УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.977 *На правах рукописи*

Зайцев Василий Александрович

СОГЛАСОВАННОСТЬ, ДОСТИЖИМОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА

01. 01. 02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Ижевск — 2000 г.

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Удмуртского государственного университета.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор Е. Л. Тонков

Официальные оппоненты — доктор физико-математических наук,
профессор Н. Х. Розов
кандидат физико-математич. наук,
доцент П. М. Симонов

Ведущая организация — Институт математики НАН Беларуси

Защита состоится «   »   2000 года в   часов на заседании диссертационного совета К 064.47.01 при Удмуртском государственном университете по адресу: г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4), Математический факультет, ауд. 216.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан «......» .... 2000 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета   к.ф.-м.н., доцент Н. Н. Петров

Актуальность темы. Изучаемые в этой работе задачи можно рассматривать как естественное развитие основной тематики классической теории регулирования, состоящей в построении линейной обратной связи, стабилизирующей исходный объект. В классической постановке обычно изучаются стационарные объекты, поведение которых моделируется линейными дифференциальными уравнениями или системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и тем самым вопрос сводится к перемещению в заданное множество (например, в левую полуплоскость) корней характеристического многочлена матрицы системы.

В другой терминологии эти задачи можно интерпретировать как задачи управления показателями Ляпунова. Это позволяет расширить класс изучаемых объектов, включив в него нестационарные системы дифференциальных уравнений. Таким образом, появляется возможность привлечения активно развивающейся теории показателей Ляпунова (существенный вклад в развитие которой в последние годы внесли Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. М. Миллионщиков, Н. А. Изобов, М. И. Рахимбердиев, И. Н. Сергеев и др.) и абстрактной теории динамических систем к изучению чисто управленческих задач.

В более общей постановке задачи управления показателями можно изучать как задачи ляпуновской приводимости управляемых систем. Задачам управления показателями Ляпунова и вопросам ляпуновской приводимости управляемых систем посвящены работы П. Бруновского, Е. Л. Тонкова, Н.Х. Розова и М.И. Рахимбердиева, С. Н. Поповой, Е. К. Макарова, Д. М. Оленчикова, И. В. Гайшуна и др.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{1}$$

с ограниченными и кусочно непрерывными на $\mathbb{R}$ матрицами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Управление в системе (1) строится по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$. Это приводит к изучению замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x. \tag{2}$$

Система (2) глобально приводима по Ляпунову, если для любой системы

$$\dot{y} = D(t)y \tag{3}$$

с ограниченной и кусочно непрерывной на $\mathbb{R}$ матрицей $D(\cdot)$ существует кусочно непрерывное и ограниченное управление $U = U(\cdot)$, при котором система (2) асимптотически эквивалентна системе (3), т. е. существует преобразование Ляпунова $x = L(t)y$, связывающее эти системы.

В работе Е. К. Макарова и С. Н. Поповой[1] доказано, что если $n = 2$, система (1) равномерно вполне управляема и матрица $B(\cdot)$ равномерно непрерывна, то система (2) глобально приводима по Ляпунову. Для произвольного n этот вопрос пока остается открытым.

Цель работы — изучение задач управления (в локальной и глобальной постановке) показателями Ляпунова и вопросов ляпуновской приводимости билинейных управляемых систем и, в частности, линейных управляемых систем с наблюдателем.

Научная новизна. В работе введено понятие локальной достижимости билинейной управляемой системы, тесно связанное с методом поворотов В. М. Миллионщикова. Доказана теорема о локальной ляпуновской приводимости равномерно локально достижимой системы. Показано, что для рекуррентных систем свойства локальной достижимости и равномерной локальной достижимости эквивалентны. Для динамической системы сдвигов получен ряд утверждений о локальной управляемости показателей Ляпунова. Изучено свойство согласованности, введенное в работе С. Н. Поповой и Е. Л. Тонкова[2]. Доказано, что в некритическом случае (нуль находится внутри множества значений допустимых управлений) из согласованности следует локальная достижимость. Получены различные критерии согласованности. Подробно исследованы стационарные согласованные системы. Получены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости показателей Ляпунова для стационарной системы с неполной обратной связью. Доказана теорема о λ-приводимости нестационарной равномерно вполне управляемой системы. Сформулированы следствия о глобальной управляемости центральных и особых показателей. Доказана теорема о глобальной управляемости показателей Ляпунова систем с кусочно постоянными матрицами в случае $n = 2$ и описана идея доказательства этой теоремы для произвольного n.

Теоретическая и практическая ценность. Доказанная в работе теорема об управлении показателями Ляпунова стационарной системы с наблюдателем является обобщением классического результата теории регулирования о существовании линейной обратной связи, стабилизирующей систему. Подробно исследовано свойство согласованности. Решен вопрос о глобальной управляемости центральных и особых пока-

[1] *Макаров Е. К., Попова С. Н.* О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 1. – С. 97–106.

[2] *Попова С. Н., Тонков Е. Л.* Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 10. – С. 1687–1696.

зателей системы (2) с ограниченными кусочно непрерывными матрицами. Некоторые идеи и методы, предложенные в работе (например, идеи, применяемые при доказательстве теоремы о глобальной управляемости показателей кусочно постоянных систем и др.) могут быть использованы при решении других задач, связанных с управленческой тематикой.

Апробация работы. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 97–01–00413, 99–01–00454) и конкурсным центром фундаментального естествознания (грант 97–0–1.9).

Результаты диссертации докладывались на заседаниях Ижевского городского семинара по дифференциальным уравнениям и теории управления в 1997–2000 годах, на международной конференции IFAC «Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации» (NDPCO-98, Челябинск, 1998 г.), на четвертой Российской университетско-академической научно-практической конференции (Ижевск, 1999 г.), на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений (кафедра дифференциальных уравнений механико-математического ф-та МГУ, Москва, 2000 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в шести работах.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, одиннадцати параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы. Объём диссертации 102 страницы. Библиографический список содержит 64 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении приводится обзор основных работ на эту тему, описывается общая постановка задачи и излагается краткое содержание работы по параграфам.

В первом параграфе диссертации введены основные определения и понятия, используемые в работе. В диссертации изучаются билинейная управляемая система

$$\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + u_1A_1(f^t\omega)x + \dots + u_rA_r(f^t\omega)x, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \quad (4)$$

и линейная управляемая система с наблюдателем

$$\dot{x} = A(f^t\omega)x + B(f^t\omega)u, \quad y = C^*(f^t\omega)x, \quad (x,u,y) \in \mathbb{R}^{n+m+k}, \quad (5)$$

параметризованные при помощи топологической динамической системы (Ω, f^t). В системе (5) управление формируется в виде $u = Vy$, где матрица $V = V(t,\omega)$ управляющих параметров выбирается из некоторого фиксированного множества. Полученную в результате замкнутую систему

$$\dot{x} = \big(A(f^t\omega)x + B(f^t\omega)VC^*(f^t\omega)\big)x \tag{6}$$

будем отождествлять с парой $(\mathbb{A},\omega)$, где $\mathbb{A} = (A,B,C) : \Omega \to M_{n,n+m+k}$ ($M_{n,m}$ — пространство матриц размерности $n \times m$, если $m = n$, то пишем M_n), а билинейную систему (4) отождествим с парой $(\mathbb{B},\omega)$, где $\mathbb{B} = (A_0, A_1, \ldots, A_r) : \Omega \to M_{n,n(r+1)}$.

Всякую систему (6) можно записать в виде (4). Действительно, если $B(\omega) = \big(b_1(\omega),\ldots,b_m(\omega)\big)$, $C(\omega) = \big(c_1(\omega),\ldots,c_k(\omega)\big)$, $b_i(\omega), c_j(\omega) \in \mathbb{R}^n$, $V = \{v_{ij}\}$ $(i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,k)$, то

$$\begin{aligned} B(\omega)VC^*(\omega) = v_{11}b_1(\omega)c_1^*(\omega) + v_{12}b_1(\omega)c_2^*(\omega) + \cdots + v_{1k}b_1(\omega)c_k^*(\omega) + \cdots \\ + v_{m1}b_m(\omega)c_1^*(\omega) + \cdots + v_{mk}b_m(\omega)c_k^*(\omega). \end{aligned}$$

Поэтому, если положить $r \doteq mk$,

$$\begin{aligned} A_0(\omega) \doteq A(\omega),\ A_1(\omega) \doteq b_1(\omega)c_1^*(\omega), \ldots, A_k(\omega) \doteq b_1(\omega)c_k^*(\omega), \ldots, \\ A_{r-k+1}(\omega) \doteq b_m(\omega)c_1^*(\omega), \ldots, A_r(\omega) \doteq b_m(\omega)c_k^*(\omega), \end{aligned}$$

то тем самым каждой системе $(\mathbb{A},\omega)$ можно поставить в соответствие систему $(\mathbb{B},\omega)$. Здесь матричному управлению $V = \{v_{ij}\}$ отвечает векторное управление $u \doteq (u_1,\ldots,u_r) = \operatorname{vec} V$, где vec — операция, разворачивающая матрицу по строкам в вектор-столбец. Таким образом, система (4) имеет более общий вид по сравнению с системой (6), поэтому все утверждения первой главы $\big($справедливые как для системы $(\mathbb{A},\omega)$, так и для системы $(\mathbb{B},\omega)\big)$ сформулированы и доказаны только для системы $(\mathbb{B},\omega)$.

Пусть фиксированы произвольное множество $U \subset \mathbb{R}^r$ $(0 \in U)$ и инвариантное относительно потока f^t множество $E \subset \Omega$. Совокупность $\mathcal{U}$ ограниченных на $\mathbb{R} \times E$ функций $(t,\omega) \to u(t,\omega)$ со значениями в U называется множеством допустимых управлений, если функция $t \to u(t,\omega)$ измерима на $\mathbb{R}$ при каждом $\omega \in E$. Через $X_u(t,s,\omega)$ обозначается матрица Коши системы (4) при $u = u(t,\omega)$, соответственно $X_0(t,s,\omega)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A_0(f^t\omega)x$. Пусть $\mathfrak{D}_\vartheta(\omega) \subset M_n$ — множество достижимости матричного уравнения, отвечающего уравнению (4), из точки $X(0) = I$ за время ϑ, когда $u(\cdot)$ пробегает множество $\mathcal{U}$.

Определение 1. Система $(\mathbb{B}, \omega_0)$ называется **локально достижимой**, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что выполнено включение $\mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega_0) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega_0)$, где $\mathcal{B}_\varepsilon(I) \subset M_n$ — ε-окрестность единичной матрицы. Система $(\mathbb{B}, \omega_0)$ называется **равномерно локально достижимой**, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что включение $\mathcal{B}_\varepsilon(I) X_0(\vartheta, 0, \omega) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ выполнено для всех $\omega \in \overline{\gamma}(\omega_0)$, где $\overline{\gamma}(\omega_0)$ — замыкание траектории точки $\omega_0 \in \Omega$.

Непосредственно из определения 1 следует, что система $(\mathbb{B}, \omega_0)$ локально достижима тогда и только тогда, когда существуют $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любой матрицы $H \in \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ найдется допустимое управление $u(t, \omega_0)$, $t \in \mathbb{R}$ такое, что

$$X_u(\vartheta, 0, \omega_0) = H X_0(\vartheta, 0, \omega_0), \tag{7}$$

и система $(\mathbb{B}, \omega_0)$ равномерно локально достижима в том и только том случае, если существуют $\vartheta > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любой функции $H : \overline{\gamma}(\omega_0) \to \mathcal{B}_\varepsilon(I)$ найдется допустимое управление $u : \mathbb{R} \times \overline{\gamma}(\omega_0) \to U$, обеспечивающее для всех $\omega \in \overline{\gamma}(\omega_0)$ равенства $X_u(\vartheta, 0, \omega) = H(\omega) X_0(\vartheta, 0, \omega)$.

Свойство локальной достижимости тесно связано с методом поворотов В. М. Миллионщикова. Наличие свойства локальной достижимости предоставляет возможность (в силу (7)) «немного поворачивать» матрицу Коши системы (4) с помощью подходящего управления и тем самым локально влиять на поведение решений (если бы мы могли обеспечить равенство (7) для любой матрицы H с $\det H > 0$, то мы могли бы глобально влиять на поведение решений). Не всякая система обладает этим свойством, но очевидно, что система $\dot{x} = A(t)x + V(t)x$, где матрица $A(t)$ ограничена, а элементы матрицы $V(t)$ интерпретируются как управляющие функции ($|V(t)| \leqslant \varepsilon$), равномерно локально достижима. Таким образом, выполнено (7), и это обстоятельство позволило В. М. Миллионщикову[3], а вслед за ним и другим исследователям[4] построить современную теорию показателей Ляпунова.

[3] *Миллионщиков В. М.* Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4. – № 2. – С. 173–180.

Миллионщиков В. М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 10. – С. 1775–1784.

Миллионщиков В. М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. матем. журнал. – 1969. – Т. 10. – № 1. – С. 99–104.

[4] *Изобов Н. А.* Линейные системы дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1974. – Т. 12. – С. 71–146.

Определение 2. Система $(\mathbb{B}, \omega_0)$ обладает свойством локальной управляемости показателей Ляпунова, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого вектора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $|\mu| \leqslant \delta$ найдется допустимое управление $u_\mu(t, \omega_0)$, определенное на $\mathbb{R}$, которое обеспечивает равенства $\lambda_i(\mathbb{B}, \omega_0, u_\mu) = \lambda_i(\mathbb{B}, \omega_0, 0) + \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $\lambda_i(\mathbb{B}, \omega_0, u_\mu)$ — показатели Ляпунова системы $(\mathbb{B}, \omega_0)$ при управлении $u = u_\mu(t, \omega_0)$.

Во втором параграфе изучаются свойства достижимых систем. Предполагается, что U — выпуклый компакт. Доказано, что в случае, когда Ω — минимальное множество, свойства локальной достижимости и равномерной локальной достижимости эквивалентны.

В третьем параграфе доказано одно из основных утверждений работы — теорема о локальной ляпуновской приводимости, т. е. о приводимости к системе близкой к невозмущенной.

Теорема 1. *Пусть система* $(\mathbb{B}, \omega_0)$ *равномерно локально достижима. Тогда существует* $\delta > 0$ *такое, что для любой матрицы* $P : \overline{\gamma}(\omega_0) \to \mathcal{B}_\delta(0) \subset M_n$ *найдется допустимое управление* $\widehat{u} : \mathbb{R} \times \overline{\gamma}(\omega_0) \to U$*, при котором система*

$$\dot{x} = \big(A_0(f^t\omega) + \widehat{u}_1(t, \omega)A_1(f^t\omega) + \cdots + \widehat{u}_r(t, \omega)A_r(f^t\omega)\big)x$$

приводима ляпуновским преобразованием $x = L(t, \omega)y$ *к системе*

$$\dot{y} = \big(A_0(f^t\omega) + P(f^t\omega)\big)y.$$

В четвертом параграфе получены следствия из теоремы 1 о локальной управляемости показателей Ляпунова. Для системы

$$\dot{x} = \big(A_0(t) + u_1A_1(t) + \cdots + u_rA_r(t)\big)x, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \tag{8}$$

заданной функцией $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_r) : \mathbb{R} \to M_{n,n(r+1)}$, построим динамическую систему сдвигов $\big(\mathfrak{R}(\mathcal{A}), f^t\big)$. Доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть система* (8) *равномерно локально достижима. Если система*

$$\dot{x} = A_0(t)x \tag{9}$$

правильная или диагонализируемая (*т. е. приводится ляпуновским преобразованием к диагональной системе*), *то система* (8) *обладает свойством локальной управляемости показателей Ляпунова.*

Т е о р е м а 3. *Пусть система* (8) *равномерно локально достижима. Если показатели системы* (9) *устойчивы, то система* (8) *обладает свойством локальной управляемости попарно различных показателей Ляпунова.*

Т е о р е м а 4. *Пусть функция* $t \to \mathcal{A}(t)$ *рекуррентна и система* (8) *локально достижима. Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что для любого вектора* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\delta^n(0)$ *найдется допустимое управление* $u^\mu : \mathbb{R} \to U$, *при котором для почти всех* $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathfrak{R}(\mathcal{A})$ $\big($*относительно любой инвариантной вероятностной меры* p *на* $\mathfrak{R}(\mathcal{A})\big)$ *система*

$$\dot{x} = \big(\widetilde{A}_0(t) + u_1^\mu(t)\widetilde{A}_1(t) + \cdots + u_r^\mu(t)\widetilde{A}_r(t)\big)x \tag{10}$$

является правильной и ее показатели Ляпунова $\lambda_i\big(\widetilde{\mathcal{A}}, u^\mu\big)$ *удовлетворяют равенствам* $\lambda_i\big(\widetilde{\mathcal{A}}, u^\mu\big) = \lambda_i + \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$, *где* λ_i — *показатели Ляпунова системы* $\dot{x} = \widetilde{A}_0(t)x$.

Т е о р е м а 5. *Пусть функция* $t \to \mathcal{A}(t)$ *почти периодическая по Бору, система* (8) *локально достижима и система* $\dot{x} = A_0(t)x$ *имеет совокупность из* n *отделенных решений. Тогда система* (8) *обладает свойством локальной управляемости показателей Ляпунова для всех* $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathfrak{R}(\mathcal{A})$ *и всякая система* (10) *является правильной.*

В пятом параграфе изучается свойство согласованности для систем $(\mathbb{A}, \omega)$ и $(\mathbb{B}, \omega)$. Доказано, что в случае, когда $0 \in \operatorname{int} U$, из согласованности (равномерной согласованности) следует локальная (соответственно равномерная локальная) достижимость. Показано, что обратное утверждение неверно.

В шестом параграфе получены различные критерии согласованности систем $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ для динамической системы сдвигов. Доказана теорема, которая иллюстрирует связь между свойством согласованности системы $\mathbb{A}$ и свойствами управляемости и наблюдаемости[5]. Показано, что свойство согласованности эквивалентно свойству полной управляемости «большой системы»[6]. Получены необходимые и достаточные условия согласованности, выраженные в терминах невырожденности матричной краевой задачи и в терминах существования матрицы $V(t)$, удовлетворяющей некоторому дифференциальному неравенству[7].

---

[5] *Попова С. Н., Тонков Е. Л.* Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 10. – С. 1687–1696.

[6] *Попова С. Н., Тонков Е. Л.* Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 2. – С. 226–235.

[7] *Култышев С. Ю., Тонков Е. Л.* Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 11. – С. 1206–1216.

В седьмом параграфе подробно исследовано свойство согласованности для стационарных систем. Показано, что для систем с наблюдателем нельзя обобщить результат работы В. М. Попова[8] об эквивалентности свойств глобальной управляемости показателей Ляпунова стационарной системы (2) и вполне управляемости системы (1).

Восьмой параграф посвящен исследованию свойства глобальной управляемости показателей Ляпунова стационарных систем $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. Пусть A — сопровождающая матрица для многочлена $\sigma(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$, т. е.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Построим по матрице A матрицу $G = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i-1}J^*_{i-1} \in M_n$, $a_0 = 1$, где $J_p = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\alpha_{i,i+p} = 1$, $i = 1,\dots,n-p$ и $\alpha_{ij} = 0$ при $j - i \neq p$, $p \in \{0,\dots,n-1\}$,

$$G = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

Рассмотрим произвольную матрицу $D \in M_n$, имеющую блочный вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

где $F \in M_{n+1-k,k}$, $k \in \{1,\dots,n\}$.

Т е о р е м а 6. *Пусть A имеет вид* (11), *D имеет вид* (13) *и $\chi(A + D,\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_n$ — характеристический многочлен матрицы $A + D$. Тогда $\gamma_i = a_i - \operatorname{Sp} DJ_{i-1}G$ для всех $i = 1,\dots,n$.*

Отсюда вытекает теорема о глобальной управляемости показателей Ляпунова системы $\mathbb{A}$.

---

[8] *Popov V. M.* Hyperstabilitatea sistemelor automate. Editura Academiei Republicii Socialiste Romania. 1966. (Перевод с румынского: *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970. – 456 с.)

Т е о р е м а 7. *Пусть A имеет вид (11) и $C^*e_ie_j^*B = 0$ для всех $1 \leqslant j < i \leqslant n$. Тогда система $\mathbb{A} = (A, B, C)$ обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова в том и только том случае, если матрицы $C^*J_{i-1}GB$, $i = 1, \dots, n$ линейно независимы.*

Для системы $\mathbb{B} = (A_0, A_1, \dots, A_r)$ теорема о глобальной управляемости показателей Ляпунова формулируется следующим образом. Пусть A_0 имеет вид (11). Построим по матрице A_0 матрицу G. Далее построим матрицы

$$Q = [\operatorname{vec} J_0^*, \operatorname{vec} J_1^*, \dots, \operatorname{vec} J_{n-1}^*] \in M_{n^2,n}, \qquad P = G \otimes I^n \in M_{n^2},$$
$$R = [\operatorname{vec} A_1, \dots, \operatorname{vec} A_r] \in M_{n^2,r}, \qquad S = Q^*PR \in M_{n,r}.$$

Т е о р е м а 8. *Пусть A_0 имеет вид (11) и для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$ все матрицы A_l, $l = 1, \dots, r$ имеют вид (13). Тогда система $\mathbb{B}$ обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова в том и только том случае, если $\operatorname{rank} S = n$.*

В девятом параграфе рассматривается линейное управляемое стационарное уравнение n-го порядка с наблюдателем

$$\begin{aligned} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + a_2 z^{(n-2)} + \dots + a_n z &= \\ = \beta_{p1} v_1^{(n-p)} + \beta_{p+1,1} v_1^{(n-p-1)} + \dots + \beta_{n1} v_1 + \dots \\ + \beta_{pm} v_m^{(n-p)} + \dots + \beta_{nm} v_m, \quad z \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11} z + \dots + c_{p1} z^{(p-1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_k &= c_{1k} z + \dots + c_{pk} z^{(p-1)}, \end{aligned} \tag{15}$$

$v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — вектор наблюдения. Управление строится в виде $v = Vy$. По системе (14), (15) построим матрицы $A \in M_n$ вида (11), $G \in M_n$ вида (12) и матрицы $K \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$:

$$K = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \beta_{p1} & \dots & \beta_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nm} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Показано, что уравнение с наблюдателем (14), (15) эквивалентно стационарной управляемой матричной системе с наблюдателем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x, y, u) \in \mathbb{R}^{n+k+m}, \tag{16}$$

где $B = G^{-1}K$. Для системы (16) выполнены условия теоремы 7 о глобальной управляемости показателей. Отсюда получены условия приводимости уравнения с наблюдателем (14), (15) к наперед заданному линейному стационарному уравнению.

Т е о р е м а 9. *Линейная независимость матриц* $C^*J_{i-1}K$, $i = 1, \ldots, n$ *является необходимым и достаточным условием того, что для любого* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ *найдется матрица* $V \in M_{m,k}$ *такая, что замкнутая управлением* $v = Vy$ *система* (14), (15) *имеет вид*

$$z^{(n)} + \gamma_1 z^{(n-1)} + \cdots + \gamma_n z = 0.$$

Искомое управление выражается формулой

$$V = \left[\mathrm{vec}^{-1}\left(P(P^*P)^{-1}(a - \gamma)\right)\right]^*,$$

где $P = [\mathrm{vec}\, C^*J_0K, \ldots, \mathrm{vec}\, C^*J_{n-1}K] \in M_{mk,n}$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

В десятом параграфе изучается линейная система (1).

О п р е д е л е н и е 3. Система (1) называется **λ-приводимой**, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует ограниченное кусочно непрерывное управление $U_\lambda = U_\lambda(t)$, при котором замкнутая система $\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U_\lambda(t)\big)x$ асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = \big(A(t) + \lambda I\big)x$.

Т е о р е м а 10. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то она* λ*-приводима.*

Эта теорема была сформулирована и доказана в работе Е. К. Макарова и С. Н. Поповой[9] в предположении, что функция $A(\cdot)$ непрерывна, а $B(\cdot)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Здесь приведено более простое доказательство этой теоремы для произвольных ограниченных кусочно непрерывных матриц $A(\cdot)$, $B(\cdot)$.

С л е д с т в и е 1. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *найдется такое управление* $U = U(t)$, *что показатели Ляпунова замкнутой системы удовлетворяют равенствам* $\lambda_j(A + BU) = \lambda_j(A) + \lambda$ *при всех* $j \in \{1, \ldots, n\}$.

[9] *Макаров Е. К., Попова С. Н.* О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Изв. ВУЗов. Матем. – 1999. – № 2 (441).– С. 60–67.

С л е д с т в и е 2. *Если система* (1) *равномерно вполне управляема, то она обладает свойством глобальной управляемости верхнего центрального показателя*[10], *т. е. для любого* $\mu \in \mathbb{R}$ *найдется такое управление* $U = U(t)$, *что верхний центральный показатель* $\Omega(A+BU)$ *замкнутой системы удовлетворяет равенству* $\Omega(A+BU) = \mu$.

В случае равномерной полной управляемости системы (1) свойством глобальной управляемости обладают нижний центральный ω, а также верхний Ω^0 и нижний ω_0 особые показатели Результаты этого параграфа уточняют соответствующие результаты работы Е. Л. Тонкова[11], в которой показано, что для любого $\alpha > 0$ найдется управление $U = U(t)$, такое что верхний особый показатель замкнутой системы удовлетворяет неравенству $\Omega^0(A+BU) < -\alpha$ (в действительности этот показатель можно точно переместить в заданную точку).

В одиннадцатом параграфе доказана теорема о глобальной управляемости показателей Ляпунова системы (1) с кусочно постоянными матрицами для $n = 2$, и описана идея доказательства этой теоремы для произвольного n.

Пусть фиксировано разбиение $\mathbb{T} = \{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ множества $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, такое что $t_0 = 0$, $0 < \delta \leqslant t_i - t_{i-1} \leqslant L$ для некоторых δ, L и всех $i \in \mathbb{N}$. Обозначим $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i)$. Пусть задан конечный набор символов (или букв) σ_j, $j = 1, \ldots, N$, где символ — это пара матриц $\sigma_j = (A_j, B_j) \in M_n \times M_{n,m}$. Множество $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_N\}$ назовем алфавитом. Рассмотрим бесконечную последовательность букв — слово $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$, $\varphi_i \in \Sigma$, т. е. $\varphi_i = \sigma_{j_i}$, $j_i \in \{1, \ldots, N\}$. Конечный набор $(\varphi_{i_0+1}, \ldots, \varphi_{i_0+k})$ из k последовательно расположенных букв слова φ назовем слогом длины k. Будем предполагать, что существуют буква σ_{j_0} и число $r \in \mathbb{N}$, такие что в каждом слоге длины r встречается буква σ_{j_0}. Слово φ и разбиение $\mathbb{T}$ задают функцию $t \to \varphi(t) = \big(A(t)B(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $\varphi(t) = \varphi_i$, $t \in \Delta_i$, $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, функция $t \to \varphi(t)$ определяет систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \tag{17}$$

с матрицами коэффициентов, которые принимают постоянные значения (A_{j_i}, B_{j_i}) на промежутках $[t_{i-1}, t_i)$. Систему (17) с кусочно постоянными матрицами коэффициентов будем отождествлять со словом φ

[10] *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[11] *Тонков Е. Л.* Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 10. – С. 1804–1813.

(зависимость от разбиения $\mathbb{T}$ подчеркивать не будем, поскольку $\mathbb{T}$ фиксировано). Будем предполагать, что каждая пара $(A_j, B_j) \in \Sigma$ вполне управляема, т. е. $\operatorname{rank}(B_j, A_j B_j, \dots, A_j^{n-1} B_j) = n$ для всех $j = 1, \dots, N$.

Определение 4. Система φ **обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова**, если для любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ найдется ограниченная кусочно непрерывная функция $U : \mathbb{R}_+ \to M_{m,n}$, такая что показатели Ляпунова замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x \tag{18}$$

совпадают с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Теорема 11. *Пусть $n = 2$. Для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется такое управление $U = U(t)$, что система* (18) *асимптотически эквивалентна системе $\dot{y} = \Lambda y$, где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Теорема 12. *Пусть*

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Для любых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ и для любого $T > 0$ найдется ограниченное кусочно непрерывное управление $V : [0, T] \to M_{1,n}$, такое что для матрицы Коши $X_V(t, s)$ системы $\dot{x} = \big(A + bV(t)\big)x$ выполнено равенство

$$X_V(T, 0) = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}. \tag{19}$$

Показано, что для построения управления, обеспечивающего равенство (19) необходимо и достаточно построить функции $g_1, \dots, g_n \in KC^n([0, T], \mathbb{R})$, так чтобы матрица Вронского $W[g_1, \dots, g_n](t)$ для этих функций удовлетворяла соотношениям

$$W[g_1, \dots, g_n](0) = I, \quad W[g_1, \dots, g_n](T) = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\},$$
$$\det W[g_1, \dots, g_n](t) \geqslant \gamma > 0, \quad t \in [0, T].$$

В диссертации такие функции построены для $n = 2$.

Резюме. В работе доказаны:

а) теорема о локальной ляпуновской приводимости билинейной управляемой системы и вытекающие из нее следствия о локальной управляемости показателей Ляпунова;

б) теорема о глобальной управляемости показателей Ляпунова стационарной системы с наблюдателем;

в) теорема о λ-приводимости линейной управляемой системы и вытекающие из нее следствия о глобальной управляемости центральных и особых показателей;

г) теорема о глобальной управляемости показателей Ляпунова двумерных кусочно постоянных систем.

Публикация основных результатов

1. *Зайцев В.А.* Достижимость и локальная управляемость показателей Ляпунова систем со случайными параметрами // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. – Ижевск, 1998. – Вып. 2(13). – С. 71–88.

2. *Zaitsev V.A.* On Controllability of Ergodic System Lyapunov Exponents // Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization / A Proceedeengs volume from the IFAC Workshop (Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998). – 1999. – P. 223–226.

3. *Зайцев В.А., Тонков Е.Л.* Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Изв. ВУЗов. Математика. – 1999. –№ 2 (441).– С. 45–56.

4. *Зайцев В.А.* Управление показателями Ляпунова стационарных систем с наблюдателем // Тезисы докладов четвертой Российской университетско-академической научно-практической конференции. — Ижевск, 23–24 апреля 1999 г. – С. 33.

5. *Зайцев В.А.* Согласованность и управление показателями Ляпунова // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. – Ижевск, 1999. – Вып. 2(17). – С. 3–40.

6. *Зайцев В.А.* Об управлении показателями Ляпунова и о λ-приводимости // Вестник Удмуртского университета. – Ижевск, 2000. – № 1. – С. 35–44.