РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. М. ГОРЬКОГО

Актуальные проблемы теории устойчивости и управления

Тезисы докладов Международной конференции

Екатеринбург, Россия
21–26 сентября 2009 г.

Екатеринбург
2009

УДК 517.977 + 519.63

Конференция проводится в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления», при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-06091) и Уральского отделения РАН

Актуальные проблемы теории устойчивости и управления: Тез. докл. Междунар. конференции. Екатеринбург, Россия, 21–26 сентября 2009 г. Екатеринбург: УрО РАН. 2009. 190 с.

В сборнике анонсируются результаты исследований по теории устойчивости и математической теории управления. Представлены следующие научные направления: проблемы устойчивости движения и стабилизации, задачи управления в условиях неопределенности и дифференциальные игры, управление распределенными системами, обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби, численные методы теории управления и приложения.

УДК 517.977 + 519.63

[1] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

[2] *Пименов В.Г.* Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.

[3] *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Москва – Ижевск: ИКИ, НИЦ, «РХД», 2004.

Вариационные методы в задачах управления асимптотическими инвариантами

С. Н. Попова

Удмуртский государственный университет, Ижевск

e-mail: ps@uni.udm.ru

В задачах управления ляпуновскими инвариантами важную роль играет понятие глобальной достижимости линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Предполагаем, что коэффициенты $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ кусочно-непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. В качестве управлений в системе (1) выбираем измеримые по Лебегу и ограниченные на своей области определения функции.

Определение. Система (1) называется *глобально достижимой* на отрезке $[t_0, t_1]$, если для всякой $n \times n$-матрицы H с положительным определителем найдется матричное управление $U : [t_0, t_1] \to \mathrm{M}_{mn}$ такое, что матрица Коши $X_U(t, s)$ системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x$$

удовлетворяет равенству

$$X_U(t_1, t_0) = X_0(t_1, t_0)H.$$

Теорема. *Система* (1) *глобально достижима на* $[t_0, t_1]$ *в том и только том случае, когда на* $[t_0, t_1]$ *для всякой* $H \in \mathrm{M}_{nn}$, $\det H > 0$, *разрешима матричная задача управления*

$$\dot{Y} = A(t)Y + B(t)V, \quad Y \in \mathrm{M}_{nn}, \ V \in \mathrm{M}_{mn}, \tag{2}$$

$$Y(t_0) = E, \quad Y(t_1) = X_0(t_1, t_0)H, \tag{3}$$

$$\det Y(t) > 0 \text{ при всех } t \in [t_0, t_1]. \tag{4}$$

Разрешимость задачи (2), (3) при каждой H гарантируется полной управляемостью системы (1) на $[t_0, t_1]$ (Н.Н. Красовский [1], Р. Калман [2]). Но полная управляемость системы (1) не обеспечивает выполнение неравенства (4).

Пример. Система (1) при $n = 2$, $m = 1$, $A(t) \equiv 0 \in \mathrm{M}_{22}$, $B(t) = \mathrm{col}(b_1(t), b_2(t))$, где $b_1(t) \equiv 1$ при $t \in [0,1]$ и $b_1(t) \equiv 0$ при $t \in (1,2]$, а $b_2(t) = 1 - b_1(t)$, вполне управляема на $[0,2]$. Выберем $H = -E$ и положим $V(t) = (v_1(t), v_2(t))$. Определитель решения $Y(t)$ задачи (2), (3) для $t \in [0,1]$ имеет вид $\det Y(t) = 1 + \int_0^t v_1(s)\,ds$. При этом $\int_0^1 v_1(s)\,ds = -2$. Следовательно, условие (4) не выполняется.

Таким образом, для обеспечения свойства глобальной достижимости требуется длина отрезка времени, вообще говоря, превышающая длину отрезка полной управляемости.

Пусть

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X_0(t_0, s)B(s)B^T(s)X_0^T(t_0, s)\,ds$$

— матрица Калмана системы (1) на $[t_0, t_1]$. Предположим, что система (1) равномерно вполне управляема [2], то есть при некоторых $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\xi^T W(t_0, t_0 + \sigma)\xi \geqslant \alpha\xi^T\xi$. Свойство равномерной полной управляемости обеспечивает полную управляемость системы (1) на $[t_0, t_0+\sigma]$ при всех t_0. Зафиксируем $t_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$ и положим $t_1 = t_0 + l\sigma$. На отрезке $[t_0, t_1]$ рассмотрим задачу о нахождении такого матричного управления $V(\cdot)$, которое решало бы задачу (2), (3) и доставляло минимум функционалу

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\varphi(t, V)}{\|Y(t)\|^2} + \|V(t)\|^2 \right) dt,$$

где φ — неотрицательная функция. Методами вариационного исчисления получены новые достаточные условия глобальной достижимости системы (1).

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления».

[1] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[2] *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5, № 1. P. 102–119.

Свойства интегральной аппроксимации негладких функций

И. М. Прудников

Санкт-Петербургский государственный университет

e-mail: prudnikov.08@mail.ru

В докладе приводится новый нелокальный способ аппроксимации негладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие $\epsilon(D)$-стационарные точки. С помощью таких функций можно строить методы оптимизации второго порядка, сходящиеся к $\epsilon(D)$-стационарным точкам. Описан алгоритм оптимизации, сходящийся к стационарной точке функции $f(\cdot)$ со сверхлинейной скоростью, т. е. имеющий скорость сходимости более быструю, чем любая геометрическая прогрессия.

Пусть $f(\cdot) : R^n \to R$ – липшицева с константой L функция и x_* – ее точка локального минимума (максимума) в R^n. Как известно, необходимым условием экстремума для липшицевой функции является принадлежность нуля субдифференциалу Кларка. Любая точка, для которой выполняется написанное выше условие, называется также *стационарной*.

Возьмем произвольное выпуклое компактное множество $D \subset R^n$ с мерой $\mu(D) > 0$. Введем определение $\epsilon(D)$-*стационарной точки.*