ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 1, с. 133–135

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

© 2003 г. В. А. Зайцев

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m. \tag{1}$$

Пусть измерению доступны все координаты вектора состояния x. Будем строить управление по принципу линейной обратной связи в виде $u = Ux$, придем к замкнутой системе

$$\dot{x} = (A + BU)x. \tag{2}$$

Задача о размещении собственных значений $\lambda_i(A+BU)$, $i = \overline{1,n}$, системы (2) в любые наперед заданные точки называется задачей модального управления. Происхождение термина "модальное управление" объясняется тем, что собственным значениям соответствуют составляющие свободного движения системы, называемые иногда модами [1, с. 5]. Аналогичная задача для нестационарной системы (2) называется задачей об управлении характеристическими показателями Ляпунова. При этом говорят, что показатели Ляпунова системы (2) глобально управляемы, если при помощи некоторого допустимого управления их можно переместить в любые наперед заданные точки в $\mathbf{R}$, и показатели локально управляемы, если при помощи малых по норме управлений их можно переместить в любые точки в окрестности показателей невозмущенной системы (2), где $U = 0$. Здесь мы будем рассматривать только стационарные системы. Известно, что условие полной управляемости системы (1) является необходимым и достаточным условием глобальной управляемости показателей Ляпунова. Рассмотрим, к примеру, линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с одним входом

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = u, \quad x \in \mathbf{R}, \quad u \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Управляемая система (3) эквивалентна матричной системе (1), где A – матрица Фробениуса, $B = e_n$ – n-й столбец единичной матрицы I. Эта матричная система является вполне управляемой и управление $U = (a_n - \gamma_n, \ldots, a_1 - \gamma_1)$ приводит характеристический полином системы (3) к наперед заданному $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \lambda^{n-i}$ $(\gamma_0 = 1)$. Соответственно управление

$$u = (a_1 - \gamma_1)x^{(n-1)} + \ldots + (a_n - \gamma_n)x \tag{4}$$

приводит уравнение (3) к уравнению с наперед заданными коэффициентами γ_i и обеспечивает желаемую асимптотику решений системы (3), (4).

Рассмотрим объект n-го порядка, на вход которого подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n-p)$ включительно, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния объекта z и его производных до порядка $(p-1)$ включительно:

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z =$$

$$= b_{p1} v_1^{(n-p)} + b_{p+1,1} v_1^{(n-p-1)} + \ldots + b_{n1} v_1 + \ldots + b_{pm} v_m^{(n-p)} + \ldots + b_{nm} v_m, \quad z \in \mathbf{R}, \quad 1 \le p \le n, \tag{5}$$

$$y_i = c_{1i} z + \ldots + c_{pi} z^{(p-1)}, \quad i = \overline{1,k}, \tag{6}$$

$v = \mathrm{col}(v_1, \ldots, v_m) \in \mathbf{R}^m$ – вектор управления, $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbf{R}^k$ – выходной вектор. Задача модального управления заключается в построении управления в виде неполной обратной связи $v = Uy$, которое приводит систему (5), (6) к замкнутой системе

$$z^{(n)} + \gamma_1 z^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n z = 0 \tag{7}$$

с заданными коэффициентами. В работе [1, с. 36] построено такое управление для полностью управляемого и наблюдаемого объекта (5), (6) в случае, когда $m + k - 1 \ge n$, т.е. когда общее число

входных и выходных сигналов больше размерности объекта (этот случай достаточно тривиален). В настоящей работе получено необходимое и достаточное условие существования модального управления системы (5), (6) с неполной обратной связью $v = Uy$.

Построим по системе (5), (6) матрицы $B \in M(n,m)$ и $C \in M(n,k)$ с элементами $b_{ij} \equiv 0$, $i = \overline{1,p-1}$, $j = \overline{1,m}$, $c_{ij} \equiv 0$, $i = \overline{p+1,n}$, $j = \overline{1,k}$, где $M(n,k)$ – пространство $(n \times k)$-матриц. Обозначим $J_0 = I \in M(n,n)$, $J_1 \in M(n,n)$ – матрица, наддиагональ которой состоит из единиц, а остальные элементы нулевые, $J_q \doteq J_1^q$. Звездочкой будем обозначать операцию транспонирования матрицы (или вектора-столбца в вектор-строку).

Теорема 1. *Пусть обратная связь $v = Uy$ приводит систему (5), (6) к замкнутой системе (7). Тогда для коэффициентов γ_i системы (7) выполнены соотношения $\gamma_i = a_i - \operatorname{Sp} C^* J_{i-1} BU$, $i = \overline{1,n}$.*

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма 1. *Пусть $D_i = C^* J_i B$, $i \in \{0,\dots,n-1\}$, $D_i = \{d_{rj}^i\}$, $r = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,m}$. Тогда $d_{rj}^i = \sum_{l=i+1}^n c_{l-i,r} b_{lj}$.*

Доказательство. Для каждого $i \in \{0,\dots,n-1\}$ построим матрицу $J_i = \{\alpha_{st}^i\}_{s,t=1}^n$. Тогда $\alpha_{s,s+i}^i = 1$ для всех $s = \overline{1,n-i}$, а остальные $\alpha_{st}^i = 0$. Пусть $F_i = C^* J_i$, $F_i = \{f_{rl}^i\}$, $r = \overline{1,k}$, $l = \overline{1,n}$. Тогда $f_{rl}^i = \sum_{s=1}^n c_{sr} \alpha_{sl}^i$. Поскольку лишь $\alpha_{l-i,l}^i = 1$ (в случае $l > i$), а остальные $\alpha_{sl}^i = 0$ (в случае же $l \le i$ все $\alpha_{sl}^i = 0$), то $f_{rl}^i = c_{l-i,r} \operatorname{sgn} \max\{0, l-i\}$. Таким образом, $d_{rj}^i = \sum_{l=1}^n f_{rl}^i b_{lj} = \sum_{l=i+1}^n c_{l-i,r} b_{lj}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Вычислим след матрицы $C^* J_{i-1} BU$. Пусть $D_{i-1} = C^* J_{i-1} B = \{d_{rj}^{i-1}\} \in M(k,m)$, $U = \{u_{jr}\} \in M(m,k)$. Тогда в силу леммы 1

$$\operatorname{Sp} C^* J_{i-1} BU = \operatorname{Sp} D_{i-1} U = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m d_{rj}^{i-1} u_{jr} = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{l=i}^n c_{l+1-i,r} b_{lj} u_{jr}. \tag{8}$$

Подставим управление $v = Uy$ в систему (5). Обозначим правую часть полученного равенства через Δ. Покажем, что в правой части коэффициент при $z^{(n-i)}$ совпадает с (8), отсюда будет следовать утверждение теоремы. Поскольку $v_j = \sum_{r=1}^k u_{jr} y_r$ для всех $j = \overline{1,m}$ и $y_r = \sum_{s=1}^p c_{sr} z^{(s-1)}$ для всех $r = \overline{1,k}$, имеем

$$\Delta = \sum_{j=1}^m \sum_{l=p}^n b_{lj} v_j^{(n-l)} = \sum_{j=1}^m \sum_{l=p}^n b_{lj} \left(\sum_{r=1}^k u_{jr} y_r \right)^{(n-l)} =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{l=p}^n \sum_{r=1}^k b_{lj} u_{jr} \left(\sum_{s=1}^p c_{sr} z^{(s-1)} \right)^{(n-l)} = \sum_{j=1}^m \sum_{l=p}^n \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^p b_{lj} c_{sr} u_{jr} z^{(n-l+s-1)}.$$

Пусть $i = l - s + 1$. Тогда i изменяется от $l - p + 1$ до l. Поэтому

$$\Delta = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{l=p}^n \sum_{i=l-p+1}^l b_{lj} c_{l+1-i,r} u_{jr} z^{(n-i)}.$$

Заметим, что, когда i изменяется от 1 до $l - p$, $c_{l+1-i,r} = 0$. Поэтому

$$\Delta = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{l=p}^n \sum_{i=1}^l b_{lj} c_{l+1-i,r} u_{jr} z^{(n-i)}.$$

Теперь заметим, что, когда l изменяется от 1 до $p - 1$, $b_{lj} = 0$, поэтому

$$\Delta = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^l b_{lj} c_{l+1-i,r} u_{jr} z^{(n-i)}.$$

Поменяем местами порядок суммирования $\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^l$ на $\sum_{i=1}^n \sum_{l=i}^n$, получим

$$\Delta = \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{l=i}^n b_{lj} c_{l+1-i,r} u_{jr} z^{(n-i)} = \sum_{i=1}^n z^{(n-i)} \sum_{r=1}^k \sum_{j=1}^m \sum_{l=i}^n c_{l+1-i,r} b_{lj} u_{jr}.$$

Коэффициент при $z^{(n-i)}$ совпадает с (8). Теорема доказана.

Выясним теперь, при каких условиях система (5), (6) обладает модальным управлением. Введем отображение $\operatorname{vec} : M(n,m) \to \mathbf{R}^{nm}$, которое "разворачивает" матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, по строкам в вектор-столбец, т.е. $\operatorname{vec} H = \operatorname{col}(h_{11}, h_{12}, \ldots, h_{1m}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nm})$. Отметим, что для любых матриц $A, B \in M(n,m)$ $\operatorname{Sp}(A^*B) = (\operatorname{vec} A)^* \cdot (\operatorname{vec} B)$. Построим матрицы

$$C^* J_0 B, \ldots, C^* J_{n-1} B \tag{9}$$

и матрицу $P = [\operatorname{vec} C^* J_0 B, \ldots, \operatorname{vec} C^* J_{n-1} B] \in M(mk, n)$. Пусть $a = \operatorname{col}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 2. *Система (5), (6) обладает модальным управлением тогда и только тогда, когда матрицы (9) линейно независимы, и в этом случае матрица U обратной связи, приводящая систему (5), (6) к системе (7) с наперед заданными коэффициентами, находится ниже из соотношения (11), где $w = \operatorname{vec} U^*$.*

Доказательство. Система (5), (6) обладает модальным управлением тогда и только тогда, когда для любого $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{R}^n$ найдется матрица $U \in M(m,k)$ такая, что $\gamma_i = a_i - \operatorname{Sp} C^* J_{i-1} B U = a_i - \operatorname{Sp} U C^* J_{i-1} B$. Это система n уравнений с mk неизвестными $\{u_{jr}\}$. Ее можно переписать в векторном виде

$$a - P^* w = \gamma, \tag{10}$$

где $w = \operatorname{vec} U^*$. Если матрицы (9) линейно независимы, то $\operatorname{rank} P = n$. Тогда матрица P^*P невырожденная, для любого γ система (10) разрешима и ее решение имеет вид

$$w = P(P^*P)^{-1}(a - \gamma). \tag{11}$$

Если же матрицы (9) линейно зависимы, то $\operatorname{rank} P < n$ и для вектора $\gamma = a - \beta$, где $\beta \notin \operatorname{Im} P^*$, система (10) неразрешима. Теорема доказана.

Заметим, что в системе с неполной обратной связью так же, как и в системе с полной обратной связью, возможность приведения к наперед заданному уравнению не зависит от коэффициентов a_i уравнения, а зависит лишь от коэффициентов b_{lj}, c_{sr} линейных комбинаций входных и выходных сигналов.

Пример. Рассмотрим систему (5), (6): $n = 6$, $m = 2$, $k = 3$, $z^{VI} = v_1 + v_2'$, $y_1 = z$, $y_2 = z''$, $y_3 = z^{IV}$. Построим по этой системе матрицы B и C. Можно проверить, что матрицы (9) линейно независимы. Поэтому данная система обладает модальным управлением $v = Uy$, где

$$U = \begin{pmatrix} -\gamma_6 & -\gamma_4 & -\gamma_2 \\ -\gamma_5 & -\gamma_3 & -\gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что условие $m + k - 1 \geq n$ для системы (5), (6) можно ослабить. Для существования модального управления необходимым условием на размерности m, k является условие $mk \geq n$. Это непосредственно вытекает из теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00454) и Конкурсного центра Министерства образования Российской Федерации (грант E00-1.0-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М., 1976.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию
05.03.2002 г.