ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2004. № 1

УДК 517.977

В. А. Зайцев

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ[1]

Получены необходимые и достаточные условия существования модального управления для стационарного квазидифференциального уравнения с полной и с неполной обратной связью. Для нестационарного квазидифференциального уравнения построены обратная связь и ляпуновское преобразование, приводящее замкнутое уравнение к наперед заданному дифференциальному уравнению.

Ключевые слова: модальное управление, квазидифференциальное уравнение, неполная обратная связь.

Введение

Классическая задача о модальном управлении заключается в следующем. Рассматривается линейная управляемая система с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

управление u строится в виде $u = Ux$, где U — $m \times n$-матрица с постоянными коэффициентами. Система (1) переходит в однородную систему

$$\dot{x} = (A + BU)x. \tag{2}$$

Требуется для произвольного многочлена n-й степени $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$ с наперед заданными вещественными коэффициентами γ_i найти постоянную вещественную матрицу U такую, чтобы характеристический многочлен $\chi(A + BU; \lambda)$ матрицы системы (2) с этим управлением совпадал с $p(\lambda)$. Если такое управление существует, то говорят, что система (2) обладает *модальным управлением*. Рассматривают также случай, когда коэффициенты A, B системы (1), управление U и коэффициенты γ_i комплексные. Здесь мы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке конкурсного центра Минобразования России (грант Е02–1.0-100) и РФФИ (грант 03–01–00014).

ограничимся случаем, когда x, u, A, B, U, γ_i — вещественные. Необходимым и достаточным условием существования модального управления для системы (2) является условие полной управляемости системы (1), т. е. условие $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$. Это известный результат теории автоматического регулирования. Рассмотрим, к примеру, линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с одним входом

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Управляемая система (3) эквивалентна матричной системе (1), где

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad \begin{matrix} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x}, \\ \vdots \\ x_{n-1} = x^{(n-2)}, \\ x_n = x^{(n-1)}. \end{matrix}$$

Матрица A называется *матрицей Фробениуса* для многочлена $q(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$. Эта матричная система является вполне управляемой при любых значениях коэффициентов a_i, и управление $U = (a_n - \gamma_n, \ldots, a_1 - \gamma_1)$ приводит характеристический полином системы (2) к наперед заданному $p(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} \gamma_i \lambda^{n-i}$ $(\gamma_0 = 1)$. Соответственно управление

$$u = (a_1 - \gamma_1)x^{(n-1)} + \ldots + (a_n - \gamma_n)x \tag{4}$$

приводит уравнение (3) к уравнению с наперед заданными коэффициентами γ_i и обеспечивает желаемую асимптотику решений системы (3), (4).

Отметим здесь, что если в уравнении (3) коэффициенты a_i — переменные, то все равно управление, построенное по формуле (4), приводит уравнение (3) к наперед заданному уравнению $x^{(n)} + \gamma_1 x^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n x = 0$ с постоянными коэффициентами.

Задача о существовании модального управления для линейного дифференциального уравнения с неполной обратной связью была решена в [1] (см. также [2]). Рассмотрим объект n-го порядка, на вход которого подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния объекта z и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$\begin{gathered} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = \\ = b_{p1} v_1^{(n-p)} + b_{p+1,1} v_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1} v_1 + \ldots \\ + b_{pm} v_m^{(n-p)} + \ldots + b_{nm} v_m, \quad z \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} y_1 = c_{11} z + \ldots + c_{p1} z^{(p-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = c_{1k} z + \ldots + c_{pk} z^{(p-1)}, \end{gathered} \tag{6}$$

$v = \mathrm{col}\,(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $y = \mathrm{col}\,(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — выходной вектор. Задача модального управления заключается в построении управления в виде неполной обратной связи $v = Uy$, которое приводит систему (5), (6) к замкнутой системе

$$z^{(n)} + \gamma_1 z^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n z = 0 \tag{7}$$

с заданными коэффициентами.

Построим по системе (5), (6) матрицы $B \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$,

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ b_{p1} & \ldots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \ldots & c_{pk} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

$M_{n,k}$ — это пространство $n \times k$-матриц, $M_n \doteq M_{n,n}$. Пусть $I \in M_n$ — единичная матрица, e_i — i-й столбец единичной матрицы. Обозначим $J_0 = I \in M_n$, $J_1 \in M_n$ — матрица, наддиагональ которой состоит из единиц, а остальные элементы равны нулю, $J_q \doteq J_1^q$. Звездочка будет означать операцию транспонирования матрицы (или вектор-столбца в вектор-строку).

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть обратная связь $v = Uy$ приводит систему (5), (6) к замкнутой системе (7). Тогда для коэффициентов γ_i системы (7) выполнены соотношения $\gamma_i = a_i - \mathrm{Sp}\, C^* J_{i-1} B U$, $i = \overline{1,n}$.*

Введем отображение $\mathrm{vec} : M_{n,m} \to \mathbb{R}^{nm}$, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\} \in M_{n,m}$ по строкам в вектор-столбец $\mathrm{vec}\, H = \mathrm{col}(h_{11}, h_{12}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nm})$. Построим матрицы $C^* J_0 B, \ldots, C^* J_{n-1} B$ и матрицу $P = [\mathrm{vec}\, C^* J_0 B, \ldots, \mathrm{vec}\, C^* J_{n-1} B] \in M_{mk,n}$. Пусть $a = \mathrm{col}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2 (см. [1]). *Система* (5), (6) *обладает модальным управлением тогда и только тогда, когда матрицы* $C^*J_0B,\ldots,C^*J_{n-1}B$ *линейно независимы, и в этом случае матрица* U *обратной связи, приводящая систему* (5), (6) *к системе* (7) *с наперед заданными коэффициентами, находится из соотношения* $w=P(P^*P)^{-1}(a-\gamma)$, *где* $w=\operatorname{vec}U^*$.

Заметим, что в системе с неполной обратной связью, так же как и в системе с полной обратной связью, возможность приведения к наперед заданному уравнению не зависит от коэффициентов a_i уравнения, а зависит лишь от коэффициентов b_{lj}, c_{sr} линейных комбинаций входных и выходных сигналов. Хотя само управление U, приводящее (5), (6) к системе (7), естественно, зависит от a_i.

Отметим здесь следующий факт. Предположим, что в системе с неполной обратной связью (5), (6) коэффициенты a_i и (или) b_{lj} и (или) c_{sr} — переменные. В этом случае (в отличие от системы (3) с полной обратной связью) уже нельзя утверждать, что управление U, построенное в теореме 2, приведет систему (5), (6) к системе (7). Дело в том, что U зависит от a_i, b_{lj}, c_{sr}, а $v=Uy$, и когда мы подставим построенное управление v в (5), то в уравнении появятся производные от a_i (или b_{lj}, или c_{sr}) и уравнение не приведется к требуемому.

В настоящей работе исследуется задача о ляпуновской приводимости и о существовании модального управления для квазидифференциального уравнения с полной и неполной обратной связью.

§1. Модальное управление КдУ с полной обратной связью и ляпуновская приводимость

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u,\qquad (t,u,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \tag{9}$$

$$A(t)=\begin{Vmatrix} a_{11}(t) & \beta_1(t) & 0 & \ldots & 0\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \beta_2(t) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n-1,1}(t) & a_{n-1,2}(t) & \ldots & \ldots & \beta_{n-1}(t)\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & \ldots & a_{nn}(t)\end{Vmatrix},\quad B(t)=\begin{Vmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\ \beta_n(t)\end{Vmatrix}, \tag{10}$$

функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$, и $\forall\, t\in\mathbb{R}$ $\forall\, i=\overline{1,n}$ выполнены неравенства $\beta_i(t)\geqslant\varkappa>0$. Определим квазипроизводные ${}^{k}_{A}z$ $(k=\overline{0,n})$ функции $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ равенствами [3]

$$\begin{gathered} {}^{0}z \doteq {}^{0}_{A}z \doteq z, \\ {}^{k}z \doteq {}^{k}_{A}z \doteq \frac{1}{\beta_k(t)}\Big(\frac{d}{dt}\big({}^{k-1}_{A}z\big) - \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{k,\nu+1}(t)\big({}^{\nu}_{A}z\big)\Big), \quad k=\overline{1,n}. \end{gathered} \tag{11}$$

Тогда система (9) эквивалентна квазидифференциальному уравнению (КдУ) n-го порядка [3, 4]

$$\big(Lz\big)(t) \doteq \big({}^{n}z\big) = u. \tag{12}$$

Эквивалентность устанавливается равенствами $x_1 = {}^{0}z$, $x_2 = {}^{1}z$, $\ldots$, $x_n = {}^{n-1}z$.

Матрица $A(t)$ называется порождающей для уравнения (12). Решением уравнения (12) называется всякая функция $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}^{k}_{A}z$ $(k=\overline{0,n-1})$ и почти всюду (п.в.) в $\mathbb{R}$ удовлетворяющая уравнению (12). Известно [3], что если функции $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $u(\cdot)$ локально суммируемые, то решение задачи Коши для уравнения (12) существует и единственно.

Задача о модальном управлении и о ляпуновской приводимости системы (9) исследовалась в [4]. Однако сформулированная в этой работе лемма 5 и вытекающая из нее теорема 3 оказались неточными. Поэтому вопрос о ляпуновской приводимости системы (9) остается открытым. Здесь получены некоторые новые результаты в этом направлении.

Рассмотрим матрицу $A(t)$ из (10), т.е. $A(t) = \left\| \begin{array}{ccc} & D(t) & \\ \hline * & \ldots & * \end{array} \right\|$,

$$D(t) = \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11}(t) & \beta_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \beta_2(t) & \ldots & 0 \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1}(t) & a_{n-1,2}(t) & \ldots & \ldots & \beta_{n-1}(t) \end{array} \right\| \in M_{n-1,n}.$$

Выпишем характеристический полином матрицы $A(t)$; его коэффициенты зависят от t

$$\chi\big(A(t);\lambda\big) = \det\big(\lambda I - A(t)\big) = \lambda^n + \mu_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + \mu_n(t).$$

Построим по этому многочлену матрицу Фробениуса

$$F(t)=\left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -\mu_n(t) & -\mu_{n-1}(t) & -\mu_{n-2}(t) & \ldots & -\mu_1(t)\end{array}\right\|.$$

Построим по матрице $A(t)$ матрицу

$$S_1(t)=\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_{11}(t) & \beta_1(t) & 0 & \ldots & 0\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \beta_2(t) & \ldots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill}\\ a_{n-1,1}(t) & a_{n-1,2}(t) & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & \beta_{n-1}(t)\end{array}\right\|.$$

Эта матрица получена из $A(t)$ вычеркиванием последней строки и приписыванием сверху строки e_1^*. Это нижняя треугольная матрица, ограниченная и непрерывная, невырожденная для всех $t\in\mathbb{R}$, ее определитель отделен от нуля, и для нее существует непрерывная ограниченная обратная матрица $S_1^{-1}(t)$. Построим матрицу $A_1(t)=S_1(t)A(t)S_1^{-1}(t)$.

Лемма 1. *Матрица* $A_1(t)$ *имеет вид*

$$A_1(t)=\left\|\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{11}(t) & \beta_1(t) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{21}(t) & a_{22}(t) & \beta_2(t) & \ldots & 0\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ 0 & a_{n-2,1}(t) & a_{n-2,2}(t) & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots} & \beta_{n-2}(t)\\ * & * & * & * & \ldots & *\end{array}\right\|,$$

здесь в последней строке стоят функции такие, что $\chi\bigl(A(t);\lambda\bigr)=\chi\bigl(A_1(t);\lambda\bigr)$.

З а м е ч а н и е 1. В этой лемме утверждается следующее. Если умножить на матрицу $A(t)$ слева $S_1(t)$ и справа $S_1^{-1}(t)$, то произойдут такие изменения: прямоугольный «несущий блок» $D(t)$ матрицы $A(t)$ сдвинется по диагонали вправо вниз, при этом последняя строка и последний столбец матрицы $D(t)$ потеряются, появятся первый столбец (высоты $n-1$), состоящий из нулей, и первая строка e_2^* (длины n); последняя строка матрицы $A(t)$ изменится таким образом, что характеристический полином сохранится. Формулировка леммы 1 корректна, поскольку по характеристическому многочлену матрицы $A_1(t)$ ее последняя строка восстанавливается однозначно. Это будет вытекать из следующего вспомогательного утверждения (для простоты записи будем опускать аргумент t).

Лемма 2. *Пусть даны две матрицы*

$$P=\begin{Vmatrix} a_{11} & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & \dots & \beta_{n-1} \\ p_1 & p_2 & \dots & \dots & p_n \end{Vmatrix}, R=\begin{Vmatrix} a_{11} & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & \dots & \beta_{n-1} \\ r_1 & r_2 & \dots & \dots & r_n \end{Vmatrix}$$

такие, что первые $n-1$ строк матриц P и R совпадают, $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n-1}$ и характеристические многочлены этих матриц совпадают: $\chi(P;\lambda) = \chi(R;\lambda)$. Тогда последние строки этих матриц совпадают, т. е. $p_i = r_i \ \ \forall\, i = \overline{1,n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим матрицу $\lambda I - P$. Обозначим через Δ_i, $i = \overline{1,n}$ главные миноры этой матрицы: $\Delta_1 = \lambda - a_{11}$, $\Delta_2 = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - \beta_1 a_{21}$, $\dots$, $\Delta_n = \det(\lambda I - P)$. Заметим, что $\forall\, i = \overline{1,n}$ степень многочлена Δ_i равна в точности i, старший коэффициент при λ^i равен 1. Разложим $\det(\lambda I - P)$ по последней строке, получим $\chi(P;\lambda) = (\lambda - p_n)\Delta_{n-1} - (-p_{n-1})(-\beta_{n-1})\Delta_{n-2} + (-p_{n-2})(-\beta_{n-1})(-\beta_{n-2})\Delta_{n-3} + \dots + (-1)^{n-2}(-p_2)(-\beta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (-\beta_2)\Delta_1 + (-1)^{n-1}(-p_1)(-\beta_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (-\beta_1) = (\lambda - p_n)\Delta_{n-1} - p_{n-1}\beta_{n-1}\Delta_{n-2} - p_{n-2}\beta_{n-1}\beta_{n-2}\Delta_{n-3} - \dots - p_2\beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_2\Delta_1 - p_1\beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_1$. Аналогично $\chi(R;\lambda) = (\lambda - r_n)\Delta_{n-1} - r_{n-1}\beta_{n-1}\Delta_{n-2} - r_{n-2}\beta_{n-1}\beta_{n-2}\Delta_{n-3} - \dots - r_2\beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_2\Delta_1 - r_1\beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_1$. Характеристические многочлены матриц совпадают. Вычтем из второго первый, получим $(p_n - r_n)\Delta_{n-1} + (p_{n-1} - r_{n-1})\beta_{n-1}\Delta_{n-2} + \dots + (p_2 - r_2)\beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_2\Delta_1 + (p_1 - r_1)\beta_{n-1} \cdot \ldots \cdot \beta_1 = 0$. Слева стоит многочлен от λ степени не выше $n-1$, справа 0, следовательно, все коэффициенты при λ^i, где $i = \overline{0, n-1}$, равны нулю. Поскольку коэффициент при λ^{n-1} равен нулю, а среди многочленов $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ лишь многочлен Δ_{n-1} имеет степень $n-1$, т. е. содержит одночлен λ^{n-1}, то коэффициент при Δ_{n-1} равен нулю, следовательно, $p_n = r_n$. Далее будем рассуждать аналогичным образом. Из того, что все $\beta_k > 0$ и все многочлены Δ_i имеют разную степень, получим, что $p_i = r_i \ \ \forall\, i = \overline{1,n}$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Поскольку $S_1(t) = \begin{Vmatrix} 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ \hline D(t) \end{Vmatrix}$, то $D(t)S_1^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \in M_{n-1,n}$.

Поэтому $A(t)S_1^{-1}(t) =$

$$\left\|\begin{array}{ccc} & D(t) & \\ \hline * & \dots & * \end{array}\right\| \cdot S_1^{-1}(t) = \left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ * & * & * & \dots & * \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline * & * & \dots & * \end{array}\right\|,$$

$I \in M_{n-1}$. Пусть матрица $\widehat{S}_1(t) \in M_{n-1}$ получена из $S_1(t)$ вычеркиванием последней строки и последнего столбца. Тогда

$$S_1(t) = \left\|\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \widehat{S}_1(t) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \dots & * & * \end{array}\right\|. \text{ Следовательно, } S_1(t)A(t)S_1^{-1}(t) =$$

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \widehat{S}_1(t) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \dots & * & * \end{array}\right\| \cdot \left\|\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ \hline * & * & \dots & * \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & \widehat{S}_1(t) & \\ 0 & & & \\ \hline * & * & \dots & * \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11}(t) & \beta_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{21}(t) & a_{22}(t) & \beta_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-2,1}(t) & a_{n-2,2}(t) & \dots & \dots & \beta_{n-2}(t) \\ * & * & * & * & \dots & * \end{array}\right\|. \text{ Лемма доказана. } \square$$

З а м е ч а н и е 2. Матрица $A_1(t)$ из леммы 1 имеет вид матрицы $A(t)$ из (10) (все элементы выше наддиагонали равны нулю). Поэтому мы можем построить для матрицы $A_1(t)$ соответствующим образом матрицу $S_2(t)$ (вычеркивая из $A_1(t)$ последнюю строку и приписывая сверху строку e_1^*) и $S_2^{-1}(t)$, затем построить матрицу $A_2(t) = S_2(t)A_1(t)S_2^{-1}(t)$ и применить лемму 1. В результате «несущий блок» снова сдвинется по диагонали вправо вниз, характеристический многочлен не изменится, матрица $A_2(t)$ будет иметь вид

$$A_2(t) = \left\|\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{11}(t) & \beta_1(t) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-3,1}(t) & a_{n-3,2}(t) & \dots & \beta_{n-3}(t) \\ * & * & * & * & \dots & * \end{array}\right\|.$$

Применив $n-1$ раз лемму 1, мы в результате придем к матрице

$$A_{n-1}(t) = \left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ * & * & * & \dots & * \end{matrix}\right\|, \tag{13}$$

причем $\chi\big(A_{n-1}(t);\lambda\big) = \chi\big(A(t);\lambda\big)$, но $\chi\big(A(t);\lambda\big) = \chi\big(F(t);\lambda\big)$, и $F(t)$ имеет вид (13), следовательно, $F(t) = A_{n-1}(t)$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Построим по матрице $A(t)$ из (10) $n\times n$-матрицы*

$$S_1(t) = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{11}(t) & \beta_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \beta_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1}(t) & a_{n-1,2}(t) & \dots & \dots & \beta_{n-1}(t) \end{matrix}\right\|,$$

$$S_2(t) = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{11}(t) & \beta_1(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-2,1}(t) & a_{n-2,2}(t) & \dots & \beta_{n-2}(t) \end{matrix}\right\|, \quad \dots,$$

$$S_{n-1}(t) = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{11}(t) & \beta_1(t) \end{matrix}\right\|$$

и матрицу $S(t) = S_{n-1}(t)\cdot\ldots\cdot S_1(t)$. Тогда $S(t)A(t)S^{-1}(t) = F(t)$.

Пусть управление в системе (9) строится по принципу линейной обратной связи в виде $u = U(t)x$, $U(t)\in M_{1,n}$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда система (9) перейдет в замкнутую систему

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x. \tag{14}$$

Рассмотрим произвольный многочлен $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$ с заданными коэффициентами $\gamma_i\in\mathbb{R}$. Построим по нему матрицу

Фробениуса

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\gamma_n & -\gamma_{n-1} & -\gamma_{n-2} & \ldots & -\gamma_1 \end{matrix} \right\|$$

Теорема 4. *Для любого вещественного набора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ найдется непрерывное ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, при котором матрица $A(t) + B(t)U(t)$ системы (14) «подобна» $\big($посредством нестационарной матрицы $S(t)\big)$ матрице Γ, т. е.*

$$A(t) + B(t)U(t) = S^{-1}(t)\Gamma S(t). \tag{15}$$

Доказательство. В силу теоремы 3 систему (14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Big(S^{-1}(t)F(t)S(t) + S^{-1}(t)S(t)B(t)U(t)S^{-1}(t)S(t)\Big)x = \\ &= \bigg(S^{-1}(t)\Big(F(t) + S(t)B(t)U(t)S^{-1}(t)\Big)S(t)\bigg)x. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что $S(t)B(t)$ — это $n \times 1$-матрица, в последней строке которой стоит $\beta_1(t) \cdot \ldots \cdot \beta_n(t)$, а остальные элементы равны нулю. Построим управление в виде $U(t) = \Big(\prod\limits_{i=1}^{n} \beta_i(t)\Big)^{-1} V(t)S(t)$, где $V(t) = (\mu_n(t) - \gamma_n, \ldots, \mu_1(t) - \gamma_1) \in M_{1,n}$, и подставим это управление в (16). Тогда матрица $F(t) + S(t)B(t)U(t)S^{-1}(t)$ совпадет с матрицей Γ. Отсюда будет вытекать утверждение теоремы. □

Предположим теперь, что система (9) стационарна, т. е. матрицы A и B из (10) постоянные. Тогда теорема 4 сразу дает ответ на вопрос о модальном управлении для системы (14), поскольку в этом случае матрица S будет постоянной, U постоянно, матрицы $A+BU$ и Γ подобны в прямом смысле и $\chi(A + BU; \lambda) = \chi(\Gamma; \lambda) = p(\lambda)$. Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема 5 (о модальном управлении). *Пусть коэффициенты системы (9) стационарны, т. е. $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$. Тогда для любого вещественного набора $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ найдется такая постоянная матрица $U \in M_{1,n}$ $\Big($которая имеет вид $U = \Big(\prod\limits_{i=1}^{n} \beta_i\Big)^{-1} \cdot (\mu_n - \gamma_n, \ldots, \mu_1 - \gamma_1) \cdot S\Big)$, что $A + BU = S^{-1}\Gamma S$.*

З а м е ч а н и е 3. Утверждение теоремы 5, естественно, не является новым, оно давно известно и вытекает из классического результата теории автоматического регулирования (сформулированного во введении), поскольку, как легко проверить, система (9), (10) с постоянными коэффициентами является вполне управляемой.

З а м е ч а н и е 4. В теореме 5 утверждается больше, чем просто совпадение характеристических многочленов матриц $A+BU$ и Γ, здесь утверждается подобие матриц $A+BU$ и Γ (характеристические многочлены подобных матриц совпадают, но из совпадения характеристических многочленов еще не следует подобие матриц). Таким образом, из теоремы 5 вытекает, что системы с матрицами $A+BU$ и Γ асимптотически эквивалентны, т. е. существует преобразование Ляпунова, связывающее две системы $\dot{x} = (A+BU)x$ и $\dot{y} = \Gamma y$, и в данном случае это преобразование — стационарное $y = Sx$. Подобие матриц двух стационарных систем является достаточным условием для асимптотической эквивалентности этих систем (но не необходимым), а совпадение характеристических многочленов матриц двух стационарных систем не является достаточным (и не является необходимым) условием для асимптотической эквивалентности этих систем (см. [5]).

Рассмотрим стационарное КдУ (12), квазипроизводные определены равенствами (11), они построены по стационарной матрице A. Рассмотрим задачу о модальном управлении стационарным квазидифференциальным уравнением с полной обратной связью. Требуется построить управление в уравнении (12) по принципу линейной обратной связи в виде

$$u = U\vec{z} = u_1 \cdot {}^0z + u_2 \cdot {}^1z + \ldots + u_n \cdot {}^{n-1}z, \tag{17}$$

$U = (u_1, \ldots, u_n) \in M_{1,n}$, $\vec{z} = \mathrm{col}({}^0z, {}^1z, \ldots, {}^{n-1}z)$, так, чтобы замкнутое этим управлением КдУ (12) было эквивалентно дифференциальному уравнению n-го порядка с наперед заданными постоянными коэффициентами

$$\xi^{(n)} + \gamma_1\xi^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n\xi = 0. \tag{18}$$

Обозначим $\vec{\xi} = \mathrm{col}(\xi, \dot{\xi}, \ldots, \xi^{(n-1)})$. Определим матрицу U равенством

$$U = \Bigl(\prod_{i=1}^{n} \beta_i\Bigr)^{-1} \cdot (\mu_n - \gamma_n, \ldots, \mu_1 - \gamma_1) \cdot S. \tag{19}$$

Теорема 6. *Для любого вещественного набора* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *найдется управление* U, *при котором КдУ* (12), (17) *эквивалентно уравнению* (18); *искомое управление имеет вид* (19); *эквивалентность задается равенством* $\vec{\xi} = S\vec{z}$.

Доказательство. Поскольку $\vec{z} = x$, то управление (19), подставленное в (17), приводит КдУ (12) к КдУ, эквивалентному системе $\dot{x} = (A + BU)x$. Произведем в этой системе замену координат $y = Sx$. В силу теоремы 5 эта система перейдет в систему $\dot{y} = \varGamma y$, а эта система эквивалентна уравнению (18), и эквивалентность задается соотношением $y = \vec{\xi}$. Таким образом, КдУ (12), (17) эквивалентно уравнению (18) и эквивалентность задается соотношением $\vec{\xi} = S\vec{z}$. □

Замечание 5. Возвращаясь к теореме 4 и к нестационарной системе (14), заметим, что хоть и выполнено соотношение (15) между матрицами $A(t)+B(t)U(t)$ и $\varGamma$, тем не менее отсюда, вообще говоря, не следует асимптотическая эквивалентность этих систем. Приведем пример двух систем, для которых выполнено соотношение (15), но которые не являются асимптотически эквивалентными.

Пример 1. Пусть $A(t) = \begin{Vmatrix} 2\operatorname{arctg} t & 1 \\ -4\operatorname{arctg}^2 t & -2\operatorname{arctg} t \end{Vmatrix}$. Тогда $\chi\bigl(A(t); \lambda\bigr) = \lambda^2$. Построим матрицу Фробениуса, она постоянная: $F = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. Тогда $S(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2\operatorname{arctg} t & 1 \end{Vmatrix}$, $S^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -2\operatorname{arctg} t & 1 \end{Vmatrix}$ и $A(t) = S^{-1}(t)FS(t)$. Выберем $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ и построим матрицу $\varGamma$. Тогда $\varGamma = F$. Выберем для этой матрицы управление по теореме 4. Тогда $U = 0$. Имеем $A(t) = S^{-1}(t)\varGamma S(t)$. Покажем, что системы $\dot{x} = A(t)x$ и $\dot{z} = \varGamma z$ не являются асимптотически эквивалентными. Обозначим через $X(t, s)$ и $Z(t, s)$ соответственно матрицы Коши этих систем. Тогда $Z(t, s) = \exp\bigl(\varGamma(t - s)\bigr) = \begin{Vmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Найдем матрицу Коши $X(t, s)$. Произведем преобразование $y = S(t)x$. Матрица $S(t)$ — это матрица Ляпунова. Система $\dot{x} = A(t)x$ перейдет в асимптотически эквивалентную систему

$$\dot{y} = C(t)y, \tag{20}$$

здесь $C(t) = \dot{S}(t)S^{-1}(t) + S(t)A(t)S^{-1}(t)$. Имеем $S(t)A(t)S^{-1}(t) = \varGamma$, $\dot{S}(t)S^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{2}{t^2+1} & 0 \end{Vmatrix}$. Поэтому $C(t) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{t^2+1} & 0 \end{Vmatrix}$. Обозначим

$Y(t,s)$ матрицу Коши системы (20). Система (20) имеет вид $\dot y_1 = y_2$, $\dot y_2 = \dfrac{2}{t^2+1} y_1$. Эта система эквивалентна уравнению второго порядка $\ddot y_1 - \dfrac{2}{t^2+1} y_1 = 0$. Это уравнение имеет фундаментальную систему решений $\varphi_1(t) = t^2+1$, $\varphi_2(t) = t + (t^2+1)\operatorname{arctg} t$. Отсюда находим фундаментальную матрицу системы (20), нормированную в нуле $Y(t,0) = \begin{Vmatrix} t^2+1 & \frac{1}{2}\big(t+(t^2+1)\operatorname{arctg} t\big) \\ 2t & 1 + t\operatorname{arctg} t \end{Vmatrix}$. Покажем, что система (20) и система $\dot z = \varGamma z$ не являются асимптотически эквивалентными. Предположим, что они асимптотически эквивалентны, т.е. существует ляпуновское преобразование $y = L(t)z$, связывающее эти системы. Тогда матрицы Коши этих систем связаны соотношением $Y(t,s) = L(t)Z(t,s)L^{-1}(s)$. Отсюда (при $s = 0$) получаем соотношение $L(t) = Y(t,0)L(0)Z(0,t)$. Пусть $L(0) = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ — некоторая невырожденная матрица, тогда $Y(t,0)L(0)Z(0,t) =$

$$\begin{Vmatrix} * & * \\ 2at + c(1+t\operatorname{arctg} t) & 2(b-at)t + (d-ct)(1+t\operatorname{arctg} t) \end{Vmatrix}.$$

Матрица $L(t)$ должна быть ограниченной при $t \to +\infty$, поэтому элементы $l_{21}(t)$, $l_{22}(t)$ должны быть ограничены. Рассмотрим $l_{21}(t) = 2at + c(1 + t\operatorname{arctg} t)$. Если эта функция ограничена при $t \to +\infty$, то необходимо $2a + c\cdot\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{c}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow l_{21}(t) = ct(\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{2}) + c \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} l_{21}(t) = 0$. Рассмотрим теперь $l_{22}(t) = 2(b-at)t + (d-ct)(1+t\operatorname{arctg} t)$. Имеем $l_{22}(t) = \big(2bt + d(1+t\operatorname{arctg} t)\big) - \big(2at^2 + ct(1+t\operatorname{arctg} t)\big)$. Поскольку $a = -\frac{c}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, то выражение в правой скобке равно $ct^2(\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{2}) + ct$. Предел этого выражения при $t \to +\infty$ равен нулю. Поэтому выражение в левой скобке должно быть ограничено, отсюда необходимо следует $b = -\frac{d}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$. Но тогда строки матрицы $L(0)$ будут линейно зависимы. Это противоречит невырожденности матрицы $L(0)$. Следовательно, системы (20) и $\dot z = \varGamma z$ не являются асимптотически эквивалентными. А поскольку (20) и $\dot x = A(t)x$ асимптотически эквивалентны, то $\dot x = A(t)x$ и $\dot z = \varGamma z$ не являются асимптотически эквивалентными.

Замечание 6. Требования, наложенные на матрицы $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, можно ослабить. Условие непрерывности и ограниченности $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ можно заменить на условие локальной суммируемости в $\mathbb{R}$ и ограниченности п.в. на $\mathbb{R}$. Условие $\beta_i(t) \geqslant \varkappa > 0$ $\forall\, i = \overline{1,n}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ можно заменить на условие ограниченности $\beta_i(t)$, $\big(\beta_i(t)\big)^{-1}$

$\forall\, i = \overline{1,n}$ п.в. $t \in \mathbb{R}$. Все сформулированные выше утверждения для нестационарных систем останутся справедливыми с некоторыми возможными изменениями. Соответствующие соотношения будут выполнены, может быть, не для всех $t \in \mathbb{R}$, а для п.в. $t \in \mathbb{R}$.

Предположим теперь, что коэффициенты матрицы $A(t)$ $n{-}1$ раз непрерывно дифференцируемы и все производные матрицы $A(t)$ до порядка $n-1$ включительно ограничены. Рассмотрим систему (14). Построим по матрице $A(t)$ вычеркиванием из нее последней строки и приписыванием сверху строки e_1^* матрицу $R_1(t) = \{r_{ij}^1(t)\}$, $i,j = \overline{1,n}$. Матрица $R_1(t)$ совпадает с $S_1(t)$. Произведем преобразование Ляпунова $x^1 = R_1(t)x$, $x^1 \in \mathbb{R}^n$. Система (14) перейдет в систему

$$\dot{x}^1 = \Big(C_1(t) + R_1(t)B(t)U(t)R_1^{-1}(t)\Big)x^1, \tag{21}$$

$C_1(t) = \dot{R}_1(t)R_1^{-1}(t) + R_1(t)A(t)R_1^{-1}(t)$. Здесь $R_1(t)A(t)R_1^{-1}(t)$ совпадает с матрицей $A_1(t)$ из леммы (1). Матрицы $R_1^{-1}(t)$ и $\dot{R}_1(t)$ — нижние треугольные, причем $\dot{r}_{11}^1(t) = 0$, поэтому левый верхний угловой элемент матрицы $\dot{R}_1(t)R_1^{-1}(t)$ равен нулю. Матрица $C_1(t)$ ограничена и $n-2$ раза непрерывно дифференцируема, она имеет вид матрицы $A(t)$ из (10), ее первая строка совпадает с e_2^*, ее наддиагональ совпадает с наддиагональю матрицы $A_1(t)$. Далее, построим по матрице $C_1(t)$ вычеркиванием из нее последней строки и приписыванием сверху строки e_1^* матрицу $R_2(t)$. Имеем $r_{11}^2(t) = r_{22}^2(t) = 1$, $r_{21}^2(t) = 0$, следовательно, $\dot{r}_{11}^2(t) = \dot{r}_{22}^2(t) = \dot{r}_{21}^2(t) = 0$. Произведем преобразование Ляпунова $x^2 = R_2(t)x^1$, $x^2 \in \mathbb{R}^n$. Система (21) перейдет в систему

$$\dot{x}^2 = \Big(C_2(t) + R_2(t)R_1(t)B(t)U(t)R_1^{-1}(t)R_2^{-1}(t)\Big)x^2,$$

$C_2(t) = \dot{R}_2(t)R_2^{-1}(t) + R_2(t)C_1(t)R_2^{-1}(t)$. Первые две строки матрицы $\dot{R}_2(t)R_2^{-1}(t)$ нулевые. По построению первая и вторая строки матрицы $R_2(t)C_1(t)R_2^{-1}(t)$ совпадают с e_2^* и e_3^* соответственно. Матрица $C_2(t)$ ограничена и $n-3$ раза непрерывно дифференцируема, она имеет вид матрицы $A(t)$ из (10), ее первые две строки есть e_2^* и e_3^*, ее наддиагональ совпадает с наддиагональю матрицы $A_2(t)$. И так далее. Проделаем описанную операцию $n-1$ раз, на каждом шаге будем строить преобразование Ляпунова $x^i = R_i(t)x^{i-1}$. Обозначим $R(t) = R_{n-1}(t) \cdot \ldots \cdot R_1(t)$. В результате придем к системе

$$\dot{x}^{n-1} = \Big(C_{n-1}(t) + R(t)B(t)U(t)R^{-1}(t)\Big)x^{n-1}, \tag{22}$$

здесь $C_{n-1}(t)$ — матрица Фробениуса, ее наддиагональ состоит из единиц, в последней строке стоят некоторые функции $\bigl(-\nu_n(t),\ldots,-\nu_1(t)\bigr)$. Далее, $R_i(t), R(t)$ — это нижние треугольные матрицы. Заметим, что в каждой из матриц $R_i(t)$ диагональ в точности совпадает с диагональю матрицы $S_i(t)$. Поэтому в матрице $R(t)B(t)$ в последней строке стоит $\prod\limits_{i=1}^{n}\beta_i(t)$, а остальные элементы равны нулю. Построим управление

$$U(t)=\Bigl(\prod_{i=1}^{n}\beta_i(t)\Bigr)^{-1}V(t)R(t), \tag{23}$$

где $V(t)=(\nu_n(t)-\gamma_n,\ldots,\nu_1(t)-\gamma_1)\in M_{1,n}$, и подставим это управление в (22). Тогда матрица этой системы совпадет с матрицей $\mathit{\Gamma}$. Системы (22) и (14) (с одним и тем же управлением) асимптотически эквивалентны посредством преобразования Ляпунова $x^{n-1}=R(t)x$. Таким образом, справедлива следующая теорема о ляпуновской приводимости нестационарной системы (14) к системе с матрицей $\mathit{\Gamma}$.

Теорема 7. *Для любой матрицы $\mathit{\Gamma}$ найдется управление $U(t)$ такое, что система* (14) *с этим управлением асимптотически эквивалентна системе $\dot y=\mathit{\Gamma}y$. Искомое управление имеет вид* (23)*. Ляпуновское преобразование, связывающее две системы, имеет вид $y=R(t)x$.*

З а м е ч а н и е 7. Теорема 7 уточняет теорему 3 работы [4]. Отметим, что построенное управление является неупреждающим (в том смысле, что для построения управления в момент t не используется информация о матрицах $A(s)$ и $B(s)$ при $s>t$) и стационарным относительно потока (в терминах динамической системы сдвигов [4]), а ляпуновское преобразование, приводящее систему (14) к системе $\dot y=\mathit{\Gamma}y$, не зависит от $\mathit{\Gamma}$ и тоже является стационарным относительно потока. Стационарность означает, что если матрицы системы (9) постоянные (или периодические, или рекуррентные), то и управление, и ляпуновское преобразование тоже будут постоянными (соответственно периодическими или рекуррентными). Отметим также, что если матрицы системы (9) постоянные, то R_i совпадают с S_i для всех $i=\overline{1,n}$ и $R=S$.

З а м е ч а н и е 8. Требования на гладкость матрицы $A(t)$ в теореме 7 можно ослабить. Для того чтобы матрицы $R_i(t)$ для п.в. $t\in\mathbb{R}$ были дифференцируемы, ограничены и имели ограниченные

$R_i^{-1}(t)$, $\dot{R}_i(t)$, достаточно, чтобы элементы n-й строки были локально суммируемы и ограничены для п.в. $t \in \mathbb{R}$; элементы $n-1$-й строки были локально абсолютно непрерывны, ограничены и имели ограниченные производные для п.в. $t \in \mathbb{R}$; элементы $n-2$-й строки были ограничены, имели ограниченную локально абсолютно непрерывную производную и ограниченную вторую производную для п.в. $t \in \mathbb{R}$ и т. д. (при переходе на одну строку вверх гладкость повышается на 1).

Из рассуждений, приведенных перед теоремой 7, вытекает, что КдУ (12) можно привести при помощи преобразования $\vec{\xi} = R(t)\vec{z}$ к обыкновенному дифференциальному уравнению n-го порядка:

$$\xi^{(n)} + \nu_1(t)\xi^{(n-1)} + \ldots + \nu_n(t)\xi = \prod_{i=1}^{n} \beta_i(t)u. \tag{24}$$

Управление $u = U(t)\vec{z} = U(t)R^{-1}(t)\vec{\xi}$, где $U(t)$ определено равенством (23), приводит уравнение (24) к наперед заданному уравнению (18).

§2. Модальное управление КдУ с неполной обратной связью

Пусть задана постоянная матрица A вида (10). Построим по этой матрице квазипроизводные по формулам (11), здесь $\beta_n = 1$. Рассмотрим задачу о существовании модального управления для линейного стационарного КдУ с неполной обратной связью. Пусть задано КдУ n-го порядка, на вход которого подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния объекта z и его квазипроизводных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$\begin{gathered} {}^{n}z = b_{p1}v_1^{(n-p)} + b_{p+1,1}v_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1}v_1 + \ldots \\ + b_{pm}v_m^{(n-p)} + \ldots + b_{nm}v_m, \quad z \in \mathbb{R}, \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered} y_1 = c_{11} \cdot {}^{0}z + \ldots + c_{p1} \cdot {}^{p-1}z, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = c_{1k} \cdot {}^{0}z + \ldots + c_{pk} \cdot {}^{p-1}z, \end{gathered} \tag{26}$$

$v = \operatorname{col}(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ — выходной вектор. Построим по системе (25), (26) матрицы $B \in M_{n,m}$, $C \in M_{n,k}$ по формуле (8). Задача модального управления заключается в построении управления в виде неполной обратной связи:

$$v = Uy, \quad U \in M_{m,k}, \tag{27}$$

так, чтобы система (25), (26), замкнутая управлением (27), была эквивалентна заданному уравнению (18). В случае, когда квазипроизводные совпадают с обычными производными, эта задача была решена в работе [1] (см. теорему 2).

Отметим, что система (12), (17) — это частный случай системы (25), (26), (27) при $p=n$, $m=1$, $k=n$, $C=I$, $b_{n1}=\beta_n$. Следующая теорема обобщает теорему 1.

Теорема 8. *Пусть обратная связь* (27) *приводит систему* (25), (26) *к уравнению, эквивалентному* (18). *Тогда для коэффициентов* γ_i *уравнения* (18) *выполнены соотношения* $\gamma_i=\mu_i-\operatorname{Sp}C^*S^{-1}J_{i-1}BU$, $i=\overline{1,n}$.

Доказательство. Произведем преобразование $\vec{\xi}=S\vec{z}$ над КдУ (25), (26). Тогда оно перейдет в ДУ n-го порядка:

$$\begin{gathered}\xi^{(n)}+\mu_1\xi^{(n-1)}+\ldots+\mu_n\xi=\\ =b_{p1}v_1^{(n-p)}+b_{p+1,1}v_1^{(n-p-1)}+\ldots+b_{n1}v_1+\ldots\\ +b_{pm}v_m^{(n-p)}+\ldots+b_{nm}v_m,\\ y=C^*S^{-1}\vec{\xi},\end{gathered}$$

причем матрица $C^*S^{-1}\in M_{k,n}$ имеет тот же вид, что и матрица $C^*\in M_{k,n}$ (ее столбцы с $p+1$-го по n-й нулевые). Теперь воспользуемся теоремой 1, где вместо C^* подставим C^*S^{-1} и μ_i вместо a_i. Получим требуемое утверждение. □

Из теоремы 8 вытекает теорема о модальном управлении КдУ (25), (26) — аналог теоремы 2. Построим матрицы $C^*S^{-1}J_0B$, …, $C^*S^{-1}J_{n-1}B$ и матрицу $P=[\operatorname{vec}C^*S^{-1}J_0B,\ldots,\operatorname{vec}C^*S^{-1}J_{n-1}B]\in M_{mk,n}$. Пусть $\mu=\operatorname{col}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n$, $\gamma=\operatorname{col}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^n$.

Теорема 9. *Система* (25), (26) *обладает модальным управлением тогда и только тогда, когда матрицы* $C^*S^{-1}J_0B,\ldots,C^*S^{-1}J_{n-1}B$ *линейно независимы, и в этом случае матрица* U *обратной связи, приводящая систему* (25), (26) *к уравнению, эквивалентному* (18), *находится из соотношения* $w=P(P^*P)^{-1}(\mu-\gamma)$, *где* $w=\operatorname{vec}U^*$.

Доказательство теоремы 9 аналогично доказательству теоремы 2 в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев В. А. Модальное управление линейным дифференциальным уравнением с неполной обратной связью // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 1. С. 133–135.
2. Зайцев В. А. Согласованность и управление показателями Ляпунова // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 2(17). С. 3–40.
3. Дерр В. Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 1(16). С. 3–105.
4. Тонков Е. Л. Равномерная достижимость и ляпуновская приводимость билинейной управляемой системы // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 1. С. 209–238.
5. Зайцев В. А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестн. Удм. ун-та. Сер. Математика. Ижевск, 2003. С. 31–62.

Поступила в редакцию 01.10.2003

V. A. Zaitsev

Modal control for linear quasi-differential equation

Necessary and sufficient conditions of modal control have been obtained for a stationary quasi-differential equation by complete or incomplete feedback. For non-stationary quasi-differential equation feedback and the Lyapunov transformation have been constructed reducing closed-loop equation to a preset differential equation.

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный университет
Кафедра дифференциальных уравнений
426034, Россия
Ижевск, ул. Университетская, 1(корп. 4)
e-mail: verba@udm.ru