Известия Института математики и информатики. Ижевск. 1999. №2(17)

УДК 517.934

© **В.А. Зайцев**
vaz@ulm.uni.udm.ru

СОГЛАСОВАННОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА[1]

Ключевые слова: согласованность, стабилизация, показатели Ляпунова, управляемые системы.

Abstract. Consistency of the linear control system with the observer and of the bilinear control system is investigated. The relation between the consistency of the autonomous control system with the observer and the Lyapunov exponents global controllability of the system, which is closed-loop by the control linearly depending on the observer, is studied. The condition, which has provide the effective criterion of the global control over the Lyapunov exponents of the closed-loop system, is obtained.

Введение

Свойство согласованности для системы управления с наблюдателем

$$\dot{x} = A(f^t\omega)x + B(f^t\omega)u, \quad y = C^*(f^t\omega)x,$$
$$(t, x, y, u, \omega) \in \mathbb{R}^{1+n+k} \times U \times \Omega, \quad U \subset \mathbb{R}^m, \qquad (\mathcal{A})$$

заданной топологической динамической системой (Ω, f^t) (Ω — полное сепарабельное метрическое пространство, f^t — поток на Ω непрерывный по совокупности переменных $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega$), было введено в работе [1] и изучалось в работах [1–6] в связи с

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 97–01–00413, 99–01–00454) и конкурсным центром фундаментального естествознания (грант 97–0–1.9).

задачей управления показателями Ляпунова (в локальной и глобальной постановке). В частности, было показано, что в некритическом случае $0 \in \operatorname{int} U$ из равномерной согласованности системы $(\mathcal{A})$ (и интегральной разделенности невозмущенной системы $\dot{x} = A(f^t\omega)x$) следует локальная управляемость показателей Ляпунова системы $\dot{x} = (A(f^t\omega) + B(f^t\omega)UC^*(f^t\omega))x$ замкнутой управлением $u = Uy$ линейным по наблюдаемым параметрам. Далее, в работе [7] свойство согласованности было введено для билинейной системы

$$\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + u_1 A_1(f^t\omega)x + \cdots + u_r A_r(f^t\omega)x,$$

$$u = (u_1, \ldots, u_r) \in U \subset \mathbb{R}^r \tag{$\mathcal{B}$}$$

(система $(\mathcal{B})$ имеет более общий вид по сравнению с системой $(\mathcal{A})$), для нее доказано аналогичное утверждение. Кроме того, в работе [7] получены утверждения о локальной ляпуновской приводимости равномерно согласованных систем. В работе [8] изучается локальная управляемость показателей Ляпунова системы $(\mathcal{B})$ со случайными параметрами.

Здесь продолжается изучение свойств согласованных систем, получены новые критерии согласованности систем $(\mathcal{A})$ и $(\mathcal{B})$. Особое внимание уделено исследованию стационарных согласованных систем (начатому в [7]) в связи с задачей о глобальной управляемости показателей Ляпунова. В частном случае, когда A — матрица Фробениуса, а B и C имеют специальный вид, получен эффективный критерий глобальной управляемости показателей Ляпунова.

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$ ($*$ — операция транспонирования). Для удобства записи обозначаем вектор-столбцы латинскими буквами, а вектор-строки греческими. Будем отождествлять пространство $M_{n,m}$ линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ с пространством $n{\times}m$-матриц (если $n = m$, то пишем M_n); $|A| = \max\{|Ax| \colon |x| = 1\}$ — норма в $M_{n,m}$. Пусть далее $I^n \in M_n$ — единичная матрица, $e^n_k \in \mathbb{R}^n$ — k-й столбец единичной матрицы I^n, $E^n_{ij} \doteq e^n_i (e^n_j)^* \in M_n$. Матрицу $J^n_p = \{\gamma_{ij}\}^n_{i,j=1} \in M_n$, где $\gamma_{i,i+p} = 1$, $i = 1, \ldots, n-p$ и $\gamma_{ij} = 0$ при $j - i \neq p$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$ будем называть *p-м единичным косым рядом* порядка n (см. [9, с.14]). Очевидно, $J^n_0 = I^n$. Будем полагать $J^n_p = 0$ при $p \geqslant n$. В таком случае $J^n_p J^n_q = J^n_{p+q}$, $p, q \geqslant 0$. Мы будем опускать верхний индекс n в вышеприведенных обозначениях, если будет понятно, о каком пространстве идет речь.

Введем в рассмотрение отображение $\operatorname{vec} \colon M_{n,m} \to \mathbb{R}^{nm}$, которое ґразворачиваетЄ матрицу $H = \{h_{ij}\}$ $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ по строкам в вектор-столбец

$$\operatorname{vec} H \doteq \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nm}).$$

Нетрудно проверить, что для любых $L \in M_{m,n}$, $A \in M_{n,k}$, $N \in M_{k,l}$ равенство $B = LA$ эквивалентно $\operatorname{vec} B = (L \otimes I^k) \operatorname{vec} A$; $C = AN$ эквивалентно $\operatorname{vec} C = (I^n \otimes N^*) \operatorname{vec} A$; $D = LAN$ эквивалентно $\operatorname{vec} D = (L \otimes N^*) \operatorname{vec} A$. Здесь $\otimes$ — прямое (кронекерово) произведение матриц [10, с.235]. Отметим также, что для матриц $A, B \in M_{n,m}$ выполнено равенство $\operatorname{Sp} A^* B = (\operatorname{vec} A)^* \operatorname{vec} B$ (Sp — след матрицы). Обозначим через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ линейную оболочку элементов $a_1, \ldots, a_n$. Характеристический многочлен матрицы A обозначим $\chi(A; \lambda)$ (для простоты записи будем опускать аргумент λ).

Всюду далее неравенство $V_2 \geqslant V_1$ $(V_2 > V_1)$ между симметричными $n \times n$-матрицами V_1 и V_2 понимается в смысле квадратичной формы $x^*(V_2 - V_1)x \geqslant 0$ (соответственно $x^*(V_2 - V_1)x > 0$) для любого ненулевого $x \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R}^{1+n+m}, \tag{1.1}$$

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^k \tag{1.2}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными на $\mathbb{R}$ матрицами $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$. Формируя управление $u = Uy$ линейным по наблюдаемым параметрам, мы придем к замкнутой системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)UC^*(t))x. \tag{1.3}$$

Систему с наблюдателем (1.1), (1.2) будем отождествлять с функцией $\mathbb{A} \doteq (A, B, C)\colon \mathbb{R} \to M_{n,n+m+k}$.

Введем в рассмотрение билинейную систему

$$\dot{x} = A_0(t)x + u_1 A_1(t)x + \dots + u_r A_r(t)x, \quad u_i \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными матрицами A_i. Отождествим ее с функцией $\mathbb{B} \doteq (A_0, A_1, \dots, A_r)\colon \mathbb{R} \to M_{n,n(r+1)}$. Система (1.3) является частным случаем системы (1.4). Действительно, если $B(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))$, $C(t) = (c_1(t), \dots, c_k(t))$, $b_i(t), c_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $U = \{u_{ij}\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$, то

$$\begin{aligned} B(t)UC^*(t) = u_{11}b_1(t)c_1^*(t) + u_{12}b_1(t)c_2^*(t) + \dots + u_{1k}b_1(t)c_k^*(t) + \dots \\ + u_{m1}b_m(t)c_1^*(t) + \dots + u_{mk}b_m(t)c_k^*(t). \end{aligned}$$

Таким образом, если мы положим $r \doteq mk$,

$$\begin{aligned} A_0(t) \doteq A(t),\ A_1(t) \doteq b_1(t)c_1^*(t), \dots, A_k(t) \doteq b_1(t)c_k^*(t), \dots, \\ A_{r-k+1}(t) \doteq b_m(t)c_1^*(t), \dots, A_r(t) \doteq b_m(t)c_k^*(t), \end{aligned} \tag{1.5}$$

то тем самым мы каждой системе $\mathbb{A}$ поставим в соответствие систему $\mathbb{B}$ (здесь матричному управлению $U = \{u_{ij}\}$ отвечает векторное управление $u \doteq (u_1, \dots, u_r) = \operatorname{vec} U$). В таком случае будем говорить, что система $\mathbb{B}$ имеет вид (1.5).

Обозначим через $X(t, s)$ матрицу Коши системы

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.6}$$

а через $X_0(t, s)$ матрицу Коши системы $\dot{x} = A_0(t)x$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Система $\mathbb{A}$ называется согласованной [1] на $[\tau, \tau+\vartheta]$, если существует $\beta > 0$ такое, что для любой матрицы $P \in M_n$ найдется измеримое управление $U_P\colon [\tau, \tau+\vartheta] \to M_{m,k}$ такое, что матричная краевая задача

$$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)UC^*(t)X(t,\tau), \tag{1.7}$$

$$Z(\tau) = 0, \qquad Z(\tau+\vartheta) = P$$

при $U = U_P(t)$ разрешима относительно $Z(\cdot)$ и выполнено неравенство $|U_P(t)| \leqslant \beta|P|$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Система $\mathbb{B}$ называется согласованной [7] на $[\tau, \tau+\vartheta]$, если существует $\beta > 0$ такое, что для любой матрицы $P \in M_n$ найдется измеримое управление $u_P = (u_1, \ldots, u_r)\colon [\tau, \tau+\vartheta] \to \mathbb{R}^r$, что матричная краевая задача

$$\dot{Z} = A_0(t)Z + (u_1A_1(t) + \cdots + u_rA_r(t))X_0(t,\tau), \tag{1.8}$$

$$Z(\tau) = 0, \qquad Z(\tau+\vartheta) = P$$

при $u = u_P(t)$ разрешима относительно $Z(\cdot)$ и выполнено неравенство $|u_P(t)| \leqslant \beta|P|$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$.

Эти определения фактически означают, что множество достижимости уравнения (1.7) (или (1.8)) из нуля в момент времени τ за время ϑ совпадает со всем пространством M_n. Очевидно, что когда $\mathbb{B}$ имеет вид (1.5), то эти определения эквивалентны.

2. Согласованные системы

Здесь приводятся основные свойства согласованных систем. Некоторые утверждения доказаны в работах [1, 7, 5].

Введем в рассмотрение матрицы $\widehat{B}(t) = X(\tau,t)B(t) \in M_{n,m}$, $\widehat{C}(t) = X^*(t,\tau)C(t) \in M_{n,k}$. Построим матрицу

$$\Gamma(\vartheta) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} \Big(\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)\Big) \otimes \Big(\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t)\Big)\, dt \in M_{n^2},$$

которую будем называть *матрицей согласования* (системы $\mathbb{A}$ на $[\tau, \tau+\vartheta]$). Для системы $\mathbb{B}$ матрица согласования строится следующим образом. Рассмотрим матрицы

$$\widehat{A}_l(t) = X_0(\tau, t) A_l(t) X_0(t, \tau), \quad l = 1, \ldots, r.$$

Положим $Q(t) \doteq (\operatorname{vec} \widehat{A}_1(t), \ldots, \operatorname{vec} \widehat{A}_r(t)) \in M_{n^2, r}$, тогда матрица согласования системы $\mathbb{B}$ есть $\Gamma_0(\vartheta) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} Q(t) Q^*(t)\, dt \in M_{n^2}$. Ясно, что если $\mathbb{B}$ имеет вид (1.5), то матрицы согласования систем $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ совпадают.

Матрица согласования — это аналог матрицы управляемости системы (1.1), которая имеет вид $W(\vartheta) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} \widehat{B}(t) \widehat{B}^*(t)\, dt$. Для управляемой системы (1.1) выполнено следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Следующие свойства эквивалентны:*

$a)$ *система* (1.1) *вполне управляема* [11, с.138] *на* $[\tau, \tau+\vartheta]$;

$b)$ $W(\vartheta) > 0$;

$c)$ *строки матрицы* $\widehat{B}(t)$ *линейно независимы на* $[\tau, \tau+\vartheta]$.

Аналогичные утверждения имеют место для согласованных систем.

У т в е р ж д е н и е 2.2 (см. [1]). *Следующие свойства эквивалентны:*

$a)$ *система* $\mathbb{A}$ *согласованна на* $[\tau, \tau+\vartheta]$;

$b)$ $\Gamma(\vartheta) > 0$;

$c)$ *строки матрицы* $\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)$ *линейно независимы на* $[\tau, \tau+\vartheta]$.

У т в е р ж д е н и е 2.3 (см. [7]). *Следующие свойства эквивалентны:*

$a)$ *система* $\mathbb{B}$ *согласованна на* $[\tau, \tau+\vartheta]$;

$b)$ $\Gamma_0(\vartheta) > 0$;

$c)$ *строки матрицы* $Q(t)$ *линейно независимы на* $[\tau, \tau+\vartheta]$.

Здесь также, когда $\mathbb{B}$ имеет вид (1.5), утверждения 2.2 и 2.3 совпадают.

У т в е р ж д е н и е 2.4. *Система $\mathbb{A}$ не является согласованной (на $[\tau, \tau + \vartheta]$) тогда и только тогда, когда существует ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что*

$$C^*(t)X(t,\tau)HX(\tau,t)B(t) \equiv 0, \quad t \in [\tau, \tau + \vartheta].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система $\mathbb{A}$ не является согласованной в том и только в том случае, когда строки матрицы $\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)$ линейно зависимы на $[\tau, \tau + \vartheta]$ (см. утверждение 2.2), т.е. существует ненулевой вектор

$$h = \mathrm{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$$

такой, что $h^*(\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)) = 0$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$. Это эквивалентно равенству $(\widehat{B}^*(t) \otimes \widehat{C}^*(t))h = 0$. Пусть $H^* = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in M_n$ — это прообраз вектора h при отображении vec, т.е. $\mathrm{vec}\, H^* = h$, тогда

$$\begin{aligned}0 = (\widehat{B}^*(t) \otimes \widehat{C}^*(t))\, \mathrm{vec}\, H^* = \mathrm{vec}(\widehat{B}^*(t)H^*\widehat{C}(t)) = \\ = \mathrm{vec}(C^*(t)X(t,\tau)HX(\tau,t)B(t))^*, \quad t \in [\tau, \tau + \vartheta],\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

У т в е р ж д е н и е 2.5. *Система $\mathbb{B}$ не является согласованной (на $[\tau, \tau + \vartheta]$) тогда и только тогда, когда существует ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что для всех $l = 1, \ldots, r$ выполнено*

$$\mathrm{Sp}(HX_0(\tau,t)A_l(t)X_0(t,\tau)) \equiv 0, \quad t \in [\tau, \tau + \vartheta].$$

Доказательство утверждения 2.5 аналогично доказательству утверждения 2.4.

Л е м м а 2.1. *Строки матрицы $\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)$ линейно зависимы на $[\tau, \tau + \vartheta]$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $\widehat{C}(t) \otimes \widehat{B}(t)$ линейно зависимы на $[\tau, \tau + \vartheta]$.*

Доказательство. $(\operatorname{vec} H)^*(\widehat{B}(t) \otimes \widehat{C}(t)) = 0 \Leftrightarrow (\widehat{B}^*(t) \otimes \widehat{C}^*(t))(\operatorname{vec} H) = 0 \Leftrightarrow (\widehat{B}^*(t) H \widehat{C}(t)) = 0 \Leftrightarrow (\widehat{C}^*(t) H^* \widehat{B}(t)) = 0 \Leftrightarrow (\widehat{C}^*(t) \otimes \widehat{B}^*(t))(\operatorname{vec} H^*) = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{vec} H^*)^*(\widehat{C}(t) \otimes \widehat{B}(t)) = 0.$

Теперь мы можем сформулировать теорему, которая наглядно иллюстрирует связь согласованности системы $\mathbb{A}$ с управляемостью и наблюдаемостью и определяет соотношения двойственности между сопряженными системами.

Теорема 2.1. *Рассмотрим следующие утверждения:*

(a) *система* (A, B, C) *согласованна (на* $[\tau, \tau + \vartheta]$*);*

(b) $\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} (\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t)) \otimes (\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t))\, dt > 0;$

(c) $\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} (\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t)) \otimes (\widehat{B}(t)\widehat{B}^*(t))\, dt > 0;$

(d) *система* $(-A^*, C, B)$ *согласованна (на* $[\tau, \tau + \vartheta]$*);*

(e) *система* (1.1) *вполне управляема (на* $[\tau, \tau + \vartheta]$*);*

(f) *система* (1.6), (1.2) *вполне наблюдаема (на* $[\tau, \tau + \vartheta]$*);*

(g) *система* $\dot{x} = -A^*(t)x + C(t)u$ *вполне управляема (на* $[\tau, \tau + \vartheta]$*);*

(h) *система* $\dot{x} = -A^*(t)x, \quad y = B^*(t)x$ *вполне наблюдаема (на* $[\tau, \tau + \vartheta]$*).*

Имеет место следующая цепочка импликаций:

$(h) \Leftrightarrow (e) \Leftarrow (a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Rightarrow (f) \Leftrightarrow (g).$

Доказательство. Из утверждения 2.2 следует, что $(a) \Leftrightarrow (b)$ и $(c) \Leftrightarrow (d)$. Из утверждения 2.2 и леммы 2.1 следует $(b) \Leftrightarrow (c)$. Далее, полная наблюдаемость системы (1.6), (1.2) эквивалентна тому, что $\widetilde{W}(\vartheta) \doteq \int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} (\widehat{C}(t)\widehat{C}^*(t))\, dt > 0$. Соотношения $(f) \Leftrightarrow (g)$ и $(e) \Leftrightarrow (h)$ — это известные соотношения двойственности между сопряженными управляемыми и наблюдаемыми системами (см., например, [11, с.304]). Остается показать, что из $\Gamma(\vartheta) > 0$ следуют неравенства $W(\vartheta) > 0$ и $\widetilde{W}(\vartheta) > 0$. Покажем, что $\Gamma(\vartheta) > 0 \Rightarrow W(\vartheta) > 0$ (вторая импликация доказывается аналогично). Допустим, что система (1.1) не является вполне управляемой на $[\tau, \tau+\vartheta]$, т.е. найдется ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что $h^* X(\tau, t) B(t) \equiv 0$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$. Пусть $H = hh^*$, тогда $C^*(t) X(t, \tau) H X(\tau, t) B(t) = C^*(t) X(t, \tau) hh^* X(\tau, t) B(t) \equiv 0$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, $H \neq 0$. Отсюда следует, что система $\mathbb{A}$ не является согласованной. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Одновременно выполненные условия полной управляемости системы (1.1) и полной наблюдаемости системы (1.6), (1.2) не обеспечивают согласованность системы $\mathbb{A}$. В качестве примера рассмотрим стационарную систему второго порядка: $A = J_1^2 \in M_2$, $B = e_2^2 \in M_{2,1}$, $C = e_1^2 \in M_{2,1}$. Эта система является вполне управляемой (т.к. $\operatorname{rank}[B, AB] = 2$) и вполне наблюдаемой ($\operatorname{rank}[C, A^*C] = 2$), но не является согласованной (позднее мы это покажем). Однако если мы дополнительно потребуем, чтобы какая-нибудь из матриц $B(t)$ или $C(t)$ имела ранг равный n, то согласованность будет иметь место. А именно, справедлива следующая

Т е о р е м а 2.2. *Если система* (1.1) *вполне управляема на* $[\tau, \tau + \vartheta]$ *и* $\det C(t) C^*(t) \geqslant \alpha > 0$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$ *или если система* (1.6), (1.2) *вполне наблюдаема на* $[\tau, \tau + \vartheta]$ *и* $\det B(t) B^*(t) \geqslant \alpha > 0$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, *то система* $\mathbb{A}$ *согласованна на* $[\tau, \tau + \vartheta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первую часть утверждения (вторая часть будет следовать из теоремы двойственности 2.1). Мы имеем $C(t) \in M_{n,k}$, $C(t) C^*(t) \in M_n$. Если $k < n$, то $\operatorname{rank} C(t) C^*(t) \leqslant \operatorname{rank} C(t) \leqslant k < n$, поэтому $\det C(t) C^*(t) = 0$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$. Следовательно, $k \geqslant n$ и $\operatorname{rank} C(t) = n$, $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$. Далее, поскольку определитель отделен от нуля, существует ограниченная обратная матрица $C_1(t) = \big(C(t) C^*(t)\big)^{-1} \in M_n$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$ (определитель которой также отделен от нуля в силу ограниченности $C(t)$). Положим $C_2(t) = C^*(t) C_1(t)$. Тогда $C(t) C_2(t) = I^n$. Предположим теперь, что система $\mathbb{A}$ не является согласованной, тогда найдется ненулевая матрица $H \in M_n$

такая, что $C^*(t)X(t,\tau)HX(\tau,t)B(t) \equiv 0,\ \ t \in [\tau, \tau+\vartheta]$. Поэтому

$$HX(\tau,t)B(t) = X(\tau,t)C_2^*(t)C^*(t)X(t,\tau)HX(\tau,t)B(t) \equiv 0.$$

Поскольку матрица H ненулевая, то существует ненулевая строка $\xi \in \mathbb{R}^{n*}$ матрицы H такая, что $\xi X(\tau,t)B(t) \equiv 0$. Отсюда следует, что система (1.1) не является вполне управляемой.

З а м е ч а н и е 2.2. На самом деле условие отделенности определителя матрицы $C(t)C^*(t)$ (или $B(t)B^*(t)$) от нуля в случае непрерывной матрицы $C(t)$ ($B(t)$) эквивалентно тому, что ранг матрицы $C(t)$ (соответственно $B(t)$) равен n. Из теоремы 2.2, в частности, вытекает, что если $C = I$, т.е. наблюдению доступны все фазовые координаты, то свойства полной управляемости и согласованности совпадают. Однако для кусочно-непрерывных матриц $C(t)$ из условия $\operatorname{rank} C(t) = n$ для всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$, вообще говоря, не следует, что определитель матрицы $C(t)C^*(t)$ отделен от нуля.

Каждой системе $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ поставим в соответствие так называемую ґбольшую системуЄ [4, 5, 7]

$$\dot z = F(t)z + G(t)v, \quad z \in \mathbb{R}^{n^2}, \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} F(t) = A(t) \otimes I^n - I^n \otimes A^*(t) \in M_{n^2}, \\ G(t) = B(t) \otimes C(t) \in M_{n^2,mk},\ v \in \mathbb{R}^{mk}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} F(t) = A_0(t) \otimes I^n - I^n \otimes A_0^*(t) \in M_{n^2}, \\ G(t) = (\operatorname{vec} A_1(t), \ldots, \operatorname{vec} A_r(t)) \in M_{n^2,r},\ v \in \mathbb{R}^r, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где (2.1), (2.2) отвечает системе $\mathbb{A}$, а (2.1), (2.3) — системе $\mathbb{B}$.

Т е о р е м а 2.3 ([5]). *Система $\mathbb{A}$ согласованна тогда и только тогда, когда система (2.1), (2.2) вполне управляема.*

Т е о р е м а 2.4 ([7]). *Система* $\mathbb{B}$ *согласованна тогда и только тогда, когда система* (2.1), (2.3) *вполне управляема.*

Идея доказательства этих утверждений проста: если построить матрицу управляемости большой системы (2.1), (2.2) (или (2.1), (2.3)), то она будет совпадать с матрицей согласования системы $\mathbb{A}$ (соответственно $\mathbb{B}$). Здесь эти утверждения также совпадают, если $\mathbb{B}$ имеет вид (1.5).

Теперь мы приведем достаточное условие согласованности системы $\mathbb{B}$ (для системы $\mathbb{A}$ достаточное условие получится, если записать $\mathbb{B}$ в виде (1.5)). Будем считать, что матрицы $A_l(t)$, $l = 0, \ldots, r$ имеют непрерывные производные до $n^2 - 1$ -го порядка включительно в окрестности некоторой точки $t_0 \in [\tau, \tau + \vartheta]$. Рассмотрим матрицы $L_0^l(t) \doteq A_l(t)$, $L_\nu^l(t) = A_0(t)L_{\nu-1}^l(t) - L_{\nu-1}^l(t)A_0(t) - \dfrac{d}{dt}L_{\nu-1}^l(t)$, $l = 1, \ldots, r$, $\nu = 1, \ldots, n^2 - 1$.

Т е о р е м а 2.5. *Если существует точка* $t_0 \in [\tau, \tau + \vartheta]$ *такая, что* $\langle L_\nu^l(t_0),\ l = 1, \ldots, r,\ \nu = 0, \ldots, n^2 - 1\rangle = M_n$, *то система* $\mathbb{B}$ *является согласованной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к матрицам $L_\nu^l(t)$ отображение vec и построим матрицы

$$\widehat{L}_\nu(t) = (\operatorname{vec} L_\nu^1(t), \ldots, \operatorname{vec} L_\nu^r(t)) \in M_{n^2,r}, \quad \nu = 0, \ldots, n^2 - 1.$$

Тогда $\widehat{L}_0(t) = G(t)$, $\widehat{L}_\nu(t) = F(t)\widehat{L}_{\nu-1}(t) - \dfrac{d}{dt}\widehat{L}_{\nu-1}(t)$, $\nu = 1, \ldots, n^2 - 1$, где $F(t)$ и $G(t)$ определены равенством (2.3), и ранг матрицы $\left(\widehat{L}_0(t), \ldots, \widehat{L}_{n^2-1}(t)\right)$ в точке $t = t_0$ равен n^2. В этом случае (см. [11, с.148]) система (2.1), (2.3) вполне управляема, что эквивалентно согласованности $\mathbb{B}$. Теорема доказана.

Наконец, мы приведем еще два критерия согласованности систем $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. Первый критерий связывает свойство согласованности исходной системы со свойством невырожденности некоторой двухточечной матричной краевой задачи. Второй критерий выражен в терминах существования матрицы $V(t)$, удовлетворяющей некоторому дифференциальному неравенству. Таким образом, выбирая различные конкретные значения матрицы $V(t)$, мы можем получать новые эффективные достаточные условия согласованности рассматриваемой системы.

Т е о р е м а 2.6. *Следующие свойства эквивалентны:*

1) *система* $\mathbb{A}$ *согласованна на* $[\tau,\tau+\vartheta]$;

2) *матричная краевая задача*

$$\dot{X}=A(t)X-XA(t)+B(t)B^*(t)YC(t)C^*(t),\ X(\tau)=0,$$

$$\dot{Y}=YA^*(t)-A^*(t)Y,\quad X,Y\in M_n,\quad X(\tau+\vartheta)=0$$

имеет лишь тривиальное решение;

3) *существует симметричная, абсолютно непрерывная на* $[\tau,\tau+\vartheta]$ $n^2\times n^2$*-матрица* $V(t)$ *такая, что* $V(\tau+\vartheta)>0$, $V(\tau)\leqslant 0$ *и при почти всех* $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$ *выполнено неравенство* $(LV)(t)\leqslant (B(t)B^*(t))\otimes(C(t)C^*(t))$, *где*

$$(LV)(t)=\frac{d}{dt}V(t)-(A(t)\otimes I^n-I^n\otimes A^*(t))\,V(t)-\\ V(t)\,(A^*(t)\otimes I^n-I^n\otimes A(t))\,.$$

Т е о р е м а 2.7. *Следующие свойства эквивалентны:*

1) *система* $\mathbb{B}$ *согласованна на* $[\tau,\tau+\vartheta]$;

2) *матричная краевая задача*

$$\dot{X}=A_0(t)X-XA_0(t)+\sum_{l=1}^{r}A_l(t)\cdot\mathrm{Sp}(A_l^*(t)Y),\ X(\tau)=0,$$

$$\dot{Y}=YA_0^*(t)-A_0^*(t)Y,\quad X,Y\in M_n,\quad X(\tau+\vartheta)=0$$

имеет лишь тривиальное решение;

3) *существует симметричная, абсолютно непрерывная на* $[\tau,\tau+\vartheta]$ $n^2\times n^2$*-матрица* $V(t)$ *такая, что* $V(\tau+\vartheta)>0$,

$V(\tau) \leqslant 0$ *и при почти всех* $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ *выполнено неравенство* $(LV)(t) \leqslant G(t)G^*(t)$, *где* $G(t)$ *определена равенством* (2.3), *а*

$$(LV)(t) = \frac{d}{dt}V(t) - (A_0(t) \otimes I^n - I^n \otimes A_0^*(t))\, V(t) - \\ V(t)\,(A_0^*(t) \otimes I^n - I^n \otimes A_0(t)) \, .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем теорему 2.7. Согласованность системы $\mathbb{B}$ равносильна полной управляемости большой системы (2.1), (2.3). В [12] показано, что следующие свойства эквивалентны:

$a)$ система (F, G) вполне управляема на $[\tau, \tau+\vartheta]$;

$b)$ краевая задача

$$\dot z_1 = F(t) z_1 + G(t)G^*(t) z_2, \quad z_1(\tau) = 0,$$

$$\dot z_2 = -F^*(t) z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n^2}, \quad z_1(\tau+\vartheta) = 0$$

имеет лишь тривиальное решение;

$c)$ существует симметричная, абсолютно непрерывная на отрезке $[\tau, \tau+\vartheta]$ $n^2 \times n^2$-матрица $V(t)$ такая, что $V(\tau) \leqslant 0$, $V(\tau+\vartheta) > 0$ и при почти всех $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ выполнено неравенство $(LV)(t) \leqslant G(t)G^*(t)$, где $(LV)(t) = \dfrac{d}{dt}V(t) - F(t)V(t) - V(t)F^*(t)$.

Таким образом, утверждения $c)$ и 3) совпадают. Далее, если мы применим к векторам $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n^2}$ отображение vec^{-1}, так что $\mathrm{vec}^{-1} z_1 = X \in M_n$, $\mathrm{vec}^{-1} z_2 = Y \in M_n$, то с учетом структуры матриц $F(t)$ и $G(t)$ и свойств прямого произведения и отображения vec мы получим утверждение 2). Теорема 2.7 доказана. Теорема 2.6 следует из теоремы 2.7, если $\mathbb{B}$ имеет вид (1.5).

3. Согласованность стационарных систем

С этого момента будем считать, что системы (1.1), (1.2) и (1.4) стационарны, т.е. матрицы A, B, C, A_l, $l = 0, \ldots, r$, и управляющие воздействия являются постоянными. Систему (1.1), (1.2) отождествляем с матрицей $\mathbb{A} = (A, B, C) \in M_{n,n+m+k}$, систему (1.4) с матрицей $\mathbb{B} = (A_0, A_1, \ldots, A_r) \in M_{n,n(r+1)}$.

О п р е д е л е н и е 3.1. *Система* $\mathbb{A}$ *обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова*, если для любого вектора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u = Uy$ такое, что показатели Ляпунова замкнутой системы $\dot{x} = (A + BUC^*)x$ совпадают с $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Показатели Ляпунова стационарной системы $\dot{x} = Px$ — это вещественные части собственных значений матрицы P. В связи с этим можно дать более общее определение управляемости показателей.

О п р е д е л е н и е 3.2. *Система* $\mathbb{A}$ *обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова*, если для любого заданного многочлена n-й степени $\sigma(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_n$ с вещественными коэффициентами γ_i, $i = 1, \ldots, n$ найдется матрица U такая, что характеристический многочлен матрицы $A + BUC^*$ совпадает с $\sigma(\lambda)$.

Мы, говоря об управлении показателями, будем пользоваться определением 3.2. Рассмотрим систему $\mathbb{A} = (A, B, C)$, где $C = I$, т.е. предположим, что наблюдению доступны все координаты фазового вектора и управление строится по принципу линейной обратной связи $u = Ux$. Таким образом, мы приходим к замкнутой системе

$$\dot{x} = (A + BU)x. \tag{3.1}$$

Система (1.1) вполне управляема в том и только в том случае, когда показатели Ляпунова системы (3.1) глобально управляемы (в [13] предложен алгоритм построения управления, которое переводит показатели в заданные точки). Поскольку понятие согласованности системы $\mathbb{A}$ является обобщением понятия полной управляемости для систем с наблюдателем (эти свойства совпадают, когда $C = I$), то естественно предположить, что система $\mathbb{A}$ согласованна тогда и только тогда, когда она обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова. Выяснению этого факта и будет посвящено дальнейшее повествование.

Мы будем отождествлять систему (1.1) с парой (A, B), а систему (1.6), (1.2) с парой (A, C).

З а м е ч а н и е 3.1. Можно считать, что матрицы A_l, $l = 1, \dots, r$ системы $\mathbb{B}$ линейно независимы. Действительно, если $\widetilde{A}_l$, $l = 1, \dots, r_1$, $r_1 \leqslant r$ — это набор матриц, полученный из набора A_l, $l = 1, \dots, r$ выкидыванием линейно зависимых матриц, то множества допустимых значений матриц $u_1 A_1 + \dots + u_r A_r$ и $\widetilde{u}_1 \widetilde{A}_1 + \dots + \widetilde{u}_{r_1} \widetilde{A}_{r_1}$, $u_i, \widetilde{u}_i \in \mathbb{R}$ совпадают и равны $\langle A_1, \dots, A_r \rangle = \langle \widetilde{A}_1, \dots, \widetilde{A}_{r_1} \rangle$. Аналогично можно считать, что матрицы B и C системы $\mathbb{A}$ имеют полный ранг. Заметим также, что свойства системы $\mathbb{B}$ не меняются от перестановки матриц A_l (а свойства системы $\mathbb{A}$ не меняются от перестановки столбцов в матрицах B и C).

Построим по системе $\mathbb{B}$ матрицы $L_0^l = A_l$, $L_\nu^l = [A_0, L_{\nu-1}^l] \doteq A_0 L_{\nu-1}^l - L_{\nu-1}^l A_0$, $\nu = 1, \dots, n^2 - 1$ (здесь $[A, B]$ — коммутатор матриц A и B).

Т е о р е м а 3.1. *Система $\mathbb{B}$ согласованна на $[\tau, \tau + \vartheta]$ в том и только том случае, если имеет место равенство $\langle L_\nu^l,\ l = 1, \dots, r,\ \nu = 0, \dots, n^2 - 1 \rangle = M_n$.*

Доказательство этой теоремы см. в [7]. Аналогичное утверждение можно получить для системы $\mathbb{A}$, если записать $\mathbb{B}$ в виде (1.5). Мы не будем его здесь формулировать, оно слишком громоздко и неудобно для пользования. Проще перейти к системе $\mathbb{B}$ и использовать вышеупомянутый критерий. В конце концов для проверки согласованности нам всегда приходится переходить к большой системе (F, G) и проверять условие $\operatorname{rank}[G, FG, \dots, F^{n^2-1} G] = n^2$, которое является необходимым и достаточным (см. теоремы 2.3 и 2.4). Отметим, что из теоремы 3.1 следует, что свойство согласованности стационарной системы является равномерным на $\mathbb{R}$, т.е. если стационарная система согласованна на каком-либо отрезке, то она согласованна на любом другом отрезке. Поэтому в дальнейшем мы не будем указывать отрезок согласованности.

Т е о р е м а 3.2. *Следующие свойства эквивалентны:*

(a) *система* $\mathbb{B}$ *согласованна;*

(b) *тождество* $\mathrm{Sp}\left(He^{-A_0t}A_le^{A_0t}\right) \equiv 0, \;\; t \in [0,\vartheta]$ *для всех* $l = 1,\dots,r$ *возможно только при* $H = 0 \in M_n$*;*

(c) *не существует ненулевой матрицы* $H \in M_n$ *такой, что* $\mathrm{Sp}(HL^l_\nu) = 0$ *для всех* $l = 1,\dots,r, \;\; \nu = 0,\dots,n^2-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменой $t+\tau \to t$ в утверждении 2.5 получаем соотношение $(a) \Leftrightarrow (b)$. Утверждение $(a) \Leftrightarrow (c)$ — это теорема 3.1.

Т е о р е м а 3.3. *Следующие свойства эквивалентны:*

(a) *система* $\mathbb{A}$ *согласованна;*

(b) *тождество* $C^*e^{At}He^{-At}B \equiv 0, \;\; t \in [0,\vartheta]$ *возможно только при* $H = 0 \in M_n$*;*

(c) *выполнение равенств* $C^*N_\nu B = 0, \;\; \nu = 0,\dots,n^2-1$, *где* $N_0 = H, \;\; N_\nu = [A, N_{\nu-1}]$ *возможно, только если* $H = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменой $t+\tau \to t$ в утверждении 2.4 получаем соотношение $(a) \Leftrightarrow (b)$. Докажем импликацию $(c) \Rightarrow (b)$. Допустим, что (b) не выполнено, т.е. существует матрица $H \neq 0$ такая, что

$$C^*e^{At}He^{-At}B \equiv 0, \quad t \in [0,\vartheta]. \tag{3.2}$$

При $t = 0$ имеем $C^*HB = 0$. Дифференцируя тождество (3.2) n^2-1 раз в точке $t=0$, получим $C^*N_\nu B = 0, \;\; \nu = 1,\dots,n^2-1$, что противоречит свойству (c).

Докажем импликацию $(b) \Rightarrow (c)$. Допустим, что (c) не выполнено, т.е. существует ненулевая матрица $H \in M_n$ такая, что $C^*N_\nu B = 0, \;\; \nu = 0,\dots,n^2-1$. Если матрицы $N_0,\dots,N_{n^2-1}$ линейно независимы, то $N_\nu \in \langle N_0,\dots,N_{n^2-1}\rangle = M_n$ для любого $\nu \geqslant n^2$. Если найдется номер $l_0 \in \{1,\dots,n^2-1\}$ такой, что матрицы $N_0,\dots,N_{l_0-1}$ линейно независимы, а $N_{l_0} \in \mathfrak{N} \doteq \langle N_0,\dots,N_{l_0-1}\rangle$, то легко видеть, что $N_\nu \in \mathfrak{N}$ для всех $\nu \geqslant l_0$.

Отсюда следует, что $C^* N_\nu B = 0$ для всех $\nu = 0, 1, \dots$ и

$$0 \equiv C^* H B + C^*(AH - HA)Bt + \\ + C^*(A^2H - 2AHA + HA^2)B \cdot \frac{1}{2!}t^2 + \dots = \\ = C^*(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots)H(I - At + \frac{1}{2!}A^2t^2 - \dots)B = \\ = C^* e^{At} H e^{-At} B.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.2. Равенства $C^* N_\nu B = 0$ эквивалентны равенствам $C^* \widetilde{N}_\nu B = 0$, где $\widetilde{N}_0 = H$, $\widetilde{N}_\nu = [\widetilde{N}_{\nu-1}, A] = [-A, \widetilde{N}_{\nu-1}]$. Поэтому согласованность системы $\mathbb{A} = (A, B, C)$ эквивалентна согласованности системы $(-A, B, C)$ (аналогично система $\mathbb{B} = (A_0, A_1, \dots, A_r)$ согласованна тогда и только тогда, когда согласованна система $(-A_0, A_1, \dots, A_r)$).

С л е д с т в и е 3.1. *Если система $\mathbb{B} = (A_0, \dots, A_r)$ согласованна, то для любой невырожденной матрицы $S \in M_n$ система $\widetilde{\mathbb{B}} \doteq S^{-1}\mathbb{B}S \doteq (S^{-1}A_0S, \dots, S^{-1}A_rS)$ также согласованна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим по системе $\widetilde{\mathbb{B}}$ матрицы $\widetilde{L}^l_\nu$, $l = 1, \dots, r$, $\nu = 0, \dots, n^2 - 1$. Нетрудно проверить, что $\widetilde{L}^l_\nu = S^{-1}L^l_\nu S$. Если $\mathbb{B}$ согласованна, то среди матриц L^l_ν, $l = 1, \dots, r$, $\nu = 0, \dots, n^2 - 1$ существует n^2 линейно независимых, скажем $P_1, \dots, P_{n^2}$. Тогда среди матриц $\widetilde{L}^l_\nu$ также существует n^2 линейно независимых, а именно, $S^{-1}P_1S, \dots, S^{-1}P_{n^2}S$, что эквивалентно согласованности $\widetilde{\mathbb{B}}$.

С л е д с т в и е 3.2. *Если система $\mathbb{A} = (A, B, C)$ согласованна, то для любой невырожденной матрицы $S \in M_n$ система $\widetilde{\mathbb{A}} \doteq (S^{-1}AS, S^{-1}B, S^*C)$ также является согласованной.*

Это результат следствия 3.1 для системы $\mathbb{B}$, записанной в виде (1.5). Таким образом, свойство согласованности инвариантно относительно невырожденных преобразований фазового вектора. Отметим здесь, что свойство глобальной управляемости показателей Ляпунова также инвариантно относительно невырожденной замены координат, поскольку характеристические многочлены матрицы $A + BUC^*$ и подобной ей матрицы $S^{-1}AS + S^{-1}BUC^*S$ совпадают.

С л е д с т в и е 3.3. *Если* $\operatorname{Sp} A_l = 0$, $l = 1, \ldots, r$, *то система* $\mathbb{B}$ *не является согласованной.*

С л е д с т в и е 3.4. *Если* $C^*B = 0$, *то система* $\mathbb{A}$ *не является согласованной.*

Эти утверждения следуют из свойства (c) теорем 3.2 и 3.3 соответственно, если взять $H = I$. Заметим, что в задаче управления показателями Ляпунова системы $\mathbb{A}$ условие $C^*B \neq 0$ необходимо, т.к. если $C^*B = 0$, то $\operatorname{Sp}(A + BUC^*) = \operatorname{Sp}(A + C^*BU) = \operatorname{Sp} A$. В этом случае нет глобальной управляемости показателей, поскольку их сумма постоянна и равна $\operatorname{Sp} A$.

С л е д с т в и е 3.5 ([7]). *Пусть* $[A_0, A_l] = 0$ *для всех* $l = 1, \ldots, r$. *Тогда* $\mathbb{B}$ *согласованна в том и только том случае, если* $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle = M_n$.

С л е д с т в и е 3.6 ([7]). *Если матрицы* $A_0, \ldots, A_r$ *квазитреугольные, т.е.* $A_l = \{B^l_{ij}\}^s_{i,j=1}$, $B^l_{ii} \in M_{n_i}$, $\sum_{i=1}^s n_i = n$, $B^l_{ij} = 0$ *при* $i > j$, $l = 0, \ldots, r$, *то система* $\mathbb{B}$ *не является согласованной.*

Теперь мы сформулируем необходимое условие согласованности системы $\mathbb{B}$.

Т е о р е м а 3.4. *Пусть* $i_1(\lambda), \ldots, i_s(\lambda)$ — *нетривиальные (т. е. отличные от единицы) инвариантные многочлены* [14, с.147] *матрицы* A_0 *степеней* $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_s$ *соответственно* $(n_1 + \cdots + n_s = n)$. *Если система* $\mathbb{B} = (A_0, A_1, \ldots, A_r)$ *согласованна, то* $r \geqslant n_0 \doteq n_1 + 3n_2 + \cdots + (2s - 1)n_s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [14, с.205], что совокупность матриц, коммутирующих с матрицей A_0, есть линейное подпространство $\mathfrak{M} \subset M_n$ размерности n_0. Выберем базис

$P_1, \dots, P_{n_0}$ в $\mathfrak{M}$. Положим $H \doteq \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_{n_0} P_{n_0}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$ определяются из условий

$$\sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i \operatorname{Sp}(P_i A_l) = 0, \quad l = 1, \dots, r. \tag{3.3}$$

Если $r < n_0$, то система (3.3) всегда имеет нетривиальное решение $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n_0})$. В этом случае $\operatorname{Sp}(HA_l) = 0$ и $\operatorname{Sp}(HL^l_\nu) = \operatorname{Sp}(HA_0 L^l_{\nu-1} - HL^l_{\nu-1} A_0) = \operatorname{Sp}(HA_0 - A_0 H) L^l_{\nu-1} = 0$ для всех $l = 1, \dots, r$, $\nu = 1, \dots, n^2 - 1$. По теореме 3.2 система $\mathbb{B}$ не является согласованной. Теорема доказана.

Следствие 3.7. *Если $mk < n_0 \doteq \sum\limits_{j=1}^{s} (2j-1) n_j$, где $n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_s$ — степени нетривиальных инвариантных многочленов $i_1(\lambda), \dots, i_s(\lambda)$ матрицы A, то система $\mathbb{A} = (A, B, C)$ не является согласованной.*

Следствие 3.8. *Если $mk < n$, то система $\mathbb{A} = (A, B, C)$ не является согласованной.*

Условие $mk \geqslant n$ необходимо и для управления показателями Ляпунова. Действительно, невозможно управлять n показателями при помощи меньшего, чем n числа управляющих воздействий. Известно, что

$$\big((A,B,C) \text{ согласованна}\big) \Rightarrow \Big(\big((A,B) \text{ вполне управляема}\big) \& \\ \& \big((A,C) \text{ вполне наблюдаема}\big)\Big). \tag{3.4}$$

Эти свойства являются необходимыми и в задаче управления показателями Ляпунова. А именно,

$$\big(\text{показатели системы } (A,B,C) \text{ глобально управляемы}\big) \Rightarrow \Big(\big((A,B) \text{ вполне управляема}\big) \& \\ \& \big((A,C) \text{ вполне наблюдаема}\big)\Big). \tag{3.5}$$

Действительно, если, к примеру, (A, B) не является вполне управляемой, то существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x^*A = \alpha x^*$, $x^*B = 0$ (см. [13, с.351]). Тогда $x^*(A + BUC^*) = x^*A = \alpha x^*$ для любой матрицы U, т.е. характеристический многочлен матрицы $A + BUC^*$ независимо от значения матрицы U имеет корень α, поэтому глобальной управляемости показателей нет. Аналогично можно показать вторую часть импликации (3.5). Утверждения обратные к (3.4), (3.5) не верны.

П р и м е р 3.1.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad U = \begin{Vmatrix} u \end{Vmatrix}.$$

Здесь пара (A, B) вполне управляема, (A, C) вполне наблюдаема (см. замечание 2.1). Однако система (A, B, C) не является согласованной в силу следствия 3.8, поскольку $mk = 1 < 2$. Далее $\chi(A + BUC^*) = \lambda^2 - u$, и глобальной управляемости показателей нет, поскольку сумма показателей матрицы $A + BUC^*$ (равная следу этой матрицы) постоянна и равна нулю.

Однако утверждения обратные к (3.4) и (3.5) будут верными, если дополнительно потребовать, чтобы ранг какой-нибудь из матриц B или C был равен n:

$$\Big[\Big(\big((A, B) \text{ вполне управляема}\big) \& \big(\operatorname{rank} C = n\big)\Big) \vee \\ \vee \Big(\big((A, C) \text{ вполне наблюдаема}\big) \& \big(\operatorname{rank} B = n\big)\Big)\Big] \Rightarrow \\ \big((A, B, C) \text{ согласованна}\big), \quad (3.6)$$

$$\Big[\Big(\big((A, B) \text{ вполне управляема}\big) \& \big(\operatorname{rank} C = n\big)\Big) \vee \\ \vee \Big(\big((A, C) \text{ вполне наблюдаема}\big) \& \big(\operatorname{rank} B = n\big)\Big)\Big] \Rightarrow \\ \big(\text{показатели системы } (A, B, C) \text{ глобально управляемы}\big). \quad (3.7)$$

Импликация (3.6) — это следствие теоремы 2.2. Далее, если $\operatorname{rank} C = n$, то существует матрица $C_1 \in M_{n,k}$ такая, что $C_1 C^* = I^n$. Если мы будем искать управление в виде $u = Uy$, где $U = U_1 C_1$, то придем к системе $\dot{x} = (A + BU_1)x$, показатели которой глобально управляемы, если (A, B) — вполне управляемая пара. Это доказывает первую часть импликации (3.7). Вторая часть доказывается аналогично. Отметим, что утверждения обратные к (3.6) и (3.7), вообще говоря, не верны.

П р и м е р 3.2.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$U = \begin{Vmatrix} u & v \\ w & z \end{Vmatrix}, \quad A + BUC^* = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ w & z & 1 \\ u & v & 0 \end{Vmatrix}.$$

Построим матрицы $F = A \otimes I - I \otimes A^*$, $G = B \otimes C$. Можно проверить, что $\operatorname{rank}[G, FG, F^2 G] = 9$, откуда следует согласованность системы $\mathbb{A} = (A, B, C)$. Далее $\chi(A + BUC^*) = \lambda^3 - z\lambda^2 - (v + w)\lambda - u$. Очевидно, что для любого многочлена $\sigma(\lambda) = \lambda^3 + \gamma_1 \lambda^2 + \gamma_2 \lambda + \gamma_3$ можно выбрать U так, что $\chi(A + BUC^*) = \sigma(\lambda)$, т.е. показатели глобально управляемы. Однако $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = 2 < 3$.

З а м е ч а н и е 3.3. Управляемость пары (A, B) равносильна тому, что $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$. Поэтому посылка импликаций (3.6) и (3.7) эквивалентна условию

$$\Big(\operatorname{rank} \big\|C^* B, \ldots, C^* A^{n-1} B\big\| = n\Big) \vee \left(\operatorname{rank} \begin{Vmatrix} C^* B \\ C^* AB \\ \vdots \\ C^* A^{n-1} B \end{Vmatrix} = n\right). \quad (3.8)$$

Пример 3.2 показывает, что ни свойство согласованности, ни свойство управляемости показателей, вообще говоря, не сводятся к свойству (3.8).

Т е о р е м а 3.5. *Если* $n = 2$, *то согласованность системы* $\mathbb{A} = (A, B, C)$ *эквивалентна глобальной управляемости показателей Ляпунова системы* $\mathbb{A}$.

В этой теореме рассмотрен как раз тот случай, когда выполнены утверждения обратные к импликациям (3.6), (3.7). Действительно, если система $\mathbb{A}$ согласованна, то не может быть такого, чтобы $\operatorname{rank} B < 2$ и $\operatorname{rank} C < 2$ (в силу следствия 3.8), поэтому согласованность сводится к условию (3.8). Управляемость показателей тоже сводится к этому условию. В самом деле, не может быть такого, чтобы $\operatorname{rank} B < 2$ и $\operatorname{rank} C < 2$, поскольку невозможно управлять двумя показателями при помощи не более чем одного управляющего воздействия.

В случае, когда $n = 3$ согласованность уже не следует, вообще говоря, из управляемости показателей Ляпунова.

П р и м е р 3.3.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$U = \begin{Vmatrix} u & v \\ w & z \end{Vmatrix}, \quad A + BUC^* = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ w & z & 0 \\ u & v & 0 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, показатели управляемы, поскольку $\chi(A + BUC^*) = \lambda^3 - z\lambda^2 - u\lambda + (zu - vw)$. Однако в силу следствия 3.7 система согласованной не является. Здесь нетривиальные инвариантные многочлены $i_1(\lambda) = \lambda^2$, $i_2(\lambda) = \lambda$. Поэтому $n_0 = 2 + 3 = 5$, и $mk = 2 \cdot 2 = 4 < 5$. (Отсутствие согласованности следует также из теоремы 3.3: если взять $H = I^3 - E^3_{22}$, то $C^* e^{At} H e^{-At} B \equiv 0$).

Для $n=4$ теорема 3.5 неверна уже в обе стороны.

П р и м е р 3.4.

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\\0&1\\0&0\end{Vmatrix},$$

$$U=\begin{Vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\\w_1&w_2\end{Vmatrix},\quad A+BUC^*=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\w_1&0&w_2&0\\v_1&0&v_2&1\\u_1&0&u_2&0\end{Vmatrix}.$$

Для любого набора $\gamma_1,\ldots,\gamma_4$ положим $u_1=-\gamma_4$, $u_2=-\gamma_2$, $v_1=-\gamma_3$, $v_2=-\gamma_1$, $w_1=0$, $w_2=1$. Тогда $\chi(A+BUC^*)=\lambda^4+\gamma_1\lambda^3+\gamma_2\lambda^2+\gamma_3\lambda+\gamma_4$. Таким образом, показатели Ляпунова глобально управляемы. Однако согласованности нет в силу следствия 3.7: нетривиальные инвариантные многочлены $i_1(\lambda)=\lambda^2$, $i_2(\lambda)=\lambda^2$. Поэтому $n_0=2+3\cdot 2=8$ и $mk=3\cdot 2=6<8$.

П р и м е р 3.5.

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&2&0\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\1&0\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\1&0\end{Vmatrix},$$

$$U=\begin{Vmatrix}u&v\\w&z\end{Vmatrix},\quad A+BUC^*=\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&u&1+v&u\\0&w&z&1+w\\-1&u&2+v&u\end{Vmatrix}.$$

Здесь $\chi(A+BUC^*)=\lambda^4+\gamma_1\lambda^3+\gamma_2\lambda^2+\gamma_3\lambda+\gamma_4$,

$$\left\{\begin{array}{lcl}\gamma_1&=&-2u-z\\ \gamma_2&=&2(uz-(1+v)(1+w))-w+v\\ \gamma_3&=&2u\\ \gamma_4&=&(1+v)(1+w)-uz.\end{array}\right. \qquad (3.9)$$

Рассмотрим многочлен $\sigma(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 15\lambda^2 - 8\lambda$ (который имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_{3,4} = \frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$). Покажем, что нельзя построить управление U так, что $\chi(A + BUC^*) = \sigma(\lambda)$. Действительно, предположим противное: система (3.9), где $\gamma_1 = -8$, $\gamma_2 = 15$, $\gamma_3 = -8$, $\gamma_4 = 0$ разрешима. Тогда $u = -4$, $z = 16$, $v - w = 15$, $(1 + v)(1 + w) = -64$. Из двух последних уравнений следует, что $w^2 + 17w + 16 = -64$, а это уравнение не имеет решений в $\mathbb{R}$. Таким образом, данная система не обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова. Однако система $\mathbb{A}$ является согласованной. Действительно, если мы построим матрицы $F = A \otimes I - I \otimes A^*$ и $G = B \otimes C$, то получим, что $\operatorname{rank}[G, FG, F^2G, F^3G] = 16$, а это эквивалентно согласованности системы $\mathbb{A}$.

З а м е ч а н и е 3.4. Для системы $\mathbb{B}$ теорема 3.5 неверна ни в ту, ни в другую сторону уже при $n = 2$ (здесь под глобальной управляемостью показателей Ляпунова понимается возможность выбора управления $u = (u_1, \ldots, u_r)$ так, чтобы характеристический многочлен матрицы $A_0 + u_1A_1 + \cdots + u_rA_r$ совпадал с заданным многочленом n-й степени со старшим коэффициентом равным единице). Действительно, рассмотрим систему $\mathbb{B} = (A_0, A_1, A_2)$, где

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Тогда $L_0^1 = A_1$, $L_0^2 = A_2$,

$$L_1^1 = A_0A_1 - A_1A_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad L_1^2 = A_0A_2 - A_2A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

и $\langle L_0^1, L_0^2, L_1^1, L_1^2 \rangle = M_2$, т.е. система согласованна. Далее $\chi(A_0 + u_1A_1 + u_2A_2) = \lambda^2 - (2 + 3u_2)\lambda + (1 + u_2)(1 + 2u_2) + u_1(1 + u_1)$. Покажем, что для многочлена $\sigma(\lambda) = \lambda^2 + 10\lambda + 9$ (имеющего корни $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = -1$) нельзя построить управление

$u = (u_1, u_2)$ так, что $\chi(A_0 + u_1A_1 + u_2A_2) = \sigma(\lambda)$. Предположим противное, тогда $u_2 = -4$, $u_1(1 + u_1) = -12$, но последнее уравнение не имеет корней в $\mathbb{R}$. Поэтому глобальной управляемости показателей нет. Далее, если $\mathbb{B} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, где $A_0 = 0 \in M_2$, $A_1 = E_{12}^2$, $A_2 = E_{11}^2$, $A_3 = E_{21}^2$, то в силу следствия 3.5 система $\mathbb{B}$ не является согласованной. Однако $\chi(A_0 + u_1A_1 + u_2A_2 + u_3A_3) = \lambda^2 - u_2\lambda - u_1u_3$, и очевидно, что показатели глобально управляемы.

Подытожим все вышесказанное. Свойства согласованности и глобальной управляемости показателей Ляпунова стационарных систем с наблюдателем во многих случаях идут параллельно друг другу и одновременно встречаются либо не встречаются (в частности, при $n = 2$ эти свойства эквивалентны). Однако, как показывают примеры 3.4 и 3.5, в общем случае ни одно свойство не следует из другого. Можно было бы предположить, по аналогии со случаем $n = 2$, что пересечение множества согласованных систем с множеством систем, имеющих глобально управляемые показатели, совпадает с множеством систем, для которых выполнено условие (3.8), однако пример 3.2 опровергает это предположение. Таким образом, в полной мере вопрос о том, как в общем случае связаны согласованные стационарные системы с наблюдателем и системы с глобально управляемыми показателями, пока не исследован.

Попытка получить какие-либо нетривиальные утверждения о глобальной управляемости показателей Ляпунова в терминах согласованных систем оказалась безуспешной. Однако в частных случаях все-таки удается найти условие, которое обеспечивает эффективный критерий управляемости показателей. Об этом и пойдет речь в следующем параграфе.

4. Управление показателями Ляпунова

Здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда характеристический многочлен матрицы A совпадает с минимальным многочленом. В этом случае матрица A подобна матрице

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{matrix} \right\| \tag{4.1}$$

(т.е. существует невырожденная матрица $S \in M_n$ такая, что $\widetilde{A} = S^{-1}AS$), которая называется *матрицей Фробениуса.* Другими словами, оператор A в некотором базисе имеет вид (4.1). Характеристический и минимальный многочлены матрицы $\widetilde{A}$ и A есть $\chi(\widetilde{A}) = \chi(A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$. Этот же многочлен является единственным нетривиальным инвариантным многочленом матриц $\widetilde{A}$ и A.

Рассмотрим систему $\mathbb{A} = (A, B, C)$, где A — матрица Фробениуса (будем считать, что мы уже произвели невырожденную замену координат). Построим по матрице A матрицу $G = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i-1}J_{i-1}^* \in M_n$, $a_0 \doteq 1$:

$$G = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

З а м е ч а н и е 4.1. Как управлять показателями системы (A, B, C), где $B = b \in M_{n,1}$, $C = I \in M_n$? Необходимым (и достаточным) является условие $\operatorname{rank}[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n$ (или $\det[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] \neq 0$). Произведем невырожденное преобразование $x = Sy$, где

$$S^{-1} = \left\| \begin{matrix} \xi \\ \xi A \\ \vdots \\ \xi A^{n-1} \end{matrix} \right\|, \quad \xi = e_n^*[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]^{-1}$$

и придем к системе $\dot{y} = \widetilde{A}y + \widetilde{b}u$, $\widetilde{A} = S^{-1}AS$, $\widetilde{b} = S^{-1}b$. Здесь $\widetilde{A}$ — матрица Фробениуса (4.1), $\widetilde{b} = e_n$. Для любого $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, построив управление $u = \widetilde{U}y = \widetilde{U}S^{-1}x = Ux$, где $\widetilde{U} = (a_n - \gamma_n, \ldots, a_1 - \gamma_1) \in M_{1,n}$, получим, что $\chi(A + bU) = \chi(\widetilde{A} + \widetilde{b}\widetilde{U}) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_n$.

Рассмотрим $B \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$. Пусть $\xi_i \in \mathbb{R}^{m*}$, $i = 1, \ldots, n$ — строки матрицы B, $\psi_j \in \mathbb{R}^{k*}$, $j = 1, \ldots, n$ — строки матрицы C.

Л е м м а 4.1. *Равенство $C^*E_{ij}B = 0$ выполнено для всех $1 \leqslant j < i \leqslant n$ тогда и только тогда, когда найдется номер $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $\xi_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, i_0 - 1$ и $\psi_j = 0$ для всех $j = i_0 + 1, \ldots, n$, т.е. матрицы B и C имеют вид*

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{i_0 1} & \ldots & b_{i_0 m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i_0 1} & \ldots & c_{i_0 k} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть ξ_s — первая сверху ненулевая строка матрицы B, т.е. $\xi_s \neq 0$, $\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, s-1$, и пусть ψ_p — первая снизу ненулевая строка матрицы C, т.е. $\psi_p \neq 0$, $\psi_j = 0$, $j = p+1, \ldots, n$. Если $p \leqslant s$, то при $i_0 = s$ получаем требуемое утверждение. Если же $p > s$, то $C^*E_{ps}B = \psi_p^*\xi_s \neq 0$, что противоречит условию. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 4.2. Имеет смысл отметить, что условие $C^*E_{ij}B = 0$, выполненное для всех i, j, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant j < i \leqslant n$, эквивалентно следующему условию: для любой строго нижней треугольной матрицы H имеет место равенство $C^*HB = 0$.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* A *имеет вид* (4.1), $D \in M_n$ *:*

$$D = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nk} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.3}$$

Пусть $\chi(A+D) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$ *— характеристический многочлен матрицы* $A+D$*. Тогда* $\gamma_i = a_i - \operatorname{Sp} DJ_{i-1}G$ *для всех* $i = 1, \dots, n$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что $k < n$ (случай $k = n$ тривиален). Доказательство будем проводить индукцией по размерности n. Покажем, что утверждение теоремы верно для $n = 2$ (если $n = 1$, то доказывать нечего). Рассмотрим матрицы A, D и G:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} d_{11} & 0 \\ d_{21} & 0 \end{Vmatrix}, \quad G = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы $A+D$ есть $\chi(A+D) = \lambda^2 + (a_1 - d_{11})\lambda + (a_2 - d_{11}a_1 - d_{21})$. Далее, $\operatorname{Sp} DG = d_{11}$, $\operatorname{Sp} DJ_1^2G = d_{11}a_1 + d_{21}$. Таким образом, утверждение верно для $n = 2$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для всех размерностей меньших, чем n. Покажем, что оно будет выполнено и для n.

Пусть матрицы $\widehat{A}$ и $\widehat{D}$ получены из матриц A и D соответственно вычеркиванием n-й строки и n-го столбца, матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{D}$ — вычеркиванием $(n-1)$-й строки и n-го столбца, матрицы $\overline{A}$ и $\overline{D}$ — вычеркиванием $(n-1)$-й и n-й строк и $(n-1)$-го и n-го столбцов. По матрицам $\widehat{A}$, $\widetilde{A}$ и $\overline{A}$ построим соответствующие матрицы $\widehat{G}$, $\widetilde{G}$, $\overline{G}$. Тогда $\widehat{A}, \widetilde{A}, \widehat{D}, \widetilde{D}, \widehat{G}, \widetilde{G} \in M_{n-1}$,

$$\overline{A}, \overline{D}, \overline{G} \in M_{n-2}, \quad \widehat{A} = J_1^{n-1}, \quad \overline{A} = J_1^{n-2}, \quad \widehat{G} = I^{n-1}, \quad \overline{G} = I^{n-2},$$

$$\widetilde{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & \dots\dots & & -a_2 \end{Vmatrix}, \quad \widetilde{G} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & a_2 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\overline{D} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-2,1} & \dots & d_{n-2,k} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\widehat{D} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-2,1} & \dots & d_{n-2,k} & 0 & \dots & 0 \\ d_{n-1,1} & \dots & d_{n-1,k} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\widetilde{D} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-2,1} & \dots & d_{n-2,k} & 0 & \dots & 0 \\ d_{n1} & \dots & d_{nk} & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Введем в рассмотрение вектора

$$d^{n-1} = \mathrm{col}(d_{n1}, \ldots, d_{nk}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$d^{n} = \mathrm{col}(d_{n1}, \ldots, d_{nk}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n}$$

и матрицы $D' = e^{n-1}_{n-1}\left(d^{n-1}\right)^* \in M_{n-1}$, $D'' = e^n_n\left(d^n\right)^* \in M_n$. (Таким образом, матрица D' получается из матрицы D'' вычеркиванием первой строки и n-го столбца. Очевидно, что $\mathrm{Sp}\, D' J^{n-1}_p = \mathrm{Sp}\, D'' J^n_{p+1}$.) Раскладывая определитель по n-му столбцу, получим $\det(A + D - \lambda I^n) = (-a_1 - \lambda) \cdot \det(\widehat{A} + \widehat{D} - \lambda I^{n-1}) - \det(\widetilde{A} + \widetilde{D} - \lambda I^{n-1} + \lambda E^{n-1}_{n-1,n-1})$. По предположению индукции имеем

$$\det(\widehat{A} + \widehat{D} - \lambda I^{n-1}) = (-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} - \mathrm{Sp}\, \widehat{D} \cdot \lambda^{n-2} - \ldots \\ - \mathrm{Sp}\, \widehat{D} J^{n-1}_{p-2} \cdot \lambda^{n-p} - \cdots - \mathrm{Sp}\, \widehat{D} J^{n-1}_{n-2}).$$

Далее,

$$\det(\widetilde{A} + \widetilde{D} - \lambda I^{n-1} + \lambda E^{n-1}_{n-1,n-1}) = \det(\widetilde{A} + \widetilde{D} - \lambda I^{n-1}) + \\ + \lambda \cdot \det(\overline{A} + \overline{D} - \lambda I^{n-2}) = (-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} + (a_2 - \mathrm{Sp}\, \widetilde{D}\widetilde{G})\lambda^{n-2} + \\ + (a_3 - \mathrm{Sp}\, \widetilde{D} J^{n-1}_1 \widetilde{G})\lambda^{n-3} + \cdots + (a_p - \mathrm{Sp}\, \widetilde{D} J^{n-1}_{p-2} \widetilde{G})\lambda^{n-p} + \ldots \\ + (a_n - \mathrm{Sp}\, \widetilde{D} J^{n-1}_{n-2} \widetilde{G})) + \lambda \cdot (-1)^{n-2}(\lambda^{n-2} - \mathrm{Sp}\, \overline{D} \cdot \lambda^{n-3} - \ldots \\ - \mathrm{Sp}\, \overline{D} J^{n-2}_{p-3} \cdot \lambda^{n-p} - \cdots - \mathrm{Sp}\, \overline{D} J^{n-2}_{n-3}).$$

Таким образом,

$$\det(A + D - \lambda I^n) = (-1)^n (a_1 + \lambda)(\lambda^{n-1} - \mathrm{Sp}\, \widehat{D} \cdot \lambda^{n-2} - \\ \mathrm{Sp}\, \widehat{D} J^{n-1}_1 \cdot \lambda^{n-3} - \cdots - \mathrm{Sp}\, \widehat{D} J^{n-1}_{n-2}) + (-1)^n(\lambda^{n-1} + (a_2 - \mathrm{Sp}\, \widetilde{D}\widetilde{G})\lambda^{n-2} + \\ + (a_3 - \mathrm{Sp}\, \widetilde{D} J^{n-1}_1 \widetilde{G})\lambda^{n-3} + \cdots + (a_n - \mathrm{Sp}\, \widetilde{D} J^{n-1}_{n-2} \widetilde{G})) - \\ (-1)^n(\lambda^{n-1} - \mathrm{Sp}\, \overline{D} \cdot \lambda^{n-2} - \mathrm{Sp}\, \overline{D} J^{n-2}_1 \cdot \lambda^{n-3} - \cdots - \mathrm{Sp}\, \overline{D} J^{n-2}_{n-3} \lambda) =$$

$$= (-1)^n \big[\lambda^n + (a_1 - \operatorname{Sp}\widehat{D})\lambda^{n-1} +$$
$$+ (a_2 - \operatorname{Sp}\widetilde{D}\widetilde{G} - a_1 \operatorname{Sp}\widehat{D} - \operatorname{Sp}\widehat{D}J_1^{n-1} + \operatorname{Sp}\overline{D})\lambda^{n-2} +$$
$$+(a_3 - \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_1^{n-1}\widetilde{G} - a_1 \operatorname{Sp}\widehat{D}J_1^{n-1} - \operatorname{Sp}\widehat{D}J_2^{n-1} + \operatorname{Sp}\overline{D}J_1^{n-2})\lambda^{n-3} + \ldots$$
$$+ (a_{n-1} - \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{n-3}^{n-1}\widetilde{G} - a_1 \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{n-3}^{n-1} - \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{n-2}^{n-1} + \operatorname{Sp}\overline{D}J_{n-3}^{n-2})\lambda +$$
$$+ (a_n - \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{n-2}^{n-1}\widetilde{G} - a_1 \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{n-2}^{n-1})\big].$$

Коэффициент при λ^{n-1} равен $a_1 - \operatorname{Sp}\widehat{D}$. Это совпадает с γ_1, поскольку $\operatorname{Sp}\widehat{D} = d_{kk} = \operatorname{Sp} DG$. Далее, коэффициенты при λ^{n-1-p} для всех $p = 1, \ldots, n-1$ равны $a_{p+1} - \Delta_p$, где

$$\Delta_p = \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1}\widetilde{G} + a_1 \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{p-1}^{n-1} + \operatorname{Sp}\widehat{D}J_p^{n-1} - \operatorname{Sp}\overline{D}J_{p-1}^{n-2}. \quad (4.4)$$

Необходимо доказать, что $\Delta_p = \operatorname{Sp} DJ_p^n G$, где Δ_p определено равенством (4.4). Пусть $T = \widetilde{G} - I^{n-1} \in M_{n-1}$, $S = T + a_1 I^{n-1} \in M_{n-1}$. Имеем $\operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1}\widetilde{G} = \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1} + \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1}T$. Заметим, что $(n-1)$-я строка матрицы $\widetilde{D}$ не дает вклада в $\operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1}T$, поскольку $(n-1)$-й столбец матрицы T нулевой. Поэтому $\operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1}T = \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{p-1}^{n-1}T$. Учитывая теперь, что $a_1 \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{p-1}^{n-1} = \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{p-1}^{n-1}a_1 I^{n-1}$, получим

$$\Delta_p = \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1} + \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{p-1}^{n-1}S + \operatorname{Sp}\widehat{D}J_p^{n-1} - \operatorname{Sp}\overline{D}J_{p-1}^{n-2}.$$

Расширим матрицу $\overline{D}$ до матрицы $\overline{D}^+$, приписав к ней $(n-1)$-ю нулевую строку и $(n-1)$-й нулевой столбец. Тогда $\operatorname{Sp}\overline{D}J_{p-1}^{n-2} = \operatorname{Sp}\overline{D}^+ J_{p-1}^{n-1}$. Следовательно, $\operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1} - \operatorname{Sp}\overline{D}J_{p-1}^{n-2} = \operatorname{Sp}\widetilde{D}J_{p-1}^{n-1} - \operatorname{Sp}\overline{D}^+ J_{p-1}^{n-1} = \operatorname{Sp} D' J_{p-1}^{n-1} = \operatorname{Sp} D'' J_p^n$. Таким образом, $\Delta_p = \operatorname{Sp}\widehat{D}J_{p-1}^{n-1}S + \operatorname{Sp}\widehat{D}J_p^{n-1} + \operatorname{Sp} D'' J_p^n$. Далее, $GD'' = Ge_n^n \cdot (d^n)^* = e_n^n \cdot (d^n)^* = D''$, поэтому $\operatorname{Sp} D'' J_p^n = \operatorname{Sp} GD'' J_p^n = \operatorname{Sp} D'' J_p^n G$. Теперь расширим матрицы $\widehat{D}, S \in M_{n-1}$ до матриц $\widehat{D}^+, S^+ \in M_n$ соответственно, приписав к ним n-ю нулевую строку и n-й нулевой столбец. Очевидно, что $\operatorname{Sp}\widehat{D}J_{p-1}^{n-1}S = \operatorname{Sp}\widehat{D}^+ J_{p-1}^n S^+$. Далее,

$J_{p-1}^n S^+ = J_p^n S'$, где $S' \in M_n$ получена приписыванием к матрице $S \in M_{n-1}$ первой нулевой строки и n-го нулевого столбца, т.е.

$$S' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & a_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{Sp} \widehat{D} J_{p-1}^{n-1} S = \operatorname{Sp} \widehat{D}^+ J_p^n S'$. Далее, $\operatorname{Sp} \widehat{D} J_p^{n-1} = \operatorname{Sp} \widehat{D}^+ J_p^n$, и, учитывая, что $S' + I^n = G$, а $\widehat{D}^+ + D'' = D$, получаем $\Delta_p = \operatorname{Sp} \widehat{D}^+ J_p^n S' + \operatorname{Sp} \widehat{D}^+ J_p^n + \operatorname{Sp} D'' J_p^n G = \operatorname{Sp} \widehat{D}^+ J_p^n G + \operatorname{Sp} D'' J_p^n G = \operatorname{Sp} D J_p^n G$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.2. *Пусть A — матрица Фробениуса и $C^* E_{ij} B = 0$ для всех $1 \leqslant j < i \leqslant n$ (т.е. B и C имеют вид (4.2)). Тогда система $\mathbb{A} = (A, B, C)$ обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова в том и только том случае, если матрицы*

$$C^* J_{i-1} G B, \quad i = 1, \dots, n \tag{4.5}$$

линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что матрица BUC^* имеет вид (4.3) матрицы D из теоремы 4.1 (т.е. блочный вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ D_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

где правый верхний угловой элемент матрицы D_1 находится на главной диагонали). Таким образом, $\chi(A + BUC^*) = \lambda^n + \gamma\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$, где $\gamma_i = a_i - \operatorname{Sp} BUC^* J_{i-1} G = a_i - \operatorname{Sp} UC^* J_{i-1} GB$, $i = 1, \dots, n$. Это система n уравнений с mk неизвестными $\{u_{pq}\}$ $(p = 1, \dots, m; q = 1, \dots, k)$. Ее можно переписать в векторном виде:

$$a - P^* v = \gamma. \tag{4.6}$$

Здесь $a = \operatorname{col}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, $P = [\operatorname{vec} C^* J_0 GB, \ldots, \operatorname{vec} C^* J_{n-1} GB] \in M_{mk,n}$, $v = \operatorname{vec} U^* \in \mathbb{R}^{mk}$. Если матрицы (4.5) линейно независимы, то $\operatorname{rank} P = n$. Тогда P^*P невырождена, и для любого γ система (4.6) разрешима и решение имеет вид

$$v = P(P^*P)^{-1}(a - \gamma). \tag{4.7}$$

Таким образом, показатели системы (A, B, C) глобально управляемы. Если же $\operatorname{rank} P < n$, то для вектора $\gamma = a - \beta$, где $\beta \notin \operatorname{Im} P^*$ система (4.6) неразрешима, т.е. глобальной управляемости показателей нет. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4.3. Из теоремы 4.2 следует, что свойство глобальной управляемости показателей существенно зависит как от коэффициентов матриц B и C, так и от коэффициентов матрицы A, в отличие от систем управления без наблюдателя (т.е. когда $C = I$, $B = b$), где важно только, чтобы (в некотором базисе) $b = e_n$, а матрица A была матрицей Фробениуса, но неважно значение коэффициентов a_i матрицы A (см. замечание 4.1). Рассмотрим, к примеру, систему $\mathbb{A} = (A, B, C)$, где

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & d \\ 1 & d-1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

d, c — произвольные числа. Построим матрицу G по матрице A. Далее построим матрицы $C^* J_{i-1} GB$, $i = 1, \ldots, 4$ и матрицу $P = [\operatorname{vec} C^* J_0 GB, \ldots, \operatorname{vec} C^* J_3 GB]$:

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1 + 1 \\ 0 & 1 & a_1 + d & a_2 + a_1 d + d - 1 \\ 0 & 1 & c + a_1 + 1 & c(a_1 + 1) \\ 1 & * & * & * \end{Vmatrix}$$

(звездочкой обозначены коэффициенты, значение которых несущественно). Таким образом, $\det P = -a_1 - a_2$. Отсюда следует, что если коэффициенты матрицы A связаны соотношением $a_1+a_2 = 0$, то глобальной управляемости показателей нет, а если $a_1+a_2 \neq 0$, то показатели глобально управляемы, в то время как показатели системы (A, e_n, I) глобально управляемы при любом значении коэффициентов a_i.

Теорема 4.2 дает критерий управления показателями Ляпунова в случае, когда A — матрица Фробениуса, а B и C имеют вид (4.2) и управление, приводящее характеристический многочлен матрицы $A+BUC^*$ к заданному многочлену, находится по формуле (4.7).

С л е д с т в и е 4.1. *Пусть A — матрица Фробениуса. Допустим, что из матриц B и C можно вычеркнуть несколько столбцов, так что полученные матрицы $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ имеют вид* (4.2). *Тогда если матрицы $\widetilde{C}^* J_{i-1} G \widetilde{B}$, $i = 1, \ldots, n$ линейно независимы, то показатели Ляпунова системы (A, B, C) глобально управляемы.*

С л е д с т в и е 4.2. *Пусть система $\mathbb{A} = (A, B, C)$ приводима к системе $\widetilde{\mathbb{A}} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ (т. е. существует $S \in M_n$ такая, что $\widetilde{A} = S^{-1}AS$, $\widetilde{B} = S^{-1}B$, $\widetilde{C} = S^*C$), где $\widetilde{A}$ — матрица Фробениуса, а $\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ имеют вид* (4.2). *Тогда система $\mathbb{A}$ обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова в том и только том случае, если матрицы $\widetilde{C}^* J_{i-1} G \widetilde{B}$, $i = 1, \ldots, n$ линейно независимы.*

П р и м е р 4.1. Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + a_2 z^{(n-2)} + \dots + a_n z = \\ = \beta_{p1} v_1^{(n-p)} + \beta_{p+1,1} v_1^{(n-p-1)} + \dots + \beta_{n1} v_1 + \dots \\ + \beta_{pm} v_m^{(n-p)} + \dots + \beta_{nm} v_m, \quad z \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления. Предположим, что наблюдению доступны линейные комбинации выхода и его первых $p-1$ производных:

$$\begin{aligned} &y_1 = c_{11} z + \dots + c_{p1} z^{(p-1)}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y_k = c_{1k} z + \dots + c_{pk} z^{(p-1)}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — вектор наблюдения. Будем строить управление $v = Vy$, линейно зависящее от наблюдателя. По системе (4.8), (4.9) построим матрицы $A \in M_n$, $K \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{Vmatrix}, \quad K = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \beta_{p1} & \dots & \beta_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nm} \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что, положив $z = x_1$, $v = u$, наблюдаемую систему (4.8), (4.9) можно записать в виде матричной системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^* x, \quad (x, y, u) \in \mathbb{R}^{n+k+m}, \tag{4.10}$$

где $B = G^{-1}K$, а G построена по матрице A. Поскольку матрица G нижняя треугольная с ненулевыми диагональными элементами, то G^{-1} также нижняя треугольная матрица, поэтому матрица B имеет такой же вид, как и матрица K, т.е.

$b_{ij} = 0$, $i = 1,\ldots,p-1$, $j = 1,\ldots,m$. Далее, $G = \{g_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$, $g_{ik} = \{0\ ,k > i;\ a_{i-k},\ k \leqslant i\}$, поэтому $\beta_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} g_{ik}b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{i} a_{i-k}b_{kj} = \sum\limits_{k=p}^{i} a_{i-k}b_{kj}$. Из системы (4.10) имеем

$$\begin{aligned}
z &= x_1,\\
\dot z &= \dot x_1 = x_2,\\
\ddot z &= \dot x_2 = x_3,\\
&\ \vdots\\
z^{(p-1)} &= \dot x_{p-1} = x_p,\\
z^{(p)} &= \dot x_p = x_{p+1} + \sum_{j=1}^{m} b_{pj}u_j,\\
z^{(p+1)} &= \dot x_{p+1} + \sum_{j=1}^{m} b_{pj}\dot u_j = x_{p+2} + \sum_{j=1}^{m} b_{p+1,j}u_j + \sum_{j=1}^{m} b_{pj}\dot u_j,\\
&\ \vdots\\
z^{(s)} &= x_{s+1} + \sum_{i=p}^{s}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j^{(s-i)},\\
&\ \vdots\\
z^{(n-1)} &= x_n + \sum_{i=p}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j^{(n-1-i)},\\
z^{(n)} &= -a_1x_n - a_2x_{n-1} - \cdots - a_nx_1 + \sum_{i=p}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j^{(n-i)}.
\end{aligned}$$

Выражая x_i, $i = 1,\ldots,n$ из этих уравнений и подставляя в последнее уравнение, получим

$$z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \cdots + a_nz = \sum_{s=p}^{n} a_{n-s}\sum_{i=p}^{s}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}u_j^{(s-i)}. \qquad (4.11)$$

Обозначим правую часть равенства (4.11) через $\varkappa$. Поменяв в (4.11) порядок суммирования $\sum\limits_{s=p}^{n}\sum\limits_{i=p}^{s}$ на $\sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{s=i}^{n}$, получим $\varkappa =$

$\sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{s=i}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{n-s}b_{ij}u_j^{(s-i)}$. Сделаем замену индекса $\alpha = n-(s-i)$, тогда $\varkappa = \sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{\alpha=i}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{\alpha-i}b_{ij}u_j^{(n-\alpha)}$. Снова поменяв порядок суммирования $\sum\limits_{i=p}^{n}\sum\limits_{\alpha=i}^{n}$ на $\sum\limits_{\alpha=p}^{n}\sum\limits_{i=p}^{\alpha}$, получим

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=p}^{n}\sum_{i=p}^{\alpha} a_{\alpha-i}b_{ij}u_j^{(n-\alpha)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=p}^{n}\beta_{\alpha j}u_j^{(n-\alpha)},$$

что совпадает с правой частью равенства (4.8). Поэтому наблюдаемая система (4.8), (4.9) эквивалентна системе (4.10). Таким образом, по теореме 4.2 система (4.8), (4.9) обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова (т.е. для любого $\gamma \in \mathbb{R}^n$ найдется матрица $V \in M_{m,k}$ такая, что замкнутая управлением $v = Vy$ система (4.8), (4.9) имеет характеристический многочлен $\lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$) тогда и только тогда, когда матрицы $C^*J_{i-1}K$, $i = 1,\dots,n$ линейно независимы, и в этом случае искомое управление имеет вид

$$V = [\operatorname{vec}^{-1}(P(P^*P)^{-1}(a-\gamma))]^*,$$

где $P = [\operatorname{vec} C^*J_0K, \dots, \operatorname{vec} C^*J_{n-1}K]$.

Список литературы

1. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, Ѓ 10. С. 1687–1696.
2. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, Ѓ 11. С. 1949–1957.
3. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, Ѓ 2. С. 228–238.
4. Попова С. Н., Тонков Е. Л. К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, Ѓ 4. С. 723–724.

5. Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, Ѓ 2. С. 226–235.
6. Тонков Е. Л. Задачи управления показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, Ѓ 10. С. 1682–1686.
7. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. Ѓ 2 (441). С. 45–56.
8. Зайцев В.А. Достижимость и локальная управляемость показателей Ляпунова систем со случайными параметрами // Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1998. Вып. 2(13). С.71–88.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. С.472.
10. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. С.280.
11. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. С.476.
12. Култышев С.Ю., Тонков Е.Л. Управляемость линейной нестационарной системой // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, Ѓ 7. С. 1206–1216.
13. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. С. 456.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. С. 576.