УДК 517.977

© **В.А. Зайцев**
vaz@verba.udm.ru

О ГЛОБАЛЬНОЙ ЛЯПУНОВСКОЙ ПРИВОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

Ключевые слова: линейная управляемая система, асимптотически эквивалентные системы, глобальная достижимость, стационарные системы.

Abstract. Let the stationary system $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^m$ is totally controllable. Then it possesses the property of global Lyapunov reducibility in class of stationary controls $u = Ux$, that is for any fixed stationary system $\dot{y} = Cy$ there exists the time-independent matrix U, such that the system $\dot{x} = (A + BU)x$ with this matrix is asymptotically equivalent (kinematically similar) to the above fixed system.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R}^{1+n+m}, \tag{1}$$

где $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ — ограниченные кусочно непрерывные матричные функции. Управление строится в виде $u = U(t)x$, где $U(\cdot)$ — ограниченная кусочно непрерывная функция. Соответствующая замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x. \tag{2}$$

Изучается задача о глобальной ляпуновской приводимости системы (2). Задача состоит в следующем. Требуется для произвольной заданной системы

$$\dot{y} = C(t)y, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^{1+n} \tag{3}$$

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00-1.0-5).

с ограниченной кусочно непрерывной матрицей $C(\cdot)$ построить управление $U(\cdot)$ так, чтобы система (2) с этим управлением была асимптотически эквивалентна системе (3). Асимптотическая эквивалентность двух линейных однородных систем означает, что существует преобразование Ляпунова $x = L(t)y$, связывающее эти системы. Если для произвольной системы (3) найдется такое управление $U(\cdot)$, то говорят, что система (2) обладает свойством **глобальной ляпуновской приводимости**. В работе [1] доказана

Т е о р е м а 1. *Пусть $n = 2$. Предположим, что система* (1) *равномерно вполне управляема. Тогда система* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

При доказательстве этой теоремы используется понятие глобальной достижимости системы (2). Глобальная достижимость системы (2) означает, что найдется $\vartheta > 0$ такое, что множество достижимости $\mathfrak{D}_\vartheta(\tau)$ системы (2) в пространстве $(n \times n)$-матриц за время ϑ из точки $X(\tau) = I$ под действием допустимых управлений $U(\cdot)$ (при условии, когда на управления не накладываются ограничения) совпадает с множеством матриц с положительным определителем, т. е. $\mathfrak{D}_\vartheta(\tau) = GL_n(\mathbb{R})$. Строгое определение формулируется следующим образом.

О п р е д е л е н и е 1. Система (2) называется **глобально достижимой на отрезке** $[\tau, \tau + \vartheta]$ (см. [2]), если для любого $N > 0$ существует такое $l = l(N) > 0$, что для любой $(n \times n)$-матрицы H с $|H| \leqslant N$ и $\det H \geqslant 1/N > 0$ найдется управление $U(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$ такое, что $|U(t)| \leqslant l$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, и для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (2) с этим управлением выполнено равенство $X_U(\tau + \vartheta, \tau) = H$.

О п р е д е л е н и е 2. Система (2) называется **равномерно глобально достижимой**, если найдется $\vartheta > 0$ такое, что для любого $\tau \in \mathbb{R}$ система (2) глобально достижима на $[\tau, \tau + \vartheta]$, причем константа l из определения 1 равномерная (не зависит от τ).

Известно, что условие равномерной глобальной достижимости является достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости. В работе [1] в случае $n = 2$ доказано, что из равномерной полной управляемости системы (1) на отрезках длины ϑ следует равномерная глобальная достижимость системы (2) на отрезках длины 4ϑ.

Основным результатом настоящей работы является нижеследующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть система* (1) *стационарна, т. е.* A *и* B *— постоянные матрицы, и пусть* $n = 2$. *Предположим, что система* (1) *вполне управляема. Тогда система* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости в классе постоянных управлений, т. е. для произвольной стационарной системы* $\dot{y} = Cy$ *найдется постоянная матрица* U *такая, что система* (2) *с этим управлением асимптотически эквивалентна заданной.*

Отметим, что эта теорема не вытекает из теоремы 1, т. к. здесь утверждается существование постоянного управления.

З а м е ч а н и е 1. В работе [3] для произвольного n доказана эквивалентность свойств полной управляемости стационарной системы (1) и глобальной управляемости коэффициентов характеристического многочлена матрицы системы (2) (в иной формулировке, система (1) вполне управляема тогда и только тогда, когда система (2) обладает модальным управлением). Теорема 2 не следует из этого результата, так как свойство глобальной ляпуновской приводимости является более общим по сравнению со свойством существования модального управления.

З а м е ч а н и е 2. В теореме 2 нельзя утверждать, что матрица преобразования Ляпунова, связывающего стационарные системы (2) и (3), является постоянной. Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Система (1) с заданными матрицами является вполне управляемой. Следовательно, существует матрица $U = (u_1, u_2)$ такая, что системы с матрицами $A + BU$ и C асимптотически эквивалентны. Если мы предположим, что матрица L преобразования Ляпунова, связывающего эти системы, постоянна, это будет означать, что матрицы $A + BU$ и C подобны. Отсюда необходимо вытекает, что их характеристические многочлены совпадают: $\chi_C(\lambda) = \lambda^2$, $\chi_{A+BU}(\lambda) = \lambda^2 - u_2\lambda - u_1$; следовательно, $u_1 = u_2 = 0$, т. е. $A + BU = A$. Однако матрицы A и C не подобны, мы пришли к противоречию. В действительности нужно взять $U = (-1, 0)$. Тогда система с матрицей

$$A + BU = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

и C асимптотически эквивалентны и $L(t) = \begin{Vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{Vmatrix}$.

Список литературы

1. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, Ѓ 1. С. 97–106.
2. Зайцев В. А. Глобальная ляпуновская приводимость двумерных управляемых систем с кусочно-постоянными коэффициентами // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 2002. Ѓ 1. С. 3–12.
3. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. 456 с.