МАТЕМАТИКА 2006. №1

УДК 517.977

А. Ф. Габдрахимов, В. А. Зайцев

ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ В КЛАССЕ КУСОЧНО–ПОСТОЯННЫХ УПРАВЛЕНИЙ [1]

Доказано, что если стационарная система $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^4$, $u \in \mathbb{R}^m$ вполне управляема, то для любой постоянной матрицы C существует ограниченная кусочно-постоянная матрица $U = U(t)$ такая, что матрицы $A + BU(t)$ и C кинематически подобны, и построенное управление U обладает свойством локальной ограниченности относительно C.

Ключевые слова: линейная управляемая система, кинематическое подобие, ляпуновская приводимость.

В данной работе рассматривается линейная управляемая система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где $A \in M_n$, $B \in M_{n,m}$ — постоянные матрицы; здесь $M_{n,m}$ — пространство $(n \times m)$-матриц ($M_n := M_{n,n}$) с вещественными коэффициентами с нормой $|H| = \max\limits_{|x|=1} |Hx|$ (норма в $\mathbb{R}^n$ — евклидова). Обозначим через $KC_{m,n}(\Delta)$ пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U : \Delta \to M_{m,n}$, $\Delta \subset \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|U\| = \sup\limits_{t\in\Delta} |U(t)|$, $KC_n(\Delta) := KC_{n,n}(\Delta)$. Пусть управление в системе (1) строится в виде $u = U(t)x$, где $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$. Система (1) перейдет в однородную систему

$$\dot{x} = (A + BU(t))\, x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Напомним [1], что преобразование $y = L(t)x$ линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = P(t)x \tag{3}$$

[1]Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 03–01–00014, 06–01–00258), Минобрнауки России (грант 34125), гранта Президента России МК–7284.2006.1.

называется *преобразованием Ляпунова*, если его матрица (называемая *матрицей Ляпунова*) $L(\cdot)$ — это кусочно-непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, существует $L^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и $\sup\limits_t\{|L(t)| + |L^{-1}(t)| + |\dot{L}(t)|\} < +\infty$. Преобразование Ляпунова переводит систему (3) в систему $\dot{y} = Q(t)y$, где $Q(t) = L(t)P(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t)$. В этом случае матрицы $P(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ называются *кинематически подобными*, а соответствующие им системы называются *асимптотически эквивалентными.*

Здесь изучается задача ляпуновской приводимости, которая заключается в следующем: требуется для произвольной (канонической в некотором смысле) системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = C(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

с матрицей $C \in KC_n(\mathbb{R})$ построить управление $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$ такое, чтобы система (2) с этим управлением была асимптотически эквивалентна системе (4) с заданной матрицей $C(t)$. Свойство асимптотической эквивалентности действительно является отношением эквивалентности на множестве систем вида (4). Величины и свойства, принадлежащие одному классу эквивалентности называются *ляпуновскими* (*асимптотическими*) *инвариантами* (то есть это величины, сохраняющиеся под действием ляпуновских преобразований). Две асимптотические системы имеют в некотором смысле «одинаковое» поведение, поэтому приводимость к системе определенного вида позволяет влиять на поведение решений системы (2). Если в качестве $C(t)$ брать постоянные матрицы $C(t) \equiv C$, то это просто означает приводимость в классическом смысле. Если в качестве $C(t)$ брать порождающие матрицы для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), то есть

$$C(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\mu_n(t) & -\mu_{n-1}(t) & \dots & -\mu_1(t) \end{Vmatrix},$$

то говорят о приводимости системы (2) к обыкновенному дифференциальному уравнению. Если в качестве системы (4) выбирать систему с отрицательными характеристическими показателями Ляпунова, то из ляпуновской приводимости к системе (4) будет следовать стабилизируемость системы (2), то есть устойчивость всех решений системы (2). Можно в качестве $C(t)$ брать, к примеру, верхние треугольные или диагональные матрицы и т. д. В качестве допустимых управлений также можно выбирать различные классы управлений, например постоянные или кусочно-постоянные, или периодические и т. п. Тогда говорят о ляпуновской приводимости в соответствующем классе управлений.

В работах [2, 3] были доказаны теоремы о *глобальной ляпуновской приводимости* системы (2) для $n = 2$ и $n = 3$.

Пусть $n = 2$ *или* $n = 3$ *и пусть система* (1) *вполне управляема. Тогда для любой системы* $\dot{y} = C(t)y$ *вида* (4) *найдется управление* $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, *при котором система* (2) *асимптотически эквивалентна заданной системе* (4); *причем если система* (4) *стационарна, то управление можно выбрать кусочно-постоянным.*

Здесь доказано аналогичное утверждение о ляпуновской приводимости системы (2) к произвольной *постоянной* системе (4) для $n = 4$ в классе кусочно-постоянных управлений.

Теорема 1. *Пусть* $n = 4$ *и пусть система* (1) *вполне управляема. Тогда для любой стационарной системы* $\dot{y} = Cy$, $y \in \mathbb{R}^4$ *найдется управление* $U \in KC_{m,4}(\mathbb{R})$, *при котором система* (2) *асимптотически эквивалентна системе с заданной матрицей* C. *Причем: а) если матрица* C *имеет элементарные делители* $(\lambda - a)^3$, $(\lambda - a)$, *то управление* $U = U(t)$ *можно выбрать кусочно-постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом* $\vartheta > 0$ *с тремя переключениями на отрезках длины* ϑ *; б) если матрица* C *имеет элементарные делители* $(\lambda - a)^2$, $(\lambda - a)$, $(\lambda - b)$, $b \neq a$, *то управление* $U = U(t)$ *можно выбрать кусочно-постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом* $\vartheta > 0$ *с четырьмя переключениями на отрезках длины* ϑ *; в других случаях управление можно выбрать постоянным.*

Все нижесказанное будет посвящено доказательству теоремы 1.

Замечание 1. Управление $U = U(t)$, обеспечивающее кинематическое подобие матриц $A + BU(t)$ и C, зависит от матрицы C, причем эта зависимость иногда достаточно сложная. Пусть C_k — некоторая ограниченная последовательность матриц. Если соответствующая последовательность управлений $U_k = U(C_k)$ будет неограниченной, то, естественно, построенные таким образом управления нельзя считать удовлетворительными. Нужно, чтобы построенное управление было «локально ограниченным» относительно C в следующем смысле: *для любого* $N > 0$ *существует* $l = l(N)$ *такое, что для любой матрицы* C, *удовлетворяющей неравенству* $|C| \leqslant N$, *найдется кусочно-постоянное управление* $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *, удовлетворяющее неравенству* $\|U\| \leqslant l$ *, которое обеспечивает кинематическое подобие матриц* $A + BU(t)$ *и* C. Это утверждение и будет доказано.

Докажем предварительно одно вспомогательное утверждение, справедливое для произвольного n.

Лемма 1. *Если система* (1) *вполне управляема, то существуют матрицы* $S \in M_n$, $Q \in M_{m,n}$, $q \in M_{m,1}$, *такие что*

$$S(A+BQ)S^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \quad SBq = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $B = (b_1, \dots, b_m)$, $b_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$. Построим матрицу $R = (b_1, Ab_1, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, b_m, \dots, A^{n-1}b_m) \in M_{n,nm}$. Поскольку система (1) вполне управляема, то $\operatorname{rank} R = n$. Будем двигаться по столбцам r_i, $i = 1, \dots, nm$ матрицы R слева направо от первого к nm-му столбцу, образуя на i-м шаге линейную оболочку $L_i = \langle r_1, \dots, r_i \rangle$ и вычеркивая из матрицы R вектор r_i, если $r_i \in L_{i-1}$. Заметим, что если будет вычеркнут вектор $A^k b_j$, то будут вычеркнуты векторы $A^{k+1}b_j, \dots, A^{n-1}b_j$. После nm шагов мы получим невырожденную матрицу $\widehat{R} = (b_{j_1}, \dots, A^{k_1-1}b_{j_1}, \dots, b_{j_l}, \dots, A^{k_l-1}b_{j_l}) \in M_n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_l \leqslant m$, $k_1 + \dots + k_l = n$. Пусть $p_i = k_1 + \dots + k_i$, $i = 1, \dots, l$. Положим $\xi_1 := e^*_{p_1}\widehat{R}^{-1}$, $\dots$, $\xi_l := e^*_{p_l}\widehat{R}^{-1}$,

$$S := \begin{Vmatrix} \Xi_1 \\ \vdots \\ \Xi_l \end{Vmatrix}, \quad \text{где } \Xi_i := \begin{Vmatrix} \xi_i \\ \vdots \\ \xi_i A^{k_i-1} \end{Vmatrix} \in M_{k_i,n}, \quad i = 1, \dots, l,$$

здесь e_i — i-й столбец единичной матрицы $I \in M_n$, $*$ — операция транспонирования. Тогда S — невырожденная матрица и $SAS^{-1} = D \in M_n$, $SB = (\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_m) \in M_{n,m}$, где $D = \begin{Vmatrix} D_{11} & \dots & D_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{l1} & \dots & D_{ll} \end{Vmatrix}$,

$$D_{ii} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \beta_{i,p_{i-1}+1} & \dots & \dots & \beta_{i,p_i} \end{Vmatrix}, \quad D_{ij} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \beta_{i,p_{j-1}+1} & \dots & \beta_{i,p_j} \end{Vmatrix}$$

при $i \neq j$, $D_{ii} \in M_{k_i}$, $D_{ij} \in M_{k_i,k_j}$, а $\widetilde{b}_{j_i} = e_{p_i} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, l$. Пусть ν_s, $s = 1, \dots, n$ — строки матрицы D. Построим матрицу $\widehat{Q} \in M_{m,n}$, которая имеет строки $\eta_s := 0$, $s = 1,\ldots,m$, $s \neq j_i$, $\eta_{j_i} := e^*_{p_i+1} - \nu_{p_i}$, $i = 1,\ldots,l-1$, $\eta_{j_l} := -\nu_{p_l}$. Тогда для $Q := \widehat{Q}S$ и $q := e_{j_l} \in \mathbb{R}^m$ выполнено (5). Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть система* (1) *вполне управляема. Тогда для любого многочлена* n *-й степени* $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ *с коэффициентами* $\gamma_i \in \mathbb{R}$ *существует постоянная матрица* $U \in M_{m,n}$ *такая, что характеристический многочлен* $\chi(A+BU;\lambda)$ *матрицы* $A+BU$ *совпадает с заданным многочленом* $p(\lambda)$.

Доказательство. Построим по лемме 1 матрицы $F := S(A+BQ)S^{-1}$, $G := SBq$ и рассмотрим матрицу $F+GV$, где $V \in M_{1,n}$ — матрица управляющих воздействий. Для заданного $p(\lambda)$ положим $V := (-\gamma_n, -\gamma_{n-1}, \ldots, -\gamma_1)$. Тогда $\chi(F+GV;\lambda) = p(\lambda)$. Построим управление

$$U := Q + qVS. \tag{6}$$

Тогда матрица $A+BU$ с управлением (6) подобна матрице $F+GV$. Действительно, $S(A+BU)S^{-1} = S(A+BQ+BqVS)S^{-1} = S(A+BQ)S^{-1} + SBqV = F+GV$. Поэтому $\chi(A+BU;\lambda) = \chi(F+GV;\lambda) = p(\lambda)$. □

Замечание 2. Следствие 1 — это известное утверждение, которое называется теоремой о модальном управлении. (На самом деле верно и обратное утверждение: *если для любого многочлена* $p(\lambda)$ *с* $\gamma_i \in \mathbb{R}$ *существует* $U \in M_{m,n}$ *такое, что* $\chi(A+BU;\lambda) = p(\lambda)$, *то система* (1) *вполне управляема.*) Однако отсюда не следует приводимость к произвольной стационарной матрице, поскольку характеристический многочлен не определяет матрицу однозначно (с точностью до преобразования подобия). Тем не менее следствие 1 дает частичный ответ на вопрос о приводимости в классе стационарных управлений.

Следствие 2. *Пусть система* (1) *вполне управляема. Тогда для любой матрицы* C, *имеющей единственный нетривиальный инвариантный многочлен, существует постоянная матрица* U *такая, что матрицы* $A+BU$ *и* C *подобны* (*и следовательно, кинематически подобны*).

Доказательство. Пусть матрица C имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен (или, что то же самое, ее характеристический многочлен совпадает с минимальным). Отсюда следует, что матрица C подобна матрице $\widehat{C} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -\gamma_n & \ldots & \ldots & -\gamma_1 \end{matrix} \right\|$, где в последней строке стоят коэффициенты характеристического многочлена матрицы C. Матрица $\widehat{C}$ называется матрицей Фробениуса для многочлена $\lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$. Построим V так же, как в следствии 1. Получим, что $F + GV = \widehat{C} \sim C$. Построим управление U по формуле (6), получим, что $A + BU \sim F + GV \sim C$. Из подобия матриц очевидно следует, что они кинематически подобны посредством стационарной матрицы Ляпунова. □

Замечание 3. Из доказательства следствия 1 вытекает, что если управление V (возможно, нестационарное) обеспечивает кинематическое подобие матриц $F + GV$ и C (посредством матрицы Ляпунова L_V), то управление U, построенное по формуле (6), будет обеспечивать кинематическое подобие матриц $A + BU$ и C (посредством L_U); причем и управление U будет того же класса (постоянное, кусочно-постоянное, периодическое и др.), что и V; и соответствующее ляпуновское преобразование L_U будет того же класса, что и L_V. Поэтому теорему 1 достаточно доказать для матрицы $F + GV$. Отметим также, что в случае, когда $m = 1$, эти рассуждения обратимы, то есть по матрице U из формулы (6) можно построить матрицу V, а если $m > 1$, то рассуждения, вообще говоря, необратимы.

Перейдем теперь к случаю $n = 4$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (F + GV)x, \quad F + GV = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Требуется для произвольной системы

$$\dot{y} = Cy, \quad y \in \mathbb{R}^4 \tag{8}$$

построить управление $V = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in M_{1,4}$, обеспечивающее кинематическое подобие матриц $F + GV$ и C. Для произвольной системы (8) рассмотрим все возможные варианты собственных значений (СЗ) λ_i, $i = 1, \ldots, 4$ и элементарных делителей (ЭД) матрицы $C \in M_4$.

1. Все λ_i вещественны и различны.

2.1. ЭД: $(\lambda - a)^2$, $(\lambda - b)$, $(\lambda - c)$, $a \neq b \neq c \neq a$.

2.2. ЭД: $(\lambda - a)$, $(\lambda - a)$, $(\lambda - b)$, $(\lambda - c)$, $a \neq b \neq c \neq a$.

2.3. ЭД: $(\lambda - a)^2$, $(\lambda - b)^2$, $a \neq b$.

2.4. ЭД: $(\lambda - a)$, $(\lambda - a)$, $(\lambda - b)^2$, $a \neq b$.

2.5. ЭД: $(\lambda - a)$, $(\lambda - a)$, $(\lambda - b)$, $(\lambda - b)$, $a \neq b$.

МАТЕМАТИКА 2006. № 1

3.1. ЭД: $(\lambda-a)^3$, $(\lambda-b)$, $a\neq b$.
3.2. ЭД: $(\lambda-a)^2$, $(\lambda-a)$, $(\lambda-b)$, $a\neq b$.
3.3. ЭД: $(\lambda-a)$, $(\lambda-a)$, $(\lambda-a)$, $(\lambda-b)$, $a\neq b$.
4.1. ЭД: $(\lambda-a)^4$.
4.2. ЭД: $(\lambda-a)^3$, $(\lambda-a)$.
4.3. ЭД: $(\lambda-a)^2$, $(\lambda-a)^2$.
4.4. ЭД: $(\lambda-a)^2$, $(\lambda-a)$, $(\lambda-a)$.
4.5. ЭД: $(\lambda-a)$, $(\lambda-a)$, $(\lambda-a)$, $(\lambda-a)$.
5.1. ЭД: $(\lambda-(a+\alpha i))$, $(\lambda-(a-\alpha i))$, $(\lambda-b)$, $(\lambda-c)$, $b\neq c$.
5.2. ЭД: $(\lambda-(a+\alpha i))$, $(\lambda-(a-\alpha i))$, $(\lambda-b)^2$.
5.3. ЭД: $(\lambda-(a+\alpha i))$, $(\lambda-(a-\alpha i))$, $(\lambda-b)$, $(\lambda-b)$.
6.1. ЭД: $(\lambda-(a+\alpha i))$, $(\lambda-(a-\alpha i))$, $(\lambda-(b+\beta i))$, $(\lambda-(b-\beta i))$ и все СЗ различны.
6.2. ЭД: $(\lambda-(a+\alpha i))^2$, $(\lambda-(a-\alpha i))^2$.
6.3. ЭД: $(\lambda-(a+\alpha i))$, $(\lambda-(a+\alpha i))$, $(\lambda-(a-\alpha i))$, $(\lambda-(a-\alpha i))$.

В случаях 1, 2.1, 2.3, 3.1, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2 матрица C имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен; применяем следствие 2.

Далее, рассмотрим, к примеру, случай 2.5. Матрица C имеет 2 нетривиальных инвариантных многочлена, поэтому не существует постоянного V такого, что $F+GV\sim C$. Применим следующий прием. Матрица

$$C\sim P:=\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & b\end{Vmatrix}.$$

Построим матрицу

$$R:=\begin{Vmatrix} a & -\alpha & 0 & 0\\ \alpha & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & -\beta\\ 0 & 0 & \beta & b\end{Vmatrix},$$

где $\alpha,\beta>0$ — некоторые вещественные числа. Далее, можно непосредственно проверить, что системы $\dot y=Py$ и $\dot z=Rz$ асимптотически эквивалентны посредством преобразования Ляпунова $z=L(t)y$, где

$$L(t)=\begin{Vmatrix} \cos\alpha t & -\sin\alpha t & 0 & 0\\ \sin\alpha t & \cos\alpha t & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\beta t & -\sin\beta t\\ 0 & 0 & \sin\beta t & \cos\beta t\end{Vmatrix}.$$

В свою очередь, матрица R имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен, то есть существует постоянная матрица V такая, что

$F+GV\sim R$. Таким образом, (в силу транзитивности) существует постоянное управление V, обеспечивающее кинематическое подобие матриц $F+GV$ и C. Соответствующая матрица Ляпунова будет в этом случае не стационарной, а периодической. Аналогично разбираются случаи 2.2, 2.4, 3.3, 4.4, 4.5. Каждый раз в качестве матрицы P берем нормальную жорданову форму матрицы C, а в качестве R матрицу, имеющую единственный нетривиальный инвариантный многочлен (то есть подобную матрице (7) при некотором V) и кинематически подобную матрице P.

Далее, в случае 5.3

$$C\sim P:=\begin{Vmatrix} a & -\alpha & 0 & 0\\ \alpha & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & b\end{Vmatrix}. \quad \text{Берем}\quad R=\begin{Vmatrix} a & -\alpha & 0 & 0\\ \alpha & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & b & -\beta\\ 0 & 0 & \beta & b\end{Vmatrix}.$$

В случае 6.3

$$C\sim P:=\begin{Vmatrix} a & -\alpha & 0 & 0\\ \alpha & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & -\alpha\\ 0 & 0 & \alpha & a\end{Vmatrix}. \quad \text{Берем}\quad R=\begin{Vmatrix} a & -\alpha & 0 & 0\\ \alpha & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & -\beta\\ 0 & 0 & \beta & a\end{Vmatrix}.$$

В случае 4.3

$$C\sim P:=\begin{Vmatrix} a & 0 & 1 & 0\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\end{Vmatrix}. \quad \text{Берем}\quad R=\begin{Vmatrix} a & -\alpha & 1 & 0\\ \alpha & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & a & -\alpha\\ 0 & 0 & \alpha & a\end{Vmatrix}.$$

Остались случаи 3.2 и 4.2; можно показать, что для них не существует постоянного управления V такого, что $F+GV$ и C кинематически подобны (даже посредством нестационарной матрицы Ляпунова $L(t)$). (Хотя для исходной матрицы $A+BU$, возможно, такое постоянное управление U существует. Но для этого необходимо, чтобы выполнялось $m>1$, и чтобы число l диагональных блоков матрицы D в доказательстве леммы 1 было больше 1. А поскольку на m никаких условий не накладывалось, то случай $m=1$ не исключается, и поэтому требуемого постоянного управления может не существовать.)

З а м е ч а н и е 4. Прежде чем приступить к разбору случаев 3.2 и 4.2, вернемся к замечанию 1. Покажем, что во всех разобранных выше случаях построенное управление удовлетворяет условию локальной ограниченности относительно C. Рассмотрим формулу (6). Управление U зависит от

V и от матриц $S, Q, q,$ которые, в свою очередь, строятся по матрицам A и B. Но мы считаем систему (1) заданной и матрицы A и B фиксированными. Управление U строится для отдельно взятой системы (2), поэтому считаем, что U не зависит от A и B и соответственно от $S, Q, q,$ а зависит только от $V.$ Очевидно, что если управление V в системе (7) обладает свойством локальной ограниченности относительно $C,$ то и управление U в системе (2) обладает этим свойством. Поэтому достаточно доказать локальную ограниченность относительно C управления V в системе (7). Рассмотрим случаи, когда C имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен. Пусть $|C| \leqslant N$. Тогда коэффициенты γ_i характеристического многочлена матрицы C локально ограничены относительно $C,$ то есть $\forall N > 0 \ \exists N_1 = N_1(N) > 0 \ \forall C \ \ (|C| \leqslant N \Rightarrow |\gamma_i| \leqslant N_1).$ Построим по числам γ_i матрицу Фробениуса $\widehat{C}$, как в доказательстве следствия 2. Тогда $|\widehat{C}| \leqslant N_2(N_1),$ то есть $\widehat{C}$ локально ограничена относительно $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и, следовательно, (в силу транзитивности) локально ограничена относительно $C.$ (Заметим, что не любая матрица, подобная матрице $C,$ локально ограничена относительно $C,$ то есть из того, что $C_n \sim D_n$ и $\forall n \ \ |C_n| \leqslant N,$ вообще говоря, не следует, что $D_n \leqslant N_1(N).$ Пример: $C_n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $D_n = \begin{Vmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Однако, если матрице C поставлена в соответствие подобная ей *матрица Фробениуса* $\widehat{C},$ то $\widehat{C}$ будет локально ограничена относительно $C.$) Очевидно теперь, что и управление V будет локально ограничено относительно $C,$ так как $V = (-\gamma_n, \ldots, -\gamma_1).$ Рассмотрим остальные случаи, когда C имеет не единственный инвариантный многочлен. Во всех этих случаях, если $|C| \leqslant N,$ то $|P| \leqslant N_1(N),$ следовательно, $|R| \leqslant N_2(N_1)$ (числа α, β можно выбирать из интервала $(0,1)$). Поскольку R имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен, то $|V| \leqslant N_3(N_2),$ по доказанному выше. Следовательно, $|V| \leqslant N_3(N).$

Перейдем теперь к случаям 3.2 и 4.2. Доказательство для этих случаев проведем следующим образом. Зафиксируем число $\vartheta > 0.$ Пусть D — это некоторая матрица, подобная C (причем локально ограниченная относительно C). Обозначим через $X_V(t,s)$ матрицу Коши системы (7) с управлением $V = V(t).$ Построим управление $V(t), \ \ t \in [0,\vartheta]$ такое, что

$$X_V(\vartheta, 0) = \exp(D\vartheta). \tag{9}$$

Продолжим это управление периодически на $\mathbb{R}.$ Тогда получим, что $X_V((k+1)\vartheta, k\vartheta) = \exp(D\vartheta), \ \ k \in \mathbb{Z}.$ Отсюда в силу группового свойства матрицы Коши следует, что $X(k\vartheta, 0) = \exp(Dk\vartheta).$ Матрицы Коши системы (7) с построенным управлением $V(t)$ и системы с матрицей D будут совпадать на относительно плотном множестве $\{k\vartheta, k\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{R}$. Отсюда будет следовать асимптотическая эквивалентность системы (7) и системы с матрицей D (это известное утверждение, его доказательство можно найти, например, в статье [2]); значит, системы (7) и (8) также будут асимптотически эквивалентны. Управление V, обеспечивающее равенство (9) будем строить кусочно-постоянным. В этом случае матрица Коши — это произведение экспонент постоянных матриц.

Рассмотрим случай 4.2. Построим матрицу

$$D=\begin{Vmatrix} a & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & a & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a\end{Vmatrix}$$

подобную C. Положим $T:=\vartheta/4$. Тогда

$$\exp(D\vartheta)=\exp(D\cdot 4T)=e^{4aT}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 2T & 2T^2 & 0\\ 0 & 1 & 2T & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Пусть $x_0>0$ — это корень уравнения $e^x-1=\dfrac{x^2+4\pi^2}{2x}$. Это уравнение имеет корень, и он единственный, поскольку $e^x-1\to+0$, $\dfrac{x^2+4\pi^2}{2x}\to+\infty$ при $x\to+0$; $e^x-1\to+\infty$, $\dfrac{x^2+4\pi^2}{2x}\to+\infty$ при $x\to+\infty$ и $(e^x-1)'>1>\left(\dfrac{x^2+4\pi^2}{2x}\right)'$ при $x>0$. Положим $p:=x_0/T$, $q:=2\pi/T$. Тогда $e^{pT}-1=\dfrac{p^2T^2+q^2T^2}{2pT}=\dfrac{(p^2+q^2)T}{2p}$, или

$$2p(e^{pT}-1)=(p^2+q^2)T. \tag{10}$$

Построим управление $V_1(t)\equiv V_1$, $t\in[0,T)$ такое, чтобы матрица $F+GV_1$ имела собственные значения $p\pm qi$, 0, 0 (то есть на этом промежутке полагаем $v_1:=0$, $v_2:=0$, $v_3:=-p^2-q^2$, $v_4:=2p$); далее, строим $V_2(t)\equiv V_2$, $t\in[T,2T)$ такое, чтобы матрица $F+GV_2$ имела собственные значения $-p\pm qi$, 0, 0 (то есть на этом промежутке полагаем $v_1:=0$, $v_2:=0$, $v_3:=-p^2-q^2$, $v_4:=-2p$); далее, строим $V_3(t)\equiv V_3$, $t\in[2T,4T]$ такое, чтобы матрица $F+GV_3$ имела собственные значения $\eta\pm\mu i$, $\eta\pm\nu i$, где $\eta=2a$, $\mu=\pi/T$, $\nu=2\pi/T$ (то есть на этом промежутке полагаем

$v_1 := -(\eta^2+\mu^2)(\eta^2+\nu^2)$, $v_2 := 2\eta(2\eta^2+\mu^2+\nu^2)$, $v_3 := -6\eta^2-\mu^2-\nu^2$, $v_4 := 4\eta$). Вычисляя матрицу Коши на каждом из промежутков, получим: $X_V(T,0) = \exp((F+GV_1)T) =$

$$\begin{Vmatrix} 1 & T & \frac{(e^{pT}-1)(3p^2-q^2)-2pT(p^2+q^2)}{(p^2+q^2)^2} & \frac{-(e^{pT}-1)2p+T(p^2+q^2)}{(p^2+q^2)^2} \\ 0 & 1 & \frac{2p(e^{pT}-1)}{p^2+q^2} & \frac{-(e^{pT}-1)}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & e^{pT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{pT} \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

$X_V(2T,T) = \exp((F+GV_2)T) =$

$$\begin{Vmatrix} 1 & T & \frac{(e^{-pT}-1)(3p^2-q^2)+2pT(p^2+q^2)}{(p^2+q^2)^2} & \frac{(e^{-pT}-1)2p+T(p^2+q^2)}{(p^2+q^2)^2} \\ 0 & 1 & \frac{-2p(e^{-pT}-1)}{p^2+q^2} & \frac{-(e^{-pT}-1)}{p^2+q^2} \\ 0 & 0 & e^{-pT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-pT} \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

$X_V(4T,2T) = \exp((F+GV_3)2T) = e^{4aT}I$. Перемножив матрицы (11) и (12), получим, что $X_V(2T,0) = X_V(2T,T)X_V(T,0) =$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2T & \dfrac{4pT(e^{pT}-1)}{p^2+q^2} & \dfrac{4p(1-e^{pT})+2T(p^2+q^2)}{(p^2+q^2)^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{4p(e^{pT}-1)}{p^2+q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Тогда из равенства (10) следует, что элемент $\{14\}$ матрицы (13) равен 0, элемент $\{13\}$ равен $2T^2$, элемент $\{23\}$ равен $2T$. Поэтому

$$X_V(2T,0) = \begin{Vmatrix} 1 & 2T & 2T^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

$$\Longrightarrow \quad X_V(\vartheta,0) = X_V(4T,2T)X_V(2T,0) = e^{4aT}\cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2T & 2T^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а это совпадает с матрицей $\exp(D\vartheta)$, что и требовалось доказать.

Покажем, что построенное управление $V(t)$, $t \in [0,\vartheta]$ локально ограничено относительно C. Пусть $|C| \leqslant N$, тогда $|a| \leqslant N_1(N)$. Число $\vartheta > 0$

фиксированное, поэтому $T > 0$ тоже фиксированное. Число x_0 не зависит от C, поэтому p, q и, следовательно, V_1, V_2 также не зависят от C. Далее, V_3 зависит от a, но если a ограничено, то V_3 тоже ограничено, то есть $|V_3| \leqslant N_2(N_1)$. Отсюда следует, что $V(t)$, $t \in [0, \vartheta]$ локально ограничено относительно C.

Рассмотрим случай 3.2. Предварительно докажем вспомогательное утверждение. Пусть матрица H имеет вид

$$H = \begin{Vmatrix} f & f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & g & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{Vmatrix} \tag{15}$$

и пусть $f, g \geqslant \varkappa > 0$. Докажем, что матрица H имеет вещественный логарифм $\ln H$, это будет также матрица вида (15) и она будет локально ограничена относительно H, если диагональ матрицы H отделена от нуля.

Лемма 2. *Для любого* $N > 0$ *существует* $N_0 = N_0(N) > 0$ *такое, что для любой матрицы* H *вида* (15), *удовлетворяющей условиям* $|H| \leqslant N$ *и* $f, g \geqslant \frac{1}{N} > 0$, *существует вещественная матрица*

$$K = \begin{Vmatrix} \beta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \alpha & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{Vmatrix}$$

такая, что $\exp(K\vartheta) = H$ *и* $|K| \leqslant N_0$.

Доказательство. Пусть $|H| \leqslant N$ и $f, g \geqslant \frac{1}{N} > 0$. Найдем вещественный логарифм матрицы H. Для этого построим интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра $r(\lambda)$ [4, гл. V, § 2] для функции $\ln \lambda$ на спектре матрицы H. Получим, что $r(\lambda)$ имеет вид $r(\lambda) = \left(\dfrac{\ln g}{g - f} + \left(\dfrac{1}{g(g-f)} - \dfrac{\ln g}{(g-f)^2}\right)(\lambda - g)\right)(\lambda - f) + \dfrac{\ln f}{(g-f)^2}(\lambda - g)^2.$ Тогда $\ln H = r(H) =$

$$\begin{Vmatrix} \ln f & \frac{f_1(\ln g - \ln f)}{g-f} & \frac{f_2(\ln g - \ln f)}{g-f} + \frac{f_1 g_1}{g(g-f)} - \frac{f_1 g_1(\ln g - \ln f)}{(g-f)^2} & \frac{f_3(\ln g - \ln f)}{g-f} \\ 0 & \ln g & \frac{g_1}{g} & 0 \\ 0 & 0 & \ln g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ln g \end{Vmatrix},$$

то есть матрица H имеет вещественный логарифм $Z = \ln H$, причем матрица Z имеет такой же вид, что и матрица H. Покажем, что Z

локально ограничена относительно H. Так как $N \geqslant f, g \geqslant \frac{1}{N} > 0$, то $|\ln f|, |\ln g| \leqslant N_1(N)$. Далее, $|z_{23}| \leqslant N_2(N)$, поскольку $|g_1| \leqslant N$, $\frac{1}{|g|} \leqslant N$.

Рассмотрим z_{12}, z_{13}, z_{14}. Поскольку g и f отделены от нуля, то z_{12} может быть неограниченным только в том случае, когда g близкó к f. Но $\lim\limits_{g\to f} \dfrac{f_1(\ln g - \ln f)}{g-f} = f_1 \cdot (\ln x)'\big|_{x=f} = \dfrac{f_1}{f}$ и $|f_1| \leqslant N$, $\dfrac{1}{|f|} \leqslant N$, поэтому $|z_{12}| \leqslant N_3(N)$. Аналогично можно показать, что $|z_{14}| \leqslant N_4(N)$ и что первое слагаемое в z_{13} по модулю $\leqslant N_5(N)$. Второе и третье слагаемые в z_{13} ограничены, если g и f не близки. Если g и f близки, то можно показать, что

$$\lim_{g\to f}\left(\frac{f_1 g_1}{g(g-f)} - \frac{f_1 g_1(\ln g - \ln f)}{(g-f)^2}\right) = -\frac{f_1 g_1}{2f^2}.$$

Таким образом, $|z_{13}| \leqslant N_6(N)$. Следовательно, Z локально ограничена относительно H. Положим $K := \dfrac{1}{\vartheta} Z$, получим утверждение леммы. $\square$

З а м е ч а н и е 5. Очевидно, что если функция $x \to h(x)$ непрерывна, то матрица $h(H)$ локально ограничена относительно H. В частности, матрица $\exp(H\vartheta)$ локально ограничена относительно H. Если же мы рассматриваем функцию $\ln x$ на пространстве M_n, то, во-первых, это функция комплекснозначная и многозначная, во-вторых, даже если существует вещественный логарифм, то он также может определяться не однозначно и, вообще говоря, не является непрерывной функцией. (Соответствующий пример можно найти в работе [2].) В лемме 2 на самом деле доказано, что в некоторой окрестности верхней треугольной матрицы H вида (15) можно выделить однозначную непрерывную ветвь логарифма (поскольку фактически было показано, что если $g \to f$, то $\ln H(g,f) \to \ln H(f,f)$).

Перейдем теперь к построению управления в случае 3.2. Пусть матрица C имеет вид

$$C = \begin{Vmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Здесь для фиксированного $\vartheta > 0$ также положим $T = \vartheta/4$. На промежутках $[0,T)$ и $[T,2T)$ строим V_1 и V_2 так же, как и в случае 4.2. Тогда $X_V(2T,0)$ имеет вид (14).

Далее, строим управление $V_3(t) \equiv V_3$, $t \in [2T, 3T)$ такое, чтобы матрица $F + GV_3$ имела собственные значения $\rho \pm \omega i$, $\rho \pm \sigma i$, где $\rho = 4b$, $\omega = 2\pi/T$, $\sigma = 4\pi/T$ (то есть на этом промежутке полагаем $v_1 :=$

$-(\rho^2+\omega^2)(\rho^2+\sigma^2)$, $v_2 := 2\rho(2\rho^2+\omega^2+\sigma^2)$, $v_3 := -6\rho^2-\omega^2-\sigma^2$, $v_4 := 4\rho$). Вычислив матрицу Коши на этом промежутке, получим $X_V(3T,2T) = \exp((F+GV_3)T) = e^{4bT}I$.

Далее, положим $c := 4(a-b)$, $d := 2\pi/T$. Строим управление $V_4(t) \equiv V_4$, $t \in [3T,4T]$ такое, чтобы матрица $F+GV_4$ имела собственные значения $c \pm di$, c, 0, (то есть на этом промежутке полагаем $v_1 := 0$, $v_2 := c(c^2+d^2)$, $v_3 := -3c^2-d^2$, $v_4 := 3c$. Вычислив матрицу Коши на этом промежутке, получим

$$X_V(4T,3T) = \exp((F+GV_4)T) = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{(e^{cT}-1)(3c^2+d^2)}{c(c^2+d^2)} & \frac{3(1-e^{cT})}{c^2+d^2} & \frac{e^{cT}-1}{c(c^2+d^2)} \\ 0 & e^{cT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{cT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{cT} \end{matrix} \right\|.$$

Отсюда получим, что $X_V(4T,0) = X_V(4T,3T)X_V(3T,2T)X_V(2T,0) =$

$$\left\| \begin{matrix} e^{4bT} & e^{4bT}\left(\dfrac{(e^{cT}-1)(3c^2+d^2)}{c(c^2+d^2)} + 2T\right) & e^{4bT}\left(\dfrac{(e^{cT}-1)(6c^2T+2d^2T-3c)}{c(c^2+d^2)} + 2T^2\right) & \dfrac{e^{4bT}(e^{cT}-1)}{c(c^2+d^2)} \\ 0 & e^{4aT} & 2Te^{4aT} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4aT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4aT} \end{matrix} \right\|. \tag{17}$$

Найдем по лемме 2 вещественный логарифм матрицы (17). Положим $D := \dfrac{1}{4T}\ln X_V(4T,0)$. Тогда матрица D имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} b & \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3c^2+d^2}{c^2+d^2} + \dfrac{2cT}{e^{cT}-1}\right) & \dfrac{(e^{cT}-1)(3c^2+2d^2)-2Tc(c^2-d^2)}{4c(c^2+d^2)(e^{cT}-1)} - \dfrac{cT^2(e^{cT}+1)}{2(e^{cT}-1)^2} & \dfrac{1}{4(c^2+d^2)} \\ 0 & a & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix} \right\|. \tag{18}$$

Очевидно, что $D \sim C$ и $X_V(\vartheta, 0) = \exp(D\vartheta)$. Далее, экспонента — непрерывная функция, следовательно, $X_V(\vartheta, 0)$ локально ограничено относительно V. Управление V в силу построения локально ограничено относительно C; значит, $X_V(\vartheta, 0)$ локально ограничено относительно C (причем определитель матрицы $X_V(\vartheta, 0)$ отделен от нуля). По лемме 2 матрица D локально ограничена относительно $X_V(\vartheta, 0)$, следовательно, D локально ограничена относительно C.

Таким образом, мы проводим следующие рассуждения. Для произвольной матрицы C $(|C| \leqslant N)$ вида (16) строим подобную ей матрицу D вида (18) (тогда будет выполняться $|D| \leqslant N_1(N)$). Для этой матрицы D строим управление V, обеспечивающее равенство $X_V(\vartheta, 0) = \exp(D\vartheta)$. Это управление по построению будет локально ограничено относительно C. Оно будет обеспечивать кинематическое подобие матрицы $F + GV$ и матрицы (18), а значит, матрицы $F + GV$ и матрицы (16).

Таким образом, мы построили на отрезке длины $\vartheta = 4T$ кусочно-постоянное управление (состоящее в случае 4.2 из 3 кусков, а в случае 3.2 из 4 кусков), обеспечивающее асимптотическую эквивалентность системы (7) с построенным управлением и системы (8). Построенное управление V обладает свойством локальной ограниченности относительно C. На этом доказательство теоремы 1 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

2. Зайцев В. А. Глобальная ляпуновская приводимость двумерных управляемых систем с кусочно постоянными коэффициентами // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 2002. № 1. С. 3–12.

3. Зайцев В. А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Ижевск, 2003. № 1. С. 31–62.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

Поступила в редакцию 01.10.05

A. F. Gabdrahimov, V. A. Zaitsev

Lyapunov reducibility for four-dimensional linear stationary control systems in the class of the piecewise-constant control functions

It is proved that if the stationary control system $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^4$, $u \in \mathbb{R}^m$ is totally controllable, then for any constant matrix C there exists bounded piecewise-constant matrix $U = U(t)$ such that the matrices $A+BU(t)$ and C are kinematically similar. The constructed control function U is locally bounded with respect to C.

Габдрахимов Александр Фаритович
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
e-mail: gabdrahimov@udm.ru

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 4)
e-mail: verba@udm.ru