

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ **У**РАВНЕНИЯ

6

ТОМ



36

2000

однородные порядка $m, 1, 1$ соответственно; б) система $z' = Q(z)$, $z \in R^n$, не имеет ненулевых ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ решений; в) для любого ненулевого $y \in R^n$ либо $B_0(y) \notin L_+(Q)$, либо $B_1(y) \notin L_-(Q)$, где $L_+(Q)$ — множество векторов y_0 из R^n , для которых хотя бы одно решение $\varphi(t, y_0)$ задачи $z' = Q(z)$, $z(0) = y_0$ ограничено при $t > 0$, $L_-(Q)$ — множество векторов y_0 из R^n , для которых хотя бы одно решение $\varphi(t, y_0)$ ограничено при $t < 0$. Множество $\mathfrak{R}_{n,m}$ состоит из троек (f, h_0, h_1) непрерывных отображений $f : [0, 1] \times R^{2n} \mapsto R^n$, $h_0, h_1 : C^1([0, 1]; R^n) \mapsto R^n$, удовлетворяющих условиям:

$$\lim_{|y|+|z|\rightarrow\infty}(1+|y|+|z|)^{-m}\max_{0\leq t\leq 1}|f(t,y,z)|=0,\quad \lim_{\|x\|_{C^1}\rightarrow\infty}\|x\|_{C^1}^{-1}h_i(x)=0,\quad i=0,1.$$

Тройку $(Q, B_0, B_1) \in \mathfrak{P}_{n,m}$ назовем разрешимой, если для любой $(f, h_0, h_1) \in \mathfrak{R}_{n,m}$ задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение. На множестве $\mathfrak{P}_{n,m}$ введем топологию равномерной сходимости на каждом компакте. Тогда имеет место

Теорема 1. В пространстве $\mathfrak{P}_{n,m}$ две тройки, лежащие в одной связной компоненте, одновременно либо разрешимы, либо неразрешимы.

Обозначим через $\gamma(F)$ вращение непрерывного отображения $F : S^{n-1} \rightarrow R^n$, если $F(y) \neq 0$ для любого y из единичной сферы $S^{n-1} = \{y \in R^n : |y| = 1\}$.

Теорема 2. Пусть $(Q, B_0, B_1) \in \mathfrak{P}_{n,m}$ и $B_0 = B_1$. Тогда для того, чтобы данная тройка была разрешимой, достаточно, а в случае $n = 2$ и необходимо, чтобы $\gamma(Q)\gamma(B_0) \neq 0$.

Следствие. Тройка $(Q, B_0, B_1) \in \mathfrak{P}_{2,m}$ при $\gamma(Q) \geq 0$ разрешима тогда и только тогда, когда $\gamma(Q) = 1$ и отлично от нуля число $\gamma^0 = \begin{cases} \gamma(B_0), & L_+(Q) = \{0\}, \\ \gamma(B_1), & L_+(Q) \neq \{0\}. \end{cases}$

А. Н. Ветохин (Москва) “Об одном свойстве верхнего центрального показателя” (31 марта 2000 г.).

Для заданного натурального числа n рассмотрим пространство систем $\mathcal{M}_n^u$ вида

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad t\in\mathbf{R}^+, \tag{1}$$

где $A : \mathbf{R}^+ \rightarrow \text{End } \mathbf{R}^n$ — непрерывная ограниченная оператор-функция, наделенное топологией равномерной сходимости коэффициентов на $\mathbf{R}^+$. Напомним, что верхний центральный показатель определяется формулой [1]

$$\Omega(A)=\lim_{T\rightarrow\infty}\overline{\lim}_{m\rightarrow\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=0}^{m-1}\ln|X(T(j+1),Tj)|,$$

где $X(t,s)$ — оператор Коши системы (1). В работе [2] доказано, что верхний показатель Ляпунова $\Lambda(\cdot)$, рассматриваемый как функция на пространстве $\mathcal{M}_n^u$, не принадлежит первому классу Бэра. Поэтому возникает вопрос о нахождении минимальной функции $\varphi(\cdot)$ первого класса Бэра, удовлетворяющей условию $\Lambda(A) \leq \varphi(A)$ для любой системы (1). Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. Пусть остаточный функционал $\varphi(\cdot) : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbf{R}$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве $\mathcal{M}_n^u$ и удовлетворяет неравенству $\Lambda(A) \leq \varphi(A) \leq \Omega(A)$ для любой системы (1). Тогда выполнено равенство $\varphi(A) = \Omega(A)$ для любой системы (1).

Л и т е р а т у р а. 1. Былов Б. Ф., Виноград Г. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1968. 2. Рахимбердиев М. И. // Мат. заметки. 1962. Т. 31, № 6. С. 925 — 931.

В. А. Зайцев (Ижевск) “Об управлении характеристическими показателями Ляпунова стационарной системы с наблюдателем” (31 марта 2000 г.).

Рассматривается стационарная линейная система с наблюдателем

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=C^*x,\quad (x,u,y)\in\mathbf{R}^{n+m+k}, \tag{1}$$

где $A=J_1-\sum_{i=1}^na_{n+1-i}e_ne_i^*$, $J_p=\{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $g_{i,i+p}=1$, $i=\overline{1,n-p}$, и $g_{ij}=0$ при $j-i\neq p$ ($0\leq p\leq n-1$).

Управление формируется в виде $u=Vy$, что приводит к замкнутой системе $\dot{x}=(A+BVC^*)x$.

О п р е д е л е н и е. Система (1) обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова, если для любого $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\mathbf{R}^n$ найдется матрица V такая, что $\chi(A+BVC^*,\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\dots+\gamma_n$, где $\chi(A,\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы A .

Построим матрицу $G=\sum_{i=1}^na_{i-1}J_{i-1}^*$, $a_0=1$. Пусть $(n\times n)$ -матрица D имеет блочный вид $\begin{pmatrix}0&0\\F&0\end{pmatrix}$,

где $F—((n-p+1)\times p)$ -матрица, $p\in\{1,\dots,n\}$.

Теорема 1. Пусть $\chi(A+D,\lambda)=\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\dots+\gamma_n$. Тогда $\gamma_i=a_i-\text{Tr }DJ_{i-1}G$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 2. Пусть $C^*e_ie_j^*B=0$ для всех $1\leq j<i\leq n$. Система (1) обладает свойством глобальной управляемости показателей Ляпунова тогда и только тогда, когда матрицы $C^*J_{i-1}GB$, $i=\overline{1,n}$, линейно независимы. В этом случае матрица V , приводящая характеристический многочлен матрицы $A+BVC^*$ к заранее заданному многочлену $\lambda^n+\gamma_1\lambda^{n-1}+\dots+\gamma_n$, имеет вид $V=[\text{vec}^{-1}(P(P^*P)^{-1}(a-\gamma))]^*$, где $P=[\text{vec } C^*J_0GB,\dots,\text{vec } C^*J_{n-1}GB]$ — $(mk\times n)$ -матрица, $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbf{R}^n$, $\text{vec } H$ — операция, “разворачивающая” матрицу H по строкам в вектор-столбец.

Пример. Рассмотрим линейное уравнение n -го порядка с наблюдателем

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + a_2 z^{(n-2)} + \dots + a_n z = \beta_{p1} u_1^{(n-p)} + \beta_{p+1,1} u_1^{(n-p-1)} + \dots + \beta_{n1} u_1 + \dots$$

$$\dots + \beta_{pm} u_m^{(n-p)} + \dots + \beta_{nm} u_m, \quad z \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq p \leq n, \quad (2)$$

$$y_1 = c_{11} z + \dots + c_{p1} z^{(p-1)}, \dots, y_k = c_{1k} z + \dots + c_{pk} z^{(p-1)}, \quad (3)$$

$u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. Пусть $u = Vy$. По системе (2), (3) построим $(n \times n)$ -матрицу A , $(n \times m)$ -матрицу $K = \{\beta_{ij}\}$, в которой первые $p-1$ строк нулевые, и $(n \times k)$ -матрицу $C = \{c_{ij}\}$, в которой последние $n-p$ строк нулевые. Тогда наблюдаемая система (2), (3) эквивалентна матричной системе (1) с матрицей $B = G^{-1}K$, где соответствие устанавливается равенством $x_1 = z$. Условия теоремы 2 выполнены. Поэтому если матрицы $C^* J_{i-1} K$, $i = \overline{1, n}$, линейно независимы, то для любого $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ управление $V = [\text{vec}^{-1}(P(P^*P)^{-1}(a - \gamma))]^*$, где $P = [\text{vec } C^* J_0 K, \dots, \text{vec } C^* J_{n-1} K]$, приводит систему (2), (3) к уравнению $z^{(n)} + \gamma_1 z^{(n-1)} + \gamma_2 z^{(n-2)} + \dots + \gamma_n z = 0$.

В. С. Самовол (Москва) "О преобразованиях обратимых систем" (7 апреля 2000 г.).

Рассматривается задача о возможности приведения вещественной системы обыкновенных дифференциальных уравнений класса C^∞ в окрестности невырожденной седловой особой точки пространства $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad \|F(x)\| = o(\|x\|), \quad (1)$$

путем невырожденного обратимого диффеоморфизма класса C^k ($k \geq 1$)

$$x = H(y) \quad (2)$$

к нормальной форме (локальная C^k -нормализация)

$$\dot{y} = P(y), \quad (3)$$

где $P(y)$ — многочлен, состоящий из резонансных членов, или к линейному виду (локальная C^k -линеаризация)

$$\dot{y} = Ay. \quad (4)$$

Большой интерес представляет собой случай, когда система (1) является обратимой, т.е. существует такая невырожденная матрица B , что имеют место равенства

$$AB = -BA, \quad F(Bx) = -BF(x).$$

Будем в этом случае называть матрицу B матрицей автоморфизма обратимой системы (1). Важно, чтобы преобразование (2) сохраняло свойство обратимости, что обеспечивается выполнением условия

$$H(By) = BH(y). \quad (5)$$

Известно, что задача локальной гладкой нормализации системы (1) решается с помощью теоремы Стернберга — Ченя [1]. В [2] приведено условие на нормальную форму системы (1), достаточное для ее локальной C^k -линеаризации (условие $S(k)$).

Теорема 1. Если матрица B автоморфизма обратимой системы (1) удовлетворяет условию

$$B^m = E, \quad (6)$$

где E — единичная матрица, а $m > 0$ — целое число, то для системы (1) существует преобразование (2), удовлетворяющее условию (5), приводящее ее к нормальной форме (3).

Теорема 2. Если матрица B автоморфизма обратимой системы (1) удовлетворяет условию (6), то условие $S(k)$ является достаточным условием для существования преобразования (2), удовлетворяющего равенству (5) и приводящего эту систему к линейному виду (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Литература. 1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 2. Самовол В. С. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1979. Т. 38. С. 187 — 219.

И. Н. Сергеев (Москва) "Примеры вычисления минимального показателя трехмерной системы" (7 апреля 2000 г.).

Результаты докладов в [1, 2] существенно упрощают вычисление минимального показателя $\underline{\Delta}(A)$ (см. обозначения из [2]) в приводимых ниже примерах диагональной трехмерной системы $A = A_\mu \in \mathcal{M}_3$, зависящей от числового параметра μ .

Для каждого $\mu > 0$ положим $t_0 = 0$, $t_k = (1 + \mu)^k$, $k \in \mathbb{N}$, и выберем последовательность чисел $\tau_k > 0$, удовлетворяющую условиям: $t_{k-1} < t_k - \tau_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\tau_k/t_k) = 0$. Обозначив $b_1 = -5$, $b_2 = 2$, $b_3 = 3$, рассмотрим матрицу $A_\mu(t) = \text{diag}(a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ с коэффициентами

$$a_i(t) = \begin{cases} b_{\epsilon_k(i)}, & t \in [t_{k-1}, t_k - \tau_k), \\ b_{\eta_k(i)}, & t \in [t_k - \tau_k, t_k), \end{cases} \quad i = \overline{1, 3}, \quad k \in \mathbb{N},$$