ \& \ (0 < c^{-1} \leq \det X(t, s)). \quad (3)$$

Условия 4–5 — это нетривиальные условия, которые существенно будут использоваться в дальнейшем. Заметим, в частности, что всякая отдельная от нуля кусочно непрерывная функция будет удовлетворять этим условиям.

Без ограничения общности можно считать, что длины всех отрезков Δ_k не превосходят некоторого числа $L > 0$. Действительно, если $|\Delta_{k_0}| > L$, то разобьем Δ_{k_0} на конечное число промежутков длины $\leq L$, если Δ_{k_0} ограничен. Если Δ_{k_0} неограничен, то $\Delta_{k_0} = [\tau_{k_0}, +\infty)$ (или $\Delta_{k_0} = (-\infty, \tau_{k_0+1}]$, или $\Delta_{k_0} = (-\infty, +\infty)$); тогда разобьем его на счетное множество отрезков $\Delta_{k_0}, \Delta_{k_0+1}, \dots$ (или соответственно $\dots, \Delta_{k_0-1}, \Delta_{k_0}$, или $\dots, \Delta_{k_0-1}, \Delta_{k_0}, \Delta_{k_0+1}, \dots$), каждый из которых имеет длину $\leq L$. Таким образом, множество концов $\mathcal{T} := \{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\}$ отрезков Δ_k относительно плотно в $\mathbb{R}$ и $l \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq L$.

Матрица A системы (1) является порождающей матрицей для квазидифференциального уравнения. Определим квазипроизводные функции $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами [2]

$$\begin{aligned} {}^0z &:= z, \\ {}^1z &:= b_1^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt}({}^0z) - a_{11}(t)({}^0z) \right), \\ {}^2z &:= b_2^{-1}(t) \left(\frac{d}{dt}({}^1z) - a_{21}(t)({}^0z) - a_{22}(t)({}^1z) \right). \end{aligned}$$

Тогда система (1) эквивалентна квазидифференциальному уравнению второго порядка [3, 4]

$${}^2z = u. \quad (4)$$

Эквивалентность устанавливается равенствами $x_1 = {}^0z$, $x_2 = {}^1z$. Решением уравнения (4) называется всякая функция $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывную квазипроизводную 1z и почти всюду в $\mathbb{R}$ удовлетворяющая уравнению (4). Известно [2], что если функции $A(\cdot)$, $b_2(\cdot)u(\cdot)$ локально суммируемые, то решение задачи Коши для уравнения (4) существует и единственно. В нашем случае $A(\cdot)$ будет локально суммируемой, а управление всегда будет выбираться в виде $u(t) = b_2^{-1}(t)v(t)$, где $v(t)$ — измеримая ограниченная функция. Таким образом условия существования и единственности решения будут выполнены.

§2. Равномерная полная управляемость

О п р е д е л е н и е 1. Система (1) называется *вполне управляемой на отрезке* $T = [\tau, \tau + \vartheta]$, если для любого $x^0 \in \mathbb{R}^2$ найдется измеримое и ограниченное на T управление $u(t)$, переводящее систему (1) из состояния $(\tau, x^0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$ в состояние $(\tau + \vartheta, 0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют $\vartheta > 0$ и $M > 0$ такие, что система (1) вполне управляема на каждом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$, $\tau \in \mathbb{R}$, причем управление, переводящее систему (1) из состояния (τ, x^0) в состояние $(\tau + \vartheta, 0)$, удовлетворяет равномерной оценке $|u(t)| \leq M|x^0|$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$ (M не зависит от x^0 и от τ).

Известно достаточное условие полной управляемости [5, с. 148], когда коэффициенты системы (1) гладкие в окрестности некоторой точки $t_* \in T$: *если существует точка $t_* \in T$, такая что при $t = t_*$ ранг матрицы $K(t) := [B(t), A(t)B(t) - \dot{B}(t)]$ равен 2, то система (1) вполне управляема на отрезке T* . Однако в нашем случае функции $A(\cdot), B(\cdot)$, вообще говоря, не гладкие. Поэтому это условие нельзя применить, даже если взять $B(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (а это можно сделать: достаточно положить

$u(t) = b_2^{-1}(t)\tilde{u}(t)$). В этом случае $\dot{B}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $K(t) = \begin{pmatrix} 0 & b_1(t) \\ 1 & a_{22}(t) \end{pmatrix}$.

Пусть $b_1(t_*) = 1$, $b_1(t) \equiv 0$, $t \in T \setminus \{t_*\}$. Тогда $\text{rank } K(t_*) = 2$, но система (1) не является вполне управляемой на T . Таким образом, полная управляемость системы (1) зависит от функции $b_1(t)$. Покажем, что если выполнено условие знакопостоянства функции $b_1(t)$ для п.в. $t \in T$, то система (1) вполне управляема на T .

Теорема 1. Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1 – 3 и $b_1(t) > 0$ для п.в. $t \in T$ (или $b_1(t) < 0$ для п.в. $t \in T$). Тогда система (1) вполне управляема на T .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведем преобразование системы (1):

$$u = S(t)x + m(t)\tilde{u}, \quad x = \tilde{x}, \quad (5)$$

где $S(t) = b_2^{-1}(t)(-a_{21}(t), -a_{22}(t))$, $m(t) = b_2^{-1}(t)$. Тогда $S(t)$ и $m(t)$ — измеримые ограниченные функции. Система (1) после преобразования (5) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}, \quad (t, \tilde{x}, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ \tilde{A}(t) &= \begin{vmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tilde{B} \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Известно (см., например, [6]), что если система (6) вполне управляема на T , то система (1) также вполне управляема на T (обратное тоже верно, если функция $b_1(\cdot)$ ограничена на T). Более того, несложно проверить (используя свойство (3) и ограниченность $S(t)$ и $m(t)$), что из *равномерной* вполне управляемости системы (6) следует равномерная вполне управляемость системы (1) (здесь также обратное верно, если $b_1(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{R}$). Докажем, что система (6) вполне управляема на T . Обозначим через $\tilde{X}(t, s)$ матрицу Коши системы $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x}$. В силу критерия Калмана [7, теорема 2.16] система (6) вполне управляема на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ тогда и только тогда, когда матрица $\tilde{W}(\tau + \vartheta, \tau)$ положительно определена, где

$$\tilde{W}(t, \tau) = \int_{\tau}^t \tilde{X}(\tau, \xi) \tilde{B} \tilde{B}^* \tilde{X}^*(\tau, \xi) d\xi \quad (7)$$

— матрица Калмана. Это эквивалентно тому, что строки матрицы $\tilde{X}(\tau, \cdot) \tilde{B}$ линейно независимы на T , то есть только тривиальная линейная комбинация строк тождественно равна нулю почти всюду на T . Поскольку матрица $\tilde{A}(t)$ верхняя треугольная, можно выписать $\tilde{X}(t, s)$ в явном виде. Обозначим $p(t) = \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(\xi) d\xi\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t, s) &= \begin{vmatrix} p(t)p^{-1}(s) & p(t) \int_s^t p^{-1}(\xi) b_1(\xi) d\xi \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad t, s \in T, \\ \tilde{X}(\tau, s) \tilde{B} &= \begin{vmatrix} p(\tau) \int_s^{\tau} p^{-1}(\xi) b_1(\xi) d\xi \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - \int_{\tau}^s p^{-1}(\xi) b_1(\xi) d\xi \\ 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим $f(s) = \int_{\tau}^s p^{-1}(\xi) b_1(\xi) d\xi$. Тогда функция $f(s)$ абсолютно непрерывна и $\dot{f}(s) = p^{-1}(s) b_1(s)$ для п.в. $s \in T$. Если $b_1(s) > 0$ для п.в. $s \in T$, то $\dot{f}(s) > 0$ для п.в. $s \in T$, поскольку $p^{-1}(s) > 0$ для всех $s \in T$. Следовательно, $f(s)$ строго монотонно возрастает на T , поэтому функции $-f(s)$ и 1 линейно независимы на T . Аналогично разбирается случай, когда $b_1(s) < 0$ для п.в. $s \in T$. Теорема доказана. $\square$

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что в условиях теоремы система (1) будет вполне управляемой на любом отрезке $T_1 \subset T$. Таким образом, если система (1) удовлетворяет условиям 1 – 5, то она будет вполне управляемой на каждом отрезке Δ_k , $k \in \mathbb{Z}$ и на любом подотрезке $T_1 \subset \Delta_k$. Заметим, что в доказательстве теоремы 1 условие 4 отделенности от нуля не использовалось. Оно требуется при доказательстве теоремы о равномерной вполне управляемости системы (1).

Теорема 2. Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1–5. Тогда система (1) равномерно вполне управляема.

Докажем предварительно некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть $\beta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, $\beta(0) = 0$, и $\beta'(t) \geq 1$ для п.в. $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\vartheta > 0$

$$\int_0^\vartheta \beta^2(s) ds \cdot \int_0^\vartheta 1 ds - \left(\int_0^\vartheta \beta(s) ds \right)^2 \geq \frac{\vartheta^4}{12}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$r(t) = \int_0^t \beta^2(s) ds \cdot \int_0^t 1 ds - \left(\int_0^t \beta(s) ds \right)^2, \quad t \geq 0.$$

Тогда $r(0) = 0$. Покажем, что $r(\vartheta) \geq \frac{\vartheta^4}{12}$ для любого $\vartheta > 0$. Из условий леммы следует, что функцию $\beta(t)$ можно представить в виде $\beta(t) = t + \gamma(t)$, где $\gamma(t)$ — абсолютно непрерывная, $\gamma(0) = 0$ и $\gamma'(t) \geq 0$ для п.в. $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\gamma(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Тогда при $t \geq 0$ получим

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^t (s + \gamma(s))^2 ds \cdot \int_0^t 1 ds - \left(\int_0^t (s + \gamma(s)) ds \right)^2 = \\ &= \int_0^t s^2 ds \cdot \int_0^t 1 ds + 2 \int_0^t s\gamma(s) ds \cdot \int_0^t 1 ds + \int_0^t \gamma^2(s) ds \cdot \int_0^t 1 ds - \\ &\quad - \left(\left(\int_0^t s ds \right)^2 + 2 \left(\int_0^t s ds \right) \left(\int_0^t \gamma(s) ds \right) + \left(\int_0^t \gamma(s) ds \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Сгруппируем первое слагаемое с четвертым и обозначим через $r_1(t)$, второе с пятым — $r_2(t)$, третье с шестым — $r_3(t)$. Тогда при $t \geq 0$

$$r_3(t) := \int_0^t \gamma^2(s) ds \cdot \int_0^t 1 ds - \left(\int_0^t \gamma(s) ds \right)^2 \geq 0 \text{ в силу неравенства Коши-}$$

Буняковского, $r_1(t) := \int_0^t s^2 ds \cdot \int_0^t 1 ds - \left(\int_0^t s ds \right)^2 = \frac{t^4}{12}$. Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что при $t \geq 0$

$$r_2(t) := 2 \left(\int_0^t s\gamma(s) ds \cdot \int_0^t 1 ds - \left(\int_0^t s ds \right) \left(\int_0^t \gamma(s) ds \right) \right) \geq 0. \quad (8)$$

Имеем $r_2(0) = 0$. Покажем, что $r_2'(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Тогда неравенство (8) будет доказано. Найдем $r_2'(t)$:

$$\begin{aligned} r_2'(t) &= 2 \left(\int_0^t s\gamma(s) ds + t \cdot \gamma(t) \cdot t - t \cdot \int_0^t \gamma(s) ds - \frac{t^2}{2} \cdot \gamma(t) \right) = \\ &= t^2 \gamma(t) + 2 \left(\int_0^t s\gamma(s) ds - t \int_0^t \gamma(s) ds \right). \end{aligned}$$

Тогда $r_2'(+0) = 0$. Далее $r_2''(t) = 2t\gamma(t) + t^2\gamma'(t) + 2t\gamma(t) - 2t\gamma(t) - 2\int_0^t \gamma(s) ds = t^2\gamma'(t) + 2t\gamma(t) - 2\int_0^t \gamma(s) ds$. Имеем: $t^2\gamma'(t) \geq 0$ для п.в. $t \geq 0$.

Обозначим $r_4(t) := 2t\gamma(t) - 2\int_0^t \gamma(s) ds$. Тогда $r_4(0) = 0$, $r_4'(t) = 2t\gamma'(t) \geq 0$ для п.в. $t \geq 0 \implies r_4(t) \geq 0$ при $t \geq 0 \implies r_2''(t) \geq 0$ для п.в. $t \geq 0 \implies r_2'(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть $\beta(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывная функция, $\beta(0) = 0$, и $\beta'(t) \geq \kappa_1 > 0$ для п.в. $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\vartheta > 0$

$$\int_0^\vartheta \beta^2(s) ds \cdot \int_0^\vartheta 1 ds - \left(\int_0^\vartheta \beta(s) ds \right)^2 \geq \kappa_1^2 \cdot \frac{\vartheta^4}{12}.$$

Для доказательства достаточно применить лемму 1 к функции $\frac{\beta(t)}{\kappa_1}$. $\square$

Лемма 3. Пусть $\beta(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta_1]$ — абсолютно непрерывная функция, $\beta(\tau) = 0$ и для п.в. $t \in [\tau, \tau + \vartheta_1]$ функция $\beta'(t)$ знакопостоянна и отделена от нуля, то есть $|\beta'(t)| \geq \kappa_1 > 0$. Тогда

$$\int_\tau^{\tau+\vartheta_1} \beta^2(s) ds \cdot \int_\tau^{\tau+\vartheta_1} 1 ds - \left(\int_\tau^{\tau+\vartheta_1} \beta(s) ds \right)^2 \geq \kappa_1^2 \cdot \frac{\vartheta_1^4}{12}. \quad (9)$$

Доказательство. Если $\beta'(t) \geq \kappa_1 > 0$ для п.в. $t \in [\tau, \tau + \vartheta_1]$, то утверждение очевидно вытекает из леммы 2 после замены переменной $t \rightarrow t - \tau$. Если $\beta'(t) \leq -\kappa_1 < 0$ для п.в. $t \in [\tau, \tau + \vartheta_1]$, то $-\beta'(t) \geq \kappa_1 > 0$ для п.в. $t \in [\tau, \tau + \vartheta_1]$. Применим первую (уже доказанную) часть леммы 3 к функции $-\beta(t)$, неравенство (9) при этом сохраняется. $\square$

Доказательство теоремы 2. Перейдем от системы (1) к системе (6). Докажем, что она является равномерно вполне управляемой; согласно замечанию в доказательстве теоремы 1 отсюда будет следовать равномерная вполне управляемость системы (1). В силу критерия Калмана система (6) равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существует число $\vartheta > 0$ такое, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполняются неравенства $\delta_2(\vartheta)I \geq \widetilde{W}(\tau + \vartheta, \tau) \geq \delta_1(\vartheta)I > 0$, понимаемые в смысле квадратичных форм, где числа δ_1, δ_2 не зависят от τ , а зависят только от ϑ . Неравенство $\delta_2(\vartheta)I \geq \widetilde{W}(\tau + \vartheta, \tau)$ очевидно в силу свойства (3). Докажем неравенство $\widetilde{W}(\tau + \vartheta, \tau) \geq \delta_1(\vartheta)I > 0$. Выберем в качестве ϑ число $l > 0$, где l из условия 5. Положим $\vartheta_1 = \vartheta/2 > 0$. Пусть дано любое число $\tau \in \mathbb{R}$. Рассмотрим два отрезка $[\tau, \tau + \vartheta_1]$ и $[\tau + \vartheta_1, \tau + \vartheta]$. Поскольку длина каждого отрезка $\Delta_k = [\tau_k, \tau_{k+1}]$ больше или равна l , то какой-либо из

этих двух отрезков лежит в Δ_k . Пусть, к примеру, $[\tau, \tau + \vartheta_1] \subset [\tau_k, \tau_{k+1}]$. Тогда для п.в. $t \in [\tau, \tau + \vartheta_1]$ функция $b_1(t)$ знакопостоянна и отделена от нуля. По свойствам матрицы Калмана $\widetilde{W}(\tau + \vartheta, \tau) \geq \widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau)$. Покажем, что

$$\widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau) \geq \delta_1(\vartheta)I > 0, \quad (10)$$

где δ_1 зависит только от длины отрезка $\vartheta/2$ и не зависит от концов отрезка. Тем самым теорема будет доказана. Имеем

$$\widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau) = \begin{vmatrix} \int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1} f^2(s) ds & - \int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1} f(s) ds \\ - \int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1} f(s) ds & \int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1} 1 ds \end{vmatrix},$$

где $f(s) = \int_{\tau}^s p^{-1}(\xi)b_1(\xi) d\xi$, $p(t) = \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(\xi) d\xi\right)$. Отметим, что в силу интегральной ограниченности функции $a_{11}(s)$ существует $d > 0$ такое, что $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [\tau, \tau + \vartheta_1] \quad p^{-1}(t) \geq d > 0$. Пусть $\lambda_2(\tau) \geq \lambda_1(\tau) > 0$ — собственные числа матрицы $\widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau)$. Тогда $\lambda_1(\tau)\lambda_2(\tau) = \det \widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau)$. Для доказательства неравенства (10) достаточно показать, что наименьшее собственное значение $\lambda_1(\tau)$ отделено от нуля числом $\delta_1(\vartheta)$, не зависящим от τ . Поскольку $\delta_2(\vartheta)I \geq \widetilde{W}(\tau + \vartheta, \tau) \geq \widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau)$, то $\delta_2(\vartheta) \geq \lambda_2(\tau)$, поэтому достаточно показать, что

$$\det \widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau) := \int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1} f^2(s) ds \cdot \int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1} 1 ds - \left(\int_{\tau}^{\tau+\vartheta_1} f(s) ds \right)^2$$

отделен от нуля. А это вытекает из леммы 3, примененной к функции $\beta(t) := f(t)$. Действительно, функция $f(t)$ абсолютно непрерывна, $f(\tau) = 0$, $f'(t) = p^{-1}(t)b_1(t)$ и функции $p^{-1}(t)$, $b_1(t)$ знакопостоянны и отделены от нуля для п.в. $t \in [\tau, \tau + \vartheta_1]$. Следовательно, f удовлетворяет условиям леммы 3 и $\det \widetilde{W}(\tau + \vartheta_1, \tau)$ отделен от нуля константой, не зависящей от τ . Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Условие отделенности от нуля функции $b_1(t)$ существенно для равномерной вполне управляемости. Рассмотрим пример: пусть в системе (1), (2) $a_{11} = a_{21} = a_{22} = 0$, $b_2 = 1$, $b_1(t) = 1$, $t < 1$; $b_1(t) = 1/t$, $t \geq 1$. Поскольку для всех $t \in \mathbb{R}$ $b_1(t) > 0$, система является вполне управляемой на любом отрезке. Однако несложно показать, что она не является равномерно вполне управляемой, поскольку ни при каком ϑ нет равномерной относительно τ отделенности от нуля наименьшего собственного значения матрицы Калмана $W(\tau + \vartheta, \tau)$.

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим линейную систему вида (1), (2) n -го порядка. Матрицы (2) будут иметь следующий вид: матрица $B(t)$ состоит из одного столбца, все элементы которого равны нулю, за исключением последнего $b_n(t)$, такого что функция $b_n^{-1}(t)$ ограничена; матрица $A(t)$ есть сумма нижней треугольной матрицы и «наддиагонали» $\{b_1(t), \dots, b_{n-1}(t)\}$, элементы выше наддиагонали равны нулю. Тогда такая система эквивалентна квазидифференциальному уравнению n -го порядка, аналогичного уравнению (4) (см. [3, 4]). Предположим, что для элементов наддиагонали $b_i(t)$ выполнены условия 3–5. По аналогии с двумерным случаем можно выдвинуть гипотезу о том, что *всякая такая система является равномерно вполне управляемой* (однако доказательство этого утверждения автору неизвестно). В гладком случае это утверждение очевидно следует из теоремы Н. Н. Красовского.

З а м е ч а н и е 3. На самом деле теорема 2 справедлива, если вместо условий 4–5 выполнено более слабое условие: *существует относительно плотное множество $\mathcal{T} = \{\tau_k, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ и существует число $l > 0$ такое, что на каждом отрезке $\Delta_k = [\tau_k, \tau_{k+1}]$ существует отрезок $T_k \subset \Delta_k$, длина которого $\geq l$, такой что $b_1(t)$ знакопостоянна и отделена от нуля для п.в. $t \in T_k$.*

§3. Ляпуновская приводимость квазидифференциального уравнения к обыкновенному дифференциальному уравнению

Пусть управление в системе (1) строится в виде $u = U(t)x$, где $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — измеримая ограниченная 1×2 -матричная функция. Тогда система (1) перейдет в однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (11)$$

О п р е д е л е н и е 2. Система (11) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости*, если для любой системы

$$\dot{y} = C(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^2 \quad (12)$$

с измеримой интегрально ограниченной матрицей $C(\cdot)$ существует измеримое ограниченное управление $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такое, что система (11) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (12), то есть система (11) приводима к системе (12) некоторым ляпуновским преобразованием $x = L(t)y$. *Ляпуновским* называется такое преобразование, что $L(t)$ абсолютно непрерывна, $L(t)$, $L^{-1}(t)$ ограничены и $\dot{L}(t)$ интегрально ограничена на $\mathbb{R}$ [1, с. 247].

Если матрица $C(t)$ является порождающей для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) $\ddot{\xi} + \gamma_1(t)\dot{\xi} + \gamma_2(t)\xi = 0$, то есть имеет вид $C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_2(t) & -\gamma_1(t) \end{pmatrix}$, то говорят о ляпуновской приводимости системы (11) к ОДУ.

Теорема 3. Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1 – 5. Тогда для любой измеримой ограниченной 1×2 -матричной функции $\widehat{V}(\cdot)$ найдется измеримая ограниченная 1×2 -матричная функция $U(\cdot)$ и ляпуновское преобразование $\widehat{x} = L(t)x$, приводящее систему (11) к системе

$$\dot{\widehat{x}} = \left(\begin{vmatrix} 0 & \widehat{b}_1(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \widehat{V}(t) \right) \widehat{x}, \quad (13)$$

где $\widehat{b}_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая условиям 3 – 5.

Доказательство. Будем строить управление $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ в виде $U(t) = b_2^{-1}(t) \left(\begin{bmatrix} -a_{21}(t) & -a_{22}(t) \end{bmatrix} + U_1(t) \right)$, где $U_1(\cdot)$ — измеримая ограниченная функция. Тогда функция $U(\cdot)$ также измеримая и ограниченная, и система (11) с этим управлением имеет вид

$$\dot{x} = \left(\begin{vmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot U_1(t) \right) x. \quad (14)$$

Введем функцию $\delta(t, s) = \exp \left(\int_s^t a_{11}(\xi) d\xi \right)$ и рассмотрим ее на относительно плотном множестве $\mathcal{T}$. В силу интегральной ограниченности функции $a_{11}(\cdot)$ на $\mathbb{R}$ существует такое $c > 0$, что $\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall t, s \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ $0 < c^{-1} \leq \delta(t, s) \leq c$. На каждом из отрезков $\Delta_k = [\tau_k, \tau_{k+1}]$ рассмотрим функцию $f_k(t) = 1 - \int_{\tau_k}^t \delta(\tau_k, s) b_1(s) \mu_k(s) ds$, где $\mu_k(s)$, $s \in \Delta_k$ выбирается так, чтобы выполнялись следующие условия: $\mu_k(\tau_k) = \mu_k(\tau_{k+1}) = 0$; $\mu_k(\cdot)$ гладкая на Δ_k ; $\mu_k(\cdot)$ и $\dot{\mu}_k(\cdot)$ ограничены на Δ_k равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$; $f_k(\tau_{k+1}) = \delta(\tau_k, \tau_{k+1})$; $f_k(t)$, $t \in \Delta_k$ отделена от нуля равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что функцию $\mu_k(t)$ можно так выбрать. На отрезке Δ_k функция $b_1(t)$ знакопостоянна и отделена от нуля для п.в. t . Положим $\mu_k(t) := q_k \cdot \sin \frac{(t - \tau_k)\pi}{(\tau_{k+1} - \tau_k)}$, где q_k выберем так, чтобы выполнялось равенство $f_k(\tau_{k+1}) = \delta(\tau_k, \tau_{k+1})$, то есть $q_k := \left(1 - \delta(\tau_k, \tau_{k+1}) \right) / \left(\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \delta(\tau_k, s) b_1(s) \sin \frac{(s - \tau_k)\pi}{(\tau_{k+1} - \tau_k)} ds \right)$. В силу того что функция $\delta(\tau_k, s) b_1(s)$ для п.в. $s \in \Delta_k$ знакопостоянна и отделена от

нуля равномерно относительно $k \in \mathbb{Z}$ и длины отрезков Δ_k отделены от нуля, интеграл в знаменателе будет отделен от нуля, поэтому $\exists c_1 > 0 \forall k \in \mathbb{Z} |q_k| \leq c_1$. Если $\delta(\tau_k, \tau_{k+1}) = 1$, то $\mu_k(t) \equiv 0$. Если $\delta(\tau_k, \tau_{k+1}) > 1$ (< 1), то $q_k < 0$ (> 0). В обоих случаях под интегралом стоит знакопостоянная п.в. функция, и $f_k(t)$ будет строго монотонно возрастать (или убывать) на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ от 1 до $\delta(\tau_k, \tau_{k+1})$. Следовательно, $f_k(t)$ будет отделено от нуля для $t \in \Delta_k$ равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$. Далее, равенства $\mu_k(\tau_k) = \mu_k(\tau_{k+1}) = 0$ будут выполнены, и функции $\mu_k(t)$ и $\dot{\mu}_k(t) = \frac{\pi q_k}{(\tau_{k+1} - \tau_k)} \cos \frac{(t - \tau_k)\pi}{(\tau_{k+1} - \tau_k)}$ ограничены на Δ_k равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$ в силу неравенств $|q_k| \leq c_1$, $|\Delta_k| \geq l$.

Введем функцию $p_k(t) = \delta(\tau_k, t) / f_k(t)$, $t \in \Delta_k$. Тогда $p_k(\tau_k) = 1$, $p_k(\tau_{k+1}) = 1$. Построим функции $\mu(t) \equiv \mu_k(t)$, $p(t) \equiv p_k(t)$ при $t \in \Delta_k$. Тогда функция $p(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ограниченная, отделена от нуля, абсолютно непрерывная и для п.в. t удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{p}(t) = -a_{11}(t)p(t) + p^2(t)b_1(t)\mu(t)$. Отсюда, в частности, следует, что функция $\dot{p}(t)$ интегрально ограничена. Построим матрицу $L(t) = \begin{pmatrix} p(t) & 0 \\ p(t)\mu(t) & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $L(t)$ — это матрица Ляпунова, $L(\tau_k) = I$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, и для п.в. $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\dot{L}(t) = \begin{pmatrix} 0 & p(t)b_1(t) \\ \dot{\mu}(t) & p(t)b_1(t)\mu(t) \end{pmatrix} \cdot L(t) - L(t) \cdot \begin{pmatrix} a_{11}(t) & b_1(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведем преобразование $\hat{x} = L(t)x$ системы (14). Тогда система (14) перейдет в систему

$$\dot{\hat{x}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & p(t)b_1(t) \\ \dot{\mu}(t) & p(t)b_1(t)\mu(t) \end{pmatrix} + L(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot U_1(t)L^{-1}(t) \right) \hat{x}. \quad (15)$$

Обозначим $\hat{b}_1(t) := p(t)b_1(t)$, $U_2(t) := U_1(t)L^{-1}(t)$. Далее, $L(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Построим $U_2(\cdot)$ в виде $U_2(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\mu}(t) & -p(t)b_1(t)\mu(t) \end{pmatrix} + \hat{V}(t)$, тогда функция $U_2(\cdot)$ измеримая и ограниченная. Следовательно, $U_1(t) = U_2(t)L(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\mu}(t)p(t) - p^2(t)b_1(t)\mu^2(t) & -p(t)b_1(t)\mu(t) \end{pmatrix} + \hat{V}(t)L(t)$ будет измеримая и ограниченная, и система (15) с таким управлением $U_1(\cdot)$ будет совпадать с системой (13). Очевидно, функция $\hat{b}_1(t)$ удовлетворяет условиям 3–5. Управление $U(\cdot)$ имеет вид: $U(t) = b_2^{-1}(t) \left(\begin{bmatrix} -a_{21}(t) & -a_{22}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\mu}(t)p(t) - p^2(t)b_1(t)\mu^2(t) & -p(t)b_1(t)\mu(t) \end{bmatrix} + \hat{V}(t)L(t) \right)$. Система (11) с таким управлением и система (13) асимптотически эквивалентны. Теорема доказана. $\square$

Предположим теперь, что функция $\hat{b}_1(t)$ в системе (13) абсолютно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$ и ее производная ограничена для п.в. $t \in \mathbb{R}$. В частности, это выполнено, если $b_1(t)$ обладает этими свойствами. Функция $\hat{b}_1^{-1}(t)$ также будет абсолютно непрерывна, отделена от нуля и ограничена. Матрица $L_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{b}_1(t) \end{bmatrix}$ будет матрицей Ляпунова. Произведем преобразование $z = L_1(t)\hat{x}$ системы (13), тогда она перейдет в систему

$$\dot{z} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dot{\hat{b}}_1(t)/\hat{b}_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{b}_1(t) \end{bmatrix} \cdot \hat{V}(t)L_1^{-1}(t) \right) z. \quad (16)$$

Выберем управление $\hat{V}(t) = \hat{b}_1^{-1}(t) \left([0, -\dot{\hat{b}}_1(t)] + VL_1(t) \right)$. Тогда система (16) будет иметь вид

$$\dot{z} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} V \right) z. \quad (17)$$

Если управление V измеримое и ограниченное, то $\hat{V}(\cdot)$ также измеримое и ограниченное. Система (17) с управлением V и система (13) с соответствующим управлением $\hat{V}(\cdot)$ будут асимптотически эквивалентны. Систему (17) с помощью подходящего выбора управления V можно сделать эквивалентной любому наперед заданному ОДУ. Таким образом, справедлива теорема о ляпуновской приводимости КДУ к ОДУ.

Теорема 4. Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1–5, функция $b_1(\cdot)$ абсолютно непрерывна, ограничена и $\dot{b}_1(\cdot)$ ограничена п.в. Тогда система (11) обладает свойством ляпуновской приводимости к произвольной системе, эквивалентной ОДУ.

В работе [8] была доказана теорема о глобальной ляпуновской приводимости системы (17). Таким образом, справедлива

Теорема 5. В условиях теоремы 4 система (11) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 5 пересекается с результатом работы [9]. В этой работе доказано, что если двумерная система (1) (где $u \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ — любое) с произвольной ограниченной кусочно непрерывной матрицей $A(\cdot)$ и ограниченной равномерно непрерывной матрицей $B(\cdot)$ равномерно вполне управляема, то система (11) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости (в работе [9] это свойство названо свойством глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов системы (11)). В теореме 2 было показано, что система (1), (2) в

условиях 1–5 равномерно вполне управляема. Матрицу $B(t)$ без ограничения общности можно считать постоянной (равной $\tilde{B}$), то есть удовлетворяющей условиям работы [9]. Отличие теоремы 5 от теоремы работы [9] заключается в условиях на коэффициенты $a_{11}(\cdot), a_{21}(\cdot), a_{22}(\cdot)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 1(16). С. 3–105.
3. Тонков Е. Л. Равномерная достижимость и ляпуновская приводимость билинейной управляемой системы // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 1. С. 209–238.
4. Зайцев В. А. Модальное управление линейным квазидифференциальным уравнением // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. 2004. № 1. С. 3–20.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. Тонков Е. Л. Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 7. С. 1206–1216.
7. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: УРСС, 2004. 400 с.
8. Зайцев В. А. Глобальная ляпуновская приводимость двумерных управляемых систем с кусочно-постоянными коэффициентами // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. 2002. № 1. С. 3–12.
9. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 1. С. 97–106.

Поступила в редакцию 01.11.06

V. A. Zaytsev

**Uniform complete controllability and Lyapunov reducibility
of a two-dimensional quasi-differential equation**

It is proved, that a two-dimensional linear control system with the bounded measurable coefficients equivalent to the quasi-differential equation is uniformly completely controllable and Lyapunov reducible to any fixed system equivalent to ordinary differential equation.

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
E-mail: verba@udm.ru