

*ОПТИМИЗАЦИЯ,
УПРАВЛЕНИЕ,
ИНТЕЛЛЕКТ*

2(10)
2005

Достижимость и ляпуновская приводимость линейных управляемых систем дифференциальных уравнений*

В.А. Зайцев (verba@udm.ru, imi@uni.udm.ru)

Удмуртский государственный университет, Ижевск

Аннотация. Введено определение глобальной достижимости и глобальной ляпуновской приводимости системы $\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x$, $x \in \mathbf{R}^n$. Доказано, что если $n \leq 4$, матрицы A и B постоянны и стационарная система $\dot{x} = Ax + Bu$ вполне управляема, то система $\dot{x} = (A + BU(t))x$ обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости к наперед заданной стационарной системе $\dot{y} = Cy$ в классе кусочно постоянных управлений.

Ключевые слова: линейная управляемая система, асимптотическая эквивалентность, достижимость, ляпуновская приводимость.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (0.1)$$

где $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ — ограниченные, кусочно непрерывные на $\mathbf{R}$ вещественные матричные функции. Введем некоторые обозначения и определения: $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$; $M_{m,n}$ — пространство $(m \times n)$ -матриц ($M_n := M_{n,n}$) с вещественными коэффициентами с нормой $|H| = \max_{|x|=1} |Hx|$; $KC_{m,n}(\Delta)$ — пространство

ограниченных кусочно непрерывных отображений $U : \Delta \rightarrow M_{m,n}$, $\Delta \subset \mathbf{R}$, с равномерной нормой $\|U\| = \sup_{t \in \Delta} |U(t)|$, $KC_n(\Delta) := KC_{n,n}(\Delta)$; $G_n := \{H \in M_n : \det H > 0\}$,

$G_n(N) := \{H \in G_n : (|H| \leq N) \& (\det H \geq \frac{1}{N} > 0)\}$. Пусть управление в системе (0.1) строится линейным по фазовым переменным $u = U(t)x$, где $U \in KC_{m,n}(\mathbf{R})$. Тогда система (0.1) переходит в однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x. \quad (0.2)$$

Обозначим через $X_U(t, s)$ матрицу Коши системы (0.2) с управлением $U(t)$. Напомним [1], что преобразование $y = L(t)x$ линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = P(t)x \quad (0.3)$$

называется *преобразованием Ляпунова*, если его матрица (называемая *матрицей Ляпунова*) $L(\cdot)$ — это кусочно-непрерывно дифференцируемая, невырожденная на $\mathbf{R}$ функция и $\sup_t \{|L(t)| + |L^{-1}(t)| + |\dot{L}(t)|\} < +\infty$. Применение преобразования Ляпунова к системе (0.3) переводит ее в систему

$$\dot{y} = Q(t)y, \quad (0.4)$$

где

$$Q(t) = L(t)P(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t). \quad (0.5)$$

* Работа поддержана РФФИ, грант 03-01-00014, и программой Университеты России, грант 34125.

В этом случае матрицы $P(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ называются *кинематически подобными*, а соответствующие им системы (0.3) и (0.4) называются *асимптотически эквивалентными*. Хорошо известно, что преобразования Ляпунова образуют группу, а формула (0.5) задает действие этой группы на множестве $M_n := KC_n(\mathbf{R})$. Величины и свойства, сохраняющиеся под действием группы ляпуновских преобразований, называются *ляпуновскими (асимптотическими) инвариантами*.

Определение 1. Система (0.2) обладает свойством *глобальной ляпуновской приводимости*, если для любой системы

$$\dot{y} = C(t)y, \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (0.6)$$

с матрицей $C \in KC_n(\mathbf{R})$ найдется управление $U \in KC_{m,n}(\mathbf{R})$ такое, что система (0.2) с этим управлением асимптотически эквивалентна системе (0.6).

В ряде работ (см., например, [2–7]) были получены различные результаты о глобальной и локальной ляпуновской приводимости и об управляемости отдельных ляпуновских инвариантов, в частности, показателей Ляпунова. Здесь получены некоторые новые результаты о глобальной ляпуновской приводимости системы (0.2), когда матрицы A и B постоянны, а в качестве допустимых управлений берутся кусочно постоянные функции $U(t)$.

Одним из достаточных условий глобальной ляпуновской приводимости является условие глобальной достижимости. Зафиксируем начальный момент времени τ . Рассмотрим множество достижимости $D_\vartheta(\tau)$ матричной системы $\dot{X} = (A(t) + B(t)U(t))X$, отвечающей системе (0.2), в пространстве M_n за время ϑ из точки $X(\tau) = I$ под действием управлений $U \in KC_{m,n}([\tau, \tau + \vartheta])$. Тогда $D_\vartheta(\tau) = \{X_U(\tau + \vartheta, \tau) : U \in KC_{m,n}([\tau, \tau + \vartheta])\}$. Если множество $D_\vartheta(\tau)$ совпадает с множеством G_n (т.е. можно достичь любую матрицу с положительным определителем), то система (0.2) называется *глобально достижимой на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$* . Сформулируем это определение более строго.

Определение 2. Система (0.2) называется *глобально достижимой на $[\tau, \tau + \vartheta]$* , если для любого $N > 0$ существует число $l = l(N) > 0$ такое, что для всякой матрицы $H \in G_n(N)$ найдется управление $U \in KC_{m,n}([\tau, \tau + \vartheta])$, $\|U\| \leq l$, при котором матрица Коши системы (0.2) удовлетворяет условию $X_U(\tau + \vartheta, \tau) = H$.

Соответственно, матрица H называется *достижимой на этом отрезке*. В этом определении говорится, что если матрица H ограничена и ее определитель отделен от нуля, то и управление, обеспечивающее достижимость матрицы H , будет ограниченным, причем по константе N , ограничивающей матрицу H , можно заранее указать константу l , ограничивающую управление U . Ясно, что если устремить $|H_n| \rightarrow +\infty$ или $\det H_n \rightarrow +0$, то при фиксированном ϑ соответствующие управления будут неограниченными.

Далее, система (0.2) называется *глобально достижимой*, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (0.2) глобально достижима на $[\tau, \tau + \vartheta]$.

Система (0.2) называется *ϑ -равномерно глобально достижимой*, если она является глобально достижимой на каждом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$, $\tau \in \mathbf{R}$, длины ϑ , причем константа l не зависит от τ , т.е. является равномерной. Система (0.2) называется *равномерно глобально достижимой*, если найдется $\vartheta > 0$ такое, что система (0.2) ϑ -равномерно глобально достижима.

ТЕОРЕМА 1 [7]. Свойство (равномерной) глобальной достижимости системы (0.2) инвариантно относительно преобразования Ляпунова.

Известно, что если матрицы Коши $Y(t, s)$ и $Z(t, s)$ двух систем $\dot{y} = F(t)y$ и $\dot{z} = G(t)z$, $F, G \in KC_n(\mathbf{R})$, совпадают на относительно плотном множестве T , т.е. $Y(t, s) = Z(t, s)$ для любых $t, s \in T$, то эти системы асимптотически эквивалентны посредством преобразования $y = L(t)z$, где $L(t) = Y(t, 0)Z(0, t)$ — матрица Ляпунова. Из этого факта вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 Если система (0.2) равномерно глобально достижима, то она обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему (0.6). Пусть $Y(t, s)$ — ее матрица Коши. Выберем относительно плотное множество $T = \{k\vartheta, k \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{R}$, где ϑ — из определения равномерной глобальной достижимости. Рассмотрим матрицы $Y((k+1)\vartheta, k\vartheta)$, $k \in \mathbf{Z}$. В силу ограниченности $C(t)$ существует константа $N > 0$ такая, что $|Y((k+1)\vartheta, k\vartheta)| \leq N$ и $\det Y((k+1)\vartheta, k\vartheta) \geq \frac{1}{N} > 0$ для всех $k \in \mathbf{Z}$. На каждом из отрезков $[k\vartheta, (k+1)\vartheta]$ построим управление $U \in KC_{m,n}([k\vartheta, (k+1)\vartheta])$, $\|U\| \leq l$, обеспечивающее равенство $X_U((k+1)\vartheta, k\vartheta) = Y((k+1)\vartheta, k\vartheta)$. Константа l зависит от N , а N — равномерная для всех $k \in \mathbf{Z}$, поэтому управление $U(t)$ будет ограничено на $\mathbf{R}$. Таким образом, матрицы Коши систем (0.2) и (0.6) будут совпадать на относительно плотном множестве T (в силу группового свойства матрицы Коши), и системы (0.2) и (0.6) будут асимптотически эквивалентны. Теорема доказана. $\square$

Перейдем теперь к случаю, когда матрицы A и B постоянны. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m. \quad (0.7)$$

Управление строим в виде $u = Ux$, $U = U(t)$, соответствующая замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = (A + BU)x, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (0.8)$$

Требуется для произвольной стационарной системы

$$\dot{y} = Cy, \quad y \in \mathbf{R}^n, \quad (0.9)$$

построить управление U , при котором система (0.8) была бы асимптотически эквивалентна системе (0.9). Если управление и матрица Ляпунова будут постоянными, это просто будет означать, что матрицы $A + BU$ и C подобны.

Будем решать эту задачу в предположении, что система (0.7) вполне управляема. Это означает, что $\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$. Известна следующая теорема [8, § 34] о глобальной управляемости коэффициентов характеристического многочлена.

ТЕОРЕМА 3 Полная управляемость системы (0.7) эквивалентна тому, что для любых чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbf{R}$ найдется постоянная матрица $U \in M_{m,n}$ такая, что характеристический многочлен $\chi(A + BU; \lambda)$ матрицы $A + BU$ имеет заданные коэффициенты, т.е. $\chi(A + BU; \lambda) = \lambda^n + \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \gamma_n$.

В доказательстве теоремы 3 управление U строится так, что у матрицы $A + BU$ характеристический многочлен совпадает с минимальным. Поэтому эта теорема дает частичный ответ на вопрос о глобальной ляпуновской приводимости: для матриц C , у которых характеристический многочлен совпадает с минимальным (или, что то же самое, имеется единственный нетривиальный инвариантный многочлен) существует постоянное U такое, что $A + BU \sim C$ (в этом случае L также постоянно). Но в случае, когда C имеет не единственный нетривиальный инвариантный многочлен, уже не существует постоянного U , обеспечивающего подобие $A + BU$ и C . Теорема 3 в этом случае не работает, и приходится отказываться от стационарности L и (или) U .

В работах [6, 7] были доказаны теоремы.

ТЕОРЕМА 4 Пусть $n = 2$ или $n = 3$. Предположим, что система (0.7) вполне управляема. Тогда система (0.8) равномерно глобально достижима в классе кусочно постоянных управлений.

Из теорем 2 и 4 теперь вытекает теорема о глобальной ляпуновской приводимости (для $n \leq 3$) к произвольной (не обязательно стационарной) системе (0.6).

ТЕОРЕМА 5 [7]. Пусть $n = 2$ или $n = 3$ и пусть система (0.7) вполне управляема. Тогда для любой системы $\dot{y} = C(t)y$ вида (0.6) найдется кусочно постоянное ограниченное управление $U = U(t)$, $t \in \mathbf{R}$, при котором система (0.8) асимптотически эквивалентна заданной системе (0.6).

Если же решать задачу о приводимости к стационарной системе (0.9), то можно доказать теорему, аналогичную теореме 5, без использования теоремы 2, а напрямую, и построенное управление будет проще.

ТЕОРЕМА 6 Пусть $n = 2$ и пусть система (0.7) вполне управляема. Тогда для любой стационарной системы (0.9) найдется постоянная матрица $U \in M_{n,2}$ такая, что система (0.8) с этой матрицей асимптотически эквивалентна заданной системе (0.9).

ТЕОРЕМА 7 Пусть $n = 3$ и пусть система (0.7) вполне управляема. Тогда для любой стационарной системы $\dot{y} = Cy$ вида (0.9) найдется управление $U = U(t)$, при котором система (0.8) асимптотически эквивалентна заданной системе (0.9). Причем если матрица C имеет элементарные делители $(\lambda - a)^2$, $(\lambda - a)$, то управление $U = U(t)$ можно выбрать кусочно постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом $\vartheta > 0$ с тремя переключениями на отрезках длины ϑ ; в других случаях управление можно выбрать постоянным.

Доказательства этих теорем также можно найти в работе [7]. Докажем теперь аналогичную теорему для $n = 4$.

ТЕОРЕМА 8 Пусть $n = 4$ и пусть система (0.7) вполне управляема. Тогда для любой стационарной системы $\dot{y} = Cy$ вида (0.9) найдется управление $U = U(t)$, при котором система (0.8) асимптотически эквивалентна заданной системе (0.9). Причем: а) если матрица C имеет элементарные делители $(\lambda - a)^3$, $(\lambda - a)$, то

управление $U = U(t)$ можно выбрать кусочно постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом $\vartheta > 0$ с 3 переключениями на отрезках длины ϑ ; б) если матрица C имеет элементарные делители $(\lambda - a)^2, (\lambda - a), (\lambda - b), b \neq a$, то управление $U = U(t)$ можно выбрать кусочно постоянным, периодическим с любым наперед заданным периодом $\vartheta > 0$ с 4 переключениями на отрезках длины ϑ ; в других случаях управление можно выбрать постоянным.

Доказательство. Для доказательства теоремы 8 воспользуемся следующей леммой, доказательство которой можно найти в [8, § 34].

ЛЕММА 1 Если система (0.7) вполне управляема, то существуют матрицы $S \in M_n, Q \in M_{m,n}, q \in M_{m,1}$ такие, что

$$S(A + BQ)S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad SBq = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (0.10)$$

Произведем преобразование $\tilde{x} = Sx$ системы (0.8). Она перейдет в асимптотически эквивалентную систему

$$\dot{\tilde{x}} = (SAS^{-1} + SBUS^{-1})\tilde{x}. \quad (0.11)$$

Пусть $\tilde{A} = S(A + BQ)S^{-1} \in M_n, \tilde{B} = SBq \in M_{n,1}$. Рассмотрим систему

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{U})\tilde{x}. \quad (0.12)$$

Пусть управление $\tilde{U}$ обеспечивает для системы (0.12) асимптотическую эквивалентность системе (0.9). Тогда управление $U = Q + q\tilde{U}S$ будет обеспечивать для системы (0.11) это же свойство (поскольку при таком управлении системы (0.12) и (0.11) будут совпадать), а значит и для системы (0.8) — это же свойство (поскольку матрицы систем (0.11) и (0.8) подобны). Поэтому без ограничения общности можно считать, что $m = 1$, матрицы A и B имеют вид (0.10) и $U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in M_{1,4}$. Тогда система (0.8) для $n = 4$ имеет вид

$$\dot{x} = (A + BU)x, \quad A + BU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}. \quad (0.13)$$

Для произвольной системы (0.9) возможны следующие варианты собственных значений (СЗ) λ_i ($i = 1, \dots, 4$) и элементарных делителей (ЭД) матрицы $C \in M_4$.

1. Все λ_i вещественны и различны.
- 2.1. ЭД: $(\lambda - a)^2, (\lambda - b), (\lambda - c), a \neq b \neq c \neq a$.
- 2.2. ЭД: $(\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - b), (\lambda - c), a \neq b \neq c \neq a$.
- 2.3. ЭД: $(\lambda - a)^2, (\lambda - b)^2, a \neq b$.
- 2.4. ЭД: $(\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - b)^2, a \neq b$.
- 2.5. ЭД: $(\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - b), (\lambda - b), a \neq b$.

3.1. ЭД: $(\lambda - a)^3, (\lambda - b), a \neq b$.

3.2. ЭД: $(\lambda - a)^2, (\lambda - a), (\lambda - b), a \neq b$.

3.3. ЭД: $(\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - b), a \neq b$.

4.1. ЭД: $(\lambda - a)^4$.

4.2. ЭД: $(\lambda - a)^3, (\lambda - a)$.

4.3. ЭД: $(\lambda - a)^2, (\lambda - a)^2$.

4.4. ЭД: $(\lambda - a)^2, (\lambda - a), (\lambda - a)$.

4.5. ЭД: $(\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - a), (\lambda - a)$.

5.1. ЭД: $(\lambda - (a + \alpha i)), (\lambda - (a - \alpha i)), (\lambda - b), (\lambda - c), b \neq c$.

5.2. ЭД: $(\lambda - (a + \alpha i)), (\lambda - (a - \alpha i)), (\lambda - b)^2$.

5.3. ЭД: $(\lambda - (a + \alpha i)), (\lambda - (a - \alpha i)), (\lambda - b), (\lambda - b)$.

6.1. ЭД: $(\lambda - (a + \alpha i)), (\lambda - (a - \alpha i)), (\lambda - (b + \beta i)), (\lambda - (b - \beta i))$ и все СЗ различны.

6.2. ЭД: $(\lambda - (a + \alpha i))^2, (\lambda - (a - \alpha i))^2$.

6.3. ЭД: $(\lambda - (a + \alpha i)), (\lambda - (a + \alpha i)), (\lambda - (a - \alpha i)), (\lambda - (a - \alpha i))$.

В случаях 1, 2.1, 2.3, 3.1, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1, 6.2 матрица C имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен, следовательно, она подобна некоторой матрице вида (0.13). Поэтому найдется постоянное U такое, что $A + BU \sim C$. Здесь матрица L стационарна. Это тот случай, когда применима теорема 3. Построим, к примеру, управление U для случая 2.3. Выпишем характеристический многочлен матрицы C : $\chi(C; \lambda) = \lambda^4 - (2a + 2b)\lambda^3 + (a^2 + b^2 + 4ab)\lambda^2 - 2ab(a + b)\lambda + a^2b^2$. Выбираем U так, что $u_1 = -a^2b^2$, $u_2 = 2ab(a + b)$, $u_3 = -(a^2 + b^2 + 4ab)$, $u_4 = (2a + 2b)$. Тогда матрица (0.13) с таким управлением и матрица C будут подобны.

Далее рассмотрим, к примеру, случай 2.5. Матрица C имеет 2 нетривиальных инвариантных многочлена, поэтому не существует постоянного U такого, что матрица $A + BU$ из (0.13) подобна C . Применим следующий прием. Матрица $C \sim P :=$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \text{ Построим матрицу } R = \begin{pmatrix} a & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & b \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha, \beta > 0 \text{ — некоторые ве-}$$

щественные числа. Системы с матрицами C и P асимптотически эквивалентны (так как $C \sim P$). Далее, можно непосредственно проверить, что системы $\dot{y} = Py$ и $\dot{z} = Rz$ асимптотически эквивалентны посредством преобразования Ляпунова $z = L(t)y$,

$$\text{где } L(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 & 0 \\ \sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta t & -\sin \beta t \\ 0 & 0 & \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}. \text{ В свою очередь, матрица } R \text{ имеет}$$

единственный нетривиальный инвариантный многочлен, т.е. существует постоянная матрица U такая, что $A + BU \sim R$. Таким образом, (по транзитивности) существует постоянное управление U , обеспечивающее асимптотическую эквивалентность систем (0.13) и (0.9). Соответствующее преобразование Ляпунова будет в этом случае нестационарным. Аналогично разбираются случаи 2.2, 2.4, 3.3, 4.4, 4.5. Каждый раз в качестве матрицы P берем нормальную жорданову форму матрицы C , а в качестве R — матрицу, имеющую единственный нетривиальный инвариантный многочлен (т.е. подобную матрице (0.13) при некотором U) и кинематически подобную матрице

P . Далее, в случае 5.3 $C \sim P := \begin{pmatrix} a & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$. Берем $R = \begin{pmatrix} a & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & b \end{pmatrix}$. В

случае 6.3 $C \sim P := \begin{pmatrix} a & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & a \end{pmatrix}$. Берем $R = \begin{pmatrix} a & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & a \end{pmatrix}$. В случае 4.3

$C \sim P := \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Берем $R = \begin{pmatrix} a & -\alpha & 1 & 0 \\ \alpha & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & a \end{pmatrix}$. Остались случаи 3.2 и 4.2;

можно показать, что для них не существует постоянного управления U такого, что $A + BU$ и C кинематически подобны (даже посредством нестационарной матрицы Ляпунова $L(t)$). Доказательство для этих случаев будем проводить следующим образом. Рассмотрим некоторую матрицу D , подобную C . Зафиксируем некоторое число $\vartheta > 0$. Докажем, что матрица $\exp(D\vartheta)$ является достижимой на $[0, \vartheta]$ для системы (0.13), т.е. найдется управление $U(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, такое, что $X_U(\vartheta, 0) = \exp(D\vartheta)$. Продолжим это управление периодически на $\mathbf{R}$, получим, что $X_U((k+1)\vartheta, k\vartheta) = \exp(D\vartheta)$ для всех $k \in \mathbf{Z}$. Тогда система (0.13) с этим управлением и система $\dot{y} = Dy$ будут асимптотически эквивалентны, а так как $D \sim C$, то (0.13) и (0.9) будут эквивалентны. Достижимость матрицы $\exp(D\vartheta)$ докажем так: разобьем отрезок $[0, \vartheta]$ на несколько частей и на каждом отрезке будем строить постоянное управление. Тогда матрица Коши $X_U(\vartheta, 0)$ на отрезке $[0, \vartheta]$ — это произведение экспонент матриц (0.13) при различных U_i . Таким образом, задача заключается в том, чтобы представить $\exp(D\vartheta)$ в виде $\prod_{i=1}^r \exp((A + BU_i)T_i)$.

В случае 3.2 берем $D = \begin{pmatrix} a & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Пусть $T = \vartheta/4$. Пусть $x_0 > 0$ — это

корень уравнения $e^x - 1 = \frac{x^2 + 4\pi^2}{2x}$. Положим $p = \frac{x_0}{T}$, $q = 2\frac{\pi}{T}$. Строим управление: $U_1(t) \equiv U_1$, $t \in [0, T)$, такое, чтобы матрица $A + BU_1$ имела собственные значения $p \pm qi$, 0 , 0 (т.е. берем $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = -p^2 - q^2$, $u_4 = 2p$); $U_2(t) \equiv U_2$, $t \in [T, 2T)$, такое, чтобы матрица $A + BU_2$ имела собственные значения $-p \pm qi$, 0 , 0 (т.е. берем $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = -p^2 - q^2$, $u_4 = -2p$); $U_3(t) \equiv U_3$, $t \in [2T, 4T]$, такое, чтобы матрица $A + BU_3$ имела собственные значения $\eta \pm \mu i$, $\eta \pm \nu i$, где $\eta = 2a$, $\mu = \pi/T$, $\nu = 2\pi/T$ (т.е. берем $u_1 = -(\eta^2 + \mu^2)(\eta^2 + \nu^2)$, $u_2 = 2\eta(2\eta^2 + \mu^2 + \nu^2)$, $u_3 = -6\eta^2 - \mu^2 - \nu^2$, $u_4 = 4\eta$). Вычисляя матрицу Коши на каждом из отрезков, получим

$$X_U(4T, 0) = X_U(4T, 2T)X_U(2T, 0) = \exp((A + BU_3)2T) \cdot X_U(2T, 0) =$$

$$= e^{4aT} \cdot I \cdot X_U(2T, 0) = e^{4aT} X_U(2T, T)X_U(T, 0) =$$

$$= e^{4aT} \exp((A + BU_2)T) \cdot \exp((A + BU_1)T) = e^{4aT} \begin{pmatrix} 1 & 2T & 2T^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(D\vartheta).$$

Теперь в случае 4.2 для фиксированного $\vartheta > 0$ также положим $T = \vartheta/4$. На промежутках $[0, T)$ и $[T, 2T)$ строим U_1 и U_2 так же, как и в предыдущем случае. Получим, что матрица Коши $X_U(2T, 0)$ такая же, как в случае 3.2. Далее строим управление $U_3(t) \equiv U_3, t \in [2T, 3T)$, такое, чтобы матрица $A + BU_3$ имела собственные значения $\eta \pm \mu i, \eta \pm \nu i$, где $\eta = 4b, \mu = 2\pi/T, \nu = 4\pi/T$. Вычислив матрицу Коши, получим $X_U(3T, 2T) = \exp((A + BU_3)T) = e^{4bT} I$. Далее, строим управление $U_4(t) \equiv U_4, t \in [3T, 4T]$, такое, чтобы матрица $A + BU_4$ имела собственные значения $p \pm qi, p, 0$, где $p = 4(a - b), q = 2\pi/T$ (т.е. берем $u_1 = 0, u_2 = p(p^2 + q^2), u_3 = -3p^2 - q^2, u_4 = 3p$). Вычислив матрицу Коши на этом промежутке, получим $X_U(4T, 3T) = \exp((A +$

$$BU_4)T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{(e^{pT} - 1)(3p^2 + q^2)}{p(p^2 + q^2)} & \frac{3(1 - e^{pT})}{p^2 + q^2} & \frac{e^{pT} - 1}{p(p^2 + q^2)} \\ 0 & e^{pT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{pT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{pT} \end{pmatrix}. \text{ Отсюда получим, что}$$

$$X_U(4T, 0) = X_U(4T, 3T)X_U(3T, 2T)X_U(2T, 0) = \begin{pmatrix} e^{4bT} & * & * & * \\ 0 & e^{4aT} & 2Te^{4aT} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4aT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{4aT} \end{pmatrix}. \quad (0.14)$$

Здесь вместо звездочек стоят некоторые числа. Матрица (0.14) имеет вещественный логарифм. Положим $D = \frac{1}{4T} \ln X_U(4T, 0)$. Тогда матрица D имеет вид $D =$

$$\begin{pmatrix} b & * & * & * \\ 0 & a & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \text{ Очевидно, что } D \sim C \text{ и } X_U(\vartheta, 0) = \exp(D\vartheta). \text{ Таким образом, мы}$$

построили на отрезке длины $\vartheta = 4T$ кусочно постоянное управление (состоящее в случае 3.2 из 3 кусков, а в случае 4.2 из 4 кусков), обеспечивающее достижимость матрицы $\exp(D\vartheta)$. Отсюда следует асимптотическая эквивалентность системы (0.13) с построенным управлением и системы (0.9). Доказательство теоремы 8 завершено. $\square$

Список литературы

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
2. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 97–106.
3. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 12. — С. 1627–1636.

4. *Попова С.Н.* Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 41–46.
5. *Tonkov E.L.* Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. — 2000. — P. 228–253.
6. *Зайцев В.А.* Глобальная ляпуновская приводимость двумерных управляемых систем с кусочно постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского ун-та. — Ижевск, 2002. — № 1. — С. 3–12.
7. *Зайцев В.А.* Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. — Ижевск, 2003. — С. 31–62.
8. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970.