УДК 517.977

В. А. Зайцев

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛЯПУНОВА И О λ-ПРИВОДИМОСТИ[1]

Показано, что если система $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ с кусочно непрерывными ограниченными матрицами $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ равномерно вполне управляема, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется управление $U_\lambda \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, при котором замкнутая система $\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U_\lambda(t)\big)x$ асимптотически эквивалентна системе $\dot{x} = \big(A(t) + \lambda I\big)x$. Этот результат уточняет аналогичный результат работы [27], доказанный в предположении равномерной непрерывности функции $B(\cdot)$. Получен результат о глобальной управляемости показателей Ляпунова двумерной управляемой системы с кусочно постоянными матрицами коэффициентов.

Введение

Задачи управления показателями Ляпунова тесно связаны с вопросами стабилизации и ляпуновской приводимости линейных систем. Евгений Леонидович Тонков [1–6] стоял у истоков теории управления и теории стабилизации динамических систем. Так, в работах [3; 5] им были получены критерии равномерной управляемости и стабилизируемости линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{0.1}$$

Вопрос о глобальной управляемости спектра показателей Ляпунова для стационарных и периодических систем

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x, \tag{0.2}$$

замкнутых по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$, был разрешен в [7] и [8]. В этих работах было показано (для стационарных и периодических систем соответственно), что показатели системы (0.2) глобально управляемы тогда и только тогда, когда система (0.1) вполне управляема. Вопросам локальной управляемости показателей Ляпунова и локальной ляпуновской приводимости посвящены работы [9–21].

В работах И.В. Гайшуна [22; 23; 24] получены результаты о приводимости системы (0.2) (при $m = 1$) относительно различных групп преобразований (группы Ляпунова, экспоненциальной группы и др.) к системам, эквивалентным скалярному уравнению n-го порядка с переменными коэффициентами (см. также библиографию в [24]). Результаты работы Е.Л. Тонкова [21] дополняют исследования И.В. Гайшуна. Показано, в частности, что для любой системы

$$\dot{x} = A(f^t\omega)x + b(f^t\omega)v, \quad (t, \omega, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{0.3}$$

$$A(\omega) = \begin{Vmatrix} a_{11}(\omega) & \beta_2(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(\omega) & a_{22}(\omega) & \beta_3(\omega) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1}(\omega) & a_{n-1,2}(\omega) & \dots\dots\dots & & \beta_n(\omega) \\ a_{n1}(\omega) & a_{n2}(\omega) & \dots\dots\dots & & a_{nn}(\omega) \end{Vmatrix}, \quad b(\omega) = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_1(\omega) \end{Vmatrix}, \tag{0.4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 97–01–00413 и 99–01–00454) и конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 97–0–1.9).

где функции $A(\cdot)$, $b(\cdot)$ непрерывны на Ω и для всех $(\omega, i) \in \Omega \times \{1, 2, \dots, n\}$ выполнены неравенства $\beta_i(\omega) > 0$, и для любого $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ найдется управление

$$v = u(f^t\omega, \mu)x \tag{0.5}$$

такое, что система (0.3), замкнутая управлением (0.5), приводима не зависящим от μ ляпуновским преобразованием $z = S(f^t\omega)x$ к системе $\dot{z} = F_\mu z$ с постоянной матрицей

$$F_\mu = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \mu_1 & \dots & \dots & \mu_n \end{Vmatrix}.$$

Сформулированы условия приводимости произвольной системы (0.3) к системе вида (0.3) с матрицами (0.4). Отсюда получены условия глобальной управляемости показателей Ляпунова. В работе [25] найдены необходимые и достаточные условия глобальной управляемости показателей Ляпунова стационарной системы с наблюдателем

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = C^*x, \quad (x, u, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k,$$

в которой управление формируется по принципу неполной обратной связи $u = Uy$.

Вопрос о глобальной ляпуновской приводимости, в случае когда $n = 2$, был разрешен в работе [26]: показано, что если система (0.1) равномерно вполне управляема, функция $A(\cdot)$ ограничена и кусочно непрерывна и функция $B(\cdot)$ ограничена и равномерно непрерывна, то для любой системы

$$\dot{y} = D(t)y \tag{0.6}$$

с ограниченной и кусочно непрерывной функцией $D(\cdot)$ найдется кусочно непрерывная матрица $U(\cdot)$ такая, что система (0.2) при этом управлении асимптотически эквивалентна системе (0.6). Для произвольного n этот вопрос пока остается открытым. Вопрос о λ-приводимости системы (0.2) и о глобальной управляемости центральных и особых показателей системы (0.2) с ограниченной непрерывной матрицей $A(\cdot)$ и ограниченной равномерно непрерывной матрицей $B(\cdot)$ был разрешен в работе [27]. Здесь доказан аналогичный результат при условии, что матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ ограничены и кусочно непрерывны. Получен результат о глобальной управляемости показателей Ляпунова двумерной системы (0.1) с кусочно постоянными матрицами.

1. λ-приводимость

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$; $M_{n,m}$ — пространство $n \times m$-матриц (если $m = n$, то пишем M_n) с нормой $|A| = \max_{|x|=1} |Ax|$; $I \in M_n$ — единичная матрица. Обозначим через $KC_{n,m}(\Delta)$ пространство ограниченных кусочно непрерывных функций $H : \Delta \to M_{n,m}$, $\Delta \subset \mathbb{R}$ с равномерной нормой. Рассмотрим линейную управляемую систему (0.1), где $A \in KC_n(\mathbb{R})$, $B \in KC_{n,m}(\mathbb{R})$. Пусть $X(t, s)$ — это матрица Коши системы

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1.1}$$

Построим матрицу Калмана системы (0.1)

$$W(t, \tau) = \int_\tau^t X(\tau, s)B(s)B^*(s)X^*(\tau, s)\, ds.$$

О п р е д е л е н и е 1. Система (0.1) $\boldsymbol{\vartheta}$-равномерно вполне управляема, если существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $W(t+\vartheta, t) \geqslant \alpha I$, понимаемое в смысле квадратичных форм. Система (0.1) равномерно вполне управляема, если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (0.1) ϑ-равномерно вполне управляема.

О п р е д е л е н и е 2. К системе (0.1) применимо $\boldsymbol{\lambda}$-преобразование, если существует такое $T > 0$, что для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется управление $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (0.2) равенство

$$X_U\big((k+1)T, kT\big) = e^{\lambda T} X\big((k+1)T, kT\big) \tag{1.2}$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Это определение было дано в работе [27]. Оно связано с определением λ-преобразования системы (1.1) (см. [28, с. 249]), которое заключается в добавлении к матрице $A(t)$ системы (1.1) возмущения λI. Для матрицы Коши $Y(t,s)$ возмущенной системы

$$\dot{y} = \big(A(t) + \lambda I\big)y \tag{1.3}$$

при всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$Y(t,s) = e^{\lambda(t-s)} X(t,s). \tag{1.4}$$

Из (1.2) следует, что для матрицы Коши системы (0.2) при всех $k, l \in \mathbb{Z}$ имеет место соотношение

$$X_U(kT, lT) = e^{\lambda(k-l)T} X(kT, lT),$$

аналогичное (1.4), но выполненное на множестве точек $\{kT,\ k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$.

О п р е д е л е н и е 3. Преобразование $x = L(t)y$ системы (1.1) называется преобразованием Ляпунова, если функция $L : \mathbb{R} \to M_n$ непрерывно дифференцируема и

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{|L(t)| + |L^{-1}(t)| + |\dot{L}(t)|\} < \infty.$$

О п р е д е л е н и е 4. Система (1.1) асимптотически эквивалентна системе (0.6), если существует преобразование Ляпунова $x = L(t)y$, связывающее системы (1.1) и (0.6), т. е. $D(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t)$.

О п р е д е л е н и е 5. Система (0.2) $\boldsymbol{\lambda}$-приводима, если для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует управление $U_\lambda \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, при котором система (0.2) асимптотически эквивалентна системе (1.3).

Теорема 1. *Пусть к системе* (0.1) *применимо λ-преобразование. Тогда система* (0.2) *λ-приводима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим матрицу $L(t) = X_U(t,0)Y(0,t)$. Произведем преобразование $x = L(t)y$ системы (0.2). Несложно проверить, что это преобразование приводит систему (0.2) к системе (1.3). Покажем, что это преобразование ляпуновское. Из ограниченности $A(t)$, $B(t)$, $U(t)$ на $\mathbb{R}$ следует, что найдется константа a такая, что $|X_U(t,s)| \leqslant a$ для всех $t, s \in \Delta_k = [kT, (k+1)T]$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично доказывается неравенство $|Y(t,s)| \leqslant a$, $t, s \in \Delta_k$. Пусть $t \in \Delta_k$, тогда

$$L(t) = X_U(t,0)Y(0,t) = X_U(t,kT)X_U(kT,0)Y(0,kT)Y(kT,t) =$$
$$X_U(t,kT)e^{\lambda kT}X(kT,0)e^{-\lambda kT}X(0,kT)Y(kT,t) = X_U(t,kT)Y(kT,t),$$

поэтому $|L(t)| \leqslant c$ для всех $t \in \Delta_k$, причем c не зависит от k, т. е. $|L(t)| \leqslant c$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Аналогично доказывается ограниченность $L^{-1}(t)$. Ограниченность производной $\dot{L}(t)$ следует из равенства

$$\dot{L}(t) = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)L(t) - L(t)\big(A(t) + \lambda I\big)$$

и ограниченности $L(t)$. Таким образом,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\{|L(t)| + |L^{-1}(t)| + |\dot{L}(t)|\} < \infty.$$

Поэтому матрица $L(t)$ является матрицей Ляпунова. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если система* (0.1) *равномерно вполне управляема, то к ней применимо λ-преобразование.*

З а м е ч а н и е 1. Эта теорема была сформулирована и доказана в работе [27] в предположении, что функция $A(\cdot)$ непрерывна, а $B(\cdot)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Здесь мы приведем более простое доказательство этой теоремы для произвольных функций $A \in KC_n(\mathbb{R})$, $B \in KC_{n,m}(\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (0.1) ϑ-равномерно вполне управляема. Зафиксируем любое $\lambda \in \mathbb{R}$. Построим такое управление $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, что (1.2) выполнено при $T = 2\vartheta$. Для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ на отрезке $\Delta_k = [kT, (k+1)T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)V(t), \tag{1.5}$$

$$Z(kT) = I, \quad Z\big((k+1)T\big) = e^{\lambda T}X\big((k+1)T, kT\big). \tag{1.6}$$

Решение уравнения (1.5) с начальным условием $Z(kT) = I$ имеет вид

$$Z(t) = X(t, kT)\big(I + \int_{kT}^{t} X(kT, s)B(s)V(s)\,ds\big). \tag{1.7}$$

Второе из условий (1.6) выполнено тогда и только тогда, когда

$$I + \int_{kT}^{(k+1)T} X(kT, s)B(s)V(s)\,ds = e^{\lambda T}I. \tag{1.8}$$

Предположим, что существуют такие не зависящие от $k \in \mathbb{Z}$ числа $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$, что при всех $t \in \Delta_k$ управление $V(t)$, обеспечивающее равенство (1.8), удовлетворяет неравенству $|V(t)| \leqslant \beta_1$, а отвечающее этому управлению решение $Z(t)$ краевой задачи (1.5), (1.6), выражаемое формулой (1.7), удовлетворяет неравенству $\det Z(t) \geqslant \beta_2$ для всех $t \in \Delta_k$. Положим $U(t) = V(t)Z^{-1}(t)$, $t \in \Delta_k$. Тогда $|U(t)|$ ограничена на Δ_k равномерно относительно k, а $Z(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Z} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)Z \tag{1.9}$$

и краевым условиям (1.6). Из соотношения (1.9) и первого краевого условия следует, что $Z(t) = X_U(t, kT)$, а из второго краевого условия вытекает (1.2). Таким образом, наша задача сводится к нахождению такой матричной функции $V(\cdot) \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, что выполнено равенство (1.8) и условие

$$\det\big(I + \int_{kT}^{t} X(kT, s)B(s)V(s)\,ds\big) \geqslant \gamma \tag{1.10}$$

при всех $t \in \Delta_k$ и некотором не зависящем от $k \in \mathbb{Z}$ и от t числе $\gamma > 0$.

Будем искать $V(t)$ в виде $V(t) = B^*(t)X^*(kT,t)H$. Тогда из соотношения (1.8) следует, что $I + W\big((k+1)T, kT\big)H = e^{\lambda T}I$, где $W(t,\tau)$ — матрица Калмана. Система (0.1) ϑ-равномерно вполне управляема, следовательно, она ϑ_1-равномерно вполне управляема для любого $\vartheta_1 \geqslant \vartheta$. Поэтому матрица $W\big((k+1)T, kT\big)$ обратима и $H = W^{-1}\big((k+1)T, kT\big)(e^{\lambda T} - 1)I$. Покажем, что для всех $t \in \Delta_k$ матрица

$$S(t) = I + \int_{kT}^{t} X(kT,s)B(s)B^*(s)X^*(kT,s)\,ds \cdot W^{-1}\big((k+1)T, kT\big)(e^{\lambda T} - 1)I$$

обратима и $\det S(t) \geqslant \gamma > 0$ для всех $t \in \Delta_k$, где γ не зависит от $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим матрицу $Q(t) = S(t)W\big((k+1)T, kT\big) = W\big((k+1)T, kT\big) + (e^{\lambda T} - 1)W(t, kT)$. Достаточно показать, что $\det Q(t) \geqslant \gamma_1 > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\begin{aligned}
Q(t) = &\int_{kT}^{(k+1)T} X(kT,s)B(s)B^*(s)X^*(kT,s)\,ds + \\
&+ e^{\lambda T}\int_{kT}^{t} X(kT,s)B(s)B^*(s)X^*(kT,s)\,ds - \int_{kT}^{t} X(kT,s)B(s)B^*(s)X^*(kT,s)\,ds = \\
&= \int_{t}^{(k+1)T} X(kT,s)B(s)B^*(s)X^*(kT,s)\,ds + e^{\lambda T}\int_{kT}^{t} X(kT,s)B(s)B^*(s)X^*(kT,s)\,ds = \\
&= X(kT,t)\int_{t}^{(k+1)T} X(t,s)B(s)B^*(s)X^*(t,s)\,ds \cdot X^*(kT,t) + \\
&+ e^{\lambda T}\int_{kT}^{t} X(kT,s)B(s)B^*(s)X^*(kT,s)\,ds = \\
&= X(kT,t)W\big((k+1)T,t\big)X^*(kT,t) + e^{\lambda T}W(t,kT).
\end{aligned}$$

Для всех $t \in [kT, kT+\vartheta]$ в силу ϑ-равномерной вполне управляемости выполнено неравенство $W\big((k+1)T,t\big) \geqslant \alpha I$. Поскольку определитель матрицы $X(kT,t)$ отделен от нуля при $t \in [kT, kT+\vartheta]$ равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$, то существует $\alpha_1 > 0$ (не зависящее от k) такое, что $X(kT,t)W\big((k+1)T,t\big)X^*(kT,t) \geqslant \alpha_1 I$. Матрица $e^{\lambda T}W(t,kT)$ неотрицательно определена, следовательно, $Q(t) \geqslant \alpha_1 I > 0$, $t \in [kT, kT+\vartheta]$.

Если $t \in [kT+\vartheta, (k+1)T]$, то $W(t,kT) \geqslant \alpha I$, следовательно, $e^{\lambda T}W(t,kT) \geqslant \alpha_2 I > 0$, где $\alpha_2 = \alpha e^{\lambda T}$. Матрица $X(kT,t)W\big((k+1)T,t\big)X^*(kT,t)$ неотрицательно определена, следовательно, $Q(t) \geqslant \alpha_2 I > 0$, $t \in [kT+\vartheta, (k+1)T]$. Таким образом, для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $Q(t) \geqslant \alpha_3 I > 0$, где $\alpha_3 = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Следовательно, $\det Q(t) \geqslant \gamma_1$, $t \in \mathbb{R}$ для некоторого $\gamma_1 > 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть система* (0.1) *равномерно вполне управляема. Тогда система* (0.2) *λ-приводима.*

Следствие 2. *Пусть система* (0.1) *равномерно вполне управляема. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется такое управление $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, что показатели Ляпунова возмущенной системы* (0.2) *удовлетворяют равенствам $\lambda_j(A+BU) = \lambda_j(A) + \lambda$ при всех $j \in \{1,\dots,n\}$.*

Это утверждение вытекает из того факта, что показатели Ляпунова асимптотически эквивалентных систем совпадают, и для показателей Ляпунова $\lambda_j(A+\lambda I)$, $j = 1,\dots,n$ системы (1.3) выполнены равенства $\lambda_j(A+\lambda I) = \lambda_j(A) + \lambda$, где $\lambda_j(A)$ — показатели Ляпунова системы (1.1).

Следствие 3. *Пусть система* (0.1) *равномерно вполне управляема. Тогда для каждого* $\mu \in \mathbb{R}$ *и любого* $y_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ *существует такое* $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, *что решение* $y(\cdot)$ *уравнения* (0.2) *с начальным условием* $y(0) = y_0$ *имеет характеристический показатель Ляпунова, равный* μ.

Следствие 4. *Пусть система* (0.1) *равномерно вполне управляема. Тогда система* (0.1) *обладает свойством глобальной управляемости верхнего центрального показателя* [28, с. 116], *т. е. для любого* $\mu \in \mathbb{R}$ *найдется такое управление* $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$, *что верхний центральный показатель* $\Omega(A + BU)$ *возмущенной системы* (0.2) *удовлетворяет равенству* $\Omega(A + BU) = \mu$.

Эти следствия сформулированы и доказаны в [27]. Они непосредственно вытекают из теоремы 2. В случае равномерной полной управляемости системы (0.1) свойством глобальной управляемости обладают нижний центральный ω, а также верхний Ω^0 и нижний ω_0 особые показатели [28, с. 117]. Результаты этой работы и работы [27] уточняют соответствующие результаты Е.Л. Тонкова [5], полученные в 1979 году. В [5] показано, что для любого $\alpha > 0$ найдется управление $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R})$ такое, что верхний особый показатель системы (0.2) удовлетворяет неравенству $\Omega^0(A + BU) < -\alpha$. Здесь же показано, что этот показатель можно точно переместить в заданную точку.

2. Управление показателями кусочно постоянных систем

Пусть фиксировано разбиение $\mathbb{T} = \{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ множества $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ такое, что $t_0 = 0$, $0 < \delta \leqslant t_i - t_{i-1} \leqslant L$ для некоторых δ, L и всех $i \in \mathbb{N}$. Обозначим $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i)$. Пусть задан конечный набор символов (или букв) σ_j, $j = 1, \dots, N$, где символ — это пара матриц $\sigma_j = (A_j, B_j) \in M_n \times M_{n,m}$. Множество $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$ назовем алфавитом. Рассмотрим бесконечную последовательность букв — слово $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots)$, $\varphi_i \in \Sigma$, т. е. $\varphi_i = \sigma_{j_i}$, $j_i \in \{1, \dots, N\}$. Конечный набор $(\varphi_{i_0+1}, \dots, \varphi_{i_0+k})$ из k последовательно расположенных букв слова φ назовем слогом длины k. Слово φ и разбиение $\mathbb{T}$ задают функцию $t \to \varphi(t) = \big(A(t)B(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $\varphi(t) = \varphi_i$, $t \in \Delta_i$, $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, функция $t \to \varphi(t)$ определяет систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \tag{2.1}$$

с матрицами коэффициентов, которые принимают постоянные значения (A_{j_i}, B_{j_i}) на промежутках $[t_{i-1}, t_i)$. Систему (2.1) с кусочно постоянными матрицами коэффициентов будем отождествлять со словом φ (зависимость от разбиения $\mathbb{T}$ подчеркивать не будем, поскольку $\mathbb{T}$ фиксировано). Будем предполагать, что каждая пара $(A_j, B_j) \in \Sigma$ вполне управляема, т. е. $\operatorname{rank}(B_j, A_jB_j, \dots, A_j^{n-1}B_j) = n$ для всех $j = 1, \dots, N$.

Определение 6. Система φ обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова, если для любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ найдется функция $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R}_+)$ такая, что показатели Ляпунова замкнутой системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U(t)\big)x \tag{2.2}$$

совпадают с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Если в слове φ встречается только одна буква, т. е. для всех $i \in \mathbb{N}$ $\varphi_i = \sigma_{j_0}$ для некоторого $j_0 \in \{1, \dots, N\}$, то система φ стационарна. В этом случае условие вполне управляемости пары (A_{j_0}, B_{j_0}) является необходимым и достаточным условием глобальной управляемости показателей Ляпунова, при этом управление $\widehat{U}_{j_0}$, перемещающее показатели в заданные точки, постоянно (см. [7, § 34]). Допустим, что в слове

φ встречается не меньше, чем две различных буквы. Если теперь построить кусочно постоянное управление $U(t) = \widehat{U}_{j_i}$, $t \in \Delta_i$, где $\widehat{U}_{j_i}$ — матрица, обеспечивающая глобальную управляемость показателей стационарной системы $\dot{x} = (A_{j_i} + B_{j_i}U)x$, то такое управление уже не будет перемещать показатели системы (2.2) в заданные точки.

Мы будем строить для набора $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ такое управление $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R}_+)$, чтобы замкнутая система (2.2) была асимптотически эквивалентна системе

$$\dot{y} = \Lambda y, \tag{2.3}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Поскольку показатели асимптотически эквивалентных систем совпадают, то в этом случае показатели системы (2.2) совпадут с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Две системы будут асимптотически эквивалентны, если, например, на относительно плотном множестве их матрицы Коши совпадают. Этот факт несложно показать, используя идею доказательства теоремы 1.

Очевидно, что в слове φ какая-то буква встречается бесконечное число раз. Будем предполагать, что существуют буква σ_{j_0} и число $r \in \mathbb{N}$ такие, что в каждом слоге длины r встречается буква σ_{j_0}. Зафиксируем букву σ_{j_0}. Пусть для определенности $\sigma_{j_0} = \sigma_1$. Зафиксируем промежутки $\{\Delta_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$, на которых система φ принимает значение σ_1. В силу вышесказанного $0 < i_{k+1} - i_k \leqslant r$. Построим множество $F = \{t_{i_k}, k = 0, 1, \dots\} \subset \mathbb{R}_+$, $i_0 = 0$. В силу того, что для всех $k = 0, 1, \dots$ выполнены неравенства $0 < \delta \leqslant t_{i_{k+1}} - t_{i_k} \leqslant rL$, множество F относительно плотно в $\mathbb{R}_+$ (каждый отрезок $[\tau, \tau + rL] \subset \mathbb{R}_+$ содержит точку из множества F).

Известно (см., например, [7, § 34]), что если пара (A_1, B_1) вполне управляема, то существуют матрицы $S \in M_n$, $Q \in M_{m,n}$, $q \in M_{m,1}$, такие что

$$S(A_1 + B_1Q)S^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \quad SB_1q = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.4}$$

Произведем преобразование $z = Sx$ системы (2.2). Система (2.2) перейдет в асимптотически эквивалентную систему

$$\dot{z} = \big(SA(t)S^{-1} + SB(t)U(t)S^{-1}\big)z, \tag{2.5}$$

заданную словом $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots)$, $\psi_i \in \widehat{\Sigma} = \{\widehat{\sigma}_1, \dots, \widehat{\sigma}_N\}$, $\widehat{\sigma}_j = (SA_jS^{-1}, SB_j)$, причем всякая пара $(SA_jS^{-1}, SB_j) \in \widehat{\Sigma}$ также будет вполне управляема.

Пусть $Z_U(t, s)$ — матрица Коши системы (2.5). Будем строить кусочно непрерывное управление $U(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ так, чтобы матрица Коши системы (2.5) совпадала на относительно плотном множестве $F = \{t_{i_k}, k = 0, 1, \dots\}$ с матрицей Коши системы (2.3), т. е. чтобы для всех $k = 0, 1, \dots$ были выполнены равенства

$$Z_U(t_{i_{k+1}}, t_{i_k}) = e^{\Lambda(t_{i_{k+1}} - t_{i_k})}. \tag{2.6}$$

Для каждого $k = 0, 1, \dots$ управление на промежутке $[t_{i_k}, t_{i_{k+1}})$ будем строить следующим образом. На промежутках Δ_{i_k+1}, Δ_{i_k+2}, $\dots$, $\Delta_{i_{k+1}-1}$ управление $U(t)$ будем выбирать так, чтобы были выполнены равенства

$$Z_U(t_{i_k+1}, t_{i_k}) = I, \quad Z_U(t_{i_k+2}, t_{i_k+1}) = I, \quad \dots, \quad Z_U(t_{i_{k+1}-1}, t_{i_{k+1}-2}) = I. \tag{2.7}$$

На промежутке $\Delta_{i_{k+1}}$ $\big($где система (2.5) принимает значение $(SA_1S^{-1}, SB_1)\big)$ управление $U(t)$ выберем так, чтобы было выполнено равенство

$$Z_U(t_{i_{k+1}}, t_{i_{k+1}-1}) = e^{\Lambda(t_{i_{k+1}} - t_{i_k})}. \tag{2.8}$$

Управление, построенное таким образом на промежутке $[t_{i_k}, t_{i_{k+1}})$, будет обеспечивать равенства (2.6) для каждого $k = 0, 1, \ldots$. Следовательно, системы (2.5) и (2.3) будут асимптотически эквивалентны, а значит, будут асимптотически эквивалентны системы (2.2) и (2.3), и показатели Ляпунова системы (2.2) совпадут с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Отметим, что на промежутках Δ_{i_k+1}, Δ_{i_k+2}, $\ldots$, $\Delta_{i_{k+1}-1}$ величина нормы управления зависит от длин этих промежутков, а длины этих промежутков (и их обратные) равномерно ограничены для всех $k = 0, 1, \ldots$. Далее, величина нормы управления на промежутке $\Delta_{i_{k+1}}$ зависит от чисел e^{λ_1}, $\ldots$, e^{λ_n}, от длины промежутка $\Delta_{i_{k+1}}$ и промежутка $[t_{i_k}, t_{i_{k+1}})$. Все эти величины (и их обратные) равномерно ограничены для всех $k = 0, 1, \ldots$. Поэтому построенное управление будет ограниченным на $\mathbb{R}_+$.

Теорема 3. *Для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ найдется такое управление $U \in KC_{m,n}(\mathbb{R}_+)$, что система* (2.2) *асимптотически эквивалентна системе* (2.3).

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть*

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \quad b = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ и для любого $T > 0$ найдется такое управление $V \in KC_{1,n}([0,T])$, что для матрицы Коши $X_V(t,s)$ системы

$$\dot{x} = \big(A + bV(t)\big)x \tag{2.9}$$

выполнено равенство $X_V(T,0) = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Следствие 5. *Пусть система*

$$\dot{x} = Gx + Hu \tag{2.10}$$

вполне управляема. Тогда для любого $\alpha > 0$ и любого $T > 0$ найдется управление $U \in KC_{m,n}([0,T])$ такое, что для матрицы Коши $X_U(t,s)$ замкнутой системы $\dot{x} = \big(G + HU(t)\big)x$ выполнено равенство $X_U(T,0) = \alpha I$.

Доказательство. Поскольку система (2.10) вполне управляема, то существуют матрицы $P \in M_n$, $R \in M_{m,n}$, $p \in M_{m,1}$ такие, что

$$P(G + HR)P^{-1} = A, \quad PHp = b.$$

В силу теоремы 4 для $\alpha_1 = \alpha$, $\ldots$, $\alpha_n = \alpha$ и $T > 0$ найдется кусочно непрерывная функция $V : [0,T] \to M_{1,n}$ такая, что для матрицы Коши $Y_V(t,s)$ системы

$$\dot{y} = \big(P(G + HR)P^{-1} + PHpV(t)\big)y$$

выполнено равенство $Y_V(T,0) = \alpha I$. Положим $U(t) = R + pV(t)P$. Тогда $X_U(t,s) = P^{-1}Y_V(t,s)P$. Поэтому $X_U(T,0) = \alpha I$. Следствие доказано.

Докажем теперь теорему 3. Для доказательства достаточно построить $U(\cdot)$ так, чтобы были выполнены равенства (2.7) и (2.8). Всякая пара $\widehat{\sigma}_j \in \widehat{\Sigma}$ является вполне управляемой. Поэтому управление $U(\cdot)$, построенное на промежутках $\Delta_{i_k+1}, \Delta_{i_k+2}, \dots, \Delta_{i_{k+1}-1}$ так же, как и в следствии 5 для $\alpha = 1$, будет обеспечивать равенства (2.7). Построим управление, обеспечивающее равенство (2.8). По теореме 4 для $\alpha_j = e^{\lambda_j(t_{i_{k+1}} - t_{i_k})}$ можно выбрать функцию $V(t)$, $t \in [t_{i_{k+1}-1}, t_{i_{k+1}})$ так, чтобы для матрицы Коши системы (2.9) было выполнено равенство $X_V(t_{i_{k+1}}, t_{i_{k+1}-1}) = \operatorname{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Положим $U(t) = Q + qV(t)S$, $t \in [t_{i_{k+1}-1}, t_{i_{k+1}})$, где Q и q из (2.4). Тогда управление $U(t)$ будет обеспечивать равенство (2.8).

Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы 3, достаточно доказать теорему 4. Мы построим здесь управление $V \in KC_{1,n}([0,T])$ для $n = 2$. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — произвольные числа. Если $\alpha\beta \geqslant 1$, то построим функцию $f_1(t)$, а если $0 < \alpha\beta < 1$, то построим функцию $f_2(t)$, $t \in [0, T/2)$,

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, \quad t \in \left[0, \dfrac{T(\alpha\beta - 1)}{2\alpha(\beta+1)}\right), \\ -\dfrac{8\alpha^2(\beta+1)^2}{T^2}, \quad t \in \left[\dfrac{T(\alpha\beta-1)}{2\alpha(\beta+1)}, \dfrac{T\beta}{2(\beta+1)}\right), \\ \dfrac{8\alpha(\beta+1)^2}{T^2}, \quad t \in \left[\dfrac{T\beta}{2(\beta+1)}, \dfrac{T}{2}\right), \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} -\dfrac{8(\beta+1)^2}{\beta^2 T^2}, \quad t \in \left[0, \dfrac{T\beta}{2(\beta+1)}\right), \\ \dfrac{8(\beta+1)^2}{\alpha\beta^2 T^2}, \quad t \in \left[\dfrac{T\beta}{2(\beta+1)}, \dfrac{T(\beta+\alpha\beta)}{2(\beta+1)}\right), \\ 0, \quad t \in \left[\dfrac{T(\beta+\alpha\beta)}{2(\beta+1)}, \dfrac{T}{2}\right). \end{cases}$$

Далее, пусть $g(t) = 32/T^2$, $t \in [T/2, 3T/4)$; $g(t) = -32/T^2$, $t \in [3T/4, T]$. Если $\alpha\beta \geqslant 1$, то положим $\gamma = 1/(2\alpha\beta)$, $u_1(t) = f_1(t)$, $t \in [0, T/2)$; $u_1(t) = g(t)$, $t \in [T/2, T]$. Если $0 < \alpha\beta < 1$, то положим $\gamma = \min\{1/2, \alpha^2\beta^2\}$, $u_1(t) = f_2(t)$, $t \in [0, T/2)$; $u_1(t) = g(t)$, $t \in [T/2, T]$. Далее, построим функцию $u_2(t)$, $t \in [0, T]$,

$$u_2(t) = \begin{cases} -\dfrac{2(\beta+1)}{T\beta}, \quad t \in \left[0, \dfrac{T\beta}{2(\beta+1)}\right), \\ -\dfrac{2\beta(\beta+1)}{T}, \quad t \in \left[\dfrac{T\beta}{2(\beta+1)}, \dfrac{T}{2}\right), \\ \dfrac{4\beta}{T}, \quad t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]. \end{cases}$$

Пусть $U(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big)$, $t \in [0,T]$. Построим функцию $\Phi(t) = I + \int\limits_0^t e^{-As} bU(s)\,ds$, $t \in [0,T]$. Можно проверить, что $\det \Phi(t) \geqslant \gamma > 0$ для всех $t \in [0,T]$. Построим управление $V(t) = U(t)\Phi^{-1}(t)e^{-At}$, $t \in [0,T]$. Можно показать, что для матрицы Коши системы (2.9) с таким управлением выполнено равенство $X_V(T,0) = \operatorname{diag}\{\alpha, \beta\}$. Таким образом, теорема 4 верна для $n = 2$.

Поступила 31.12.99

Список литературы

1. **Тонков Е. Л.** Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // ПММ. 1974. Т. 38, Ґ 4. С. 599–606.
2. **Луньков В. А., Тонков Е. Л.** О стабилизации линейной нестационарной системы // Автоматика и телемеханика. 1974. Ґ 12. С. 19–23.
3. **Култышев С. Ю., Тонков Е. Л.** Управляемость линейной нестационарной системы // Диф. уравнения. 1975. Т. 11, Ґ 11. С. 1206–1216.
4. **Тонков Е. Л.** Стабилизация и глобальная управляемость почти периодической системы // Диф. уравнения. 1979. Т. 15, Ґ 10. С. 1804–1813.
5. **Тонков Е. Л.** Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Диф. уравнения. 1979. Т. 15, Ґ 10. С. 1804–1813.
6. **Тонков Е. Л.** Равномерная локальная управляемость и стабилизация нелинейной рекуррентной системы // Диф. уравнения. 1982. Т. 18, Ґ 5. С. 908–910.
7. **Popov V. M.** Hyperstabilitatea sistemelor automate. Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1966.
8. **Brunovsky P.** Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems // J. of Diff. Equations. 1969. Vol. 6. P. 296–313.
9. **Попова С. Н.** К вопросу об управлении показателями Ляпунова // Вестн. Удм. ун-та. Ижевск, 1992. Ґ 1. С. 23–39.
10. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Диф. уравнения. 1994. Т. 30, Ґ 10. С. 1687–1696.
11. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Диф. уравнения. 1994. Т. 30, Ґ 11. С. 1949–1957.
12. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, Ґ 2. С. 228–238.
13. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, Ґ 4. С. 723–724.
14. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Равномерная управляемость показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1995. Т. 50, вып. 4 (302). С. 108–109.
15. **Тонков Е. Л.** Задачи управления показателями Ляпунова // Диф. уравнения. 1995. Т. 31, Ґ 10. С. 1682–1686.
16. **Попова С. Н., Тонков Е. Л.** Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Диф. уравнения. 1997. Т. 33, Ґ 2. С. 226–235.
17. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О достаточных условиях локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова двумерных систем с кратными показателями // Сб. статей, посв. 60-летию со дня рожд. проф. В.Г. Спринджука. Минск, 1997. С. 75–77.
18. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова системы с некратными показателями // Диф. уравнения. 1997. Т. 33, Ґ 4. С. 495–499.
19. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** К методу поворотов для линейных управляемых систем // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42, Ґ 6. С. 13–16.
20. **Зайцев В. А., Тонков Е. Л.** Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Изв. вузов. Математика. 1999. Ґ 2 (441). С. 45–56.
21. **Tonkov E. L.** Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Tr. Inst. Mat. i Mekh. Ekaterinburg, 2000. Vol. 6 (to appear).
22. **Гайшун И. В.** Существование канонических форм линейных нестационарных систем управления относительно экспоненциальной группы // Диф. уравнения. 1998. Т. 34, Ґ 6. С. 727–734.
23. **Гайшун И. В.** Управляемость характеристическими векторами линейных нестационарных систем // Диф. уравнения. 1999. Т. 35, Ґ 1. С. 24–29.
24. **Гайшун И. В.** Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 1999. 409 с.
25. **Зайцев В. А.** Согласованность и управление показателями Ляпунова // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 2(17). С. 3–40.
26. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Диф. уравнения. 1999. Т. 35, Ґ 1. С. 97–106.
27. **Макаров Е. К., Попова С. Н.** О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Изв. вузов. Математика. 1999. Ґ 2 (441). С. 60–67.
28. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.

Зайцев Василий Александрович
Удмуртский государственный университет
г. Ижевск, ул. Университетская, 1 (корп. 4)
426034, Россия
e-mail: vaz@ulm.uni.udm.ru