

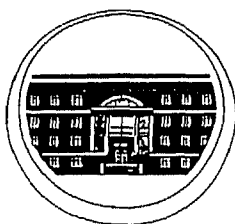
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 15

№ 3

2009



ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 15, № 3. Екате-
ринбург: ИММ УрО РАН, 2009. 284 с.**

ISSN 0134-4889

Главный редактор чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Редакционная коллегия

Н. В. Величко, Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов,
О. Н. Ульянов (отв. секретарь)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

Отв. редактор выпуска А. Г. Ченцов

© Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики
Уральского отделения РАН, 2009

УДК 517.911/517.93

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМ Е. А. БАРБАШИНА И Н. Н. КРАСОВСКОГО
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НА УПРАВЛЯЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ¹

Е. А. Панасенко, Е. Л. Тонков

Известные теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского (1952) об асимптотической устойчивости и устойчивости в целом положения равновесия автономной системы дифференциальных уравнений распространены на неавтономные дифференциальные включения с замкнутозначными (но необязательно компактнозначными) правыми частями, где в качестве положения равновесия выступает слабо инвариантное (относительно решений включения) множество. Эти утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа — Бебутова, динамической системы сдвигов, сопутствующей правой части дифференциального включения, и отвечающего включению слабо инвариантного множества.

Ключевые слова: теория устойчивости, функции Ляпунова, дифференциальные включения, управляемые системы, инвариантные множества.

E.A. Panasenko, E.L. Tonkov. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems.

The known theorems by E.A. Barbashin and N.N. Krasovskii (1952) about the asymptotic and global stability of an equilibrium state for an autonomous system of differential equations are extended to nonautonomous differential inclusions with closed-valued (but not necessarily compact-valued) right-hand sides, where the equilibrium state is a weakly invariant (with respect to the solutions of the inclusion) set. The statements are formulated in terms of the Hausdorff-Bebutov metric, the dynamical system of translations corresponding to the right-hand side of the differential inclusion, and the weakly invariant set corresponding to the inclusion.

Keywords: stability theory, Lyapunov functions, differential inclusions, controlled systems, invariant sets.

Введение

В 1952 г. Е. А. Барбашин и Н. Н. Красовский показали [1] (см. также [2, с. 19]), что в условиях теоремы А. М. Ляпунова (так называемой второй теоремы Ляпунова [3]) об асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (0.1)$$

требование отрицательной определенности производной $\dot{V}_f$ функции Ляпунова V можно ослабить до требования $\dot{V}_f \leq 0$ при дополнительном условии, что множество $\dot{V}_f(x) = 0$ не содержит целых траекторий системы (0.1), кроме положения равновесия $x = 0$. Аналогичные утверждения с ослабленным условием на производную $\dot{V}_f$ в силу системы (0.1) были получены Барбашиным и Красовским и для проверки свойства устойчивости в целом и неустойчивости нулевого решения системы (0.1).

Эти утверждения в силу своей эффективности вызвали поток исследований, посвященных проверке асимптотической устойчивости конкретных систем (в основном механических и биологических), а также исследований, связанных с многочисленными обобщениями теорем Барбашина и Красовского на нестационарные системы, системы уравнений с последействием и др. В рамках отмеченной тематики в работе [4] теоремы об асимптотической устойчивости и устойчивости в целом получены для нестационарного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (0.2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00305, 06-01-00258, 09-01-97503), программы "Развитие научного потенциала ВШ" (проект 2.1.1/1131) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 29 "Математическая теория управления".

с компактными образами правой части $F(t, x)$ и заданным множеством $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$, инвариантным относительно потока, порожденного дифференциальным включением (0.2) и играющим роль положения равновесия включения (0.2). Эти результаты дополняют соответствующие утверждения работы [5].

Здесь мы продолжаем исследования, начатые в работе [4], и распространяем теоремы Барбашина и Красовского на нестационарные включения (0.2) без предположения компактности образов правой части $F(t, x)$ (требуется лишь их замкнутость), а в отношении множества M предполагаем только слабую инвариантность относительно потока, отвечающего включению (0.2). Эти утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа — Бебутова, динамической системы сдвигов [6, гл. 6], сопутствующей правой части дифференциального включения (0.2), и слабо инвариантного множества M , отвечающего включению (0.2).

Предполагается, что полученные результаты в дальнейшем могут найти применение при исследовании свойств множеств достижимости управляемых систем и введенных Н. Н. Красовским стабильных мостов [7, 8], играющих важную роль в теории дифференциальных игр с нефиксированным временем окончания игры.

1. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство² размерности n со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, $\rho(x, M) \doteq \min_{y \in M} |x - y|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества M в $\mathbb{R}^n$. Если r — положительное число, то через $O_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ обозначим замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в нуле. Далее, если M — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\text{cl } M$ (или $\overline{M}$) — замыкание, $\text{fr } M$ — граница, $\text{int } M$ — внутренность, $\text{co } M$ — выпуклая оболочка множества M относительно пространства $\mathbb{R}^n$.

Пространство непустых компактных подмножеств в $\mathbb{R}^n$ обозначим $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Определим в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа

$$\text{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \quad (1.1)$$

где $d(A, B) \doteq \max_{a \in A} \rho(a, B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B . Подпространство в $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых* компактных подмножеств, обозначим через $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$, пространство всех непустых *замкнутых* (необязательно ограниченных) подмножеств в $\mathbb{R}^n$ — через $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$, а подпространство в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых* замкнутых подмножеств — через $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Каждое из пространств $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ является полным [10, § 14] в метрике (1.1). Ниже будет показано, что и в пространстве $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ можно определить метрику, относительно которой $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будут полными метрическими пространствами.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (1.2)$$

где $F: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$. Под *решением* включения (1.2) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ будем понимать решение Каратеодори, а именно, *всякую абсолютно непрерывную функцию* $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ *такую, что включение* $\dot{\varphi}(t) \in F(t, \varphi(t))$ *выполнено при почти всех* $t \in J$. Далее, функцию $t \rightarrow \varphi(t)$, удовлетворяющую условию $\varphi(t_0) = x_0$, будем называть *локальным решением* включения (1.2), если найдется такая окрестность J точки t_0 , что φ является решением включения (1.2) на J .

Пусть задано множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение

$$M(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in M\}$$

²Т. е. евклидово пространство с фиксированным ортонормированным базисом [9].

множества $\mathcal{M}$ непусто. Построим замкнутую окрестность $\mathcal{M}^r \doteq \overline{\mathcal{M}} + O_r$ множества $\mathcal{M}$ в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ и внешнюю r -окрестность $\mathcal{N}_+^r \doteq \mathcal{M}^r \setminus \overline{\mathcal{M}}$ границы $\text{fr } \mathcal{M}$ множества $\mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M}^r \in \text{clos}(\mathbb{R}^{1+n})$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ множество $\mathcal{M}^r(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in \mathcal{M}^r\}$ замкнуто.

Всюду в этой статье мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1. Найдется такое $r > 0$, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathcal{M}^r$ существует локальное решение $\varphi(t)$ включения (1.2), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Кроме того, если $\varphi: [t_0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение дифференциального включения (1.2), то всегда предполагается, что полуинтервал $[t_0, \tau)$, где $\tau = \tau(t_0, \varphi)$, является правым максимальным полуинтервалом существования решения $t \rightarrow \varphi(t)$.

2. Пространства $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$, $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и дифференциальные включения

Напомним, что пространство $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ состоит из непустых замкнутых подмножеств, расположенных в $\mathbb{R}^n$, а $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ — подпространство в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из выпуклых подмножеств. Введем в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ метрику Хаусдорфа — Бебутова [11]. С этой целью для каждого F из $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ построим множество $m(F) \doteq \{f_0 \in F : |f_0| = \min_{f \in F} |f|\}$ и множество $m^r(F)$ точек, отстоящих от $m(F)$ не более, чем на расстояние r . Для $F, G \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ и любого $r > 0$ определим множества $F_r = F \cap m^r(F)$, $G_r = G \cap m^r(G)$, полуотклонения $d_r(F, G) \doteq d(F_r, G_r)$, $d_r(G, F) \doteq d(G_r, F_r)$, метрику Хаусдорфа $\text{dist}_r(F, G) \doteq \max\{d_r(F, G), d_r(G, F)\}$, полуотклонения Хаусдорфа — Бебутова

$$D(F, G) = \sup_{r>0} \min\{d_r(F, G), r^{-1}\}, \quad D(G, F) = \sup_{r>0} \min\{d_r(G, F), r^{-1}\} \quad (2.1)$$

и метрику Хаусдорфа — Бебутова

$$\text{Dist}(F, G) = \max\{D(F, G), D(G, F)\}. \quad (2.2)$$

Можно показать, что расстояние (2.2) удовлетворяет всем аксиомам метрики. Далее, из определения (2.1) и соотношений $d_r(\{0\}, F) = r_0 = |f_0|$, $f_0 \in m(F)$, $d_r(F, \{0\}) \leq r + r_0$ следует, что $D(\{0\}, F) = r_0$ и $D(F, \{0\}) \leq \beta$, где $\beta = (r_0 + \sqrt{r_0^2 + 4})/2$, для всех $F \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $|F| \doteq \text{Dist}(F, \{0\}) \leq \beta$ и

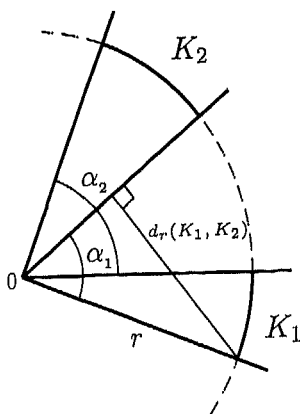
$$\text{Dist}(F, G) \leq \frac{1}{2} (|f_0| + |g_0| + \sqrt{|f_0|^2 + 4} + \sqrt{|g_0|^2 + 4}) \quad \text{для всех } F, G \in \text{clos}(\mathbb{R}^n).$$

Отметим еще, что если $|F| \leq r$ и $f \in F$, то это отнюдь не означает, что $|f| \leq r$, и последнее неравенство будет выполнено только в том случае, если $f \in F \cap O_r$.

П р и м е р 1. Пусть K_1 и K_2 — два замкнутых конуса в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Найдём $\text{Dist}(K_1, K_2)$. Напомним, что если точка x принадлежит некоторому конусу, то и весь луч $l \doteq \{\lambda x : \lambda \geq 0\}$ содержится в этом конусе. Пусть $\alpha_1 \doteq \max_{l_1 \subset K_1} \min_{l_2 \subset K_2} \angle(l_1, l_2)$ и $\alpha_2 \doteq \max_{l_2 \subset K_2} \min_{l_1 \subset K_1} \angle(l_1, l_2)$ (см. рис.). Предположим сначала, что $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi/2)$, и вычислим $D(K_1, K_2)$, для чего воспользуемся формулой (2.1). Очевидно, что $r_0 = 0$. Выберем некоторое $r > 0$. Тогда

$$d_r(K_1, K_2) = \max_{x \in K_1 \cap O_r} \varrho(x, K_2 \cap O_r) = r \sin \alpha_1.$$

Далее, из уравнения $r \sin \alpha_1 = r^{-1}$ получаем $r = (\sin \alpha_1)^{-\frac{1}{2}}$ и, следовательно, $D(K_1, K_2) = \sqrt{\sin \alpha_1}$. Аналогично находим $D(K_2, K_1) = \sqrt{\sin \alpha_2}$. Таким образом, $\text{Dist}(K_1, K_2) = \sqrt{\sin \alpha}$, где $\alpha \doteq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Если $\alpha_1 \in [\pi/2, \pi]$ или $\alpha_2 \in [\pi/2, \pi]$, то, как нетрудно проверить, $D(K_1, K_2) = 1$ или $D(K_2, K_1) = 1$ соответственно. Т. е. в этом случае $\text{Dist}(K_1, K_2) = 1$.

Полуотклонение от $K_1 \cap O_r$ до $K_2 \cap O_r$.

Для дальнейшего важно, что сходимость последовательности $\{F_i\}$, где $F_i \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$, к $F \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ в метрике (2.2) эквивалентна сходимости, равномерной на компактах.

Лемма 1 (основное свойство метрики Dist). $\text{Dist}(F_i, F) \rightarrow 0$ в том и только в том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого r найдется такой номер i_0 , что при всех $i \geq i_0$ выполнено неравенство $\text{dist}_r(F_i, F) \leq \varepsilon$.

Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 14.1 в монографии [10], несложно проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Каждое из пространств $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$ и $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ является полным в метрике (2.2).

Пусть $F(t, x)$ — функция переменных $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ со значениями в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$. F называется *полу непрерывной сверху* в точке (t_0, x_0) , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(t, x) \in O_\varepsilon(t_0, x_0)$ полуотклонение $D(F(t, x), F(t_0, x_0))$ не превосходит ε . Далее, функция $F: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ называется *полу непрерывной снизу* в точке (t_0, x_0) , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $D(F(t_0, x_0), F(t, x)) \leq \varepsilon$ для всех $(t, x) \in O_\delta(t_0, x_0)$.

Из леммы 1 следует, что F полу непрерывна сверху (или снизу) в точке (t_0, x_0) в том и только в том случае, если для любого достаточно большого r функция $(t, x) \rightarrow F(t, x) \cap O_r$ со значениями в $\text{comp}(\mathbb{R}^{1+n})$ полу непрерывна сверху (соответственно снизу) в точке (t_0, x_0) в смысле полуотклонения по Хаусдорфу $d_r(F(t, x), F(t_0, x_0))$ (соответственно $d_r(F(t_0, x_0), F(t, x))$).

Если F полу непрерывна сверху (или снизу) в каждой точке (t_0, x_0) открытого множества $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, то она называется *полу непрерывной сверху* (соответственно *снизу*) на множестве G . Функция $(t, x) \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$, одновременно полу непрерывная сверху и снизу на множестве G , называется *непрерывной* на G . Поэтому в силу основного свойства метрики Dist функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ непрерывна в точке (t_0, x_0) , если для любого достаточно большого r функция $(t, x) \rightarrow F(t, x) \cap O_r$ непрерывна в точке (t_0, x_0) в смысле метрики Хаусдорфа dist.

Учитывая сказанное, мы теперь можем переформулировать классические теоремы существования [12, гл. 2, § 1], [13, гл. 2, § 6, 7] решения задачи Коши для включения (1.2) с правой частью $(t, x) \rightarrow F(t, x)$, принимающей значения в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1. Если функция $(t, x) \rightarrow F(t, x) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ полу непрерывна снизу или имеет выпуклые образы и полу непрерывна сверху, то для каждой точки (t_0, x_0) существует локальное решение включения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Далее, если для каждой начальной точки (t_0, x_0) включение (1.2) имеет локальное решение и найдется такая локально интегрируемая по Лебегу функция $a: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, что для всех (t, x) выполнено неравенство

$$r_0(t, x) \leq a(t)(1 + |x|), \quad (2.3)$$

где $r_0(t, x)$ — расстояние от нуля в $\mathbb{R}^n$ до множества $F(t, x)$, то существует решение $\varphi(t)$ включения (1.2) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$, определенное при всех $t \geq t_0$.

Доказательство. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $\varphi(t)$ — локальное решение включения $\dot{x} \in S(t, x) \doteq F(t, x) \cap O_{r(t, x)}$, где $r(t, x) = r_0(t, x) + \sqrt{r_0^2(t, x) + 4}$. Тогда из неравенства (2.3) следует неравенство $r(t, x) \leq a_1(t)(1 + |x|)$ для некоторой локально интегрируемой по Лебегу функции $a_1(t)$. С учетом этого неравенства в малой окрестности точки t_0 получим следующие неравенства $d|\varphi(t)|/dt \leq |\dot{\varphi}(t)| \leq r(t, \varphi(t)) \leq a_1(t)(1 + |\varphi(t)|)$, и поэтому $|\varphi(t)| \leq z(t)$, где $z(t)$ — определенное при всех t решение задачи $\dot{z} = a_1(t)(1 + z)$, $z(t_0) = |\varphi(t_0)|$.

3. Равномерная устойчивость по Ляпунову

Пусть задано множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение

$$M(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in M\}$$

множества M непусто (замкнутость и ограниченность M не предполагается). Пусть, кроме того, задано дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (3.1)$$

где $F : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию 1 (см. разд. 1).

Определение 1. Множество M будем называть *равномерно* (по начальному моменту времени t_0) *устойчивым* по Ляпунову *относительно* включения (3.1), если для некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и любого решения $t \rightarrow \varphi(t)$ включения (3.1) из условия $(t_0, \varphi(t_0)) \in N_+^\delta$ следует, что $(t, \varphi(t)) \in M^\varepsilon$, $t \in [t_0, \tau)$.

Пример 2. Покажем, что множество $M \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}, x_1 \geq \arctg x_2, x_2 \geq 0\}$ равномерно устойчиво относительно дифференциального включения, отвечающего управляемой системе на плоскости

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = u(1 + x_2^2), \quad u \in [0, 1]. \quad (3.2)$$

Действительно, пусть точка $x \in P_1 \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \arctg x_2, x_2 \geq 0\}$. Тогда вектор $p = p(x)$, ортогональный P_1 и направленный наружу от множества $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq \arctg x_2, x_2 \geq 0\}$, имеет координаты $p = (-(\cos^2 x_1)^{-1}, 1)$, и поэтому скалярное произведение $\langle p, v \rangle$ вектора p и вектора скорости $v = v(x) = (1, u(1 + x_2^2))$ управляемой системы (3.2) в точке x удовлетворяет (при $0 \leq x_1 < \pi/2$) неравенству $\langle p, v \rangle = -(\cos^2 x_1)^{-1} + u(1 + \tg^2 x_1) = (u - 1)(\cos^2 x_1)^{-1} \leq 0$. Следовательно, всякая траектория управляемой системы (3.2), начинающаяся на множестве P_1 , с возрастанием времени не покидает M . Среди таких траекторий есть траектории, отвечающие решениям с конечным временем существования (например, $x(t) = (t, \tg t)$ при $u \equiv 1$).

Аналогичные рассуждения, как несложно проверить, остаются верными и относительно второй границы $P_2 \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$ множества M . Кроме того, так как вектор скорости v системы (3.2) в точке $0 \in \text{fr } M$ имеет координаты $(1, u)$, то в силу условия $u \in [0, 1]$ любая траектория системы (3.2), начинающаяся в нуле, тоже не покидает M .

Все вышесказанное будет справедливо и для множества M^ε при всех близких к нулю положительных ε . Следовательно, любая траектория, берущая начало в ε -окрестности множества M , эту окрестность не покидает, т. е. множество M устойчиво по Ляпунову. Далее, в силу стационарности дифференциального включения, отвечающего системе (3.2), такая устойчивость равномерна относительно начального момента времени t_0 , и, следовательно, дифференциальное включение, порожденное системой (3.2), устойчиво в смысле определения 1.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$. Напомним, что мы пользуемся следующими обозначениями:

$$M^r \doteq \overline{M} + O_r, \quad N_+^r \doteq M^r \setminus \overline{M},$$

где r — заданное положительное число.

О п р е д е л е н и е 2. Непрерывную функцию $V : \mathcal{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *функцией Ляпунова* (на множестве $\mathcal{M}^r$), если $V(t, x) = 0$ при $(t, x) \in \overline{\mathcal{M}}$ и $V(t, x) > 0$ при $(t, x) \in \mathcal{N}_+^r$.

Отметим, что предположение о равенстве нулю функции V на множестве $\mathcal{M}$ не уменьшает общности дальнейших рассуждений.

О п р е д е л е н и е 3. Функцию Ляпунова $V : \mathcal{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *определенно положительной* (на множестве $\mathcal{M}^r$), если для всякого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t, x) \geq \delta$ при всех $(t, x) \in \text{fr } \mathcal{M}^\varepsilon$.

Пусть, далее, функция $(t, x) \rightarrow V(t, x)$ локально липшицева. Тогда для любого вектора $h = (\tau, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и всякой точки $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ существует конечный предел

$$V^o(t, x; h) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon) \rightarrow (t, x, +0)} \frac{V(\vartheta + \varepsilon\tau, y + \varepsilon q) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

называемый *обобщенной производной* (или *производной Ф. Кларка* [14]) функции V по направлению вектора h в точке (t, x) .

Напомним [14], что для каждой точки (t, x) функция $h \rightarrow V^o(t, x; h)$ локально липшицева, положительно однородна и субаддитивна. Далее, через $V^o(t, x; q)$ будем обозначать производную функции V в точке (t, x) по направлению вектора $h = (1, q)$, $q \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Пусть существуют локально липшицева определенно положительная функция Ляпунова $V : \mathcal{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывная функция $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

(1) для любого $q \in F(t, x)$ и всех $(t, x) \in \text{cl } \mathcal{N}_+^r$ имеет место неравенство

$$V^o(t, x; q) \leq w(t, V(t, x)); \quad (3.3)$$

(2) $w(t, 0) \equiv 0$, уравнение

$$\dot{z} = w(t, z) \quad (3.4)$$

обладает свойством единственности решения задачи Коши, и тривиальное решение уравнения (3.4) равномерно устойчиво по Ляпунову (в классическом смысле).

Тогда множество $\mathcal{M}$ равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что всякое решение $\varphi : [t_0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (3.1), для которого $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^\delta$, удовлетворяет включению $(t, \varphi(t)) \in \text{int } \mathcal{M}^\varepsilon$ при всех $t \in [t_0, \tau]$. Выберем $\varepsilon > 0$ и обозначим

$$\alpha = \alpha(\varepsilon) = \inf_{(t, x)} \{V(t, x) : (t, x) \in \text{fr } \mathcal{M}^\varepsilon\}.$$

Из условия определенной положительности функции V следует, что $\alpha > 0$. Далее, так как положение равновесия уравнения (3.4) равномерно устойчиво по Ляпунову, то по найденному α можно указать такое $\delta_0 \in (0, \alpha)$, что для любого решения $t \rightarrow z(t)$ уравнения (3.4) и любого начального момента времени t_0 из неравенства $|z(t_0)| < \delta_0$ следует, что $|z(t)| < \alpha$ для любого $t \geq t_0$. В силу непрерывности функции V можно найти такое $\delta = \delta(\delta_0) \in (0, \varepsilon)$, что $V(t_0, x) < \delta_0$ для всех таких x , что $(t_0, x) \in \mathcal{N}_+^\delta$.

Предположим теперь, что решение $\varphi(t)$ включения (3.1) таково, что $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^\delta$, и на интервале (t_0, τ) существования решения $\varphi(t)$ найдется такой момент времени t^* , что выполнено включение $(t^*, \varphi(t^*)) \in \text{fr } \mathcal{M}^\varepsilon$. Обозначим $v(t) \doteq V(t, \varphi(t))$. Тогда $\dot{v}(t) = V^o(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ при почти всех $t \in [t_0, \tau]$, и из условия (3.3) следует неравенство $\dot{v}(t) \leq w(t, v(t))$. Из этого неравенства в силу теоремы С. А. Чаплыгина [15] следует неравенство $v(t) \leq z(t)$, где $z(t)$ есть решение уравнения (3.4), удовлетворяющее условию $z(t_0) = v(t_0)$. Поскольку $v(t_0) = V(t_0, \varphi(t_0)) < \delta_0$,

получаем противоречивые неравенства $\alpha \leq v(t^*) \leq z(t^*) < \alpha$. Таким образом, решение включения (3.1), выходящее при $t = t_0$ из множества N_+^{δ} , остается внутри множества M^{ε} при всех t из интервала существования решения $\varphi(t)$. $\square$

Опираясь на доказательство теоремы 2, нетрудно показать, что имеет место следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть для любого $t \in \mathbb{R}$ сечение $M(t)$ множества M компактно. Тогда в условиях теоремы 2 для заданного $r > 0$ найдется такое $r_0 \in (0, r)$, что для любого t_0 всякое решение $t \rightarrow \varphi(t)$ включения (3.1), удовлетворяющее условию $(t_0, \varphi(t_0)) \in N_+^{r_0}$, бесконечно продолжаемо вправо и при всех $t \geq t_0$ удовлетворяет включению $(t, \varphi(t)) \in \text{int } M^r$.

О п р е д е л е н и е 4. Множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется положительно инвариантным (относительно включения (3.1)), если для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in M$ каждое решение $\varphi: [t_0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (3.1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ удовлетворяет при всех $t \in [t_0, \tau)$ включению $(t, \varphi(t)) \in M$.

Следствие 2. Если множество M равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (3.1), то замыкание $\overline{M}$ множества M положительно инвариантно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть решение $t \rightarrow \varphi(t)$ включения (3.1), начинающееся в $\overline{M}(t_0)$, в некоторый момент t_1 достигает границы множества $M(t_1)$, т. е. $\varphi(t_1) \in \text{fr } M(t_1)$. Пусть, далее, найдется такой момент времени $t_2 > t_1$, для которого $\varphi(t_2) \notin \overline{M}(t_2)$. Это означает, что $\varrho(\varphi(t_2), \overline{M}(t_2)) = \alpha > 0$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Тогда в силу равномерной устойчивости множества M найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из соотношения $0 = \varrho(\varphi(t_1), \overline{M}(t_1)) < \delta$ при всех $t \in [t_1, t_2]$ следует неравенство $\varrho(\varphi(t), \overline{M}(t)) < \varepsilon$, которое противоречит неравенствам $\alpha = \varrho(\varphi(t_2), \overline{M}(t_2)) < \varepsilon < \alpha$. $\square$

П р и м е р 3. Применим теорему 2 для проверки устойчивости множества

$$M = \mathbb{R} \times M, \quad \text{где} \quad M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq \arctg x_2, x_2 \geq 0\},$$

относительно решений включения, отвечающего управляемой системе (3.2). С этой целью разобьем пространство $\mathbb{R}^2$ на четыре множества: M ,

$$G_1 = \{x : x_2 < 0, x_2 < x_1\}, \quad G_2 = \{x : x_1 \leq x_2 \leq -x_1\}, \quad G_3 = \{x : x_2 > -x_1, \arctg x_2 > x_1\}$$

и построим функцию

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in M, \\ -\sqrt{2}x_2, & \text{если } x \in G_1, \\ -\sqrt{2}x_1, & \text{если } x \in G_2, \\ r(x_1, x_2), & \text{если } x \in G_3. \end{cases}$$

Здесь $r(x)$ — расстояние от точки $x \in G_3$ до кривой $x_1 = \arctg x_2$. Непосредственно проверяется, что $V(x)$ определено положительно, локально липшицева и

$$V^o(x; q) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in M, \\ -\sqrt{2}u(1 + x_2^2), & \text{если } x \in G_1, \\ -\sqrt{2}, & \text{если } x \in G_2, \\ \frac{\partial r(x)}{\partial x_1} + u \frac{\partial r(x)}{\partial x_2} (1 + x_2^2), & \text{если } x \in G_3, \end{cases}$$

где $q = q(u) = (1, u(1 + x_2^2))$. Из равенства $\frac{\partial r(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial r(x)}{\partial x_2} (1 + x_2^2) = 0$ и неравенства $\frac{\partial r(x)}{\partial x_1} < 0$ следует, что $\frac{\partial r(x)}{\partial x_1} + u \frac{\partial r(x)}{\partial x_2} (1 + x_2^2) \leq 0$, и поэтому $V^o(x; q) \leq 0$ при всех $u \in [0, 1]$.

4. Слабая равномерная устойчивость

О п р е д е л е н и е 5. Множество M будем называть *слабо равномерно устойчивым относительно включения*

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (4.1)$$

если для некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется решение $\varphi: [t_0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (4.1), для которого из условия $(t_0, \varphi(t_0)) \in N_+^\delta$ при всех $t \in [t_0, \tau)$ следует включение $(t, \varphi(t)) \in M^\varepsilon$.

П р и м е р 4. Рассмотрим множество

$$M = \mathbb{R} \times M, \quad \text{где } M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq \arctg x_2, 0 \leq x_2 \leq 1\},$$

и дифференциальное включение, отвечающее управляемой системе (3.2). Среди решений этого дифференциального включения есть решения, начинающиеся в M и покидающие его через верхнюю границу $P \doteq \{(x_1, \tg x_1), 0 \leq x_1 \leq \pi/4\} \cup \{(x_1, 1), x_1 > \pi/4\}$, но есть решение $x(t) = (t, 1)$ (отвечающее управлению $u = 0$), которое остается в M при всех $t \geq \pi/4$. Через нижнюю границу решения включения из множества M не уходят. Повторяя рассуждения примера 2, нетрудно понять, что M слабо равномерно устойчиво в смысле определения 5.

Если множество M равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (4.1), то оно и слабо равномерно устойчиво; обратное, очевидно, неверно (пример 4). С точки зрения задач управления и дифференциальных игр свойство слабой равномерной устойчивости и рассматриваемое ниже свойство слабой равномерной асимптотической устойчивости представляют наибольший интерес.

Теорема 3. Пусть существуют локально липшицева определению положительная функция Ляпунова $V: M^r \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывная функция $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что:

(1) $w(t, 0) \equiv 0$, уравнение $\dot{z} = w(t, z)$ обладает свойством единственности решения задачи Коши, и его тривиальное решение равномерно устойчиво по Ляпунову;

(2) множество

$$Q(t, x) \doteq \{q \in F(t, x) : V^o(t, x; q) \leq w(t, V(t, x))\}$$

не пусто при всех $(t, x) \in M^r$, и для любой точки $(t_0, x_0) \in M^r$ включение

$$\dot{x} \in Q(t, x) \quad (4.2)$$

имеет локальное решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Тогда множество M слабо равномерно устойчиво относительно включения (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу задания множества $Q(t, x)$ любое решение включения (4.2) является решением включения (4.1). Далее, для функции Q выполнены все условия теоремы 2, следовательно, множество M равномерно устойчиво по Ляпунову относительно включения (4.2), а это означает слабую равномерную устойчивость множества M относительно включения (4.1). $\square$

О п р е д е л е н и е 6. Множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется *слабо положительно инвариантным* относительно дифференциального включения (4.1), если для любой точки (t_0, x_0) множества M найдется решение $\varphi: [t_0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (4.1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, \tau)$ включению $(t, \varphi(t)) \in M$.

С л е д с т в и е 3. Если множество M слабо равномерно устойчиво относительно включения (4.1), то замыкание $\bar{M}$ множества M слабо положительно инвариантно.

Доказательство. В силу следствия 2, множество $\bar{M}$ положительно инвариантно относительно включения (4.2), а следовательно, оно слабо положительно инвариантно относительно включения (4.1). $\square$

Пример 5. Вернемся к примеру 4. Для того, чтобы убедиться в слабой равномерной устойчивости множества $M = \mathbb{R} \times M$, где $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq \arctg x_2, 0 \leq x_2 \leq 1\}$, относительно решений включения, отвечающего системе (3.2), воспользуемся теоремой 3. Выберем в качестве $V(x)$ расстояние от точки $x \notin M$ до множества M , и пусть $w(t, z) \equiv 0$. Тогда $V(x) = x_2 - 1$ при $x \in G \doteq \{x : x_1 > \pi/4, x_2 > 1\}$, и поэтому $V^o(x; q) = u(1 + x_2^2)$ при $x \in G$. Следовательно, $V^o(x; q) \leq 0$ только при $u = 0$. В этом случае $q = q_0 = (1, 0)$, включение (4.2) превращается в систему уравнений $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 0$, и легко проверяется, что $V^o(x; q_0) \leq 0$ при всех $x \notin M$. Поэтому все условия теоремы 3 выполнены.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о существовании локальных решений включения (4.2). Частичный ответ на этот вопрос дает приведенная ниже теорема.

Теорема 4. Если функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ имеет замкнутые выпуклые образы и полунепрерывна сверху, то при всех $(t_0, x_0) \in M^r$ существует локальное решение включения (4.2), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Доказательство. Достаточно доказать (см. разд. 2), что при всех $(t, x) \in M^r$ множество $Q(t, x)$ выпукло, замкнуто, и функция $(t, x) \rightarrow Q(t, x)$ полунепрерывна сверху при почти всех $(t, x) \in M^r$. В силу свойств субаддитивности и положительной однородности производной Кларка получаем, что при всех $(t, x) \in M^r$ для любых $q_1, q_2 \in Q(t, x)$ и $\lambda \in [0, 1]$ из включения $q_\lambda \in F(t, x)$, где $q_\lambda = \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2$, следует неравенство

$$V^o(t, x; q_\lambda) \leq \lambda V^o(t, x; q_1) + (1 - \lambda)V^o(t, x; q_2) \leq w(t, V(t, x)),$$

т. е. $Q(t, x)$ выпукло. Далее, функция $q \rightarrow V^o(t, x; q)$ непрерывна, следовательно, при фиксированных (t, x) для любой последовательности $\{q_i\}$, $q_i \in Q(t, x)$, такой, что $q_i \rightarrow q_0$, имеет место неравенство $V^o(t, x; q_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} V^o(t, x; q_i) \leq w(t, V(t, x))$, которое означает, что $q_0 \in Q(t, x)$.

Поскольку функция V локально липшицева, то она дифференцируема почти всюду на M^r , и в каждой точке дифференцируемости (t, x) для любого $q \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$V^o(t, x; q) = \dot{V}(t, x; q) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(t + \varepsilon, x + \varepsilon q) - V(t, x)}{\varepsilon}. \quad (4.3)$$

Покажем, что функция $(t, x) \rightarrow Q(t, x)$ полунепрерывна сверху в каждой точке дифференцируемости (t_0, x_0) функции V . Для этого проверим (см. разд. 2), что начиная с некоторого $a_0 > 0$ при каждом $a \geq a_0$ функция $(t, x) \rightarrow Q_a(t, x)$, где $Q_a(t, x) = Q(t, x) \cap O_a$, полунепрерывна сверху в точке (t_0, x_0) в смысле полуотклонения по Хаусдорфу $d(Q_a(t, x), Q_a(t_0, x_0))$.

Выберем последовательность $\{(t_i, x_i)\}$ точек дифференцируемости функции V , которая сходится к (t_0, x_0) , и рассмотрим последовательность точек $\{q_i\}$ таких, что $q_i \in Q_a(t_i, x_i)$ и $V^o(t_i, x_i; q_i) = w(t_i, V(t_i, x_i))$. В силу замкнутости множества $Q_a(t_i, x_i)$ при каждом i такая последовательность существует. Можно считать, что последовательность $\{q_i\}$ имеет предел. Обозначим его q_0 . Согласно теореме Куратовского, достаточно доказать, что $q_0 \in Q_a(t_0, x_0)$. Прежде всего, с учетом полунепрерывности сверху функции F из включений $q_i \in F_a(t_i, x_i)$ следует включение $q_0 \in F_a(t_0, x_0)$. Далее, из равенства $V^o(t_i, x_i; q_i) = w(t_i, V(t_i, x_i))$ в силу непрерывности функций V и w получаем, что $\lim_{i \rightarrow \infty} w(t_i, V(t_i, x_i)) = w(t_0, V(t_0, x_0))$. С другой стороны, из соотношения (4.3) следуют равенства

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} V^o(t_i, x_i; q_i) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \dot{V}(t_i, x_i; q_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(t_i + \varepsilon, x_i + \varepsilon q_i) - V(t_i, x_i)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + \varepsilon, x_0 + \varepsilon q_0) - V(t_0, x_0)}{\varepsilon} = V^o(t_0, x_0; q_0). \end{aligned}$$

Таким образом, $V^o(t_0, x_0; q_0) = w(t_0, V(t_0, x_0))$ и, следовательно, $q_0 \in Q_a(t_0, x_0)$. $\square$

5. Динамическая система сдвигов

По функции $(t, x) \rightarrow F(t, x) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ построим семейство $\text{orb}(F) \doteq \{F_\tau : \tau \geq 0\}$ функций $F_\tau(t, x) \doteq F(t + \tau, x)$ и замыкание $\overline{\text{orb}}(F)$ семейства $\text{orb}(F)$ в метрике Бебутова

$$\rho_B(F^1, F^2) = \sup_{r>0} \min \left\{ \max_{(t,x) \in O_r} \text{Dist}(F^1(t, x), F^2(t, x)), r^{-1} \right\}, \quad (5.1)$$

где O_r — замкнутый шар радиуса r в $\mathbb{R}^{1+n}$ с центром в нуле. В силу определения (5.1) включение $\widehat{F} \in \overline{\text{orb}}(F)$ имеет место в том и только в том случае, если найдется такая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \geq 0$, что каждому $\varepsilon > 0$, любому $\vartheta > 0$ и любому $K \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ отвечает номер i_0 , начиная с которого $\text{Dist}(F_{t_i}(t, x), \widehat{F}(t, x)) \leq \varepsilon$ при всех $t \in [-\vartheta, \vartheta]$, $x \in K$.

В терминах теории динамических систем [6, 16] множество $\Sigma \doteq \overline{\text{orb}}(F)$ называется *фазовым пространством* динамической системы сдвигов (Σ, h^τ) , а $\text{orb}(F)$ — *положительной полутраекторией движения* $h^\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma$, определенного равенством $h^\tau \widehat{F} \doteq \widehat{F}_\tau$.

Динамическую систему сдвигов мы можем построить и для функции

$$(t, x) \rightarrow H(t, x) \doteq (F(t, x), M(t)) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n) \times \text{clos}(\mathbb{R}^n),$$

где функция $t \rightarrow M(t) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ задает множество $\mathcal{M} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : x \in M(t)\}$. В этом случае метрика $\rho_B(H^1, H^2)$ определяется равенством (5.1), где

$$\text{Dist}(H^1(t, x), H^2(t, x)) = \text{Dist}(F^1(t, x), F^2(t, x)) + \text{Dist}(M^1(t), M^2(t)),$$

а полупоток h^τ — равенством $h^\tau \widehat{H} = (\widehat{F}_\tau, \widehat{M}_\tau)$, где $\widehat{H} \in \overline{\text{orb}}(H)$. Несложно проверить (см. [11], [6, с. 533]), что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Если функция $t \rightarrow H(t, x)$ непрерывна при каждом x , а функция $x \rightarrow F(t, x)$ полунепрерывна сверху при каждом t , то фазовое пространство $\overline{\text{orb}}(H)$ динамической системы $(\overline{\text{orb}}(H), h^\tau)$ является полным метрическим пространством.

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями $\widehat{M}_+^\delta(0)$, $\widehat{N}_+^\delta(0) \doteq \widehat{M}_+^\delta(0) \setminus \widehat{M}(0)$, $\widehat{M}^\varepsilon$, $\widehat{N}_+^\delta$ и др., смысл которых понятен из контекста.

В терминах динамической системы сдвигов, определения равномерной устойчивости и слабой равномерной устойчивости множества $\mathcal{M}$ принимают следующий вид.

О п р е д е л е н и е 7. Множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно устойчивым* по Ляпунову относительно включения (4.1), если для каждой пары $\widehat{H} = (\widehat{F}, \widehat{M}) \in \overline{\text{orb}}(H)$, некоторого $r > 0$ и любого $\varepsilon \in (0, r)$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что для всякой точки $x_0 \in \widehat{N}_+^\delta(0)$ и любого решения $t \rightarrow \varphi(t, x_0)$ задачи

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (5.2)$$

при всех $t \in [0, \tau)$ имеет место включение $(t, \varphi(t, x_0)) \in \widehat{M}^\varepsilon$.

Если в этом определении слова “любого решения $t \rightarrow \varphi(t, x_0)$ задачи (5.2)” заменить на слова “найдется решение $t \rightarrow \varphi(t, x_0)$ задачи (5.2)”, то указанное свойство будет называться *слабой равномерной устойчивостью множества $\mathcal{M}$ относительно включения (4.1)*.

Следствием этих рассуждений является простое утверждение, вытекающее из теоремы 3.

Следствие 4. Если в условиях теоремы 3 $w(t, z) = a(t)z$, где функция $a(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \widehat{a}(s) ds \leq 0$ для всех $\widehat{a} \in \overline{\text{orb}}(a)$, то множество $\mathcal{M}$ слабо равномерно устойчиво относительно включения (4.1).

Напомним, что функция $H(t, x) = (F(t, x), M(t))$ переменных (t, x) называется *равномерно непрерывной по t равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$* , если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $K \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $|\tau| \leq \delta$, всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $x \in K$ выполнено неравенство $\text{Dist}(H_\tau(t, x), H(t, x)) \leq \varepsilon$. Далее, функцию $(t, x) \rightarrow H(t, x)$ будем называть *ограниченной по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x* , если выполнено неравенство $\sup_{t \in \mathbb{R}} p(t, x) < \infty$, где $p(t, x) = |H(t, x)| \doteq \text{Dist}(H(t, x), \{0\})$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $t \rightarrow M(t)$ имеет компактные образы (поэтому можно считать, что $H(t, x) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n) \times \text{comp}(\mathbb{R}^n)$) и ограничена на $\mathbb{R}$ (т. е. $\sup_{t \in \mathbb{R}} |M(t)| < \infty$, где $|M| = \text{dist}(M, \{0\})$). Обозначим теперь $p_0(t, x)$ расстояние от нуля до множества $F(t, x) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу определения метрики Dist выполнено неравенство $|F(t, x)| \leq p(t, x) \doteq (p_0(t, x) + \sqrt{p_0^2(t, x) + 4})/2$, и ограниченность $F(t, x)$ по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ эквивалентна ограниченности на $\mathbb{R}$ функции $t \rightarrow p_0(t, x)$ при каждом x .

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1 работы [11].

Лемма 4. Если функция $(t, x) \rightarrow H(t, x) \doteq (F(t, x), M(t)) \in \text{clos}(\mathbb{R}^n) \times \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна по t равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$ и при каждом x ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$, то замыкание $\text{orb}(H)$ траектории $\text{orb}(H)$ компактно.

6. Слабая асимптотическая устойчивость

О п р е д е л е н и е 8. Множество $\mathcal{M} \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : x \in M(t)\}$ назовем *слабо асимптотически устойчивым* относительно включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (6.1)$$

если оно слабо устойчиво в смысле определения 5 и для некоторого $r > 0$ и любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется такое решение $\varphi: [t_0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (6.1), что $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^r$ и

$$\lim_{t \rightarrow \tau-0} \varrho(\varphi(t), M(t)) = 0. \quad (6.2)$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ назовем *равномерно асимптотически устойчивым* относительно включения (6.1), если оно равномерно устойчиво в смысле определения 1, и для некоторого $r > 0$, любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и каждого решения $\varphi: [t_0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (6.1), удовлетворяющего условию $(t_0, \varphi(t_0)) \in \mathcal{N}_+^r$, имеет место равенство (6.2).

В терминах динамической системы сдвигов это определение приобретает следующий вид.

О п р е д е л е н и е 9. Пусть $H(t, x) = (F(t, x), M(t))$. Множество $\mathcal{M}$ называется *слабо асимптотически устойчивым* относительно включения (6.1), если оно слабо устойчиво, и для некоторого $r > 0$ и каждого $\hat{H} \in \overline{\text{orb}}(H)$ найдется решение $\varphi: [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения

$$\dot{x} \in \hat{F}(t, x) \quad (6.3)$$

такое, что $(0, \varphi(0)) \in \hat{\mathcal{N}}_+^r$ и

$$\lim_{t \rightarrow \tau-0} \varrho(\varphi(t), \hat{M}(t)) = 0. \quad (6.4)$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно асимптотически устойчивым* относительно включения (6.1), если оно равномерно устойчиво, и для некоторого $r > 0$, каждого $\hat{H} \in \overline{\text{orb}}(H)$ и всякого решения $\varphi: [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (6.3), удовлетворяющего условию $(0, \varphi(0)) \in \hat{\mathcal{N}}_+^r$, следует равенство (6.4).

Теорема 5. Пусть функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ со значениями в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху и $\sup_{t \in \mathbb{R}} |F(t, x)| < \infty$ при каждом x , а функция $t \rightarrow M(t) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ равномерно непрерывна и $\sup_{t \in \mathbb{R}} |M(t)| < \infty$. Предположим далее, что существуют число $r > 0$ и ограниченная и равномерно непрерывная по t равномерно относительно (x, z) на компактах в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ функция $(t, x, z) \rightarrow W(t, x, z) \doteq (V(t, x), w(t, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такие, что

(1) функция $V: \mathcal{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ является локально липшицевой определено положительной функцией Ляпунова;

(2) множество $Q(t, x)$, определенное равенством

$$Q(t, x) = \{q \in F(t, x): V^o(t, x; q) \leq w(t, V(t, x))\}, \quad (6.5)$$

непусто при всех $(t, x) \in \mathcal{M}^r$, и функция

$$(t, x) \rightarrow S(t, x) \doteq Q(t, x) \bigcap O_p, \quad \text{где } p = \sup_{(t, x) \in \mathcal{M}^r} |Q(t, x)|,$$

равномерно непрерывна по t равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$;

(3) $w(t, 0) \equiv 0$, уравнение

$$\dot{z} = w(t, z) \quad (6.6)$$

обладает свойством единственности решения задачи Коши, и тривиальное решение уравнения (6.6) равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Тогда множество $\mathcal{M}$ слабо асимптотически устойчиво относительно включения (6.1).

Перед формулировкой следующего утверждения, распространяющего теорему Барбашина и Красовского на дифференциальные включения (6.1), введем ряд новых обозначений и определений. По заданной функции Ляпунова $V: \mathcal{M}^r \rightarrow \mathbb{R}$ построим множество

$$\mathcal{Q}(t, x) = \{q \in F(t, x): V^o(t, x; q) \leq 0\} \quad (6.7)$$

и в предположении, что множество (6.7) непусто при всех $(t, x) \in \mathcal{M}^r$, построим вспомогательное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \mathcal{S}(t, x) \doteq \mathcal{Q}(t, x) \bigcap O_p, \quad p = \sup_{(t, x) \in \mathcal{M}^r} |\mathcal{Q}(t, x)|.$$

Далее, по функции $(t, x) \rightarrow H(t, x) = (\mathcal{S}(t, x), M(t), V(t, x))$ построим динамическую систему сдвигов $(\text{ogr}(H), h^r)$ и для каждого $\alpha \geq 0$ и любого $\hat{H} \in \text{ogr}(H)$ введем в рассмотрение поверхность уровня $L_\alpha(\hat{V})$ функции $\hat{V}$:

$$L_\alpha(\hat{V}) \doteq \{(t, x) \in \hat{N}_+^r: \hat{V}(t, x) = \alpha\}. \quad (6.8)$$

О п р е д е л е н и е 10. Будем говорить [1], что множество (6.8) не содержит положительных полутраекторий включения

$$\dot{x} \in \hat{S}(t, x), \quad (6.9)$$

если для любой начальной точки $x_0 \in \hat{N}_+^r(0)$ и каждого решения $\varphi(t)$ включения (6.9), удовлетворяющего условию $\varphi(0) = x_0$, найдется момент времени $t_1 > 0$ такой, что $(t_1, \varphi(t_1)) \notin L_\alpha(\hat{V})$.

Т. е., $L_\alpha(\hat{V})$ не содержит положительных полутраекторий включения (6.9), если всякое решение, начинающееся в $L_\alpha(\hat{V})$, покидает $L_\alpha(\hat{V})$ за конечное время.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция Ляпунова $V(t, x)$, участвующая в формулировке следующей теоремы, локально липшицева по x равномерно относительно t на $\mathbb{R}$, т. е. найдется такая не зависящая от t константа ℓ , что для любой пары точек $(t, x_1), (t, x_2) \in \mathcal{N}_+^r$ выполнено неравенство $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq \ell |x_1 - x_2|$.

Теорема 6. Пусть функция $t \rightarrow M(t) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Пусть далее, существует такое число $r > 0$, что функция $F: M^r \rightarrow \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху и $\sup_{(t,x) \in M^r} |F(t,x)| < \infty$. Если существует ограниченная по t равномерно относительно x , локально липшицева по x равномерно относительно t функция Ляпунова $V: M^r \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что при всех $(t,x) \in M^r$ множество (6.7) непусто и для любого $\alpha \in (0, r)$ и всех $\hat{H} \in \overline{\text{orb}}(H)$, где $H = (S, M, V)$, множество (6.8) не содержит положительных полутраекторий включения (6.9), то множество M слабо асимптотически устойчиво относительно включения (6.1).

7. Доказательство теорем 5 и 6

По функции $(t, x) \rightarrow Q(t, x)$, определенной равенством (6.5), построим включение

$$\dot{x} \in Q(t, x), \quad (t, x) \in M^r, \quad r > 0, \quad (7.1)$$

а по включению (7.1) — включение

$$\dot{x} \in S(t, x) \doteq Q(t, x) \bigcap O_p, \quad p = \sup_{(t,x) \in M^r} \text{Dist}(Q(t, x), \{0\}), \quad (7.2)$$

которое будет играть основную роль в наших дальнейших рассуждениях. Из доказательства теоремы 4 следует, что если функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ имеет замкнутые выпуклые образы и полунепрерывна сверху при всех $(t, x) \in M^r$, то множество $Q(t, x)$ выпукло, замкнуто и функция $(t, x) \rightarrow Q(t, x)$ полунепрерывна сверху при почти всех $(t, x) \in M^r$. Если же функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x , то и $Q(t, x)$ ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x , и поэтому в силу определения метрики Dist $p < \infty$.

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда:

1. Если множество M равномерно асимптотически устойчиво относительно включения (7.2), то M слабо асимптотически устойчиво относительно включения (6.1).
2. Правая часть дифференциального включения (7.2) имеет компактные выпуклые образы и полунепрерывна сверху при почти всех $(t, x) \in M^r$. Кроме того, функция $(t, x) \rightarrow S(t, x)$ ограничена по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ при каждом x .

Доказательство леммы 5. Первое утверждение леммы очевидно, поскольку всякое решение включения (7.2) одновременно является и решением включения (6.1).

Докажем второе утверждение леммы. Компактность и выпуклость $S(t, x)$ тоже очевидны. Ограниченность $S(t, x)$ по t на числовой прямой $\mathbb{R}$ следует из аналогичного свойства $F(t, x)$.

Покажем, что функция $(t, x) \rightarrow S(t, x)$ полунепрерывна сверху. Действительно, пусть последовательность $\{(t_i, x_i)\}$ сходится к точке (t_0, x_0) , а последовательность $\{g_i\}$ такова, что $g_i \in S(t_i, x_i)$ и g_i сходится к g_0 . Из полунепрерывности сверху функции $(t, x) \rightarrow Q(t, x)$ следует, что $g_0 \in Q(t_0, x_0)$, а так как $|g_i| \leq p$ при всех i , то $|g_0| \leq p$, и поэтому $g_0 \in S(t_0, x_0)$. $\square$

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда множество M равномерно устойчиво относительно включения (7.2). Далее, если $\varphi(t)$ — ограниченное на полуоси $[0, \infty)$ решение включения (7.2), то пространство $\overline{\text{orb}}(S, \varphi) \doteq \text{cl}\{(S, \varphi)_\tau: \tau \geq 0\}$ компактно и для всякой пары $(\hat{S}, \hat{\varphi}) \in \overline{\text{orb}}(S, \varphi)$ функция $t \rightarrow \hat{\varphi}(t)$ является решением включения

$$\dot{x} \in \hat{S}(t, x). \quad (7.3)$$

Доказательство леммы 6. Равномерная устойчивость множества M относительно включения (7.2) следует из теоремы 2, а компактность множества $\overline{\text{огб}}(S, \varphi)$ — из леммы 4.

Покажем, что функция $t \rightarrow \hat{\varphi}(t)$ абсолютно непрерывна. Отметим, что в силу равномерной ограниченности на $\mathbb{R}$ последовательности $\{|S_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t))|\}$ последовательность $\{\dot{\varphi}_{t_i}(t)\}$ равномерно ограничена при почти всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому найдется подпоследовательность (обозначим ее $\{\dot{\varphi}_{t_i}(t)\}$), которая слабо сходится к локально интегрируемой по Лебегу функции. Перейдя теперь в равенстве $\frac{\varphi_{t_i}(t+\varepsilon) - \varphi_{t_i}(t)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} \dot{\varphi}_{t_i}(s) ds$ в каждой точке Лебега t к пределу сначала при $i \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим требуемое.

Докажем, что функция $t \rightarrow \hat{\varphi}(t)$ является решением включения (7.3). Действительно, для всякой последовательности $\{t_i\}$ имеет место включение $\dot{\varphi}_{t_i}(t) \in S_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t))$ и, следовательно,

$$\langle \xi, \varphi_{t_i}(t+\varepsilon) - \varphi_{t_i}(t) \rangle \leq \int_t^{t+\varepsilon} c(\xi, S_{t_i}(s, \varphi_{t_i}(s))) ds, \quad (7.4)$$

где $c(\xi, S)$ — значение опорной функции [10, с. 121] множества S на векторе $\xi \in \mathbb{R}^n$. Поэтому, если $\text{dist}(S_{t_i}(t, x), \hat{S}(t, x)) + |\varphi_{t_i}(t) - \hat{\varphi}(t)| \rightarrow 0$ равномерно на компактах $[-\vartheta, \vartheta] \times K$, $K \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, то, поделив неравенство (7.4) на ε и перейдя к пределу сначала при $i \rightarrow \infty$, а затем при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим для всякого $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенство $\langle \xi, \hat{\varphi}(t) \rangle \leq c(\xi, \hat{S}(t, \hat{\varphi}(t)))$, из которого следует (при почти всех $t \geq 0$) включение $\hat{\varphi}(t) \in \hat{S}(t, \hat{\varphi}(t))$. $\square$

Доказательство теоремы 5. Как уже отмечалось, множество M равномерно устойчиво относительно включения (7.2). Далее, в силу предположения компактности множества $M(t)$ при каждом t и следствия 1 для любого t_0 и достаточно близких к $M(t_0)$ точек x_0 всякое решение включения (7.2) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ бесконечно продолжаемо вправо.

Пусть $\varphi(t)$ — решение включения (7.2), начинающееся в точке $(t_0, x_0) \in \mathcal{N}_+^r$ и определенное при всех $t \geq t_0$. Тогда функция $v(t) = V(t, \varphi(t))$ определена на полуоси $[t_0, \infty)$ и при всех $t \geq t_0$ удовлетворяет неравенству $v(t) \leq z(t)$, где $z(t)$ — решение уравнения (6.6) с начальным условием $z(t_0) = v(t_0)$. Далее, если x_0 близко к $M(t_0)$, то $z(t_0)$ близко к нулю, поэтому $z(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Покажем, что $\varrho(\varphi(t), M(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если это неверно, то найдутся константа $\delta > 0$ и последовательность $\{t_i\}$ такие, что $t_i \rightarrow \infty$ и $\varrho(\varphi(t_i), M(t_i)) \geq \delta$. Построим функцию $H = \{S(t, x), M(t), V(t, x), w(t, z), \varphi(t), z(t)\}$ переменных (t, x, z) , где $z(t)$ — указанное в доказательстве решение уравнения (6.6), и фазовое пространство $\overline{\text{огб}}(H)$ динамической системы сдвигов. Выделим далее из последовательности $\{t_i\}$ такую подпоследовательность (обозначим ее снова $\{t_i\}$), что последовательность $\{H_{t_i}\}$ имеет предел. Обозначим его $\hat{H}$. Тогда в силу леммы 9 работы [4] и выбора последовательности $\{t_i\}$ получим неравенство $\varrho(\hat{\varphi}(0), \hat{M}(0)) \geq \delta$, и поэтому $\hat{V}(0, \hat{\varphi}(0)) > 0$. Но $\hat{v}(0) = 0$, что противоречит равенству $\hat{v}(0) = \hat{V}(0, \hat{\varphi}(0))$. $\square$

Доказательство теоремы 6. Обозначим $H = (S(t, x), M(t), V(t, x))$, $(t, x) \in \mathcal{M}^r$ и предположим, что для каждого $\alpha \in (0, r)$ и всех $\hat{H} \in \overline{\text{огб}}(H)$ множество $L_\alpha(\hat{V})$, определенное равенством (6.8), не содержит положительных полутраекторий включения (6.9). Пусть $\varphi(t)$ — такое решение включения (7.2), что $(t, \varphi(t)) \in \mathcal{M}^r$ при всех $t \geq 0$. Покажем тогда, что $\varrho(\varphi(t), M(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Действительно, из неравенств $v(t) = V(t, \varphi(t)) \geq 0$ и $\dot{v}(t) \leq 0$ следует, что функция $t \rightarrow v(t)$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем. Поэтому существует неотрицательный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \alpha$. Кроме того, для всякой последовательности $\{t_i\}$ такой, что $t_i \rightarrow \infty$, при каждом фиксированном t предел $\lim_{t_i \rightarrow \infty} v(t + t_i)$ тоже равен α .

Покажем, что $\alpha = 0$. Допустим, что это неверно и $\alpha > 0$. Построим последовательность $\{t_i\}$ такую, что $t_i \rightarrow \infty$, и последовательность H_{t_i} , сходящуюся к некоторой функции $\hat{H} \in \overline{\text{огб}}(H)$. Из последовательности $\{t_i\}$ выделим такую подпоследовательность (обозначим ее снова $\{t_i\}$), что последовательность $\{\varphi_{t_i}(t)\}$ имеет (равномерный на отрезках) предел $\hat{\varphi}(t)$. Тогда в силу

леммы 6 функция $t \rightarrow \widehat{\varphi}(t)$ является решением включения (6.9) и $(t, \widehat{\varphi}(t)) \in \widehat{N}_+^r$ при всех $t \geq 0$. Далее, из неравенства $|V_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t)) - V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t))| \leq \ell |\varphi_{t_i}(t) - \widehat{\varphi}(t)|$ следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (V_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t)) - V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t))) = 0.$$

Поэтому из равенства $v_{t_i}(t) = V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t)) + V_{t_i}(t, \varphi_{t_i}(t)) - V_{t_i}(t, \widehat{\varphi}(t))$ и ранее сказанного получаем при каждом t равенство $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} v_{t_i}(t) = \widehat{V}(t, \widehat{\varphi}(t))$, которое означает, что решение $\widehat{\varphi}(t)$ включения (6.9) целиком содержится в множестве $L_\alpha(\widehat{V})$. Следовательно, $\alpha = 0$, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \varphi(t)) = 0$. Дальнейшие рассуждения повторяют конец доказательства теоремы 5. $\square$

8. Слабая устойчивость в целом

О п р е д е л е н и е 11. Множество $\mathcal{M} \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : x \in M(t)\}$ назовем *слабо устойчивым в целом* относительно включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (8.1)$$

если оно слабо устойчиво в смысле определения 5, и для любой точки (t_0, x_0) найдется определенное при всех $t \geq t_0$ решение $\varphi(t)$ включения (8.1) такое, что $\varphi(t_0) = x_0$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho(\varphi(t), M(t)) = 0. \quad (8.2)$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ назовем *равномерно устойчивым в целом* относительно включения (8.1), если оно равномерно устойчиво в смысле определения 1, каждое решение включения (8.1) определено при всех $t \geq t_0$, и имеет место равенство (8.2).

В терминах динамической системы сдвигов это определение приобретает следующий вид.

О п р е д е л е н и е 12. Пусть $H(t, x) = (F(t, x), M(t))$. Множество $\mathcal{M}$ называется *слабо устойчивым в целом* относительно включения (8.1), если оно слабо устойчиво и для любой точки x_0 и каждого $\widehat{H} \in \overline{\text{ogr}}(H)$ найдется определенное при всех $t \geq 0$ решение $\varphi(t)$ включения

$$\dot{x} \in \widehat{F}(t, x) \quad (8.3)$$

такое, что $\varphi(0) = x_0$ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho(\varphi(t), \widehat{M}(t)) = 0. \quad (8.4)$$

Далее, множество $\mathcal{M}$ называется *равномерно устойчивым в целом* относительно включения (8.1), если оно равномерно устойчиво и для каждого $\widehat{H} \in \overline{\text{ogr}}(H)$ всякое решение $\varphi(t)$ включения (8.3) определено при всех $t \geq 0$ и удовлетворяет условию (8.4).

О п р е д е л е н и е 13. Функция $V: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *бесконечно большой* (относительно множества $\mathcal{M}$), если для любого $R > 0$ найдется такое $r > 0$, что для всех $(t, x) \notin \mathcal{M}^r$ выполнено неравенство $V(t, x) \geq R$.

Теорема 7. Пусть функция $t \rightarrow M(t) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $(t, x) \rightarrow F(t, x)$ со значениями в $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху и ограничена по t на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть, далее, существует ограниченная по t при каждом x , локально липшицева по x равномерно относительно t бесконечно большая функция Ляпунова $V(t, x)$ такая, что при всех (t, x) множество $\mathcal{Q}(t, x) = \{q \in F(t, x) : V^\circ(t, x; q) \leq 0\}$ непусто. Предположим, что для каждой точки (t_0, x_0) включение

$$\dot{x} \in \mathcal{S}(t, x) \doteq \mathcal{Q}(t, x) \cap O_{p(t, x)}, \quad p(t, x) = |\mathcal{Q}(t, x)|, \quad (8.5)$$

имеет локальное решение, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, и для любого $\alpha > 0$ и всех $\hat{H} \in \overline{\text{orb}}(H)$, где $H = (S, M, V)$, множество $L_\alpha(\hat{V}) = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} : \hat{V}(t, x) = \alpha\}$ не содержит положительных полутраекторий включения (8.5).

Тогда множество M слабо устойчиво в целом относительно включения (8.1).

Пример 6. Пусть $M \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq \arctg x_2, 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Покажем, что множество $M = \mathbb{R} \times M$ слабо устойчиво в целом относительно системы

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = u(1 + x_2^2), \quad u \in [-\delta, 1], \quad (8.6)$$

где $\delta > 0$. Воспользуемся теоремой 7. Для этого, проинтегрировав первое уравнение системы (8.6), перейдем от системы (8.6) к уравнению $\dot{y} = u(1 + y^2)$. Тогда множество M запишется в виде $M = \{(t, y) : t \geq \arctg y, 0 \leq y \leq 1\}$. Пусть $V(t, y)$ — расстояние от точки (t, y) до множества M . Тогда функция $V(t, y)$ — определено положительная, бесконечно большая, дифференцируемая в каждой точке $(t, y) \notin \text{fr } M$, и $\dot{V}(t, y; q) = V_t(t, y) + uV_y(t, y)(1 + y^2)$. Далее, из определения $V(t, y)$ следует, что при каждом $\alpha > 0$ для любой точки $(t, y) \in L_\alpha = \{(t, y) : V(t, y) = \alpha\}$, $V_t(t, y) \leq 0$, причем $V_t(t, y) = 0$ только при $(t, y) \in l_1 \cup l_2$, где $l_1 \doteq \{(t, y) : t \geq 0, y = -\alpha\}$, $l_2 \doteq \{(t, y) : t \geq \pi/4, y = 1 + \alpha\}$. Кроме того, $V_y(t, y) < 0$ при $(t, y) \in l_1$ и $V_y(t, y) > 0$ при $(t, y) \in l_2$. Следовательно, если $(t, y) \in L_\alpha$ и $(t, y) \notin l_1 \cup l_2$, то $\dot{V}(t, y; q) < 0$ при $u = 0$, если $(t, y) \in l_1$, то $\dot{V}(t, y; q) < 0$ при всех $u \in (0, 1]$ и если $(t, y) \in l_2$, то $\dot{V}(t, y; q) < 0$ при всех $u \in [-\delta, 0)$. Таким образом, все условия теоремы 7 выполнены.

Доказательство теоремы 7. Пусть $\varphi : [t_0, \tau)$ — решение включения (8.5), удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда в силу условий теоремы функция $v(t) = V(t, \varphi(t))$ монотонно убывает, и поэтому $\lim_{t \rightarrow \tau-0} v(t) < \infty$. Так как функция V бесконечно большая, то $\lim_{t \rightarrow \tau-0} |\varphi(t)| < \infty$. Следовательно, решение $\varphi(t)$ определено при всех $t \geq t_0$.

Покажем, что для некоторого r и всех $t \geq t_0$ имеет место включение $(t, \varphi(t)) \in M^r$. Действительно, если это неверно, то найдутся такие последовательности $\{t_i\}$, $\{r_i\}$, что $t_i \rightarrow \infty$, $r_i \rightarrow \infty$ и $(t_i, \varphi(t_i)) \notin M^{r_i}$. Следовательно, $|\varphi(t_i)| \rightarrow \infty$ и $V(t_i, \varphi(t_i)) \rightarrow \infty$, что противоречит условию $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) < \infty$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 6. $\square$

Выражаем благодарность Владимиру Николаевичу Ушакову за полезные беседы, относящиеся к затронутой в этой статье тематике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86, № 6. С. 146–152.
2. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.: ГИТТЛ, 1950. 471 с.
4. Панасенко Е. А., Тонков Е. Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2008. Т. 262. С. 202–221.
5. Roxin E. Stability in general control systems // J. Differ. Equat. 1965. Vol. 1, no. 2. P. 115–150.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. Ушаков В. Н. Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Свердловск: Ин-т математики и механики УрО АН СССР, 1991. 308 с.
9. Аносов Д. В. Лекции по линейной алгебре. М.: Регуляр. и хаотич. динамика, 1999. 105 с.
10. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
11. Бебутов М. В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюл. мех.-мат. факультета МГУ. 1941. № 5. С. 1–52.

12. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
13. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
14. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
15. **Чаплыгин С.А.** Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Бюл. Экспериментального ин-та путей сообщения. 1919. Вып. 1в. С. 1–16.
16. Динамические системы-1 / Д.В. Аносов. [и др.] // Итоги науки и техники. Т. 1. М.: Изд-во ВИНТИ АН СССР, 1985. 244 с. (Современ. проблемы математики. Фундаментальные направления.)

Панасенко Елена Александровна

Поступила 28.02.2009

канд. физ.-мат. наук

доцент каф. алгебры и геометрии

Тамбовский гос. ун-т им. Г.Р. Державина

e-mail: panlenna_t@mail.ru.

Тонков Евгений Леонидович

д-р физ.-мат. наук

зав. каф. дифференциальных уравнений

Удмуртский гос. ун-т

e-mail: eltonkov@udm.ru.