Н.Н. Петров

ВВЕДЕНИЕ В ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

Ижевск 2009

Федеральное агентство по образованию

ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»

Н.Н.ПЕТРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Ижевск 2009

УДК 519.8
ББК 22.162
П 30

Рецензент: доктор физ.-мат. наук Ю.П.Чубурин (Физико-технический институт УрО РАН).

Петров Н.Н.
П 30. Ведение в выпуклый анализ: учеб. пособие.
Ижевск, 2008. 168 с.
Пособие посвящено основным понятиям выпуклого анализа.
УДК 519.8
ББК 22.162

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

В работе используются следующие обозначения:

R^n — стандартное евклидово пространство размерности n;

(x, y) — скалярное произведение векторов $x, y \in R^k$;

$\|x\|$ — норма вектора x;

$D_r(z) = \{x : \|x - z\| \leqslant r\}$; — замкнутый шар радиуса r с центром в точке z;

$D_r^0(z) = \{x : \|x - z\| < r\}$; — открытый шар радиуса r с центром в точке z;

$S_r(z) = \{x : \|x - z\| = r\}$; — сфера радиуса r с центром в точке z;

$A_\varepsilon = A + D_\varepsilon^0(0)$ — эпсилон окрестность множества A;

$\mathrm{Int}A$ — внутренность множества A;

$\overline{A}$ — замыкание множества A;

∂A — граница множества A;

$\dim A$ — размерность множества A;

$\mathrm{aff}A$ — аффинная оболочка множества A;

$\mathrm{co}A$ — выпуклая оболочка множества A;

$\mathrm{ri}A$ — относительная внутренность множества A;

$\mathrm{lex}\min A$ — лексикографический минимум множества A;

$\mathrm{ext}A$ — совокупность всех крайних точек множества A;

$\mathrm{con}A$ — коническая оболочка множества A;

H^-, H^+ — замкнутые полупространства, определяемые гиперплоскостью H;

$|M|$ — число элементов множества M;

$\mathrm{diam}A$ — диаметр множества A, $\mathrm{diam}A = \sup\limits_{x,y \in A} \|x - y\|$;

$h(A, B)$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B;

$c(A, \varphi)$ — опорная функция множества A;

$\mathrm{rang}G$ — ранг матрицы G;

$\mathrm{grad}f$ — градиент функции f;

$\mathrm{tr}X$ — след матрицы X;

$\mathrm{supp}f$ — носитель функции f;

$\Omega(R^n)$ — совокупность всех ограниченных подмножеств пространства R^n;

$K(R^n)$ — совокупность всех компактных подмножеств пространства R^n;

$\mathrm{co}K(R^n)$ — совокупность всех выпуклых компактных подмножеств пространства R^n;

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выпуклым анализом называют раздел математики, в котором изучаются выпуклые множества и функции. Понятие выпуклости играет важную роль в различных областях фундаментальной и прикладной математики. Выпуклый анализ находит многочисленные приложения в вариационном исчислении и математической теории управления, в дифференциальных играх, теории приближений и экономике.

В настоящее время имеется достаточное количество замечательной монографической литературы по выпуклому анализу и его приложениям. К сожалению, в указанных изданиях содержится большой объем материала, ориентироваться в котором студенту достаточно сложно, кроме того, данная литература для студента является труднодоступной.

Настоящая работа посвящена, с одной стороны, базовым понятиям выпуклого анализа, а с другой стороны, понятиям, которые используются в теории управления и теории дифференциальных игр. В пособие включено достаточное количество задач по выпуклому анализу для закрепления соответствующей теории. В последнем разделе приводится набор однотипных индивидуальных заданий для студентов. Ограниченный объем пособия не позволил привести подробные решения или ответы ко всем задачам.

Список литературы, которую автор использовал для написания данного пособия, приведен в конце. Кроме того, данный список можно рекомендовать для знакомства с выпуклым анализом и его серьезного изучения.

Автор будет благодарен и признателен всем читателям за замечания и пожелания, которые просим направлять по e-mail:

npetrov@udmnet.ru

или обычной почтой по адресу: 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, Удмуртский университет, кафедра дифференциальных уравнений.

§ 1. Выпуклые множества

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество A называется выпуклым, если из условия $x, y \in A, \alpha \in [0, 1]$ следует, что

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in A.$$

Пустое множество будем считать выпуклым по определению.

Геометрически данное определение означает, что множество A является выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

Рассмотрим примеры выпуклых множеств.

1. R^n — выпуклое множество.

2. Отрезок $[a, b] = \{x = \alpha a + (1 - \alpha)b,\ \alpha \in [0, 1]\}$, соединяющий точки a и b.

3. Шар $D_r(a) = \{x \mid \|x - a\| \leqslant r\}$. Действительно, пусть $x, y \in D_r(a), \alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y - a\| = \|\alpha x + (1 - \alpha)y - (\alpha a + (1 - \alpha)a)\| =$$
$$= \|\alpha(x - a) + (1 - \alpha)(y - a)\| \leqslant \alpha\|x - a\| + (1 - \alpha)\|y - a\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha r + (1 - \alpha)r = r.$$

Следовательно, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D_r(a)$.

4. Полупространство $H^+ = \{x \mid (c, x) \leqslant \alpha\}$, где $c \in R^n, c \neq 0$.

Т е о р е м а 1.1. Пусть $A, B \subset R^n$ — выпуклые множества. Тогда выпуклыми множествами являются:
1) $A \cap B$,
2) $A + B$,
3) $\overline{A}$,
4) $\alpha A,\ \alpha \geqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждений 1) и 4) следует из определения 1.1.

2). Пусть $x, y \in A + B$, $\alpha \in [0,1]$. Тогда $x = a_1 + b_1, y = a_2 + b_2$, причем $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$.

$$\begin{aligned}\alpha x + (1-\alpha)y &= \alpha(a_1 + b_1) + (1-\alpha)(a_2 + b_2) = \\ &= (\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2) + (\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2) = a + b.\end{aligned}$$

Так как A — выпуклое множество, то $a = \alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 \in A$. Аналогично $b = \alpha b_1 + (1-\alpha)b_2 \in B$. Поэтому $a + b \in A + B$.

3). Пусть $x, y \in \overline{A}$, $\alpha \in [0,1]$. Из определения $\overline{A}$ следует, что

$$x = \lim_{k\to\infty} a_k,\ y = \lim_{k\to\infty} b_k,$$

причем $a_k, b_k \in A$ для всех k. Поэтому

$$\alpha a_k + (1-\alpha)b_k \in A,\ \alpha x + (1-\alpha)y = \lim_{k\to\infty}(\alpha a_k + (1-\alpha)b_k).$$

Следовательно, $\alpha x + (1-\alpha)y \in \overline{A}$.

Т е о р е м а 1.2. Пусть A — выпуклое множество. Тогда для любого натурального числа k, для любых точек $a_1, \ldots, a_k \in A$, для любых неотрицательных вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ справедливо

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k \in A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказывать теорему будем методом математической индукции. При $k = 1$ утверждение очевидно, а при $k = 2$ утверждение следует из выпуклости множества A. Предположим, что теорема доказана для всех $k \leqslant m$. Докажем теорему для случая $k = m + 1$.

Пусть $a_1, \ldots, a_{m+1} \in A$, $\alpha_j \geqslant 0, \sum\limits_{j=1}^{m+1} \alpha_j = 1$,

$$y = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m + \alpha_{m+1} a_{m+1}.$$

Если $\alpha_{m+1} = 1$, то $y = a_{m+1} \in A$. Пусть $\alpha_{m+1} \neq 1$. Тогда y представим в виде

$$y = (1-\alpha_{m+1})\Big[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{m+1}}a_1 + \cdots + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_{m+1}}a_m\Big] + \alpha_{m+1}a_{m+1}.$$

Так как $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1 - \alpha_{m+1}$, $\alpha_j \geqslant 0$, то

$$\frac{\alpha_j}{1-\alpha_{m+1}} \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_{m+1}} = 1.$$

Поэтому, в силу индукционного предположения, точка

$$z = \Big[\frac{\alpha_1}{1-\alpha_{m+1}}a_1 + \cdots + \frac{\alpha_m}{1-\alpha_{m+1}}a_m\Big] \in A.$$

Следовательно, $y = (1-\alpha_{m+1})z + \alpha_{m+1}a_{m+1} \in A$ в силу выпуклости множества A. Теорема доказана.

Т е о р е м а 1.3. Пусть a — внутренняя точка выпуклого множества A, $b \in \overline{A}$. Тогда для всех $\alpha \in (0,1)$ точка
$\alpha a + (1-\alpha)b \in \mathrm{Int}A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Так как a — внутренняя точка, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что открытый шар $D^0_\varepsilon(a) \subset A$. Из условия $b \in \overline{A}$ следует, что существует точка $y \in A$ такая, что

$$\|y - b\| < \frac{\alpha}{1-\alpha}\varepsilon.$$

Рассмотрим точку $z = \alpha a + (1-\alpha)y$ и шар $D^0_{\alpha\varepsilon}(z)$. Из соотношения

$$D^0_{\alpha\varepsilon}(z) = \alpha D^0_\varepsilon(a) + (1-\alpha)y$$

и выпуклости множества A следует, что $D^0_{\alpha\varepsilon}(z) \subset A$. Так как

$$\|x - z\| = \|\alpha a + (1-\alpha)b - \alpha a - (1-\alpha)y\| =$$
$$= (1-\alpha)\|y - b\| < \alpha\varepsilon,$$

то $x \in D^0_{\alpha\varepsilon}(z)$ и поэтому $x \in \mathrm{Int}A$.

С л е д с т в и е 1.1. Если множество A выпукло, то $\mathrm{Int} A$ также выпуклое множество.

Т е о р е м а 1.4. Пусть A — непустое выпуклое неограниченное подмножество R^n. Тогда
1) для любой точки $a \in A$ существует ненулевой вектор $h \in R^n$ такой, что луч

$$l = \{x \in R^n \mid x = a + th,\ t \geqslant 0\} \subset A.$$

2) если для некоторых $a_0 \in A, h \in R^n, h \neq 0$ луч

$$l_0 = \{x \in R^n \mid x = a_0 + th,\ t \geqslant 0\} \subset A.$$

то для любой точки $a \in A$ луч

$$l = \{x \in R^n \mid x = a + th,\ t \geqslant 0\} \subset A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a \in A$, $t \geqslant 0$. Так как множество A неограничено, то существует последовательность точек $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $a_k \in A$ и $\|a_k\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Обозначим

$$h_k = \frac{a_k - a}{\|a_k - a\|},\ t_k = \frac{t}{\|a_k - a\|},\ y_k = t_k a_k + (1 - t_k)a.$$

Тогда $\|h_k\| = 1$, и поэтому можно считать, что $h_k \to h$ при $k \to \infty$. Отметим, что $\|h\| = 1$. Из свойства последовательности $\{a_k\}$ следует, что существует натуральное число k_0 такое, что для всех $k > k_0$ выполнено $t_k \in [0; 1]$. Поэтому для всех $k > k_0$ $y_k \in A$ и

$$y_k = a + t_k(a_k - a) = a + th_k \to a + th$$

при $k \to \infty$. В силу замкнутости A получаем, что $a + th \in A$. Отсюда, в силу произвольности $t \geqslant 0$, следует что $l \subset A$.

Докажем второе утверждение. Пусть $l_0 \subset A$ и $a \in A$. Для любого $t \geqslant 0$ обозначим

$$x_k = a_0 + (tk)h, \; y_k = \frac{1}{k}x_k + \big(1 - \frac{1}{k}\big)a.$$

Тогда $x_k \in l_0 \subset A$. В силу выпуклости A получаем, что $y_k \in A$ для всех k. Так как

$$y_k = \frac{1}{k}(a_0 + tkh) + \big(1 - \frac{1}{k}\big)a = a + th + \frac{1}{k}(a_0 - a),$$

то $y_k \to a + th$ при $k \to \infty$. В силу замкнутости A получаем $a + th \in A$, и поэтому $l \subset A$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 1.2. Вектор $h \in R^n$ называется рецессивным направлением для множества A, если для любой точки $a \in A$, для любого неотрицательного числа t справедливо $a + th \in A$. Совокупность всех рецессивных направлений для A обозначим 0^+A.

Отметим, что множество 0^+A всегда непусто, так как
$0 \in 0^+A$.

С л е д с т в и е 1.2. Пусть A — непустое неограниченное выпуклое множество в R^n. Тогда существует $h \neq 0$ такой, что $h \in 0^+A$.

Т е о р е м а 1.5. Пусть A — замкнутое выпуклое подмножество R^n, B — выпуклый компакт R^n. Тогда $A+B$ выпуклое, замкнутое множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпуклость $A+B$ следует из выпуклости A и B и определения суммы двух множеств. Докажем замкнутость множества $A + B$. Пусть $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек $A + B$, сходящаяся к точке y. Тогда для всех k $y_k = a_k + b_k, a_k \in A, b_k \in B$. Так как B компакт, то из последовательности $\{b_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что $b_k \to b \in B$. Из равенства $a_k = y_k - b_k$ следует, что последовательность $\{a_k\}$ сходится и ее предел (точка a) принадлежит A, так как A замкнуто. Имеем $y = a + b \in A + B$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Пусть M — множество всех квадратных трехчленов вида x^2+bx+c, имеющих хотя бы один вещественный корень. Является ли множество M выпуклым?

1.2. Может ли сумма двух замкнутых множеств, лежащих на одной прямой, быть незамкнутым множеством?

1.3. Доказать, что множество A выпукло тогда и только тогда, когда для любых $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$ справедливо равенство

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A.$$

1.4. Пусть множество A обладает следующим свойством: для любых $x, y \in A$ точка $0,5x + 0,5y \in A$. Верно ли, что A — выпуклое множество?

1.5. Пусть замнутое множество A обладает следующим свойством: для любых $x, y \in A$ точка $0,5x + 0,5y \in A$. Верно ли, что A — выпуклое множество?

1.6. Пусть

$$M = \{x \in R^n \mid (Ax, x) \leqslant 1\},$$

где A — неотрицательно определенная симметричная квадратная матрица порядка n. Является ли множество M выпуклым?

1.7. Найти минимальное k, при котором множество

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1,\ x + y \geqslant k\}$$

является выпуклым.

1.8. Пусть $A \subset R^n$, $B \subset R^m$, A, B — выпуклые множества. Доказать, что множество $A \times B$ выпукло.

1.9. Пусть $L : R^n \to R^m$ — линейное отображение. $A \subset R^n$, $B \subset R^m$ — выпуклые множества. Доказать, что множества

$$L(A) = \{y \in R^m \mid y = Lx, x \in A\},$$
$$L^{-1}(B) = \{x \in R^n \mid Lx \in B\}$$

являются выпуклыми.

1.10. Будет ли выпуклым множество квадратных матриц второго порядка с положительным определителем?

1.11. Верно ли, что если выпуклое множество $A \subset R^n$ таково, что $A + A = A$, то $0 \in A$?

1.12. Доказать, что если выпуклое множество $A \subset R^n$ таково, что $A + A = A$, то $0 \in \overline{A}$.

1.13. Верно ли, что если множество $A \subset R^n$ таково, что $A + A = A$, то $0 \in \overline{A}$?

1.14. Доказать, что если множество A является выпуклым, то любой луч, проведенный из любой внутренней точки множества A, пересекает его границу не более чем в одной точке.

1.15. Доказать, что если множество A является выпуклым и ограниченным, то любой луч, проведенный из любой внутренней точки множества A, пересекает его границу ровно в двух точках.

1.16. Пусть Z — выпуклое множество в $R^n \times R^m$.

$$X = \{x \in R^n \mid (x, y) \in Z,\ y \in R^m\} -$$

проекция Z на R^n. Доказать, что множество X является выпуклым. Верно ли, что если Z — выпуклое замкнутое множество, то и X — выпуклое замкнутое множество.

1.17. Верно ли, что множество точек пространства R^n, сумма расстояний от которых до k заданных точек не превышает единицы, выпукло.

1.18. Может ли сумма двух невыпуклых множеств быть множеством выпуклым?

1.19. Может ли сумма выпуклого и невыпуклого множеств быть множеством выпуклым?

1.20. Будет ли выпуклым множество

$$A = \{x \in R^n \;\big|\; \|x\| + (p, x) \leqslant 1\}?$$

1.21. Пусть A — подмножество R^n такое, что для любых $x, y \in A$ точки

$$\min\{x, y\} = \Big(\min\{x_1, y_1\}, \ldots, \min\{x_n, y_n\}\Big),$$
$$\max\{x, y\} = \Big(\max\{x_1, y_1\}, \ldots, \max\{x_n, y_n\}\Big)$$

принадлежат A. Можно ли утверждать, что A — выпуклое множество?

1.22. Доказать, что любое выпуклое множество связно.

1.22. Доказать, что любые два выпуклых компакта R^n с непустой внутренностью гомеоморфны.

1.23. Доказать, что множество $A = \{(x, y) \in R^2 \;\big|\; y \geqslant x^2\}$ является выпуклым.

1.24. Пусть A — выпуклое подмножество R^n,
$f : [0, 1] \to A$ — интегрируема по Риману функция, g — скалярная неотрицательная интегрируемая по Риману функция такая, что $\int\limits_0^1 g(t)dt = 1$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt \in A.$$

1.25. Привести пример множеств A, B, каждое из которых не является выпуклым, а множество a) $A \cap B$, b) $A \cup B$ выпукло.

1.26. Пусть $a_1, \ldots a_k \in R^n$,

$$A_i = \{x \in R^n \mid \|x - a_i\| \leqslant \|x - a_j\| \text{для всех} j \neq i\}.$$

1. Доказать, что A_i — выпуклые множества.
2. Пусть $k = 2$. Доказать, что $\mathrm{Int} A_1 \cap \mathrm{Int} A_2 = \varnothing$.

3. Пусть $n = 2, k = 3$. Привести примеры точек a_1, a_2, a_3 таких, что a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$; b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \varnothing$.

1.27. Пусть $\mathcal{A}$ — множество неотрицательно определенных квадратных матриц порядка n. Является ли множество $\mathcal{A}$ выпуклым?

1.28. Доказать, что сумма двух не параллельных отрезков в R^2 содержит внутренние точки.

1.29. На плоскости дано конечное множество точек, причем любая прямая, проходящая через две точки данного множества, содержит, по крайней мере, еще одну точку. Доказать, что все точки лежат на одной прямой.

1.30. Пусть множества A и B на прямой являются объединениями m и n отрезков соответственно. Доказать, что $A \cap B$ — объединение не более $n + m - 1$ отрезка.

1.31. Точка a замкнутого выпуклого множества $A \subset R^n$ называется *допустимой*, если не существует точки $b \in A$ такой, что $b_i \leqslant a_i$ для всех i.

Верно ли, что множество допустимых точек замкнуто.

1.32. Пусть A — непустое подмножество R^3, причем для всех $c \in R^1$ множество $A_c = \{(x_1, x_2, c) \mid (x_1, x_2, c) \in A\}$ является выпуклым. Следует ли отсюда, что множество A выпукло?

1.33. Множество $A \subset R^n$ называется *безгранично делимым,* если для каждого натурального числа k найдется множество $B_k \subset R^n$, такое, что

$$A = B_k + B_k + \cdots + B_k (k \text{ слагаемых}).$$

Верно ли, что непустое компактное множество A безгранично делимо тогда и только тогда, когда оно выпукло.

1.34. Доказать, что если множество A выпукло, то $\mathrm{Int} A = \mathrm{Int} \overline{A}$. Отметим, что если множество A не является выпуклым, то данное равенство, вообще говоря, неверно. Достаточно рассмотреть круг с выколотым центром.

§ 2. Выпуклая оболочка множества

О п р е д е л е н и е 2.1. Точка $a = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$ называется выпуклой комбинацией точек $a_1, \ldots, a_k$, если все $\alpha_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Выпуклой оболочкой множества A называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A.

Выпуклую оболочку множества A будем обозначать co$A$. Отметим, что для любого множества A множество co$A$ является выпуклым.

Отметим, что определение 2.2 корректно, так как A содержится, по крайней мере, в одном выпуклом множестве — самом пространстве R^n.

Определим множество

$$B = \left\{ z \mid z = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i,\ a_i \in A,\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ m \in N \right\}.$$

Т е о р е м а 2.1. Для любого множества A множество B является выпуклым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $b_1, b_2 \in B$, $\beta \in [0,1]$. Из определения B следует, что

$$b_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i,\ a_i \in A,\ \alpha_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,$$

$$b_2 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_j c_j,\ c_j \in A,\ \gamma_j \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{k} \gamma_j = 1.$$

Тогда

$$\beta b_1 + (1-\beta) b_2 = \sum_{i=1}^{m} \beta \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{k} (1-\beta) \gamma_j c_j.$$

Так как $\beta\alpha_i \geqslant 0$, $(1-\beta)\gamma_j \geqslant 0$ для всех i, j и

$$\sum_{i=1}^{m}\beta\alpha_i + \sum_{j=1}^{k}(1-\beta)\gamma_j = \beta\sum_{i=1}^{m}\alpha_i + (1-\beta)\sum_{j=1}^{k}\gamma_j = 1,$$

то $\beta b_1 + (1-\beta)b_2 \in B$ по определению B и выпуклость множества B доказана.

Т е о р е м а 2.2. Для любого множества A справедливо равенство $\mathrm{co}A = B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $B \subset \mathrm{co}A$ следует из теоремы 1.2, а включение $\mathrm{co}A \subset B$ следует из предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 2.3. (Каратеодори). Пусть $A \subset R^n$, $x \in \mathrm{co}A$. Тогда существуют натуральное число $r \leqslant n+1$, точки $a_1, \ldots, a_r \in A$, неотрицательные вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i = 1$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x \in \mathrm{co}A$, то по предыдущей теореме

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m,\ a_j \in A,\ \alpha_j \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{m}\alpha_j = 1.$$

Можно считать, что все $\alpha_j > 0$. Если $m \leqslant n+1$, то теорема доказана.

Пусть $m > n+1$. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно β_j.

$$\begin{gathered}\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_m a_m = 0,\\ \beta_1 + \cdots + \beta_m = 0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Мы имеем систему из $n+1$-го уравнения с $m > n+1$ неизвестными. Из курса линейной алгебры следует, что данная система имеет нетривиальное решение $\beta^0 = (\beta_1^0, \ldots, \beta_m^0)$. Отметим, что для любого вещественного числа t набор $t\beta^0$ также является решением системы. Для вектора x имеем представление

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_m a_m + t(\beta_1^0 a_1 + \cdots + \beta_m^0 b_m) =$$
$$= a_1(\alpha_1 + t\beta_1^0) + \cdots + a_m(\alpha_m + t\beta_m^0).$$

Из соотношения (2.1) следует, что среди чисел β_j^0 есть отрицательные. Пусть

$$t^* = \min_{j|\beta_j^0<0} -\frac{\alpha_j}{\beta_j^0} = -\frac{\alpha_s}{\beta_s^0}.$$

Тогда

$$\alpha_s + t^*\beta_s^0 = 0,\ \alpha_j + t^*\beta_j^0 \geqslant 0$$

для всех j и

$$x = \sum_{j=1}^m (\alpha_j + t^*\beta_j^0)a_j, \quad \sum_{j=1}^m (\alpha_j + t^*\beta_j^0) = 1.$$

Тем самым количество слагаемых в представлении точки x уменьшилось, по крайней мере, на единицу. Если количество оставшихся слагаемых не превосходит $n+1$, то теорема доказана. В противном случае повторяем описанную процедуру еще один раз. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.4. Пусть множество A компакт. Тогда множество $\mathrm{co}A$ — компакт.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В конечномерном пространстве R^n компактность равносильна замнутости и ограниченности. Ограниченность множества $\mathrm{co}A$ очевидна. Докажем, что $\mathrm{co}A$ — замкнутое множество.

Пусть $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность точек такая, что $b_k \in \mathrm{co}A$ для всех k и $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Докажем, что $b \in \mathrm{co}A$.

Из теоремы Каратеодори следует, что для точек b_k справедливо представление

$$b_k = \alpha_{k1}a_{k1} + \dots + \alpha_{kn+1}a_{kn+1}, \tag{2.2}$$

где $\alpha_{kj} \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n+1} \alpha_{kj} = 1$, $a_{kj} \in A$. Возможно, что некоторые слагаемые в (2.2) равны нулю, зато количество слагаемых сделано одинаковым для всех k.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{\alpha_{k1}\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что $\alpha_{k1} \to \alpha_1$ при $k \to \infty$. Отметим, что $\alpha_1 \geqslant 0$.

Далее из последовательности $\{a_{k1}\}_{k=1}^{\infty}$, в силу ограниченности множества A, можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что сама последовательность $\{a_{k1}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке a_1. В силу замнутости множества A точка $a_i \in A$. Продолжая данный процесс дальше, получим, что можно считать

$$\alpha_{k2} \to \alpha_2, \quad a_{k2} \to a_2, \text{ при } k \to \infty.$$

Переходя в (2.2) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$b = \lim_{k\to\infty} b_k = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j a_j, \ \alpha_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1, \ a_j \in A.$$

Следовательно, $b \in \mathrm{co}A$ и теорема доказана.

Т е о р е м а 2.5. Пусть A — открытое подмножество R^n. Тогда $\mathrm{co}A$ — открытое множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $A \subset \mathrm{co}A$ и $\mathrm{Int}A = A$, то сразу получаем, что $A = \mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}A)$. Так как множество $\mathrm{Int}(\mathrm{co}A)$ является выпуклым, то $\mathrm{co}A \subset \mathrm{Int}(\mathrm{co}A)$. Вместе с соотношением $\mathrm{Int}(\mathrm{co}A) \subset \mathrm{co}A$ получаем требуемое.

О п р е д е л е н и е 2.3. Выпуклая оболочка конечного числа точек $a_1, \ldots, a_k \in R^n$ называется выпуклым многогранником, натянутым на $a_1, \ldots, a_k$. Точка $b \in M = \overline{\mathrm{co}\{a_1, \ldots, a_k\}}$ называется вершиной многогранника M, если $M \neq \overline{\mathrm{co}(M \setminus \{b\})}$.

Отметим, что выпуклый многогранник является выпуклым множеством.

Т е о р е м а 2.6. (Радона). Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset R^n$, $k \geqslant n+2$. Тогда существуют множества B, C такие, что

$$B \cup C = A,\ B \cap C = \varnothing,\ \mathrm{co}B \cap \mathrm{co}C \neq \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно чисел α_i :

$$\begin{gathered} \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0, \\ \alpha_1 + \cdots + a_k = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет нетривиальное решение $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_k^0)$. За счет перенумерации можно считать, что

$$\alpha_1^0 > 0, \ldots, \alpha_s^0 > 0,\ \alpha_{s+1}^0 \leqslant 0,\ \ldots, \alpha_k^0 \leqslant 0.$$

Тогда в силу системы (2.3) получаем справедливость следующих равенств:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{s} \alpha_j^0 a_j = \sum_{i=s+1}^{k} (-\alpha_i^0) a_i, \\ \alpha_1^0 + \cdots + \alpha_s^0 = -(\alpha_{s+1}^0 + \cdots + \alpha_k^0). \end{gathered}$$

Обозначая

$$\alpha = \alpha_1^0 + \cdots + \alpha_s^0,\ \beta_j = \frac{\alpha_j^0}{\alpha},\ \gamma_i = \frac{-\alpha_i^0}{\alpha},$$

получаем справедливость следующих равенств:

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_j a_j = \sum_{i=s+1}^{k} \gamma_i a_i,$$
$$\sum_{j=1}^{s} \beta_j = 1, \ \sum_{i=s+1}^{k} \gamma_i = 1, \ \beta_j > 0, \ \gamma_i \geqslant 0.$$

Пусть
$$B = \{a_1, \ldots, a_s\}, \ C = \{a_{s+1}, \ldots, a_k\}.$$

Тогда $B \cup C = A$, $B \cap C = \varnothing$ и из (2.4) следует, что точка $x = \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j a_j$ принадлежит как $\mathrm{co}B$, так и $\mathrm{co}C$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.7. Для любых двух множеств A, B справедливо равенство
$$\mathrm{co}(A+B) = \mathrm{co}A + \mathrm{co}B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $A \subset \mathrm{co}A$, $B \subset \mathrm{co}B$, то $A + B \subset \mathrm{co}A + \mathrm{co}B$ и поэтому

$$\mathrm{co}(A+B) \subset \mathrm{co}(\mathrm{co}A + \mathrm{co}B) = \mathrm{co}A + \mathrm{co}B.$$

Обратное включение $\mathrm{co}A + \mathrm{co}B \subset \mathrm{co}(A+B)$ можно доказать тем же способом, что и теорему 1.2.

Т е о р е м а 2.8. Пусть точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in R^n$ таковы, что векторы $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ линейно независимы. Тогда $\mathrm{Intco}\{x_0, \ldots, x_n\} \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 2.2 точка $x \in \mathrm{co}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные вещественные числа $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ такие, что $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$ и $x = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n$. Возьмем точку

$$y = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n, \text{ где } \alpha_j > 0, \ \sum_{j=0}^{n} \alpha_j = 1.$$

Пусть ε — положительное число такое, что $\alpha_j \geqslant \varepsilon$ для всех j, β_l — вещественные числа, такие, что $|\beta_l| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}$ для всех $l = 1, \dots, n$, точка

$$z = y + \sum_{l=1}^{n} \beta_l (x_l - x_0).$$

Покажем, что $z \in \mathrm{co}\{x_0, \dots, x_n\}$. Действительно,

$$z = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_j + \sum_{l=1}^{n} \beta_l (x_l - x_0) =$$

$$= (\alpha_0 - \sum_{l=1}^{n} \beta_l) x_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) x_j.$$

В силу выбора β_l справедливы неравенства $\alpha_l + \beta_l \geqslant 0$, $\alpha_0 - \sum\limits_{l=1}^{n} \beta_l \geqslant 0$, и, кроме того,

$$(\alpha_0 - \sum_{l=1}^{n} \beta_l) + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j) = 1.$$

Следовательно, требуемое включение доказано.

Пусть далее $e_i, i = 1, \dots, n$ — стандартный ортонормированный базис R^n. В силу линейной независимости векторов $x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0$ каждый из векторов e_i можно представить в виде линейной комбинации

$$e_i = a_{i1}(x_1 - x_0) + a_{i2}(x_2 - x_0) + \dots + a_{in}(x_i - x_0).$$

Обозначим через s наибольшее из чисел $|a_{ij}|$, $i, j = 1, \dots n$ и определим число $r = \frac{\varepsilon}{n^2 s}$.

Докажем, что шар $D_r(y) \subset \text{co}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Пусть $w \in D_r(y)$. Тогда

$$w - y = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_m e_n, \text{ где } \mu_1^2 + \dots + \mu_n^2 \leqslant r^2$$

и поэтому $|\mu_i| \leqslant r$ для всех i. Далее имеем

$$w - y = \sum_{l=1}^{n} \mu_l e_l - \sum_{l=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k - x_0)) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_0) \cdot \sum_{l=1}^{n} \mu_l a_{lk} = \sum_{k=1} \beta_k (x_k - x_0),$$

где $\beta_k = \sum\limits_{l=1}^{n} \mu_l a_{lk}$. Так как

$$|\beta_k| \leqslant \sum_{l=1}^{n} |\mu_l| \cdot |a_{lk}| \leqslant nsr = ns \cdot \frac{\varepsilon}{n^2 s} = \frac{\varepsilon}{n},$$

то, в силу ранее доказанного, $w \in \text{co}\{x_0, \dots, x_n\}$. Получили, что любая точка шара $D_r(y)$ принадлежит $\text{co}\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Пусть A совокупность всех квадратных трехчленов вида $x^2 + bx + c$ с нулевым дискриминантом. Найти $\text{co}A$.

2.2. Верно ли, что если множество A замкнуто, то $\text{co}A$ также замнутое множество.

2.3. Верно ли равенство $\text{co}(A \cup B) = \text{co}A \cup \text{co}B$?

2.4. Верно ли равенство $\text{co}(A \cap B) = \text{co}A \cap \text{co}B$?

2.5. Доказать, что $\overline{\text{co}A} = \overline{\text{co}}A$, где $\overline{\text{co}}A$ — пересечение всех выпуклых замкнутых множеств, содержащих A.

2.6. Найти выпуклую оболочку следующих множеств:
a) $A = \{(x, y) \in R^2 \mid xy = 1\}$;
b) $A = \{(x, y) \in R^2 \mid y = e^{-x}\}$;
c) $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x, y \in [0, 1]\} \cup \{(x, y) \in R^2 \mid y = x > 1\}$.

2.7. Пусть A, B подмножества R^2, являющиеся треугольниками (выпуклой оболочкой трех точек). Найти $A + B$.

2.8. Пусть A — компакт R^n, $f : [a, b] \to A$ — интегрируемая по Риману функция. Доказать, что

$$f_0 = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(t)dt \in \mathrm{co}A.$$

2.9. Верно ли, что если $\mathrm{co}A$ открыто, то A открыто.

2.10. Верно ли, что если $\mathrm{co}A$ замкнуто, то A замкнуто.

2.11. На плоскости даны n точек, причем любые четыре являются вершинами выпуклого четырехугольника. Доказать, что все точки являются вершинами выпуклого n-угольника.

2.12. На плоскости даны точки $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m$, любые три из которых не лежат на одной прямой. Может ли многоугольник $\mathrm{co}\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m\}$ иметь число вершин строго меньше числа вершин каждого из многоугольников $\mathrm{co}\{a_1, \ldots, a_k\}$, $\mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_m\}$?

2.13. На плоскости даны 5 точек, любые три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что можно найти четыре точки, расположенные в вершинах выпуклого четырехугольника.

2.14. На плоскости даны 2000 точек общего положения, т. е. любые три точки не лежат на одной прямой. Доказать, что существует не менее 400 попарно непересекающихся выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках.

2.15. Пусть M — выпуклый многоугольник на плоскости с вершинами $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $h : A \to A$ – взаимно однозначное отображение, $\lambda \in (0, 1)$,

$$A_\lambda = \mathrm{co}\{\lambda a_i + (1-\lambda)h(a_i),\ i = 1, \ldots k\}.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i \in A_\lambda.$$

2.16. Пусть M — выпуклый многоугольник на плоскости с вершинами $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, $\mathcal{H}\prime$ — совокупность всех взаимно однозначных отображений $h : A \to A$, $\lambda \in (0, 1)$,

$$A_h = \mathrm{co}\{\lambda a_i + (1-\lambda)h(a_i),\ i = 1, \dots k\}.$$

Доказать, что

$$\bigcap_{h \in \mathcal{H}\prime} A_h \neq \varnothing.$$

2.17. На плоскости даны $n (n > 3)$ точек, причем любые три не лежат на одной прямой. Доказать, что существует окружность, проходящая, по крайней мере, через три данные точки и не содержащая внутри себя ни одной из остальных точек.

§ 3. Теоремы отделимости

О п р е д е л е н и е 3.1. Множества A и B ($A, B \subset R^n$) отделимы, если существуют $p \in R^n, p \neq 0, \alpha \in R^1$ такие, что

$$(p, a) \leqslant \alpha \text{ для всех } a \in A,$$
$$(p, b) \geqslant \alpha \text{ для всех } b \in B.$$

Геометрически отделимость множеств A и B означает, что A и B расположены по разные стороны от гиперплоскости $H = \{x \mid (p, x) = \alpha\}$.

П р и м е р 3.1. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x,\ x \geqslant 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x,\ x \leqslant 1\}.$$

Тогда множества A и B отделимы.

П р и м е р 3.2. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}, \; B = \{(0; 0)\}.$$

Тогда множества A и B неотделимы.

О п р е д е л е н и е 3.2. Множества A и B ($A, B \subset R^n$) строго отделимы, если существуют $p \in R^n, p \neq 0, \alpha \in R^1$ такие, что

$$(p, a) < \alpha \text{ для всех } a \in A,$$
$$(p, b) > \alpha \text{ для всех } b \in B.$$

Геометрически строгая отделимость множеств A и B означает, что A и B расположены по разные стороны от гиперплоскости $H = \{x \mid (p, x) = \alpha\}$ и каждое из множеств не имеет общих точек с гиперплоскостью H.

П р и м е р 3.3. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid y = \frac{1}{x}, \; x > 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 0, \; x > 0\}.$$

Тогда множества A и B отделимы. Отделяющей гиперплоскостью будет ось OX. Однако множества A и B нельзя отделить строго.

Т е о р е м а 3.1. Множества A и B отделимы тогда и только тогда, когда множество $A - B$ и точка $\{0\}$ отделимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и B отделимы. Тогда

$$(p, a) \leqslant \alpha \text{ для всех } a \in A,$$
$$(p, b) \geqslant \alpha \text{ для всех } b \in B.$$

Поэтому $(p, -b) \leqslant -\alpha$ и, следовательно,

$$(p, a - b) \leqslant 0 \text{ для всех } a \in A, \ b \in B.$$

Это означает, что гиперплоскость $H = \{x \mid (p, x) = 0\}$ отделяет $A - B$ от нуля.

Пусть $A - B$ и $\{0\}$ отделимы. Поэтому

$$(p, c) \leqslant \alpha \text{ для всех } c \in A - B,$$
$$(p, 0) \geqslant \alpha.$$

Значит $\alpha \leqslant 0$. Следовательно, для всех $c \in A - B$ справедливо неравенство $(p, c) \leqslant 0$ или

$$(p, a - b) \leqslant 0 \text{ для всех } a \in A, \ b \in B.$$

Поэтому

$$(p, a) \leqslant (p, b) \text{ для всех } a \in A, \ b \in B.$$

Отсюда получаем, что справедливо неравенство

$$\sup_{a \in A} (p, a) \leqslant \inf_{b \in B} (p, b).$$

Пусть α — вещественное число такое, что

$$\sup_{a \in A} (p, a) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{b \in B} (p, b). \tag{3.1}$$

Рассмотрим гиперплоскость $H = \{x | \ (p, x) = \alpha\}$. Из (3.1) следует, что $\sup\limits_{a \in A} (p, a) \leqslant \alpha$ и поэтому $(p, a) \leqslant \alpha$ для всех $a \in A$. Аналогично получаем, что $(p, b) \geqslant \alpha$ для всех $b \in B$. Это и означает, что A и B отделимы. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

Т е о р е м а 3.2. Если множество $A - B$ строго отделимо от нуля, то множества A и B строго отделимы.

Отметим, что из строгой отделимости множеств A и B не следует строгая отделимость $A - B$ и нуля. Рассмотрим соответствующий

П р и м е р 3.4. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid y \geqslant \frac{1}{x},\ x > 0\},$$
$$B = \{(x, y) \in R^2 \mid y \leqslant -\frac{1}{x},\ x > 0\}.$$

Тогда множества A и B строго отделимы гиперплоскостью $\{(x, y) \mid y = 0\}$, но

$$A - B = \{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\},$$

и поэтому множество $A - B$ нельзя строго отделить от нуля.

О п р е д е л е н и е 3.3. Проекцией точки $b \in R^n$ на множество $A \subset R^n$ называется точка $\pi_A(b) \in A$ такая, что

$$\|\pi_A(b) - a\| \leqslant \|a - b\| \text{ для всех } a \in A,$$

т.е. точка множества A, являющаяся ближайшей к точке b.

Отметим, что если $b \in A$, то $\pi_A(b) = b$. Если же точка $b \notin A$ и множество A открыто, то $\pi_A(b)$ не существует.

Т е о р е м а 3.3. Пусть A — непустое замнутое выпуклое множество, $b \notin A$. Тогда проекция $\pi_A(b)$ существует и обладает следующими свойствами:

$$(\pi_A(b) - b, a - \pi_A(b)) \geqslant 0 \text{ для всех } a \in A; \tag{3.2}$$
$$(\pi_A(b) - b, a - b) \geqslant \|\pi_A(b) - b\|^2 > 0 \text{ для всех } a \in A. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка $\pi_A(b)$ является точкой глобального минимума функции $f(a) = \|a - b\|$ на множестве A.

По обобщенной теореме Вейерштрасса решение задачи существует. Отметим, что $\pi_A(b) \neq b$.

Пусть $a \in A, \alpha \in [0,1]$. Тогда $\alpha a + (1-\alpha)\pi_A(b) \in A$ и поэтому

$$\|\pi_A(b) - b\|^2 \leqslant \|\alpha a + (1-\alpha)\pi_A(b) - b\|^2 =$$
$$= \|\alpha(a - \pi_A(b)) + \pi_A(b) - b)\|^2 =$$
$$= \alpha^2\|a - \pi_A(b)\|^2 + 2\alpha(a - \pi_A(b), \pi_A(b) - b) + \|\pi_A(b) - b\|^2.$$

Отсюда

$$2(a - \pi_A(b), \pi_A(b) - b) + \alpha\|a - \pi_A(b)\|^2 \geqslant 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\alpha \to 0$, получаем неравенство (3.2). Далее имеем

$$0 \leqslant (\pi_A(b) - b, a - \pi_A(b)) = (\pi_A(b) - b, a - b + b - \pi_A(b)) =$$
$$= (\pi_A(b) - b, a - b) - \|\pi_A(b) - b\|^2,$$

откуда следует (3.3). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Можно доказать, что если множество A является выпуклым и замкнутым, то проекция точки b на A определяется единственным образом.

Т е о р е м а 3.4. Пусть A — непустое выпуклое замкнутое множество, $0 \notin A$. Тогда A и $\{0\}$ строго отделимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущей теореме существует точка $\pi_A(0)$, удовлетворяющая неравенству

$$(\pi_A(0), a) \geqslant \|\pi_A(0)\|^2 \text{ для всех } a \in A.$$

Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \{x \mid (\pi_A(0), x) = \frac{1}{2}\|\pi_A(0)\|^2\},$$

которая, очевидно, является строго разделяющей гиперплоскостью.

С л е д с т в и е 3.1. Пусть A — непустое выпуклое замкнутое множество, $b \notin A$. Тогда A и $\{b\}$ строго отделимы.

С л е д с т в и е 3.2. Пусть A — непустое выпуклое множество, $b \notin \overline{A}$. Тогда A и $\{b\}$ строго отделимы.

С л е д с т в и е 3.3. Пусть A, B — непустые непересекающиеся выпуклые замнутые множества, причем хотя бы одно из них ограничено. Тогда множества A и B строго отделимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A ограничено. Рассмотрим множество $C = A - B$. C — выпуклое множество. Докажем, что C является замкнутым множеством. Пусть $\{c_k\}$ — последовательность точек множества C, сходящаяся к точке c. Так как $c_k \in C$, то $c_k = a_k - b_k$, где $a_k \in A, b_k \in B$. В силу ограниченности A из последовательности $\{a_k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что сама последовательность $\{a_k\}$ сходится к точке a. В силу замкнутости A точка $a \in A$. Тогда $b_k = c_k + a_k$ является сходящейся последовательностью, $b_k \to b$, причем $b \in B$. Получили, что $c = a - b$, откуда следует замкнутость C.

Так как $A \cap B = \varnothing$, то $0 \notin C$. По теореме 3.4 C и $\{0\}$ строго отделимы. Следовательно, по теореме 3.2 множества A и B строго отделимы. Следствие доказано.

Т е о р е м а 3.5. Пусть A — непустое выпуклое множество, b — граничная для A точка. Тогда A и $\{b\}$ отделимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\{b\}$ — граничная точка, то существует последовательность точек $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $b_k \notin \overline{A}$ и $b_k \to b$ при $k \to \infty$.

По теореме 3.4 $\overline{A}$ и b_k строго отделимы. Следовательно, существуют ненулевые векторы q_k и вещественные числа β_k такие, что для всех k справедливы неравенства

$$(q_k, a) < \beta_k \text{ для всех } a \in \overline{A},$$
$$(q_k, b_k) > \beta_k.$$

Полагая

$$p_k = \frac{q_k}{\|q_k\|},\ \alpha_k = \frac{\beta_k}{\|q_k\|},$$

получаем, что для всех k справедливы неравенства

$$(p_k, a) < \alpha_k \text{ для всех } a \in \overline{A}, \tag{3.4}$$

$$(p_k, b_k) > \alpha_k, \tag{3.5}$$

причем $\|p_k\| = 1$. Поэтому из последовательности $\{p_k\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательнось. Будем считать, что $p_k \to p$. Из непрерывности нормы следует, что $\|p\| = 1$.

Последовательнось $\{b_k\}$ ограничена, так как является сходящейся. Поэтому, используя неравенство Коши, из неравенства (3.5) следует справедливость неравенства

$$\alpha_k < (p_k, b_k) \leqslant \|p_k\| \cdot \|b_k\| \leqslant D$$

для всех k. Аналогично из неравенства (3.4) следует, что

$$\alpha_k > (p_k, a) \geqslant -\|p_k\| \cdot \|a\| \geqslant d.$$

Получили, что последовательность $\{\alpha_k\}$ ограничена. Следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Считаем $\alpha_k \to \alpha$. Переходя в неравенствах (3.4), (3.5) к пределу при $k \to \infty$, получаем справедливость неравенств

$$(p, a) \leqslant \alpha \text{ для всех } a \in \overline{A}, \tag{3.6}$$

$$(p, b) \geqslant \alpha, \tag{3.7}$$

откуда следует отделимость A и $\{b\}$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 3.4. Пусть A — непустое выпуклое множество, b — граничная точка. Тогда $\overline{A}$ и $\{b\}$ отделимы.

Справедливость следствия сразу следует из неравенств (3.6), (3.7).

С л е д с т в и е 3.5. Пусть A, B — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Тогда A и B отделимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество вида $C = A - B$. Тогда C — непустое выпуклое множество, причем $0 \notin C$. Следовательно, C и $\{0\}$ отделимы. По теореме 3.1 множества A и B отделимы.

Переформулируем следствие 3.5 в несколько ином виде. Пусть $H = \{x \mid (p, x) = \alpha\}$ — гиперплоскость, разделяющая непересекающиеся множества A и B.

$$(p, a) \leqslant \alpha \text{ для всех } a \in A,$$
$$(p, b) \geqslant \alpha \text{ для всех } b \in B.$$

Введем обозначения

$$p_1 = p, \; p_2 = -p, \; \alpha_1 = \alpha, \; \alpha_2 = -\alpha.$$

Тогда следствие 3.5 можно сформулировать в следующем виде.

Т е о р е м а 3.6. Если выпуклые множества A и B не пересекаются, то существуют ненулевые векторы p_1, p_2, вещественные числа α_1, α_2 такие, что

$$(p_1, a) \leqslant \alpha_1 \text{ для всех } a \in A,$$
$$(p_2, b) \leqslant \alpha_2 \text{ для всех } b \in B,$$
$$p_1 + p_2 = 0, \; \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Приведем обобщение предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 3.7. (Дубовицкого - Милютина). Пусть выпуклые множества $A_1, \ldots, A_k$ таковы, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_k = \varnothing$. Тогда существуют векторы $p_1, \ldots, p_k$, одновременно не обращающиеся в нуль, вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такие, что

$$(p_i, a_i) \leqslant \alpha_i \text{ для всех } a_i \in A_i,$$
$$p_1 + \cdots + p_k = 0,$$
$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пространство $R^{kn} = R^n \times R^n \times \cdots \times R^n$, множество $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ и множество $B = \{z \in R^{kn} \mid z = (x, \ldots, x), x \in R^n\}$. Тогда A, B — непересекающиеся выпуклые множества. Поэтому данные множества отделимы. Следовательно, существуют $p \in R^{nk}, p \neq 0, \alpha \in R^1$ такие, что

$$(p, a) \leqslant \alpha \text{ для всех } a \in A,$$
$$(p, b) \geqslant \alpha, \text{ для всех } b \in B.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$(p, a) \leqslant (p, b) \text{ для всех } a \in A, \ b \in B,$$

или

$$\sum_{j=1}^{k} (p_j, a_j) \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{k} p_j, b\Big) \text{ для всех } a_j \in A_j, \ b \in R^n. \tag{3.8}$$

Докажем, что $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 0$. Предположим, что $z = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j \neq 0$. Полагая в (3.8) $b = -\lambda a$, неравенство будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{k} (p_j, a_j) \leqslant -\lambda (a, a).$$

Последнее неравенство должно выполняться для всех $\lambda > 0$, что невозможно, так как при $\lambda \to +\infty$ правая часть стремится к $-\infty$. Следовательно, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 0$ и неравенство (3.8) будет иметь вид

$$\sum_{j=1}^{k} (p_j, a_j) \leqslant 0 \text{ для всех } a_j \in A_j, \tag{3.9}$$

которое можно переписать в виде

$$(p_i, a_i) \leqslant -\sum_{j=1, j\neq i}^{k} (p_j, a_j) \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{k} p_j, b\Big) \text{ для всех } a_j \in A_j. \quad (3.10)$$

Пусть $i \in \{2, \dots, k\}$. Зафиксируем в правой части (3.10) некоторые элементы $a_j \in A_j, j \neq i$. Получим, что (p_i, a_i) есть величина, ограниченная на A_i, и поэтому существует вещественное число $\alpha_i = \sup\limits_{a_i \in A_i} (p_i, a_i)$. Кроме того, из неравенства (3.8) следует неравенство

$$(p_1, a_1) \leqslant -(p_2, a_2) - \dots - (p_k, a_k) \leqslant$$
$$\leqslant -\alpha_2 - \dots - \alpha_k.$$

Полагая $\alpha_1 = -\alpha_2 - \dots - \alpha_k$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Приведем некоторые применения теорем отделимости. Для произвольной матрицы H будем через $H_{\cdot j}$ обозначать ее j-й столбец, а через $H_{i\cdot}$ ее i-ю строку.

Т е о р е м а 3.8. Пусть H — произвольная матрица порядка $n \times m$. Тогда верно, по крайней мере, одно из следующих двух утверждений:
a) существует вектор $X = (x_1, \dots, x_n)$ такой, что $x_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ и $XH_{\cdot j} \geqslant 0$ для всех $j = 1, \dots, m$;
b) существует вектор $Y = (y_1, \dots, y_m)$ такой, что $y_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$ и $H_{i\cdot}Y^T \leqslant 0$ для всех $i = 1, \dots n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$C = \mathrm{co}\{H_{\cdot 1}, \dots, H_{\cdot m}, e_1, \dots, e_n\},$$

где $e_1, \dots, e_n$ — стандартный ортонормированный базис R^n. Возможны два случая:

а) $0 \notin C$. Тогда $\{0\}$ и C строго отделимы. Это означает, что существуют ненулевой вектор $p \in R^n$, вещественное число γ такие, что

$$(p, 0) < \gamma, \ (p, c) > \gamma \text{ для всех } c \in C.$$

Следовательно, $(p, c) > 0$ для всех $c \in C$. Так как $e_i \in C$, то $(p, e_i) = p_i > 0$. Отсюда $s = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 0$. Рассмотрим вектор $X = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = \frac{p_i}{s}$. Тогда $x_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ и

$$XH_{\cdot j} = \frac{1}{s}(p, H_{\cdot j}) > 0,$$

так как $H_{\cdot j} \in C$. Следовательно, справедливо утверждение а);

b) $0 \in C$. Тогда по теореме 2.2 точка 0 является выпуклой комбинацией точек $H_{\cdot 1}, \ldots, H_{\cdot m}, e_1, \cdot, e_n$. Это означает, что существуют неотрицательные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$, сумма которых равна единице и

$$0 = \alpha_1 H_{\cdot 1} + \cdots + \alpha_m H_{\cdot m} + \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n.$$

Переписав последнее равенство в координатной форме, получим, что для всех $i = 1, \ldots, n$ справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j h_{ij} + \beta_i = 0. \tag{3.11}$$

Так как $\beta_i \leqslant 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j h_{ij} \geqslant 0$. Если бы все α_j равнялись нулю, то из (3.11) следовало бы, что и все β_j равнялись бы нулю, что невозможно, так как сумма α_j, β_i равняется единице. Поэтому $s = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j > 0$. Определим вектор $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, полагая $y_i = \dfrac{\alpha_i}{s}$. Тогда вектор Y искомый. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3.9. Пусть A — выпуклое множество R^n, $a_1, \ldots, a_m \in R^n$ таковы, что система

$$(a_i, x) < 0, \ i = 1, \ldots, k, \tag{3.12}$$

$$(a_i, x) = 0, \ i = k+1, \ldots, m \tag{3.13}$$

не имеет решений на A. Тогда существуют вещественные числа $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$, $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$, одновременно не обращающиеся в нуль и такие, что для всех $x \in A$ справедливо неравенство

$$\lambda_1(a_1, x) + \cdots + \lambda_m(a_m, x) \geqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множества

$$U_1 = \{u \in R^m \mid \text{существует } x \in A, \ (a_i, x) \leqslant u_i, \ i = 1, \ldots, k, \\ (a_i, x) = u_i, \ i = k+1, \ldots, m\},$$
$$U_2 = \{u \in R^m \mid u_i < 0, \ i = 1, \ldots, k, \ u_{k+1} = \ldots, = u_m = 0\}.$$

Множества U_1, U_2 выпуклы и не пересекаются, так как система (3.12), (3.13) не имеет решений. Следовательно, U_1, U_2 отделимы. Это означает, что существуют ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^m$, вещественное число γ, что

$$(\lambda, u) \geqslant \gamma \text{ для всех } u \in U_1,$$
$$(\lambda, v) \leqslant \gamma, \text{ для всех } v \in U_2.$$

Отсюда

$$(\lambda, u) \geqslant (\lambda, v) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \text{ для всех } u \in U_1, \ v \in U_2. \tag{3.14}$$

Докажем, что $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$. Предположим, что $\lambda_s < 0$ при некотором $s \in \{1, \ldots, k\}$. Рассмотрим последовательность векторов

$$v^l = (v_1^l, \ldots, v_k^l, 0, \ldots, 0), \text{ где } v_j^l = \begin{cases} -1, \ j \neq s, \\ -l, \ j = s. \end{cases}$$

Тогда, в силу (3.14), $(\lambda, u) \geqslant (\lambda, v^l)$ для всех l. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $l \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{l\to\infty} (\lambda, v^l) = +\infty$, а слева стоит конкретное вещественное число. Поэтому полученое противоречие доказывает, что все $\lambda_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k$.

Пусть $x \in A$. Рассмотрим векторы

$$u = \big((a_1, x), \ldots, (a_m, x)\big),\ v = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, 0, \ldots, 0),\ (\varepsilon < 0).$$

Тогда $u \in U_1, v \in U_2$ и поэтому, в силу (3.14), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(a_i, x) \geqslant \lambda_1\varepsilon + \cdots + \lambda_k\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon < 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0-$, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(a_i, x) \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Написать уравнение гиперплоскости, отделяющей точку $(-1; 2; 1; -3)$ от множества $A \subset R^4$, определяемого системой

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 \leqslant 1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leqslant 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leqslant 9. \end{cases}$$

3.2. Пусть A, B — непустые выпуклые множества, причем $\mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B = \varnothing$. Верно ли, что A и B отделимы?

3.3. Пусть

$$\rho(A, B) = \inf_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a - b\|.$$

Доказать, что непустые выпуклые множества A, B строго отделимы тогда и только тогда, когда $\rho(A, B) > 0$.

3.4. Отделимы (строго отделимы) точка $a_0 = (1; -1; 0)$ и множество

$$\mathrm{co}\{(-1; 1; 2), (2; -1; -3), (-2; 3; -1), (-5; -1; 3)\}?$$

3.5. Пусть A_1, A_2 — выпуклые компакты R^n такие, что множество $A_1 \cup A_2$ выпукло. Доказать, что $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

3.6. Существуют ли множества A, B, которые строго отделимы, а $\mathrm{co}A, \mathrm{co}B$ нельзя отделить.

3.7. Существуют ли множества A, B, которые отделимы, а множества $\mathrm{co}A, \mathrm{co}B$ нельзя отделить.

3.8. В R^n_+ лежит выпуклый многогранник A. Доказать, что для любой точки $z \in A$ найдется вершина u многогранника A, такая, что $u_i \leqslant nz_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

3.9. При каком $a \geqslant 0$ множества

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_i \in [0, a]\},$$
$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = a\}$$

a) отделимы? b) сторого отделимы?

3.10. Доказать, что три выпуклых многоугольника в R^2 нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других.

3.11. Будем говорить, что множества A и B разделяются множеством C, если для любых $a \in A, b \in B$ существует число $\alpha \in [0, 1]$, что $\alpha a + (1 - \alpha)b \in C$.

Доказать, что если множества A и B отделимы и H — отделяющая гиперплоскость, то H разделяет A и B.

Привести пример множеств A, B, C таких, что A и B разделяются множеством C, но A и B нельзя отделить.

3.12. Доказать, что замкнутое множество $A \subset R^n$ выпукло тогда и только тогда, когда любая точка $b \notin A$ и множество A строго отделимы.

§ 4. Относительная внутренность множества

О п р е д е л е н и е 4.1. Множество M вида $M = a + L$, где $a \in R^n$, L — линейное подпространство R^n, называется аффинным.

Размерностью M называют размерность L.

В R^2 аффинными множествами являются точки, всевозможные прямые и само пространство R^2.

Т е о р е м а 4.1. Множество M является аффинным тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in M, \alpha \in R^1$ справедливо $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M — аффинное множество, $x, y \in M$, $\alpha \in R^1$. Так как $M = a+L$, то $x = a+u$, $y = a+v$, где $u, v \in L$. Отсюда

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y = \alpha(a+u) + (1-\alpha)(a+v) = \\ = a + \alpha u + (1-\alpha)v.$$

Точка $w = \alpha u + (1-\alpha)v \in L$, так как L является линейным подпространством. Поэтому $z = a + w \in M$.

Пусть M таково, что для любых $x, y \in M, \alpha \in R^1$ справедливо $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$. Докажем, что M аффинное множество. Возьмем произвольную точку $a \in M$ и рассмотрим множество $L = M - a$. Докажем, что L линейное подпространство.
a) пусть $y \in L, \alpha \in R^1$. Тогда $y = z - a, z \in M$,

$$\alpha y = \alpha z - \alpha a = \alpha z + (1-\alpha)a - a.$$

Точка $u = \alpha z + (1-\alpha)a \in M$ по условию. Поэтому $\alpha z = u - a \in L$.
b) пусть $y_1, y_2 \in L$. Тогда $y_1 = z_1 - a, y_2 = z_2 - a$,

$$y_1 + y_2 = z_1 + z_2 - 2a = 2\big((0,5z_1 + 0,5z_2) - a\big).$$

Точка $z = 0,5z_1 + 0,5z_2 \in M$ по условию, поэтому $z - a \in L$. Следовательно, по ранее доказанному $y_1 + y_2 = 2z \in L$. Тем самым доказано, что L — линейное подпространство. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4.1. Из доказанной теоремы следует, что аффинное множество можно определить как множество, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и проходящую через них прямую.

С л е д с т в и е 4.1. Пусть M — аффинное множество. Тогда для любого натурального k, для любых $x_1, \dots, x_k \in M$, любых вещественных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ точка $z \in M$, где

$$z = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство будем проводить методом математической индукции. При $k = 1$ утверждение очевидно. При $k = 2$ утверждение следует из теоремы 4.1. Предположим, что утверждение доказано для всех натуральных $k \leqslant m - 1$. Докажем утверждение для $k = m$.

Пусть $x_1, \dots, x_m \in M$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in R^1$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$. Тогда $(\alpha_m \neq 1)$

$$z = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j = (1 - \alpha_m) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_j}{1 - \alpha_m} x_j + \alpha_m x_m.$$

Так как $\sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_m} = 1$, то в силу индукционного предположения $y = \sum\limits_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_j}{1-\alpha_m} x_j \in M$. Поэтому $z = (1 - \alpha_m) y + \alpha_m x_m \in M$.

Если же $\alpha_m = 1$, то $z = x_m \in M$. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 4.2. Аффинное множество выпукло.

З а м е ч а н и е 4.2. Пусть M — аффинное множество, $a \in M, L = M - a$. Тогда линейное подпространство L не зависит от выбора точки a.

Действительно, пусть $L = M - a, L_1 = M - a_1$, $a, a_1 \in M$. Возьмем произвольную точку $x \in L$. Так как $a_1 - a \in L$, то $x + a_1 - a \in L$ и поэтому

$$x \in L + a - a_1 = M - a_1 = L_1.$$

Тем самым доказано, что $x \in L_1$, значит $L \subset L_1$. Аналогично доказывается, что $L_1 \subset L$. Поэтому $L = L_1$.

Тем самым определение размерности аффинного множества корректно.

Т е о р е м а 4.2. Пусть M — аффинное множество R^n. Тогда существуют матрица H и вектор b такие, что

$$M = \{x \in R^n \mid Hx = b\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $M = a + L$. Известно, что линейное подпространство L в R^n можно представить как множество решений системы линейных однородных уравнений. Пусть L имеет вид

$$L = \{x \in R^n \mid Hx = 0\}.$$

Тогда

$$M = \{x \in R^n \mid Hx = b\},$$

где $b = Ha$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4.3. Пусть M — аффинное множество. Тогда M — замкнутое множество.

О п р е д е л е н и е 4.2. Аффинной оболочкой множества $A \subset R^n$ называется пересечение всех аффинных множеств (пространства R^n), содержащих A и обозначается $\operatorname{aff} A$.

Т е о р е м а 4.3. Для произвольного множества A справедливо равенство $\mathrm{aff}A = \mathrm{aff}\overline{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия 4.3 $\mathrm{aff}A$ является замкнутым множеством. Поэтому из включения $A \subset \mathrm{aff}A$ следует, что $\overline{A} \subset \mathrm{aff}A$, и значит $\mathrm{aff}\overline{A} \subset \mathrm{aff}A$. Обратное включение $\mathrm{aff}A \subset \mathrm{aff}\overline{A}$ очевидно. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 4.3. Точка $a \in A \subset R^n$ называется относительно внутренней, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\{x \in R^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\} \cap \mathrm{aff}A \subset A.$$

Совокупность всех относительно внутренних точек множества A называется относительной внутренностью множества A и обозначается $\mathrm{ri}A$.

З а м е ч а н и е 4.3. Данное определение можно переформулировать следующим образом: точка a является относительно внутренней точкой множества A, если для любой последовательности точек $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, $a_k \in \mathrm{aff}A$ для всех k существует натуральное число l, что $a_k \in A$ для всех $k > l$.

О п р е д е л е н и е 4.4. Множество A называется относительно открытым, если $A = \mathrm{ri}A$.

Если A — аффинное множество, то A является относительно открытым. Поэтому точка является относительно открытым множеством.

Если $A = \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid \alpha \in [0;1]\}$ — отрезок в R^n, то $\mathrm{ri}A = \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid \alpha \in (0;1)\}$.

Л е м м а 4.1. Если $\mathrm{Int}A \neq \varnothing$, то $\mathrm{Int}A = \mathrm{ri}A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathrm{Int}A \neq \varnothing$, то $\mathrm{Int}\,\mathrm{aff}A \neq \varnothing$. Поэтому $\mathrm{aff}A = R^n$ и в данном случае определения $\mathrm{Int}A$ и $\mathrm{ri}A$ совпадают.

Т е о р е м а 4.4. Пусть A — непустое выпуклое подмножество R^n, $a \in \mathrm{ri}A$, $b \in \overline{A}$.

Тогда для всех $\alpha \in [0,1)$ точка $(1-\alpha)a + \alpha b \in \mathrm{ri}A$.

Для доказательства данной теоремы достаточно повторить доказательство теоремы 1.3, проводя рассуждения в $\mathrm{aff}A$.

С л е д с т в и е 4.4. Если A выпуклое множество, то $\mathrm{ri}A$ также выпуклое множество.

Т е о р е м а 4.5. Если A — непустое выпуклое подмножество R^n, то $\mathrm{ri}A \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_0 \in A$. Рассмотрим все векторы вида $a - a_0, a \in A$. Из курса линейной алгебры получаем , что среди рассматриваемых векторов имеется $k \leqslant n$ линейно независимых: $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ (k наибольшее из возможных значений). Возможно два случая:

1. $k = n$. Рассмотрим множество $S = \mathrm{co}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, $S \subset A$. По теореме 2.7 множество S содержит внутренние точки. Поэтому и множество A содержит внутренние точки. Следовательно, $\mathrm{ri}A \neq \varnothing$.

2. $k < n$. Рассмотрим линейное подпространство L, натянутое на $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$. По построению $A - a_0 \subset L$.

Рассмотрим отображение $F : R^k \to L$ вида

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a_i - a_0), \ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in R^k$$

и множество

$$\Lambda = \{\lambda \in R^k \mid \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) > 0, \ \sum_{l=1}^{k} \lambda_i < 1\}.$$

Так как

$$\sum_{l=1} \lambda_l (a_l - a_0) = \sum_{l=1} \lambda_l (a_l - a_0) + (1 - \sum_{l=1} \lambda_l) \cdot 0,$$

то при любом $\lambda \in \Lambda$ точка $F(\lambda)$ представляет собой выпуклую комбинацию точек $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0, 0$ из $A - a_0$ и, значит, $F(\lambda) \in A - a_0$. Поэтому $F(\Lambda) \subset L$.

Докажем далее, что F — гомеоморфизм.

a). Докажем, что F взаимно однозначное отображение. Пусть $F(\lambda) = F(\mu)$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{k} \lambda_l (a_l - a_0) = \sum_{l=1}^{k} \mu_l (a_l - a_0), \text{ или } \sum_{l=1}^{k} (\lambda_l - \mu_l)(a_l - a_0) = 0.$$

Так как векторы $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ линейно независимы, то для всех l справедливы равенства $\lambda_l = \mu_l$. Поэтому $\lambda = \mu$.

b). Докажем, что F непрерывное отображение.

$$|F(\lambda) - F(\lambda_0)| = |\sum_{l=1}^{k} (\lambda_l - \lambda_l^0)(a_l - a_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_l \|a_l - a_0\| \sum_{l=1}^{k} |\lambda_l - \lambda_l^0| \leqslant k \cdot \max_l \|a_l - a_0\| \|\lambda - \lambda_0\|.$$

Из полученного неравенства следует непрерывность F.

c). Из пункта a) следует, что существует F^{-1}, которое является линейным и, следовательно, непрерывным отображением (см. пункт b).

Так как Λ является открытым множеством, то множество $F(\Lambda)$ открыто (в L). Поэтому $\mathrm{ri}(A - a_0) \neq \varnothing$. Отсюда $\mathrm{ri}A \neq \varnothing$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 4.5. Размерностью выпуклого множества A называют размерность $\mathrm{aff}A$.

Из определения размерности выпуклого множества получаем, что размерность отрезка равна единице, размерность круга $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ равна двум.

Т е о р е м а 4.6. Пусть A — выпуклое множество. Тогда $\overline{A} = \overline{\mathrm{ri}A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathrm{ri}A \subset A$, то $\overline{\mathrm{ri}A} \subset \overline{A}$. Пусть $a \in \overline{A}$. По теореме 4.5 $\mathrm{ri}A$ не пусто. Пусть $b \in \mathrm{ri}A$. Рассмотрим семейство точек $x_\alpha = \alpha b + (1-\alpha)a$, $\alpha \in (0;1]$. Тогда $x_\alpha \in \mathrm{ri}A$ по теореме 4.4 и $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_\alpha = a$. Поэтому $a \in \overline{\mathrm{ri}A}$. Следовательно, $\overline{A} \subset \overline{\mathrm{ri}A}$. Значит $\overline{\mathrm{ri}A} = \overline{A}$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 4.6. Множества A и B собственно отделимы, если существуют ненулевой вектор p и вещественное число β такие, что

$$(p,a) \leqslant \beta \leqslant (p,b) \text{ для всех } a \in A,\ b \in B,$$
$$(p,a_0) < (p,b_0) \text{ для некоторых } a_0 \in A,\ b_0 \in B.$$

Из определения следует, что при собственной отделимости исключается вырожденный случай, когда оба множества лежат в разделяющей их гиперплоскости.

П р и м е р 4.1. Пусть

$$A = \{(-1;0),(1;0)\},\ B = \{(x,y)\ |y=0\}.$$

Тогда A и B отделимы, но A и B не являются собственно отделимыми.

П р и м е р 4.2. Пусть

$$A = \{(x,y)\ \big|\ y=0,\ x \geqslant 0\},\ B = \Big\{(x,y)\ \Big|\ x>0,\ y \geqslant \frac{1}{x}\Big\}.$$

Тогда A и B собственно отделимы, но как было отмечено ранее их нельзя строго отделить.

Т е о р е м а 4.7. Пусть множества A и B собственно отделимы. Тогда $\mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B = \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и B собственно отделимы. Это означает, что существуют ненулевой вектор p и число γ такие, что

$$(p, a) \geqslant \gamma \text{ для всех } a \in A, \ (p, b) \leqslant \gamma \text{ для всех } b \in B, \qquad (4.1)$$
$$(p, a_0) > (p, b_0) \text{ для некоторых } a_0 \in A, b_0 \in B.$$

Докажем, что $\mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B = \varnothing$. Пусть $x \in \mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B$. Тогда существует $\varepsilon < 0$ такое, что

$$a = x + \varepsilon(a_0 - x) \in A, \ b = x + \varepsilon(b_0 - x) \in B.$$

Тогда $(p, a) < (p, b)$, что противоречит (4.1). Теорема доказана.

Т е о р е м а 4.8. Пусть A и B — непустые выпуклые подмножества R^n такие, что $\mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B = \varnothing$. Тогда A и B собственно отделимы.

Доказательство данной теоремы можно найти в [13].

УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Верно ли, что если $A \subset B$, то $\mathrm{ri}A \subset \mathrm{ri}B$?

4.2. Доказать, что если $A \subset \overline{B}$ и $A \cap \mathrm{ri}B \neq \varnothing$, то $\mathrm{ri}A \subset \mathrm{ri}B$.

4.3. Доказать, что если $\mathrm{ri}B \subset A \subset \overline{B}$, то $\mathrm{ri}A = \mathrm{ri}B$.

4.4. Пусть A, B — выпуклые множества, $\mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B \neq \varnothing$. Доказать, что $\mathrm{ri}(A \cap B) = \mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B$. Привести пример, показывающий, что условие $\mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B \neq \varnothing$ является существенным.

4.5. Пусть A, B — выпуклые множества. Доказать, что $\mathrm{ri}(A + B) = \mathrm{ri}A + \mathrm{ri}B$.

4.6. Найти размерность множества $A \subset R^3$, определяемого системой

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 + 3x_3 \leqslant -1, \\ 2x_1 + 8x_2 - 3x_3 \leqslant 1, \\ 6x_1 + 8x_2 - 3x_3 \geqslant 1, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3 \leqslant 1. \end{cases}$$

4.7. Пусть A — выпуклое множество такое, что множество $R^n \setminus A$ также выпукло. Верно ли, что $\mathrm{aff} A = R^n$?

4.8. Пусть A — выпуклое подмножество R^n, B — выпуклое подмножество R^m. Доказать, что $\mathrm{ri}(A \times B) = \mathrm{ri}A \times \mathrm{ri}B$.

4.9. Пусть A — выпуклое подмножество R^n. Доказать, что для любого $b \in R^n$ верно равенство $\dim(A + b) = \dim A$.

4.10. Пусть A, B — выпуклые подмножества R^n, причем $\mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B \neq \varnothing$. Доказать, что

$$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B).$$

4.11. Пусть A — выпуклое подмножество R^n, причем $A \cap B \neq \varnothing$. Верно ли, что

$$\dim(A \cap B) = \dim A + \dim B - \dim(A + B)?$$

4.12. Пусть G — матрица порядка $n \times m$, $b \in R^m$ такие, что $A = \{x \in R^n \bigm| Gx = b\} \neq \varnothing$. Доказать, что

$$\dim A = n - \mathrm{rang} G.$$

4.13. Пусть множества A_1, A_2 отделимы и $\mathrm{Int} A_1 \neq \varnothing$. Доказать, что A_1, A_2 собственно отделимы.

§ 5. Опорная гиперплоскость

О п р е д е л е н и е 5.1. Гиперплоскость

$$H = \{x \bigm| (p, x) = \gamma\}$$

называется опорной к множеству A, если $(p, a) \leqslant \gamma$ для всех $a \in A$ и $(p, a_0) = \gamma$ для некоторой точки $a_0 \in \overline{A}$.

При этом уточняют, что гиперплоскость H является опорной к множеству A в точке a_0, а полупространство $\{x \mid (p, x) \leqslant \gamma\}$ называется опорным к A.

Геометрически гиперплоскость H является опорной к A, если множество A лежит по одну сторону от H и H проходит через одну из граничных точек множества A.

О п р е д е л е н и е 5.2. Гиперплоскость

$$H = \{x \mid (p, x) = \gamma\}$$

называется собственно опорной к множеству A, если она является опорной и существует точка $a \in A$ для которой $(p, a) \neq \gamma$.

П р и м е р 5.1. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Тогда гиперплоскость $H = \{(x, y) \mid y - kx = 0\}$ является опорной к A при любом $k < 0$.

П р и м е р 5.2. Пусть $A = \{(0; 0)\}$. Тогда любая гиперплоскость $H = \{x \mid (p, x) = 0\}, p \neq 0$ является опорной.

Т е о р е м а 5.1. Пусть A — непустое выпуклое подмножество R^n. Тогда для любой точки $a_0 \in \partial \overline{A}$ существует гиперплоскость, опорная к A в точке a_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 3.4 существуют ненулевой вектор p и вещественное число γ такие, что

$$(p, a_0) \geqslant \gamma,\ (p, a) \leqslant \gamma \text{ для всех } a \in \overline{A}.$$

Следовательно, $(p, a_0) \leqslant \gamma$ $(a_0 \in \overline{A})$. Отсюда $(p, a_0) = \gamma$. Значит, гиперплоскость $H = \{x \mid (p, x) = \gamma\}$ является опорной к A в точке a_0. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5.2. Всякое непустое замкнутое множество $A \neq R^n$ представимо в виде пересечения открытых полупространств.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно следствию 3.1 для любой точки $b \notin A$ существует гиперплоскость

$H_b = \{x \mid (p_b, x) = \gamma_b\}$ такая, что $(p_b, a) < \gamma_b$ для всех $a \in A$ и $(p_b, b) > \gamma_b$. Следовательно,

$$A \subset \bigcap_{b \notin A} \{x \mid (p_b, x) < \gamma_b\}.$$

Покажем, что на самом деле

$$A = \bigcap_{b \notin A} \{x \mid (p_b, x) < \gamma_b\}.$$

Пусть

$$y \in \bigcap_{b \notin A} \{x \mid (p_b, x) < \gamma_b\}$$

и $y \notin A$. Тогда $(p_y, y) > \gamma_y$, и поэтому точка y не может принадлежать пересечению. Следовательно, всякая точка y, принадлежащая пересечению, принадлежит и A. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5.3. Всякое непустое замкнутое множество $A \neq R^n$ представимо в виде пересечения замкнутых полупространств.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 5.2 .

Т е о р е м а 5.4. Всякое непустое выпуклое замкнутое множество $A \neq R^n$ представимо в виде пересечения всех своих опорных полупространств.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что для любой точки $y \notin A$ существует опорная гиперплоскость $H = \{x \mid (p, x) = \alpha\}$ такая, что

$$(p, y) > \alpha, \ (p, a) \leqslant \alpha \text{ для всех } a \in A.$$

1. Пусть $\mathrm{Int}A \neq \varnothing$ и $a_0 \in \mathrm{Int}A$, z — граничная точка множества, принадлежащая отрезку $\{\beta y + (1-\beta)a_0 \mid \beta \in [0;1]\}$. Рассмотрим гиперплоскость $H_0 = \{x \mid (q,x) = \gamma\}$, опорную к A в точке z. Отметим, что $\gamma = (q,z)$. Покажем, что H_0 искомая гиперплоскость. Действительно, мы имеем:

$$(q,a) \leqslant (q,z) \text{ для всех } a \in A,$$
$$(q,z) = \beta(q,y) + (1-\beta)(q,a_0),\ \beta \in (0;1).$$

Так как $a_0 \in \mathrm{Int}A$, то $(q,a_0) < (q,z)$. Поэтому

$$(q,z) = \beta(q,y) + (1-\beta)(q,a_0) < \beta(q,y) + (1-\beta)(q,z) =$$
$$= \beta\big((q,y) - (q,z)\big) + (q,z).$$

Следовательно, $(q,y) - (q,z) > 0$, или $(q,y) > (q,z) \geqslant (q,a)$ для всех $a \in A$.
2. Пусть $\mathrm{Int}A = \varnothing$. Тогда $\mathrm{aff}A \neq R^n$. Пусть H — гиперплоскость, содержащая $\mathrm{aff}A$ и не содержащая y. Гиперплоскость H является опорной к A гиперплоскостью, и она искомая. Если $(p,y) < \alpha$, то рассматриваем гиперплоскость
$H = \{x \mid (-p,x) = -\alpha\}$. Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Составить уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$A = \{x \in R^3 \bigm| x_3 \geqslant x_1^2 + x_2^2\}$$

в точке $(2;1;1)$.

5.2. Гиперплоскость H называется касательной к множеству $A \subset R^n$ в точке $a \in \overline{A}$, если H является единственной опорной гиперплоскостью к множеству A в точке a. Описать все касательные гиперплоскости к отрезку, квадрату, кругу на плоскости.

5.3. Пусть A — ограниченное выпуклое подмножество R^n. Доказать, что для любого $p \in R^n, p \neq 0$ существует число γ, что гиперплоскость $H = \{x \mid (p,x) = \gamma\}$ будет опорной к A.

5.4. Пусть A — выпуклое подмножество R^n такое, что $A \subset H_+ = \{x \in R^n \mid (p, x) \geqslant \beta\}, p \neq 0$. Верно ли, что существует α такое, что гиперплоскость $H = \{x \in R^n \mid (p, x) = \alpha\}$ будет опорной к A.

5.5. Будет ли верна теорема 5.2, если выпуклое множество A не является ни замкнутым, ни открытым?

5.6. Пусть $A \subset R^n$ — выпуклое замкнутое множество такое, что проекция на любую гиперплоскость есть выпуклый многогранник. Верно ли, что A многогранник, если a) $n = 2$,
b) $n \geqslant 3$.

5.7. Пусть $A \subset R^3$ — выпуклый компакт с непустой внутренностью. Доказать, что можно отметить четыре точки на границе множества A так, чтобы опорная плоскость в каждой отмеченной точке была параллельна плоскости, проходящей через три остальные отмеченные точки.

5.8. Выпуклое множество $A \subset R^2$ называется *множеством постоянной ширины*, если расстояние между любыми двумя его параллельными опорными прямыми одно и то же.
1. Привести пример в R^2 выпуклого множества постоянной ширины, отличного от круга.
2. Доказать, что любое выпуклое множество плоскости диаметра единица покрывается множеством постоянной ширины, равной единице.
3. Доказать, что выпуклое множество постоянной ширины, равной единице нельзя разбить на две части меньшего диаметра.

5.9. Точка $a \in \partial\overline{A}$, где A — выпуклое подмножество R^n, называется *регулярной*, если в точке a существует единственная опорная гиперплоскость.
1. Верно ли, что если A —выпукло и замнуто, то множество регулярных точек множества A также замкнуто?
2. Существуют ли замкнутые выпуклые множества $A \neq R^n$ такие, что A не имеет регулярных точек?
3. Существуют ли замкнутые выпуклые множества $A \neq R^n$ с непустой внутренностью и такие, что A не имеет регулярных то-

чек?

5.10. Доказать, что если в некоторой точке выпуклого множества существуют две опорные гиперплоскости, то в данной точке существует бесконечно много опорных гиперплоскостей.

5.11. Верно ли, что строго выпуклый компакт в любой граничной точке имеет ровно одну опорную гиперплоскость?

5.12. Пусть $H_k = \{x \mid (a_k, x) = \gamma_k\}, \|a_k\| = 1$ — последовательность гиперплоскостей. Будем говорить, что последовательность H_k сходится к гиперплоскости $H = \{x \mid (a, x) = \gamma\}$, если $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} \gamma_k = \gamma$.

Пусть A – выпуклый компакт R^n, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек такая что $a_k \in \partial A, a_k \to a$ при $k \to \infty$, причем $a \in \partial A$, H_k — гиперплоскость, опорная к A в точке a_k. Верно ли, что последовательность H_k сходится к гиперплоскости H, опорной к A в точке a?

5.13. Доказать, что любая гиперплоскость, опорная к аффинному множеству, его содержит.

5.14. Доказать, что около каждого выпуклого компакта R^2 с непустой внутренностью можно описать квадрат.

§ 6. Выпуклые конусы

О п р е д е л е н и е 6.1. Множество K называется выпуклым конусом с вершиной в нуле, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1) K — выпуклое множество;

2) если $x \in K$, то для всех $t \geqslant 0$, $tx \in K$.

Множество K называется выпуклым конусом с вершиной в точке x_0, если $K = x_0 + K_0$, где K_0 — выпуклый конус с вершиной в нуле.

Множество K называется конусом с вершиной в нуле, если K удовлетворяет свойству 2).

Рассмотрим примеры выпуклых конусов с вершиной в нуле. 1. $K = R^n$, $K = \{0\}$.

2. $K = \{z \mid z = tx_0,\ t \geqslant 0\}$, где x_0 — фиксированная точка R^n.
3. $K = \{(x,y) \in R^2 \bigm| x \leqslant y \leqslant 2x,\ x \geqslant 0\}$.
4. $K = \{x \in R^n \bigm| (p,x) \leqslant 0\}$.

Т е о р е м а 6.1. Множество K является выпуклым конусом с вершиной в нуле тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2 \in K$, для любых $t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0$ точка $t_1x_1 + t_2x_2 \in K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — выпуклый конус, $x_1, x_2 \in K, t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0$. Тогда $((t_1+t_2) \neq 0)$

$$t_1x_1 + t_2x_2 = (t_1+t_2)\big(\frac{t_1}{t_1+t_2}x_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}x_2\big).$$

Так как K выпуклое множество, то точка

$$z = \big(\frac{t_1}{t_1+t_2}x_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}\big) \in K.$$

Поэтому $t_1x_1 + t_2x_2 = (t_1+t_2)z \in K$. Если $t_1+t_2 = 0$, то $t_1x_1 + t_2x_2 = 0 \in K$.

Пусть теперь K обладает соответствующим свойством. $x_1, x_2 \in K, \alpha \in [0,1]$. Взяв в качестве $t_1 = \alpha, t_2 = 1-\alpha$, имеем $t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0$ и

$$t_1x_1 + t_2x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in K.$$

Поэтому множество K является выпуклым. Если $x \in K, t \geqslant 0$, то $tx = tx + 1 \cdot 0 \in K$. Следовательно, K — выпуклый конус.

С л е д с т в и е 6.1. $K \subset R^n$ — выпуклый конус с вершиной в нуле тогда и только тогда, когда для любого натурального числа k, для любых $x_1, \ldots, x_k \in K$, для любых неотрицательных чисел $t_1, \ldots, t_k$ справедливо

$$t_1x_1 + \cdots + t_kx_k \in K.$$

О п р е д е л е н и е 6.2. Пусть A — непустое множество R^n. Множеством, двойственным к A, называется множество A^* вида

$$A^* = \{y \in R^n \mid (x, y) \leqslant 1 \text{ для всех } x \in A\}.$$

Т е о р е м а 6.2. Пусть K_1, K_2 — выпуклые конусы с вершиной в нуле. Тогда выпуклыми конусами с вершиной в нуле будут следующие множества:
1) $K_1 + K_2$;
2) $K_1 \cap K_2$;
3) $\overline{K}_1$;
4) $\mathrm{Int} K_1$;
5) K_1^*, причем $K_1^* = \{y \mid (x, y) \leqslant 0 \text{ для всех } x \in K_1\}$. Конус K^*, называется конусом, сопряженным к конусу K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения пунктов 1) - 4) очевидны, докажем утверждение пункта 5). Пусть $y \in R^n$ такой, что $(x, y) \leqslant 0$ для всех $x \in K_1$. Тогда $y \in K_1^*$.

Пусть $y \in K_1^*$. Это означает, что $(x, y) \leqslant 1$ для всех $x \in K_1$. Возьмем $x_0 \in K_1, t > 0$. Тогда для всех $t > 0$ справедливо неравенство $t(x_0, y) \leqslant 1$. Поэтому $(x_0, y) \leqslant \dfrac{1}{t}$ для всех $t > 0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем $(x_0, y) \leqslant 0$. Следовательно, $(x, y) \leqslant 0$ для всех $x \in K_1$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 6.3. Конической оболочкой множества A называется пересечение всех выпуклых конусов с вершиной в нуле и содержащих A. Коническую оболочку будем обозначать $\mathrm{con} A$.

З а м е ч а н и е 6.1. Из следствия 6.1 следует, что

$$\mathrm{con} A = \{z \mid z = t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k,\ k \in N,\ x_i \in A,\ t_i \geqslant 0\}.$$

Т е о р е м а 6.3. Пусть C — выпуклое подмножество R^n. Тогда

$$\operatorname{con}C = B, \text{где}$$
$$B = \{\lambda x \mid x \in C, \lambda \geqslant 0\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что B — выпуклый конус с вершиной в нуле. Пусть $x_1, x_2 \in B, t_1, t_2 \geqslant 0$. Тогда $x_1 = \lambda_1 y_1, x_2 = \lambda_2 y_2$ и $(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \neq 0)$

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 = t_1 \lambda_1 y_1 + t_2 \lambda_2 y_2 =$$
$$= (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)\Big(\frac{\lambda_1 t_1}{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} x_1 + \frac{\lambda_2 t_2}{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} x_2\Big) = (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) z,$$

где $z = \Big(\frac{\lambda_1 t_1}{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} x_1 + \frac{\lambda_2 t_2}{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2} x_2\Big) \in B$ в силу выпуклости множества C. Поэтому $t_1 x_1 + t_2 x_2 \in B$. На основании теоремы 6.1 B является выпуклым конусом с вершиной в нуле. Из определения B сразу следует, что $C \subset B$, поэтому $\operatorname{con}C \subset B$. Из определения конической оболочки следует, что $B \subset \operatorname{con}C$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 6.4. Если $C_1, \ldots, C_k$ — выпуклые множества, $0 \in C_i$ для всех i. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{con}C_i = \operatorname{con}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\Big)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \operatorname{con}\big(\bigcap\limits_{i=1} C_i\big)$. Это означает, что $x = t x_1, x_1 \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} C_i$. Поэтому $x_1 \in C_i$ и по теореме 6.3 $x \in \operatorname{con}C_i$ для всех i. Следовательно, $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \operatorname{con}C_i$.

Пусть $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{con} C_i$. Значит, $x = t_i x_i, x_i \in C_i,\ t_i > 0$. Тогда $\dfrac{x}{t_i} \in C_i$ для всех i и

$$t(t_i^{-1}x) = (1-t)\cdot 0 + t(t_i^{-1}x) \in C_i \text{ при } t \in (0;1)$$

для всех $i = 1,\ldots,k$. Выбирая число μ из условия
$0 < \mu \leqslant \min\limits_i \frac{1}{t_i}$, получим $\mu x = (\mu t_i)(t_i^{-1}x) \in C_i$ для всех i. Таким образом, получили

$$\mu x \in \bigcap_{i=1}^{k} C_i,\ x = \frac{1}{\mu}(\mu x) \in \mathrm{con}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\Big),$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 6.5. Всякая опорная гиперплоскость к выпуклому конусу с вершиной в нуле проходит через нуль (Предполагается, что конус не совпадает со всем пространством.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H = \{x \mid (p,c) = (p,a_0)$ — опорная гиперплоскость к конусу K в точке $a_0 \in \overline{K}$. Имеем

$$(p,x) \leqslant (p,a_0) \text{ для всех } x \in K. \tag{6.1}$$

Докажем, что $(p,a_0) = 0$. Доказывать будем методом от противного.

Пусть $(p,a_0) < 0$. Возьмем точку $z \in K$ и последовательность $\alpha_j > 0, \alpha_j \to 0$ при $j \to \infty$. Так как точки $\alpha_j z \in K$, то для всех j справедливы неравенства $(p,\alpha_j z) \leqslant (p,a_0)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to \infty$, получаем $(p,a_0) \geqslant 0$, что противоречит предположению $(p,a_0) < 0$.

Пусть $(p,a_0) > 0$. Если бы для всех $x \in K$ выполнялось неравенство $(p,x) < 0$, имело бы место и неравенство $(p,a_0) \leqslant 0$. Значит, существует точка $a \in K$ такая, что $(p,a) > 0$. Рассмотрим последовательность $\alpha_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Тогда

$\alpha_j a \in K$ и поэтому для всех j $(p, \alpha_j a) \leqslant (p, a_0)$. Так как $\lim\limits_{j\to\infty}(p, \alpha_j a) = \infty$, то при достаточно больших j выполняется неравенство $(p, \alpha_j a) > (p, a_0)$, что противоречит (6.1). Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

6.1. Доказать, что если $K \subset R^n$ — выпуклый конус с вершиной в нуле, то $K + K^* = R^n$.

6.2. Доказать, что выпуклое замкнутое множество, имеющее ровно одну крайнюю точку, является выпуклым конусом с вершиной в данной точке.

6.3. Пусть K — выпуклый конус с вершиной в x_0. Доказать, что любая опорная гиперплоскость проходит через x_0.

6.4. Пусть

$$K = \mathrm{con}\{(-3;1), (2;3), (4;5)\}.$$

Найти и изобразить на плоскости конус K^*.

6.5. Пусть K — конус в R^n_+, причем для любых $x, y \in K$ точки $\max(x,y), \min(x,y) \in K$, где

$$\max(x,y) = \big(\max(x_1,y_1), \ldots, \max(x_n,y_n)\big),$$
$$\min(x,y) = \big(\min(x_1,y_1), \ldots, \min(x_n,y_n)\big).$$

Доказать, что K — выпуклый конус.

6.6. Верно ли, что если C — замкнутое множество, то множество $\mathrm{con}C$ также является замкнутым.

6.7. Доказать, что множество

$$K = \{(x,y) \in R^2 \mid 5y^2 - 2xy - 3y^2 \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}$$

является выпуклым конусом с вершиной в нуле. Найти конус K^*.

6.8. Пусть A — выпуклый компакт R^n. Верно ли, что $\mathrm{con}A$ — замкнутое множество?

6.9. Пусть A — выпуклый компакт $R^n, 0 \notin A$. Доказать, что $\mathrm{con}A$ замкнутое множество.

6.10. Пусть K — конус в R^n такой, что для любых $x, y \in K$ точки $\min\{x, y\}, \max\{x, y\} \in K$. Можно ли утверждать, что K — выпуклый конус?

6.11. Пусть A подмножество R^n, B подмножество R^m. $0 \in A$, $0 \in B$. Доказать, что

$$\mathrm{con}(A \times B) = \mathrm{con}A \times \mathrm{con}B.$$

6.12. Пусть A подмножество R^n, B подмножество R^m. Верно ли, что

$$\mathrm{con}(A \times B) = \mathrm{con}A \times \mathrm{con}B.$$

6.13. Пусть A подмножество R^n, B подмножество R^m, $0 \in A$, $0 \in B$. Доказать, что

$$\mathrm{con}(A + B) = \mathrm{con}A + \mathrm{con}B.$$

6.14. Пусть A подмножество R^n, B подмножество R^m. Верно ли, что

$$\mathrm{con}(A + B) = \mathrm{con}A + \mathrm{con}B.$$

6.15. Пусть A подмножество R^n. Верно ли, что 0^+A — выпуклый конус с вершиной в нуле.

6.16. Пусть A подмножество R^n вида

$$A = \{x \in R^n \bigm| (a_i, x) \leqslant b_i, i = 1, \ldots, k,$$
$$(a_i, x) = b_i, i = k+1, \ldots, m\} \neq \varnothing.$$

Доказать, что

$$0^+A = \{h \in R^n \bigm| (a_i, h) \leqslant 0, i = 1, \ldots, k,$$
$$(a_i, h) = 0, i = k+1, \ldots, m\}.$$

6.17. Конус K называется заостренным, если он не содержит одновременно точки x и $-x$, где $x \neq 0$. Доказать, что если выпуклый конус K заострен, то он является выпуклым конусом с вершиной в нуле.

6.18. Задать $\mathrm{con}\{(1;0;-1),(-2;1;0),(0;-1;2)\}$ системой линейных неравенств.

6.19. Найти $\mathrm{con}\{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ |y| \leqslant x^2\}$.

6.20. Может ли вершина конуса быть его внутренней точкой?

§ 7. Крайние точки

О п р е д е л е н и е 7.1. Точка a выпуклого множества A называется крайней, если не существует точек $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ таких, что $a = 0,5a_1 + 0,5a_2$.

Геометрически это означает, что крайняя точка — это точка, которая не является серединой отрезка, концы которого лежат в этом множестве.

П р и м е р 7.1. Пусть $A = \{\alpha a + (1-\alpha)b \bigm| \alpha \in [0;1]\}$ — отрезок с концами a, b в R^n. Тогда крайними точками A являются точки a, b и только они.

П р и м е р 7.2. Пусть $A = \{x \bigm| \|x - a_0\| \leqslant r\}$ — шар радиуса r с центром в точке a_0. Докажем, что все точки границы A являются крайними. Пусть $a \in A, \|a - a_0\| = r$ и предположим, что

$$a = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2, \text{ где } a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2.$$

Тогда

$$r = \|a - a_0\| = \|\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|a_1 - a_0\| + \frac{1}{2}\|a_2 - a_0\| \leqslant r.$$

Следовательно, $\|a_1 - a_0\| = r, \|a_2 - a_0\| = r$. Обозначим

$$e = \frac{a - a_0}{r}, \; e_1 = \frac{a_1 - a_0}{r}, \; e_2 = \frac{a_2 - a_0}{r}.$$

Имеем

$$\|e\| = \|e_1\| = \|e_2\| = 1 \text{ и } e = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2.$$

Тогда

$$1 = \|e\|^2 = \frac{1}{4}\|e_1\|^2 + \frac{1}{2}(e_1, e_2) + \frac{1}{4}\|e_2\|^2 = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(e_1, e_2).$$

Так как $(e_1, e_2) \leqslant 1$, то получаем, что $(e_1, e_2) = 1$. Значит, $e_1 = e_2$, что невозможно, так как $a_1 \neq a_2$.

Тем самым доказано, что любая граничная точка множества A является крайней точкой.

Совокупность всех крайних точек множества A обозначим $\mathrm{ext}A$.

З а м е ч а н и е 7.1. Можно дать другое определение крайней точки. Точка $a \in A$ называется крайней точкой выпуклого множества A, если множество $A \setminus \{a\}$ выпукло.

П р и м е р 7.3. Пусть K — выпуклый конус с вершиной в нуле. Тогда $\mathrm{ext}K \subset \{0\}$.

Т е о р е м а 7.1. Пусть H — гиперплоскость, опорная к выпуклому множеству A и $A \cap H$ состоит из единственной точки a_0. Тогда $a_0 \in \mathrm{ext}A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$H = \{x \mid (p, x) = \alpha\} \text{ и } (p, a) \leqslant \alpha \text{ для всех } a \in A.$$

Предположим, что $a_0 \notin \text{ext}A$. Тогда $a_0 = 0,5a_1 + 0,5a_2, a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Поэтому

$$\alpha = (p, a_0) = 0,5(p, a_1) + 0,5(p, a_2) \leqslant \alpha.$$

Следовательно, $(p, a_1) = (p, a_2) = \alpha$. Значит, $a_1, a_2 \in H$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Т е о р е м а 7.2. Если пересечение любой прямой с выпуклым замкнутым множеством неограничено или пусто, то A — замкнутое полупространство или все пространство и, следовательно, $\text{ext}A = \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если A не имеет граничных точек, то $A = R^n$. Пусть A имеет граничную точку a_0. Тогда в этой точке существует гиперплоскость $H = \{x \mid (p, x) = (p, a_0)\}$ опорная к A. Будем считать, что

$$A \subset \{x \mid (p, x) \leqslant (p, a_0)\} = H_-.$$

Покажем, что $A = H_-$. Предположим противное. Тогда существует точка $a_1 \notin A$ и такая, что $(p, a_1) < (p, a_0)$. Действительно, если бы

$$\{x \mid (p, x) < (p, a_0)\} \subset A,$$

то по замкнутости A получили бы $H_- \subset A$. Откуда $H_- = A$.

Рассмотрим прямую l, проходящую через точки a_0, a_1.

$$l = \{x = a_0 + (a_1 - a_0)t \mid t \in R^1\}.$$

Отметим, что $A \cap l \neq \varnothing$, так как $a_0 \in A \cap l$. Докажем, что множество $A \cap l$ ограничено. Так как $(p, a_1) < (p, a_0)$, то при $t < 0$ справедливо неравенство $(p, a_0 + t(a_1 - a_0)) > (p, a_0)$ и поэтому точки вида $a_0 + t(a_1 - a_0)$, $t < 0$ не принадлежат H_-.

Пусть $t > 1$. Если предположить, что $a_0 + t(a_1 - a_0) \in A$, то получаем

$$a_1 = \frac{t-1}{t} a_0 + \frac{1}{t}\big(a_0 + t(a_1 - a_0)\big) \in A$$

в силу выпуклости A, что противоречит выбору точки a_1. Значит $a_0 + t(a_1 - a_0)t \notin A$ для всех $t > 1$. Получили, что множество $A \cap l$ непусто и ограничено, что противоречит условию теоремы. Значит $A = H_-$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 7.3. Для того чтобы точка x_0 была крайней точкой множества

$$A = \{x \in R^n \bigm| (p_i, x) \leqslant \alpha_i,\ i \in I = \{1, \ldots, m\}\}, \tag{7.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы множество

$$I(x_0) = \{i \bigm| (p_i, x_0) = \alpha_i,\ i \in I\}$$

содержало подмножество I_0 мощности n и чтобы векторы $\{p_i,\ i \in I_0\}$ были линейно независимыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0 — крайняя точка. Предположим, что множество $\{p_i,\ i \in I(x_0)\}$ содержит меньше, чем n линейно независимых векторов. Тогда система линейных уравнений

$$(p_i, x) = 0,\ i \in I(x_0)$$

имеет нетривиальное решение y. Из определения $I(x_0)$ следует, что существует $t > 0$ такое, что

$$(p_i, x_0 \pm ty) = \alpha_i,\ i \in I(x_0),$$
$$(p_i, x_0 \pm ty) < \alpha_i,\ i \in I \setminus I(x_0).$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$x_0 + ty \in A,\ x_0 - ty \in A,$$
$$x_0 = 0,5(x_0 + ty) + 0,5(x_0 - ty),$$

что противоречит тому, что $x_0 \in \text{ext}A$.

Значит, множество $\{p_i,\ i \in I(x_0)\}$ содержит n линейно независимых векторов.

Пусть теперь $|I_0| = n$ и $\{p_i,\ i \in I\}$ линейно независимы. Докажем, что $x_0 \in \text{ext}A$. Предположим, что $x_0 \notin \text{ext}A$. Тогда $x_0 = 0,5x_1 + 0,5x_2,\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$. Следовательно,

$$\alpha_i = (p_i, x_0) = 0,5(p_i, x_1) + 0,5(p_i, x_2) \leqslant \alpha_i, \text{ для всех } i \in I_0.$$

Отсюда $\alpha_i = (p_i, x_1) = (p_i, x_2)$ для всех $i \in I_0$. С другой стороны, так как векторы $\{p_i,\ i \in I_0\}$ линейно независимы и $|I_0| = n$, то система $(p_i, x) = \alpha_i,\ i \in I_0$ имеет единственное решение. Поэтому $x_1 = x_2$, что противоречит условию $x_1 \neq x_2$. Значит, $x_0 \in \text{ext}A$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 7.1. Пусть A множество вида (7.1). Тогда A имеет не более конечного числа крайних точек.

Т е о р е м а 7.4. Пусть A — замкнутое выпуклое подмножество R^n, $a_0 \in A \setminus \text{ri}A$, $H = \{x \mid (p, x) = \alpha\}$ — собственная опорная гиперплоскость к A в точке a_0, $A_0 = A \cap H$. Тогда
1) $\text{ext}A_0 \subset \text{ext}A$;
2) $\dim A_0 < \dim A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z \in \text{ext}A_0$, и предположим, что $z \notin \text{ext}A$. Следовательно, точка z представима в виде

$$z = 0,5z_1 + 0,5z_2,\ z_1, z_2 \in A,\ z_1 \neq z_2. \tag{7.2}$$

Тогда

$$\alpha = (p, z) = 0,5(p, z_1) + 0,5(p, z_2) \geqslant \alpha.$$

(Считаем, что $(p, a) \geqslant \alpha, a \in A$.) Поэтому $z_1, z_2 \in H$. Так как H — выпуклое множество, то $z \in H$. Отсюда $z, z_1, z_2 \in A_0$ и справедливо представление (7.2), что противоречит условию $z \in \text{ext}A_0$. Следовательно, $z \in \text{ext}A$.

Докажем второе утверждение. Отметим, что $\mathrm{aff}A_0 \subset A$, $\mathrm{aff}A_0 \subset H$, так как $A_0 \subset A, A_0 \subset H$. Предположим, что $\mathrm{aff}A_0 = \mathrm{aff}A$. Тогда $A \subset \mathrm{aff}A = \mathrm{aff}A_0 \subset H$, что противоречит тому, что H — собственная опорная гиперплоскость. Следовательно,

$$\mathrm{aff}A_0 \neq \mathrm{aff}A,\ \mathrm{aff}A = L + a,\ \mathrm{aff}A_0 = L_0 + a_0,$$

где L, L_0 — линейные подпространства. Отсюда $L_0 \subset L$, $L_0 \neq L$. Значит, $\dim L_0 < \dim L$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 7.5. Пусть A — непустое замкнутое выпуклое подмножество R^n. Множество $\mathrm{ext}A \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда A не содержит прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z \in \mathrm{ext}A$, и предположим, что существует прямая

$$l = \{x \in R^n \bigm| x = x_0 + th,\ t \in R^1,\ h \neq 0\}$$

такая, что $l \subset A$. По теореме 1.4 получаем, что

$$l_+ = \{x \in R^n \bigm| x = z + th,\ t \geqslant 0\} \subset A$$
$$l_- = \{x \in R^n \bigm| x = z - th,\ t \geqslant 0\} \subset A.$$

Следовательно, $z - h, z + h \in A$ и

$$z = 0,5(z + h) + 0,5(z - h) \in A,$$

что противоречит условию $z \in \mathrm{ext}A$. Итак, доказано, что если $\mathrm{ext}A \neq \varnothing$, то A не содержит прямых.

Пусть A не содержит прямых. Докажем, что $\mathrm{ext}A \neq \varnothing$. Доказательство проведем методом математической индукции по размерности множества A. Если $\dim A = 0$, то $A = \{a\}$, и поэтому $\mathrm{ext}A = \{a\}$. Предположим, что теорема доказана для всех множеств A таких, что $\dim A \leqslant m - 1$. Докажем теорему для множества A размерности m. Рассмотрим множество $A \setminus \mathrm{ri}A$, которое не пусто, так как A не содержит прямых. Возьмем точку $a_0 \in A \setminus \mathrm{ri}A$ и рассмотрим собственную опорную гиперплоскость H к множеству A в точке a_0. Пусть $A_0 = A \cap H$. По теореме 7.4 $\dim A_0 < \dim A$ и по условию A_0 не содержит прямых. Поэтому, в силу индукционного предположения, $\mathrm{ext}A_0 \neq \varnothing$. По теореме 7.4 $\mathrm{ext}A_0 \subset \mathrm{ext}A$ и, следовательно, $\mathrm{ext}A \neq \varnothing$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 7.2. Пусть A — выпуклый компакт R^n. Тогда $\mathrm{ext}A \neq \varnothing$.

Т е о р е м а 7.6. (Крейна-Мильмана). Пусть A — непустой выпуклый компакт R^n. Тогда $A = \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathrm{ext}A \subset A$, то справедливо включение $\mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A\big) \subset A$. Докажем, что $A \subset \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A\big)$. Доказательство проведем методом математической индукции по размерности множества A.

Если $\dim A = 0$, то утверждение, очевидно, верно. Предположим, что теорема доказана для всех множеств A таких, что $\dim A \leqslant m-1$. Докажем теорему для множества A, размерность которого равна m. Рассмотрим точку $a_0 \in A \setminus \mathrm{ri}A$ и определим A_0 как в теореме 7.5. Тогда A_0 — выпуклый компакт и по теореме 7.4 $\dim A_0 < \dim A$. В силу индукционного предположения имеем $A_0 = \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A_0\big)$, и поэтому $a_0 \in \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A_0\big)$. Так как $\mathrm{ext}A_0 \subset \mathrm{ext}A$, то $a_0 \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A\big)$. Поэтому $A \setminus \mathrm{ri}A \subset \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A_0\big)$.

Пусть теперь $a_0 \in \mathrm{ri}A$. Рассмотрим $\mathrm{aff}A = L + b$, и пусть $h \in L, h \neq 0$. Рассмотрим прямую

$$l = \{x \in R^n \bigm| x = a_0 + \alpha h, \alpha \in R^1\}.$$

Тогда $l \subset \mathrm{aff}A$. Так как A ограничено, то $l \cap A = \mathrm{co}\{a_1, a_2\}$, где $a_1, a_2 \in A \setminus \mathrm{ri}A$. Поэтому

$$a_0 \in \mathrm{co}\{a_1, a_2\} \subset \mathrm{co}\big(A \setminus \mathrm{ri}A\big) \subset \mathrm{co}\big(\mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A\big)\big) = \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A)\big).$$

Тем самым доказано, что $\mathrm{ri}A \subset \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A)\big)$.

Значит, $A \subset \mathrm{co}\big(\mathrm{ext}A)\big)$. Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Пусть A — выпуклый компакт. Доказать, что точка $a_0 \in A$, наиболее удаленная от начала координат, является крайней точкой множества A. Предполагается, что используется стандартная метрика.

7.2. Верно ли, что если выпуклое множество K имеет единственную крайнюю точку x_0, то K — выпуклый конус с вершиной в x_0.

7.3. Существует ли выпуклое множество A, у которого множество $\mathrm{ext} A$ не является замкнутым?

7.4. Пусть A — выпуклое множество R^n, $\mathfrak{L} : R^n \to R^m$ — линейное отображение. Верно ли, что $\mathrm{ext}(\mathfrak{L}A) = \mathfrak{L}(\mathrm{ext} A)$?

7.5. Найти все крайние точки множества A, заданного системой

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 \geqslant 2, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 5, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

7.6. Пусть A — выпуклый компакт R^n, $\dim A = k$. Доказать, что множество A имеет не менее $k+1$ крайней точки.

7.7. Доказать, что точка z является крайней точкой множества $A = \mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_k, z\}$ тогда и только тогда, когда точку z можно сторого отделить от множества $\mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_k\}$.

7.8. При каких a точка $x(a)$ является крайней точкой множества $A = \mathrm{co}\{x_1, x_2, x_3, x_4, x(a)\}$, если

$$x_1 = (1; 2; 3), \ x_2 = (1; -1; 0), \ x_3 = (0; -1; 4),$$
$$x_4 = (0; 0; 0), \ x(a) = (a; 1; -1).$$

7.9. При каких k выпуклое множество A в R^4, определяемое системой

$$\begin{cases} (x_1 - 2x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_3 + 2x_4)^2 \leqslant 8, \\ kx_1 - 2x_2 + 5kx_3 + 10x_4 = 0, \end{cases}$$

имеет крайние точки.

7.10. Пусть G — матрица порядка $n \times m$, $b \in R^m$,

$$A = \{x \in R^n \bigm| Gx \leqslant b,\ x \geqslant 0\},$$
$$A_1 = \{(x, z) \in R^n \times R^m \bigm| Gx + z = b,\ x \geqslant 0, z \geqslant 0\}.$$

Верно ли, что если $(x_0, z_0) \in \mathrm{ext} A_1$, то $x_0 \in \mathrm{ext} A$?

7.11. Является ли точка $a_0 = (0; 1; 0; 1; 0; 0)$ крайней точкой множества A, задаваемого системой

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 + 4x_6 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = -1, \\ x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 0, \\ x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

7.12. Пусть множество A определяется системой

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ -7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_6 = -5, \\ x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, 6. \end{cases}$$

Сколько крайних точек имеет множество A?

7.13. Точка $x \in A$ называется выступающей точкой множества A, если существует гиперплоскость H, опорная к A в точке x и такая, что $H \cap A = \{x\}$. Привести пример выпуклого множества, у которого множество крайних точек и множество выступающих точек не совпадают.

7.14. Найти все крайние точки следующих множеств:

1. $A = \{x \in R^n \bigm| x \geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = b, b > 0\}$;
2. $A = \{x \in R^n \bigm| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$.

7.15. Пусть G — матрица размером $n \times m$.
$K = \{x \in R^n \mid Gx \leqslant 0\}$. Доказать, что

1. K — выпуклый замкнутый конус с вершиной в нуле;
2. 0 является крайней точкой K тогда и только тогда, когда $\mathrm{rang} G = n$.

7.16. Пусть

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_i \geqslant 0,\ x_3^2 \leqslant x_1 x_2\}.$$

Доказать, что прямая $l = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0,\ x_3 = 1\}$ не пересекает конус K, но не существует плоскости, содержащей l и не пересекающей K.

7.17. Существуют ли выпуклые множества в R^n, имеющие ровно k, $k = 2, 3, \ldots, n$ крайних точек?

7.18. Привести пример выпуклого множества A, для которого существуют гиперплоскость H и точка $a_0 \in A$ такие, что $A \cap H = \{a_0\}$, но точка $\{a_0\}$ не является крайней точкой множества A.

7.19. Пусть A — выпуклое множество, $b \notin A$. Верно ли, что точка b является крайней точкой множества $\overline{\mathrm{co}(A \cup b)}$?

7.20. Пусть M — многогранник, натянутый на $a_1, \ldots, a_k$. Доказать, что
1. $\mathrm{ext} M \subset \{a_1, \ldots, a_k\}$;
2. Диаметр многогранника M равен длине одного из отрезков, соединяющих его вершины.

7.21. Описать все выпуклые множества, у которых любая точка является крайней

7.22. Пусть A — выпуклый компакт, H — опорная гиперплоскость. Доказать, что множество $A \cap H$ содержит хотя бы одну крайнюю точку множества A.

7.23. Определить число крайних точек многогранника

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,\ x_i \in [0, 1]\}.$$

7.24. Найти крайние точки множества

$$A = \{x \in R^n \mid (Gx, x) \leqslant \alpha\},$$

где G — неотрицательно определенная матрица порядка n.

§ 8. Теорема Хелли

Т е о р е м а 8.1. Пусть $\mathfrak{F} = \{A_i\}_{i=1}^m$ — семейство выпуклых подмножеств $R^n, m \geqslant n+1$, причем любые $n+1$ из этих множеств имеют непустое пересечение. Тогда существуют выпуклые компакты $B_i \subset A_i$ такие, что у семейства $\{B_i\}_{i=1}^m$ любые $n+1$ из этих множеств имеют непустое пересечение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $i_0 \in I = \{1, \ldots, m\}$ и $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant m$, причем $i_s \neq i_0$. Обозначим через $a^{i_0}_{i_1 \ldots i_n}$ точку из пересечения $A_{i_0} \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}$, которая существует по условию, и полагаем

$$B_{i_0} = \mathrm{co}\Big(\bigcup_{\{i_1 \ldots i_n\} \in I \setminus \{i_0\}} a^{i_0}_{i_1 \ldots i_n} \Big\}.$$

Множество B_{i_0} является выпуклым компактом. Рассмотрим новое семейство множеств $\mathfrak{F}_{i_0}$, заменив в семействе $\mathfrak{F}$ множество A_{i_0} множеством B_{i_0}. Докажем, что в семействе $\mathfrak{F}_{i_0}$ любые $n+1$ множества имеют непустое пересечение. Если среди выбранных множеств нет B_{i_0}, то указанное пересечение не пусто по условию теоремы. Если среди выбранных $n+1$ множеств есть B_{i_0}, то выбранные множества есть множества вида $B_{i_0}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ при некоторых $i_1, \ldots, i_n$, и поэтому каждое из множеств содержит точку $a^{i_0}_{i_1 \ldots i_n}$.

Повторяя построение B_{i_0} для всех $i_0 = 1, \ldots, m$, получим требуемое семейство. Теорема доказана.

Т е о р е м а 8.2. Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — семейство компактных подмножеств R^n, у которого любое конечное подсемейство имеет непустое пересечение. Тогда

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \neq \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha_0 \in \Lambda$, $\Lambda_0 = \Lambda \setminus \{\alpha_0\}$. Рассмотрим множества $B_\alpha = R^n \setminus A_\alpha, \alpha \in \Lambda_0$. Предположим, что

$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \varnothing$. Докажем, что

$$A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda_0} B_\alpha. \tag{8.1}$$

Действительно, пусть $y \in A_{\alpha_0}$. Так как $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \varnothing$, то существует $\beta \in \Lambda$ такое, что $y \notin A_\beta$. Следовательно, $y \in R^n \setminus A_\beta = B_\beta$, и поэтому выполнено (8.1). Это означает, что семейство множеств $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_0}$ образует открытое покрытие множества A_{α_0}. Так как A_{α_0} компакт, то из данного покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть $\{B_{\alpha_s},\ s = 1,\dots,m\}$ данное подпокрытие. Тогда $A_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{s=1}^{m} \big(R^n \setminus A_{\alpha_s}\big)$, и поэтому $A_{\alpha_0} \cap \big(\bigcap\limits_{s=1}^{m} A_{\alpha_s}\big) = \varnothing$, что противоречит условию теоремы. Значит, $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \varnothing$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 8.3. (Хелли) Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, |\Lambda| \geqslant n+1$ — семейство выпуклых подмножеств R^n таких, что каждые $n+1$ множества данного семейства имеют непустое пересечение и выполнено хотя бы одно из следующих условий:
a) для всех $\alpha \in \Lambda$ множество A_α компакт;
b) Λ конечное множество.
Тогда $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что выполнено условие a) теоремы. В силу теоремы 8.2 достаточно доказать, что общая точка есть у каждого конечного набора из не менее чем $n+1$ множество. Доказательство проведем методом математической индукции по числу k выбранных множеств. Если $k = n+1$, то утверждение о непустоте пересечения справедливо по условию теоремы. Пусть утверждение доказано для всех $k \geqslant m-1$. Докажем утверждение для $k = m$. Рассмотрим множества $A_{\alpha_1},\dots,A_{\alpha_m}$ и выберем из каждого непустого (по индукционному предположению) пересечения

$$B_i = A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_{i-1}} \cap A_{\alpha_{i+1}} \cap \dots \cap A_{\alpha_m}$$

точку $a_i, i = 1, \dots, m$. По теореме Радона (у нас $m \geqslant n+2$) множество точек $\{a_1, \dots, a_m\}$ можно разбить на два подмножества $\{a_1, \dots, a_l\}$, $\{a_{l+1}, \dots, a_m\}$ таких, что

$$\mathrm{co}\{a_1, \dots, a_l\} \cap \mathrm{co}\{a_{l+1}, \dots, a_m\} \neq \varnothing.$$

Отметим, что для всех $i = 1, \dots, l$ справедливо включение

$$a_i \in B_i \subset A_{\alpha_{l+1}} \cap \dots \cap A_{\alpha_m},$$

а для всех $i = l+1, \dots, m$ справедливо включение

$$a_i \in B_i \subset A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_l}.$$

Поэтому для любой точки $a \in \mathrm{co}\{a_1, \dots, a_l\} \cap \mathrm{co}\{a_{l+1}, \dots, a_m\}$ справедливо включение

$$a \in \mathrm{co}\{a_1, \dots, a_l\} \subset \mathrm{co}\big(A_{\alpha_{l+1}} \cap \dots \cap A_{\alpha_m}\big) = A_{\alpha_{l+1}} \cap \dots \cap A_{\alpha_m},$$
$$a \in \mathrm{co}\{a_{l+1}, \dots, a_m\} \subset \mathrm{co}\big(A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_l}\big) = A_{\alpha_1} \cap \dots \cap A_{\alpha_l}.$$

Следовательно, $a \in \bigcap\limits_{s=1}^{m} A_{\alpha_s} \neq \varnothing$. Тем самым теорема доказана.

Пусть выполнено условие b) теоремы. Тогда по теореме 8.1 существуют выпуклые компакты $B_i \subset A_i$ такие, что любые $n+1$ множество из семейства $\big\{B_i\big\}$ имеют непустое пересечение. По ранее доказанному получаем, что семейство $\big\{B_i\big\}$ имеет непустое пересечение. Значит, и семейство $\big\{A_i\big\}$ имеет непустое пересечение. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8.1. Если множество Λ бесконечно, а среди множеств A_α есть хотя бы одно неограниченное, то теорема в общем случае не верна. Пусть

$$A_k = \{(x, y) \in R^2 \;\big|\; y \geqslant k\}.$$

Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$, хотя любые три множества из заданного семейства имеют непустое пересечение.

З а м е ч а н и е 8.2. Если множества A_α не являются замкнутыми, то теорема в общем случае не верна. Пусть

$$A_k = \mathrm{co}\Big\{(0;0), \Big(\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\Big), \Big(\frac{1}{k}; -\frac{1}{k}\Big)\Big\} \backslash \{(0;0)\}.$$

Тогда любые три множества семейства $\{A_k\}$ имеют непустое пересечение, а $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$.

З а м е ч а н и е 8.3. Число $n+1$ не может быть уменьшено до n. Пусть

$$A_1 = \mathrm{co}\{(0;-1),(1;1)\},\ A_2 = \mathrm{co}\{(1;1),(-1;1)\},$$
$$A_3 = \mathrm{co}\{(-1;1),(0;-1)\}.$$

Тогда множества A_1, A_2, A_3 — выпуклые компакты R^2, любые два из которых пересекаются, а $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$.

Приведем некоторые приложения теоремы Хелли.

Т е о р е м а 8.4. Пусть $\big\{T_\alpha\big\}_{\alpha\in\Lambda} (|\Lambda| \geqslant 3)$ — конечное семейство отрезков вида

$$T_\alpha = \{(x,y) \in R^2 \mid x = a_\alpha,\ y \in [c_\alpha; d_\alpha]\},$$

причем для любых трех отрезков есть прямая, их пересекающая. Тогда существует прямая, пересекающая все отрезки семейства.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если все отрезки лежат на одной прямой $x = a$, то теорема верна. Если имеется два отрезка, не лежащих на одной прямой, параллельной оси OY, то на любой прямой, параллельной оси OY, расположено не более одного отрезка. Обозначим

$$A_\alpha = \{(k,b) \in R^2 \mid \text{прямая } y = kx + b \text{ пересекает } T_\alpha\}.$$

Докажем, что множество A_α выпукло. Пусть $(k_1, b_1), (k_2, b_2) \in A_\alpha, \gamma \in [0;1]$. Из определения A_α следует, что существуют точки $(a_\alpha, y_1), (a_\alpha, y_2)$, $y_1, y_2 \in [c_\alpha, d_\alpha]$ такие, что

$$y_1 = k_1 a_\alpha + b_1,\ y_2 = k_2 a_\alpha + b_2.$$

Тогда

$$\gamma y_1 + (1-\gamma) y_2 = \big(\gamma k_1 + (1-\gamma) k_2\big) a_\alpha + \gamma b_1 + (1-\gamma) b_2,$$
$$\gamma y_1 + (1-\gamma) y_2 \in [c_\alpha, d_\alpha].$$

Следовательно, точка $(a_\alpha, \gamma y_1 + (1-\gamma) y_2)$ является общей точкой множества T_α и прямой $y = (\gamma k_1 + (1-\gamma) k_2) x + \gamma b_1 + (1-\gamma) b_2$. Поэтому множество A_α является выпуклым.

Кроме того, легко показать, что множество A_α замкнуто. Из условия теоремы следует, что любые три множества из семейства $\{A_\alpha\}$ пересекаются. Следовательно, по теореме Хелли все множества A_α имеют непустое пересечение. Теорема доказана.

Т е о р е м а 8.5. Пусть дана система линейных неравенств

$$(p_i, x) \leqslant \gamma_i,\ i \in \Lambda,$$

где $p_i \in R^n, \gamma_i \in \Lambda$, $|\Lambda| \geqslant n+1$, Λ конечное множество такое, что любая подсистема, составленная из $n+1$ неравенств, имеет решение.

Тогда и исходная система имеет решение.

Справедливость теоремы сразу следует из теоремы Хелли для множеств $A_i = \{x \mid (p_i, x) \leqslant \gamma_i\}$.

Т е о р е м а 8.6. Пусть K — выпуклое подмножество R^n, $p_1, \ldots, p_m \in R^n$ ($m > n+1$), $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in R^1$ таковы, что

$$\max_i \Big((p_i, x) + \alpha_i \Big) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in K. \tag{8.2}$$

Тогда существуют множество $I \subset \{1, \dots, m\}, |I| = n+1$, неотрицательные числа $\lambda_i, i \in I$, $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$ и такие, что

$$\inf_{x \in K} \sum_{i \in I} \lambda_i \big((p_i, x) + \alpha_i\big) \geqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множество

$$A = \{y \in R^m \bigm| \text{существует } x \in K \text{ такой, что} \\ (p_i, x) + \alpha_i < y_i \text{ для всех } i \in I\}.$$

Множество A выпукло и в силу (8.2) $0 \notin A$. Поэтому A и $\{0\}$ отделимы. Это означает, что существуют $q \in R^m, \mu \in R^1$ такие, что

$$(q, y) \geqslant \mu \text{ для всех } y \in A,$$
$$(q, 0) \leqslant \mu.$$

Следовательно, $(q, y) \geqslant 0$ для всех $y \in A$. Пусть $t > 0$ и $y \in A$. Тогда

$$y_t = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_j + t, y_{j+1}, \dots, y_m) \in A,$$

и поэтому $(q, y_t) \geqslant 0$. Отсюда $(q, y) + tq_j \geqslant 0$, или

$$\frac{1}{t}(q, y) + q_j \geqslant 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to +\infty$, получаем $q_j \geqslant 0$. Значит, $q \geqslant 0$. Так как $q \neq 0$, то можно считать, что $\sum\limits_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Пусть $x \in K, \varepsilon > 0$. Тогда

$$y_\varepsilon = \big((p_1, x) + \alpha_1 + \varepsilon, \dots, (p_m, x) + \alpha_m + \varepsilon\big) \in A,$$

и поэтому $(q, y_\varepsilon) \geqslant 0$. Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{m} q_j\big((p_j, x) + \alpha_j\big) + \varepsilon \sum_{j=1}^{m} q_j \geqslant 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} q_j\big((p_j, x) + \alpha_j\big) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in K.$$

Определим множества

$$K_j = \{x \mid (p_j, x) + \alpha_j < 0\},\ j = 1, \ldots, m.$$

Множества K_j выпуклы, и из условия (8.2) следует, что

$$\bigcap_{j=1}^{m} K_j = \varnothing.$$

Следовательно, по теореме Хелли существует множество $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = n + 1$ и такое, что

$$\bigcap_{j \in I} K_j = \varnothing.$$

Значит, справедливо неравенство

$$\max_{j \in I}\big((p_j, x) + \alpha_j\big) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in K.$$

Тем самым неравенство (8.2) справедливо для множества I. Повторяя ранее проведенные рассуждения, получаем, что существуют $\lambda_j \geqslant 0, \sum\limits_{j \in I} \lambda_j = 1$ и

$$\sum_{j \in I} \lambda_j\big((p_j, x) + \alpha_j\big) \geqslant 0 \text{ для всех } x \in K.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8.4. Теорема 8.6 является частным случаем теоремы Фаркаша, Минковского.

УПРАЖНЕНИЯ

8.1. На плоскости даны n точек, причем любые три из них можно поместить в круг радиуса единица. Доказать, что все точки можно поместить в круг радиуса единица.

8.2. Доказать, что если выпуклое множество в R^n покрыто конечным числом открытых или замкнутых полупространств, то оно покрыто какими-нибудь $n+1$ или менее из этих полупространств.

8.3. На плоскости дан выпуклый семиугольник. Доказать, что все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.

8.4. Доказать, что любое компактное множество $A \subset R^2$ диаметра d можно поместить в круг радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}d$.

8.5. Пусть $F : R^1 \to R^1$ — произвольная функция. $\{x_i\}_{i=1}^n$ — заданный набор вещественных чисел, $\varepsilon > 0$ – заданное число. Функция $f : R^1 \to R^1$ называется приближением функции F, если для всех $k = 1, \ldots, n$ справедливы неравенства

$$|f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon.$$

Доказать, что функция вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ является приближением функции F тогда и только тогда, когда такая функция f существует для любых четырех точек из этого набора.

8.6. Сформулировать и доказать аналог утверждения задачи 8.5 для многочлена любой степени.

8.7. На плоскости дано конечное число прямых. Доказать, что если любые три прямые из данного набора можно пересечь кругом радиуса r, то и все прямые этого семейства можно пересечь кругом радиуса r.

8.8. На координатной плоскости дано несколько вертикальных отрезков. Доказать, что если для любых трех отрезков существует парабола $y = x^2+px+q$, которая их пересекает, то найдется такая парабола, пересекающая сразу все отрезки.

§ 9. Опорные функции

О п р е д е л е н и е 9.1. Пусть A — ограниченное множество R^n. Опорной функцией множества A называется функция $c : R^n \to R^1$ вида

$$c(A, \varphi) = \sup_{a \in A}(a, \varphi).$$

В дальнейшем совокупность всех ограниченных множеств пространства R^n будем обозначать $\Omega(R^n)$, совокупность всех компактных подмножеств R^n — $K(R^n)$, совокупность всех выпуклых компактных подмножеств R^n — $\mathrm{co}K(R^n)$.

П р и м е р 9.1. Пусть $A = \{a\}$. Тогда $c(A, \varphi) = (a, \varphi)$.

П р и м е р 9.2. Пусть $A = D_r(0) = \{x \mid \|x\| \leqslant r\}$. Тогда

$$c(A, \varphi) = \sup_{a \in A}(a, \varphi) \leqslant \sup_{a \in A}\|a\| \cdot \|\varphi\| \leqslant r\|\varphi\|.$$

С другой стороны, для $a = r\dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}$ имеем $(a, \varphi) = r\|\varphi\|$. Следовательно, $c(A, \varphi) = r\|\varphi\|$.

П р и м е р 9.3. Пусть $A = D_r^0(0) = \{x \mid \|x\| < r\}$. Тогда $c(A, \varphi) = r\|\varphi\|$.

О п р е д е л е н и е 9.2. Если $c(A, \varphi_0) = (a_0, \varphi_0)$, где $a_0 \in \overline{A}$, то φ_0 называется опорным вектором к множеству A в точке a_0. Множество

$$U(A, \varphi_0) = \{a_0 \bigm| a_0 \in \overline{A},\ c(A, \varphi_0) = (a_0, \varphi_0)\}$$

называется опорным множеством к множеству A в направлении φ_0.

З а м е ч а н и е 9.1. Если $a_0 \in U(A, \varphi_0)$, то гиперплоскость

$$H = \{x \in R^n \mid (x, \varphi_0) = (a_0, \varphi_0)\}$$

будет опорной к множеству A в точке a_0.

Опорная функция обладает многими полезными свойствами. Некоторые из них сформулируем в виде теорем.

Т е о р е м а 9.1. Пусть $A, B \in \Omega(R^n)$. Тогда опорная функция обладает следущими свойствми:
1. $c(A, \lambda\varphi) = \lambda c(A, \varphi)$ для всех $\lambda \geqslant 0$;
2. $c(A, \varphi_1 + \varphi_2) \leqslant c(A, \varphi_1) + c(A, \varphi_2)$ для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in R^n$;
3. $c(A + B, \varphi) = c(A, \varphi) + c(B, \varphi)$;
4. $c(\mathfrak{L}A, \varphi) = c(A, \mathfrak{L}^*\varphi)$, где $\mathfrak{L} : R^n \to R^n$ — линейное отображание;
5. $c(\lambda A, \varphi) = c(A, \lambda\varphi)$ для любого $\lambda \in R^1$;
6. $c(\lambda A, \varphi) = \lambda c(A, \varphi)$ для любого $\lambda \geqslant 0$;
7. Если $A \subset B$, то $c(A, \varphi) \leqslant c(B, \varphi)$.

Справедливость сформулированных утверждений следует из определения опорной функции и свойств супремума.

Т е о р е м а 9.2. Пусть $A \in \Omega(R^n)$. Тогда

$$c(A, \varphi) = c(\mathrm{co}A, \varphi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $A \subset \mathrm{co}A$, то в силу пункта 7 теоремы 9.1 имеем $c(A, \varphi) \leqslant c(\mathrm{co}A, \varphi)$.

Докажем, что $c(\mathrm{co}A, \varphi) \leqslant c(A, \varphi)$.

$$c(\mathrm{co}A, \varphi) = \sup_{a \in \mathrm{co}A} (a, \varphi) =$$

$$= \sup_{a_i \in A, \lambda_i \geqslant 0} (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1}, \varphi) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1 \sup_{a_1 \in A} (a_1, \varphi) + \cdots + \lambda_{n+1} \sup_{a_{n+1} \in A} (a_{n+1}, \varphi) \leqslant c(A, \varphi).$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 9.3. Пусть $A \in K(R^n)$. Тогда

$$\mathrm{co}A = \bigcap_{\|\varphi\|=1} \Big\{ x \in R^n \;\Big|\; (x,\varphi) \leqslant c(A,\varphi) \Big\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $a_0 \in \mathrm{co}A$, то

$$(a_0,\varphi) \leqslant c(\mathrm{co}A,\varphi) = c(A,\varphi).$$

Пусть $a_0 \notin A$. Так как $\mathrm{co}A$ — выпуклый компакт, то $\mathrm{co}A$ и $\{a_0\}$ строго отделимы. Поэтому существуют $\varphi_0, \|\varphi_0\| = 1$ и число γ такие, что

$$(a,\varphi_0) < \gamma \text{ для всех } a \in \mathrm{co}A,$$
$$(a_0,\varphi_0) > \gamma.$$

Отсюда $(a,\varphi_0) < (a_0,\varphi_0)$ для всех $a \in \mathrm{co}A$. Функция $f(a) = (a,\varphi_0)$ непрерывна и поэтому на $\mathrm{co}A$ достигает наибольшего значения. Следовательно,

$$c(\mathrm{co}A,\varphi) = \sup_{a\in \mathrm{co}A} (a,\varphi) = (\hat{a},\varphi_0) < (a_0,\varphi_0).$$

Значит, $a_0 \notin \{x \mid (x,\varphi_0) \leqslant c(A,\varphi_0)\}$. Поэтому a_0 не принадлежит и пересечению соответствующих полупространств. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 9.1. Пусть $A \in K(R^n)$, $a \in R^n$. Если для любого φ справедливо неравенство $(a,\varphi) \leqslant c(A,\varphi)$, то $a \in \mathrm{co}A$.

Т е о р е м а 9.4. Пусть $A \in \Omega(R^n)$. Тогда для любых $\varphi_1,\varphi_2 \in R^n$ справедливо неравенство

$$|c(A,\varphi_1) - c(A,\varphi_2) \leqslant \|A\| \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

где $\|A\| = \sup\limits_{a\in A} \|a\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойства 2 теоремы 9.1 имеем

$$c(A, \varphi_1) = c(A, \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2) \leqslant c(A, \varphi_1 - \varphi_2) + c(A, \varphi_2).$$

Отсюда

$$c(A, \varphi_1) - c(A, \varphi_2) \leqslant c(A, \varphi_1 - \varphi_2) \leqslant \sup_{a \in A} \|a\| \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant \qquad (9.1)$$
$$\leqslant \|A\| \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Аналогично

$$c(A, \varphi_2) - c(A, \varphi_1) \leqslant \|A\| \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

или

$$-(c(A, \varphi_1) - c(A, \varphi_2)) \leqslant \|A\| \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \qquad (9.2)$$

Из неравенств $(9.1), (9.2)$ следует требуемое неравенство. Теорема доказана.

Т е о р е м а 9.5. Пусть $A, B \subset K(R^n)$ и для любого φ справедливо неравенство $c(A, \varphi) \leqslant c(B, \varphi)$. Тогда $A \subset \mathrm{co}B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение не верно. Тогда существует $a_0 \in A$ такой, что $a_0 \notin \mathrm{co}B$. Следовательно, $\mathrm{co}B$ и $\{a_0\}$ строго отделимы. Поэтому существует $\varphi_0 \in R^n, \varphi_0 \neq 0$ такой, что

$$c(A, \varphi_0) \leqslant (a_0, \varphi_0) > c(\mathrm{co}B, \varphi_0) = c(B, \varphi_0).$$

Получили $c(A, \varphi_0) > c(B, \varphi_0)$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 9.2. Пусть $A, B \in K(R^n)$ и для всех φ справедливо равенство $c(A, \varphi) = c(B, \varphi)$. Тогда $\mathrm{co}A = \mathrm{co}B$.

С л е д с т в и е 9.3. Пусть $A, B \in \mathrm{co}K(R^n)$. То $A = B$ тогда и только тогда, когда для всех φ справедливо равенство $c(A, \varphi) = c(B, \varphi)$.

Т е о р е м а 9.6. Пусть $A, B \in \Omega(R^n)$. Если $A \cap B \neq \varnothing$, то для всех φ справедливо неравенство

$$c(A, \varphi) + c(B, -\varphi) \geqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что $A \cap B \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $0 \in A + (-1)B$. Следовательно, если $A \cap B \neq \varnothing$, то для всех φ верно следующее соотношение

$$\begin{gathered} 0 = (0, \varphi) \leqslant c(A + (-1)B, \varphi) = \\ = c(A, \varphi) + c(-B, \varphi) = c(A, \varphi) + c(B, -\varphi). \end{gathered}$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 9.4. Пусть $A, B \in K(R^n)$ и для всех $\varphi \in R^n$ справедливо неравенство

$$c(A, \varphi) + c(B, -\varphi) \geqslant 0.$$

Тогда $\mathrm{co}A \cap \mathrm{co}B \neq \varnothing$.

Т е о р е м а 9.7. Пусть $A, B \in \Omega(R^n)$. Тогда

$$c(A \cup B, \varphi) = \max\bigl\{c(A, \varphi), c(B, \varphi)\bigr\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\begin{gathered} c(A \cup B, \varphi) = \sup_{x \in A \cup B} (x, \varphi) = \\ = \max\bigl\{\sup_{a \in A}(a, \varphi), \sup_{b \in B}(b, \varphi)\bigr\} = \max\bigl\{c(A, \varphi), c(B, \varphi)\bigr\}. \end{gathered}$$

Теорема доказана.

П р и м е р 9.4. Пусть

$$A = \{(x,y) \in R^2 \bigm| x \in [-1,1],\ y \in [-1,1]\}.$$

Тогда

$$A = \mathrm{co}\{(1;1), (-1;1), (-1;-1), (1;-1)\},$$

и поэтому

$$c(A,\varphi) =$$
$$= \max\{c(\{(\pm 1; \pm 1)\}, \varphi)\} = |\varphi_1| + |\varphi_2|.$$

Т е о р е м а 9.8. Пусть A — выпуклый компакт R^n, $c(A,\varphi)$ опорная функция, $\varphi_0 \in R^n$, $\varphi_0 \neq 0$ такой, что существуют частные производные $\dfrac{\partial c}{\partial \varphi_i}(A,\varphi_0)$. Тогда множество

$$A_{\varphi_0} = \{a \in A \mid c(A,\varphi_0) = (a,\varphi_0)\}$$

состоит из одной точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что $A_{\varphi_0} \neq \varnothing$, так как множество A компакт, а скалярное произведение является непрерывной функцией. Пусть $a_0 \in A_{\varphi_0}$. Рассмотрим функцию $f(\varphi) = c(A,\varphi) - (a,\varphi)$. Функция f обладает следующими свойствами:

$$f(\varphi_0) = 0 \text{ в силу выбора } a_0,$$
$$f(\varphi) \geqslant 0 \text{ для всех } \varphi \in R^n.$$

Следовательно, φ_0 является точкой глобального минимума функции f на R^n. Их условия теоремы следует, что существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i} = \dfrac{\partial c}{\partial \varphi_i}(A,\varphi_0) - (a_0)_i$. Из теоремы Ферма получаем, что $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_i} = 0$. Отсюда $a_0 = \mathrm{grad} c(A,\varphi_0)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Т е о р е м а 9.9. Пусть A — выпуклый компакт R^n, $\varphi_0 \in R^n$, $\varphi_0 \neq 0$ такой, что множество A_{φ_0} состоит из одной точки a_0. Тогда существует $\operatorname{grad} c(A, \varphi_0) = a_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in R^n$ — произвольный вектор. Так как $\varphi_0 \neq 0$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi_0 + \lambda\varphi \neq 0$ для всех $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Для каждого $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ рассмотрим точку

$$a_\lambda = \{a \mid c(A, \varphi_0 + \lambda\varphi) = (a_0, \varphi_0 + \lambda\varphi)\}.$$

Из определения опорной функции имеем

$$(a_\lambda, \varphi_0) \leqslant c(A, \varphi_0) = (a_0, \varphi_0), \tag{9.3}$$

$$(a_0, \varphi_0 + \lambda\varphi) \leqslant c(A, \varphi_0 + \lambda\varphi) = (a_\lambda, \varphi_0 + \lambda\varphi). \tag{9.4}$$

Умножим неравенство (9.3) на (-1) и сложим с неравенством (9.4). Получим неравенство

$$\lambda(a_0, \varphi_0) \leqslant c(A, \varphi_0 + \lambda\varphi) - c(A, \varphi_0) \leqslant \lambda(a_\lambda, \varphi).$$

Разделив неравенство на $\lambda (\lambda > 0)$, получаем неравенство

$$(a_0, \varphi) \leqslant \frac{c(A, \varphi_0 + \lambda\varphi) - c(A, \varphi_0)}{\lambda} \leqslant (a_\lambda, \varphi), \text{ или}$$

$$0 \leqslant \frac{c(A, \varphi_0 + \lambda\varphi) - c(A, \varphi_0)}{\lambda} - (a_0, \varphi) \leqslant (a_\lambda, \varphi) - (a_0, \varphi). \tag{9.5}$$

Докажем, что

$$\lim_{\lambda \to 0+} a_\lambda = a_0. \tag{9.6}$$

Предположим, что равенство 9.6 не выполняется. Тогда существуют $\delta > 0$ и последовательность $\{\lambda_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0+$ такие, что

$$\|a_k - a_0\| \geqslant \delta > 0, \text{ где } a_k = a_{\lambda_k}. \tag{9.7}$$

Последовательность $\{a_k\}$ ограничена, так как A компакт. Поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Считаем, что сама последовательность $\{a_k\}$ сходится к a^*. Из определения a_k имеем

$$c(A, \varphi_0 + \lambda_k \varphi) = (a_k, \varphi_0 + \lambda_k \varphi_0).$$

Переходя в данном равенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем $c(A, \varphi_0) = (a^*, \varphi_0)$. Следовательно, $a^* = a_0$. Из (9.7) следует, что $\|a^* - a_0\| \geqslant \delta$. Полученное противоречие доказывает равенство (9.6). Перейдем теперь к пределу при $\lambda \to 0+$ в неравенстве (9.5). Получаем, что существует производная по направлению $\dfrac{\partial c}{\partial \varphi}(A, \varphi_0)$ и для любого φ выполнено равенство

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi}(A, \varphi_0) = (a_0, \varphi).$$

Следовательно, существует $\mathrm{grad} c(A, \varphi_0) = a_0$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 9.5. Выпуклый компакт A является строго выпуклым в направлении $\varphi_0 \neq 0$ тогда и только тогда, когда существует $\mathrm{grad} c(A, \varphi_0)$.

С л е д с т в и е 9.6. Выпуклый компакт A является строго выпуклым компактом тогда и только тогда, когда для любого $\varphi \neq 0$ существует $\mathrm{grad} c(A, \varphi)$.

С л е д с т в и е 9.7. Пусть A — строго выпуклый компакт R^n. Тогда для всех $\varphi \in R^n \setminus \{0\}$ справедливо равенство

$$(\mathrm{grad} c(A, \varphi), \varphi) = c(A, \varphi).$$

УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Является ли функция
a) $g(\varphi) = 1 + \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$,

$b)$ $g(\varphi) = \begin{cases} arcsin\dfrac{\varphi_1}{\|\varphi\|}, & \varphi \neq 0, \\ 0, & \varphi = 0 \end{cases}$ опорной функцией некоторого множества $A \in \Omega(R^2)$.

9.2. Найти опорные функции следующих множеств:
1) $A = \left\{(x,y) \in R^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1\right\}$;
2) $A = D_2(0;2) \cup D_2(0;-2)$;
3) $A = \{x \in R^n \mid 1 \leqslant \|x\| \leqslant 2\}$;
4) $A = \{x \in R^n \mid x = \alpha a + (1-\alpha)b, \alpha \in [0,1]\}$;
5) $A = \{(x_1,x_2) \in R^2 \mid |x_1 + x_2| \leqslant 1,\ |x_1 - x_2| \leqslant 1\}$;
6) $A = \{(x_1,x_2) \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2,\ x_2 \geqslant 0\}$.

9.3. Восстановить множество $A \in \mathrm{co}K(R^2)$ по его опорной функции
1) $c(A,\varphi) = |\varphi_1 - \varphi_2|$;
2) $c(A,\varphi) = |\varphi_1 + \varphi_2|$;
3) $c(A,\varphi) = 2|\varphi_1| + 3|\varphi_2|$;
4) $c(A,\varphi) = \|\varphi\| + |\varphi_1| - |\varphi_2|$;
5) $c(A,\varphi) = \sqrt{\varphi_1^2 + 0,5\varphi_2|\varphi_2| + 0,5\varphi_2^2}$.

9.4. Найти шар максимального радиуса, вписанного в выпуклый компакт A с непустой внутренностью.

9.5. Получить условие непустоты пересечения $D_{r_1}(a_1)$ и и $D_{r_2}(a_2)$.

9.6. Пусть для множеств $A, B \in \Omega(R^n)$ существует ненулевой вектор $p \in R^n$ такой, что $c(A,p) + c(B,-p) \leqslant 0$. Верно ли, что множества A и B отделимы?

9.7. Пусть A — замкнутое подмножество R^n и $a \in \mathrm{Intco}A$. Доказать неравенство

$$(a,\varphi) < c(A,\varphi) \text{ для всех } \varphi \in R^n \setminus \{0\}.$$

9.8. Найти опорную функцию множества

$$A = \left\{(x,y,z) \in R^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leqslant 1\right\}.$$

9.9. Пусть A — строго выпуклый компакт R^n. Доказать, что для всех $\varphi \neq 0, \lambda > 0$ справедливо равенство

$$\mathrm{grad} c(A, \lambda\varphi) = \mathrm{grad} c(A, \varphi).$$

9.10. Пусть A — выпуклый компакт R^n такой, что для всех $\varphi_0 \neq 0$ опорная функция $c(A, \varphi)$ имеет в точке φ_0 все непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Доказать, что для всех $\varphi_0 \neq 0$ выполнено:
a) $\varphi_0 c''(A, \varphi_0) = 0$;
b) $\mathrm{rang} c''(A, \varphi_0) \leqslant n - 1$;
c) все собственные числа матрицы $c''(A, \varphi_0)$ неотрицательны;
d) матрица $c''(A, \varphi_0)$ имеет нулевое собственное число, являющееся простым;
e) для всех $\varphi_0 \neq 0, \lambda > 0$ справедливо равенство $c''(A, \lambda\varphi_0) = \lambda^{-1} c(A, \varphi_0)$.

9.11. Существуют ли частные производные у опорных функций следующих множеств:
a) $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^4 + x_2^4 \leqslant 1\}$;
b) $A = \{(x_1, x_2) \mid |x_1|^{3/2} + |x_2|^{3/2} \leqslant 1$;
c) $A = \{(x_1, x_2) \mid \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} \leqslant 1\}$.

9.12. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A_k \subset R^n$ — последовательность непустых компактных множеств такая, что для всех k $A_k \subset D_R(0)$ при некотором R. $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}, \varphi_k \in R^n$ — последовательность такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi_0$. Доказать равенство

$$\inf_k c(A_k, \varphi_0) = \lim_{k\to\infty} \inf_j c(A_j, \varphi_k).$$

9.13. Пусть A — выпуклый компакт R^2, симметричный относительно оси x_2.

1. Доказать, что опорная функция множества A обладает следующим свойством $c(A, \varphi_1, \varphi_2) = c(A, -\varphi_1, \varphi_2)$ для всех φ_1.

2. Пусть B — тело, получающееся вращением A относительно оси x_2. Доказать, что равенство $c(B, p) = c(A, \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, p_3)$ для всех $p \in R^3$.

§ 10. Расстояние по Хаусдорфу

О п р е д е л е н и е 10.1. Пусть $A, B \in \Omega(R^n)$. Расстоянием, по Хаусдорфу, между множествами A и B называется неотрицательное число $h(A, B)$, определяемое соотношением

$$h(A,B) = \inf_{r \geqslant 0}\{r \mid A \subset A + D_r(0),\ B \subset A + D_r(0)\}. \qquad (10.1)$$

З а м е ч а н и е 10.1. Если $A, B \in K(R^n)$, то в определении $h(A, B)$ инфинум можно заменить на минимум.

З а м е ч а н и е 10.2. Формально формулой (10.1) можно определить расстояние между любыми двумя непустыми множествами A, B. Если хотя бы одно из множеств неограничено, то $h(A, B)$ может равняться $+\infty$. Например, если $A = R^n$, то для любого B $h(A, B) = +\infty$.

П р и м е р 10.1. Пусть $A = D_r(0)$, $B = D_{2r}(0)$. Тогда $A \subset B, B \subset D_r(0) + D_\varepsilon(0)$ для всех $\varepsilon \geqslant r$. Поэтому $h(A, B) = r$.

П р и м е р 10.2. Пусть

$$A = D_1(0) \subset R^2,\ B = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1],\ y \in [-1, 1]\}.$$

Тогда $A \subset B, B \subset A + D_r(0)$ для всех $r \geqslant \sqrt{2} - 1$. Поэтому $h(A, B) = \sqrt{2} - 1$.

П р и м е р 10.3. Пусть $A = D_r(0)$, $B = \{x \mid \|x\| < r\}$. Тогда $B \subset A, A \subset B + D_\varepsilon(0)$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому $h(A, B) = 0$.

П р и м е р 10.4. Пусть $A \in \Omega(R^n)$, $B = \{0\}$. Тогда $h(A, B) = \|A\|$.

Т е о р е м а 10.1. Пусть $A, B, C \in K(R^n)$. Тогда h удовлетворяет следующим свойствам:
a) $h(A, B) \geqslant 0$, $h(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$;
b) $h(A, B) = h(B, A)$;
c) $h(A, B) \leqslant h(A, C) + h(C, B)$.

Из теоремы 10.1 следует, что множества $K(R^n)$, $\mathrm{co}K(R^n)$ являются метрическими пространствами с метрикой Хаусдорфа.

Т е о р е м а 10.2. Пусть $A, B \in \Omega(R^n)$. Тогда справедливо неравенство

$$|c(A,\varphi) - c(B,\varphi)| \leqslant h(A,B)\|\varphi\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения функции h следует, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо включение

$$A \subset B + D_{h(A,B)+\varepsilon}(0).$$

Поэтому

$$c(A,\varphi) \leqslant c(B + D_{h(A,B)+\varepsilon}(0), \varphi) = c(B,\varphi) + c(D_{h(A,B)+\varepsilon}(0), \varphi) = \\ = c(B,\varphi) + h(A,B)\|\varphi\| + \varepsilon\|\varphi\|.$$

Следовательно,

$$c(A,\varphi) - c(B,\varphi) \leqslant h(A,B)\|\varphi\| + \varepsilon\|\varphi\|.$$

Аналогично

$$c(B,\varphi) - c(A,\varphi) \leqslant h(A,B)\|\varphi\| + \varepsilon\|\varphi\|.$$

Из последних двух неравенств получаем, что выполняется неравенство

$$|c(A,\varphi) - c(B,\varphi)| \leqslant h(A,B)\|\varphi\| + \varepsilon\|\varphi\|.$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $\varepsilon > 0$, то переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое неравенство.

С л е д с т в и е 10.1. $c \in C(\Omega(R^n) \times R^n)$.

Т е о р е м а 10.3. Пусть $A, B \in \mathrm{co}K(R^n)$. Тогда

$$h(A,B) = \max_{\|\varphi\|=1} |c(A,\varphi) - c(B,\varphi)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что справедливо неравенство

$$h(A,B) \geqslant \max_{\|\varphi\|=1} |c(A,\varphi) - c(B,\varphi)|. \tag{10.2}$$

Из теоремы 10.2 следует, что для каждого φ, $\|\varphi\| = 1$ справедливо неравенство

$$h(A,B) \geqslant |c(A,\varphi) - c(B,\varphi)|,$$

откуда следует требуемое неравенство (10.2). Докажем теперь, что для всех φ, $\|\varphi\| = 1$

$$h(A,B) \leqslant \max_{\|\varphi\|=1} |c(A,\varphi) - c(B,\varphi)|. \tag{10.3}$$

Обозначим через

$$M = \max_{\|\varphi\|=1} |c(A,\varphi) - c(B,\varphi)|.$$

Тогда $|c(A,\varphi) - c(B,\varphi)| \leqslant M$ для всех $\varphi, \|\varphi\| = 1$, или

$$\left| c(A, \frac{\varphi}{\|\varphi\|}) - c(B, \frac{\varphi}{\|\varphi\|}) \right| \leqslant M$$

для всех $\varphi \neq 0$. Отсюда справедливо неравенство

$$-M\|\varphi\| \leqslant c(A,\varphi) - c(B,\varphi) \leqslant M\|\varphi\|. \tag{10.4}$$

Используя правую часть неравенства (10.4), получаем неравенство

$$c(A,\varphi) \leqslant c(B,\varphi) + c(D_M(0),\varphi) = c(B + D_M(0),\varphi).$$

Так как $B + D_M(0)$ — выпуклый компакт, то из последнего неравенства следует, что $A \subset B + D_M(0)$. Используя левую часть неравенства (10.4), получаем

$$c(B,\varphi) \leqslant c(A,\varphi) + M\|\varphi\|,$$

откуда следует, что $B \subset A + D_M(0)$. Следовательно, $h(A,B) \leqslant M$ и тем самым неравенство (10.3) доказано. Теорема доказана.

П р и м е р 10.5. Пусть

$$A = \{(-1;0),(1;0)\},\ B = \{(0;-1),(0,1)\}.$$

Ясно, что $h(A,B) = \sqrt{2}$. С другой стороны,

$$M = \max_{\|\varphi\|=1} |c(A,\varphi) - c(B,\varphi)| = \max_{\varphi_1^2+\varphi_2^2=1} \Big| |\varphi_1| - |\varphi_2| \Big| = 1.$$

Получили, что теорема 10.3 для указанных множеств A, B неверна. Данный пример показывает, что условие выпуклости является существенным.

О п р е д е л е н и е 10.2. Будем говорить, что последовательность множеств $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}, A_k \in \mathrm{co}K(R^n)$ сходится к множеству $A \in \mathrm{co}K(R^n)$, если $\lim\limits_{k\to\infty} h(A_k, A) = 0$.

Отметим, что соответствующее определение можно дать и в пространстве $K(R^n)$.

Т е о р е м а 10.4. Пусть $A \in \mathrm{co}K(R^n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует выпуклый многогранник P такой, что $h(A,P) < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $D_\varepsilon^0(x)$ открытые шары радиуса ε с центром в точках $x \in R^n$. Семейство $\left\{D_\varepsilon^0(x)\right\}_{x\in A}$ образует открытое покрытие множества A. Поэтому, в силу компактности A, из данного покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\left\{D_\varepsilon^0(x_j)\right\}_{j\in J}$. Определим множество $P = \mathrm{co}\{x_j, j \in J\}$. Тогда получаем

$$P \subset A \subset \bigcup_{x\in P} D_\varepsilon^0(x) = P + D_\varepsilon(0).$$

С другой стороны, в силу выпуклости A имеем

$$P \subset A \subset A + D_\varepsilon(0).$$

Поэтому $h(A,P) < \varepsilon$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 10.5. Для любого выпуклого компакта A существует последовательность выпуклых многогранников $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} h(A, A_k) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого натурального числа k по теореме 10.4 существует выпуклый многогранник A_k такой, что $h(A, A_k) < \frac{1}{k}$. Следовательно, последовательность $\{A_k\}$ искомая.

УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Вычислить $h(D_{r_1}(a_1), D_{r_2}(a_2))$.

10.2. Определим евклидово расстояние между множествами $A, B \in \Omega(R^n)$ соотношением

$$\rho(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} \|a - b\|.$$

Доказать, что для любой точки $q \in R^n$, для любых $A, B \in \Omega(R^n)$ справедливо неравенство

$$\rho(q, A) \leqslant \rho(q, B) + h(A, B).$$

10.3. Пусть $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \Omega(R^n)$. Доказать справедливость следующих неравенств:

$$h(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2) \leqslant h(A_1, A_2) + h(B_1, B_2),$$
$$h(A_1 + B_1, A_2 + B_2) \leqslant h(A_1, A_2) + h(B_1, B_2).$$

10.4. Для любых двух множеств $A, B \in \Omega(R^n)$ определим число

$$h_1(A, B) = \sup_{x\in A} \rho(x, B) + \sup_{x\in B} \rho(x, A).$$

Верно ли, что h_1 метрика на $\Omega(R^n)$?

10.5. Пусть $A, B \in \Omega(R^n), \alpha, \beta \in R^1$. Доказать неравенства:
1) $h(\alpha A, \alpha B) \leqslant |\alpha| h(A, B)$;

2) $h(\alpha A, \beta A) \leqslant |\alpha - \beta| \cdot h(A, \{0\})$;
3) $h(\mathrm{co}A, \mathrm{co}B) \leqslant h(A, B)$.

10.9. Пусть $\{a_k, b_k, c_k, d_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательности точек R^n такие, что

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a, \ \lim_{k\to\infty} b_k = b, \ \lim_{k\to\infty} c_k = c, \ \lim_{k\to\infty} d_k = d.$$

Пусть

$$X_k = \mathrm{co}\{a_k, b_k\} + \mathrm{co}\{c_k, d_k\}, \ X = \mathrm{co}\{a, b\} + \mathrm{co}\{c, d\}.$$

Верно ли, что $\lim\limits_{k\to\infty} h(X_k, X) = 0$?

10.10. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, сходящаяся к выпуклому компакту A. Верно ли, что для любой точки $a \in A$ существует последовательность точек $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $a_k \in A_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$?

10.11. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, сходящаяся к выпуклому компакту A. Верно ли, что для любой последовательности точек $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $a_k \in A_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ выполнено $a \in A$?

10.12. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов, сходящаяся к компакту A. Верно ли, что A — выпуклый компакт?

10.13. Для любых двух множеств $U, V \in \mathrm{co}(R^n)$ определим число

$$\rho_E(U, V) =$$
$$= \min\{\lambda \geqslant 0 : \ U \subset V + \lambda D_1(0)\} + \min\{\lambda \geqslant 0 : \ V \subset U + \lambda D_1(0)\}.$$

1. Доказать, что ρ_E является метрикой на $\mathrm{co}(R^n)$. Данную метрику называют метрикой Эглстона.
2. Доказать неравенство

$$h(U, V) \leqslant \rho_E(U, V) \leqslant 2h(U, V), \ U, V \in \mathrm{co}(R^n).$$

10.14. Для любых двух множеств $U, V \in \mathrm{co}(R^n)$ определим число

$$\rho_p(U,V) = \Big(\int\limits_{S_1(0)} |c(U,\varphi) - c(V,\varphi)|^2 ds \Big)^{0,5}.$$

Доказать, что $\rho_p(U,V)$ является метрикой на $\mathrm{co}(R^n)$.

§ 11. Положительный базис

О п р е д е л е н и е 11.1. [24]. Будем говорить, что векторы $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^n, если для любого $x \in R^n$ существуют $\gamma_1 \geqslant 0, \ldots, \gamma_s \geqslant 0$ такие, что

$$x = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

П р и м е р 11.1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — базис пространства R^n. Тогда $a_1, \ldots, a_n, -a_1, \ldots, -a_n$ — положительный базис R^n.

Действительно, пусть $x \in R^n$. Тогда

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

Пусть

$$I_1 = \{j : \alpha_j \geqslant 0\},\ I_2 = \{j : \alpha_j < 0\}.$$

Тогда

$$x = \sum_{i \in I_1} \alpha_i a_i + \sum_{i \in I_2} (-\alpha_i)(-a_i).$$

Поэтому

$$x = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i a_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i (-a_i),$$

где

$$\gamma_i = \begin{cases} 0,\ i \notin I_1 \\ \alpha_i,\ i \in I_1 \end{cases},\ \beta_i = \begin{cases} 0,\ i \notin I_2 \\ -\alpha_i,\ i \in I_2. \end{cases}$$

П р и м е р 11.2. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — базис пространства R^n, $a_{n+1} = -(a_1 + \dots + a_n)$. Тогда $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ — положительный базис R^n.

Действительно, пусть $x \in R^n$. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. Так как

$$a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = 0,$$

то справедливо представление

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + d(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + d) a_i + d a_{n+1}.$$

Взяв $d > 0$ так, чтобы $\alpha_i + d \geqslant 0$, получаем, что все коэффициенты разложения неотрицательны.

З а м е ч а н и е 11.1. Если $a_1, \dots, a_s$ — положительный базис R^n, то для любого набора векторов $b_1, \dots, b_l$ векторы

$$a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_l$$

также образуют положительный базис R^n.

О п р е д е л е н и е 11.2. Положительный базис $a_1, \dots, a_s$ называется минимальным положительным базисом, если никакая его правильная подсистема положительным базисом не является.

Т е о р е м а 11.1. Векторы $a_1, \dots, a_s$ составляют положительный базис R^n тогда и только тогда, когда для любого $p \in R^n$, $\|p\| = 1$ существует a_q такой, что $(a_q, p) < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть векторы $a_1, \dots, a_s$ образуют положительный базис и при этом существует вектор $p \in R^n$, $\|p\| = 1$ такой, что $(a_i, p) \geqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, s$.

Рассмотрим вектор $-p$ и разложим его по положительному базису

$$-p = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s, \ \lambda_i \geqslant 0.$$

Умножая последнее равенство скалярно на p, получаем

$$-1 = \lambda_1 (p, a_1) + \dots + \lambda_s (p, a_s) \geqslant 0,$$

что невозможно. Получили противоречие.

Достаточность. Рассмотрим множество

$$K = \{x \in R^n \bigm| x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s, \ \lambda_i \geqslant 0\}.$$

K — выпуклый конус с вершиной в нуле. Тогда либо K все пространство, либо K лежит по одну сторону от некоторой гиперплоскости, проходящей через начало координат.

Если $K = R^n$, то $a_1, \dots, a_s$ — положительный базис R^n. Пусть $K \neq R^n$. В этом случае существует вектор $p \in R^n, \|p\| = 1$ такой, что $(p, x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$. Так как $a_i \in K$, то $(p, a_i) \geqslant 0$ для всех i, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Обозначим через G — матрицу, строками которой являются координаты векторов $a_1, \dots, a_s$ относительно базиса

$$(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1).$$

Т е о р е м а 11.2. Для того чтобы векторы $a_1, \dots, a_s$ образовывали положительный базис R^n, необходимо и достаточно, чтобы
1) $\mathrm{rang} G = n$;
2) система $G\beta = 0$ имела решение β^0 такое, что $\beta^0 > 0$, то есть $\beta_i^0 > 0$ для всех i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть векторы $a_1, \dots, a_s$ образуют положительный базис. Если бы $\mathrm{rang} G$

был меньше n, то векторы $a_1, \dots, a_s$ лежали бы в некоторой гиперплоскости. Пусть p — нормаль данной гиперплоскости. Тогда $(p, a_i) = 0$ для всех i, что противоречит теореме 12.1. Пусть далее

$$a = -a_1 - \dots - a_s.$$

Так как $a_i, i = 1, \dots, s$ — положительный базис, то существуют $\lambda_i \geqslant 0$ такие, что

$$a = \lambda_1 a_1 + \dots \lambda_s a_s = -a_1 - \dots - a_s.$$

Получаем, что справедливо равенство

$$0 = (1 + \lambda_1)a_1 + \dots + (1 + \lambda_s)a_s.$$

Из последнего равенства следует, что система $Gx = 0$ имеет решение $\beta^0 = 1 + \lambda > 0$.

Достаточность. Так как $\mathrm{rang} G = n$, среди векторов $a_1, \dots, a_s$ имеется n линейно независимых. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — линейно независимы. Тогда любой вектор $y \in R^n$ представим в виде

$$y = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n + d(\beta_1^0 a_1 + \dots + \beta_s^0 a_s),$$

где $\beta^0 > 0$ — решение системы $Gx = 0$. Взяв $d > 0$ так, чтобы для всех $i = 1, \dots, n$ выполнялись неравенства $\alpha_i + d\beta_i^0 > 0$, получаем, что вектор y представим в виде

$$y = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_s a_s,$$

причем все $\gamma_i > 0$. Это и означает, что набор $a_i, i = 1, \dots, s$ образует положительный базис R^n. Теорема доказана.

Т е о р е м а 11.3. $a_1, \dots, a_s$ составляют положительный базис R^n тогда и только тогда, когда

$$0 \in \mathrm{Intco}\{a_1, \dots, a_s\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть

$$0 \notin \mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\}.$$

Тогда $\{0\}$ и $\mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\}$ отделимы. Следовательно, существуют $p \in R^n, p \neq 0, \mu \in R^1$ такие, что

$$(p, 0) \leqslant \mu,$$
$$(p, z) \geqslant \mu \text{ для всех } z \in \mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\}.$$

Получаем, что $(p, a_i) \geqslant 0$ для всех i, что противоречит теореме 11.1.

Достаточность. Пусть

$$0 \in \mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\}.$$

Тогда $\mathrm{rang} G = n$ и по теореме Каратеодори

$$0 = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s, \ \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1.$$

В силу теоремы 11.2 $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^n. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 11.1. Пусть $a_1, \ldots, a_s, p_1, \ldots, p_r \in R^n$, $M_1, \ldots, M_s$ — компактные подмножества R^n. Тогда

$$0 \in \mathrm{Intco}\{a_1 - M_1, \ldots, a_s - M_s, p_1, \ldots, p_r\}$$

тогда и только тогда, когда существуют $b_1, \ldots, b_m \in \bigcup_{i=1}^{s} (a_i - M_i)$ такие, что $b_1, \ldots, b_m, p_1, \ldots, p_r$ образуют положительный базис R^k.

Обозначим через B — матрицу, строками которой являются координаты векторов $a_1, \ldots, a_s$ относительно базиса

$$(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1).$$

Т е о р е м а 11.4. Пусть множество

$$\Omega = \{x \mid Bx \geqslant b\} \neq \varnothing.$$

Тогда Ω многогранник тогда и только тогда, когда $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω многогранник и $x_0 \in \Omega$. Предположим, что $a_1, \ldots, a_s$ не образуют положительный базис. Поэтому существует $p \in R^k$, $\|p\| = 1$ такой, что $(p, a_i) \leqslant 0$ для всех i. Тогда

$$(x_0 - tp, a_i) = (x_0, a_i) - t(p, a_i) \geqslant b_i$$

для всех i и $t \geqslant 0$. Следовательно, $x_0 - tp \in \Omega$ при всех $t \geqslant 0$, что противоречит ограниченности Ω. Полученное противоречие доказывает, что $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис.

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис, но множество Ω не многогранник. Следовательно, существуют y_0, p, $\|p\| = 1$ такие, что $y_0 + tp \in \Omega$ для всех $t \geqslant 0$.

Поэтому $(y_0 + tp, a_i) \geqslant b_i$ для всех i и $t \geqslant 0$. Отсюда

$$(p, a_i) \geqslant \frac{1}{t}(b_i - (y_0, a_i)),\ i = 1 \ldots, s.$$

Следовательно, $(p, a_i) \geqslant 0$ для всех i , что противоречит положительности базиса $a_1, \ldots, a_s$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 11.3. Пусть X — компакт R^n, $p \in R^n$, $p \neq 0$. Множество

$$U(X; p) = \{x \mid x \in X, (x, p) = c(X, p)\}$$

называется опорным к множеству X в направлении p.

Множество X называется строго выпуклым в направлении $p, p \neq 0$, если множество $U(X; p)$ состоит из единственного элемента.

Множество X называется строго выпуклым, если X строго выпукло в любом направлении $p, p \neq 0$.

О п р е д е л е н и е 11.4. Пусть X — компакт R^n. X называется множеством с гладкой границей, если для любого $x_0 \in \partial X$ множество

$$N(X; x_0) = \{p \mid p \in R^n, \|p\| = 1, (x_0, p) = c(X, p)\}$$

состоит из единственного элемента.

Отметим, что если X — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то $\mathrm{Int} X \neq \varnothing$.

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ ненулевые векторы R^n, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Определим функции $\lambda_i : V \to R^1$

$$\lambda_i(v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda a_i \in V - v\}, \ i = 1, \ldots, s,$$

Т е о р е м а 11.5. $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^n тогда и только тогда, когда

$$\delta = \min_{v \in V} \max_i \lambda_i(v) > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\delta = 0$. Тогда существует $v_0 \in V$, что $\lambda_i(v_0) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Каждая из функций λ_i непрерывна и вогнута по v, поэтому $v_0 \in \partial V$.

Так как V имеет гладкую границу, то множество

$$\{p \mid \|p\| = 1, (v_0, p) = c(V, p)\}$$

состоит из единственного элемента p_0. Кроме того, из равенств $\lambda_i(v_0) = 0$ для всех $i = 1, \ldots, s$ следует, что все векторы $a_1, \ldots, a_s$ лежат в одном полупространстве, определяемом вектором p_0, то есть

$$(a_i, p_0) \geqslant 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, s.$$

Из последнего неравенства, в силу теоремы 11.1, следует, что векторы $a_1, \ldots, a_s$ не образуют положительный базис.

Пусть $\delta > 0$, но векторы $a_1, \ldots, a_s$ не образуют положительный базис. Тогда, в силу теоремы 11.1, существует единичный вектор p такой, что

$$(p, a_i) \leqslant 0 \text{ для всех } i = 1, \ldots, s. \tag{11.1}$$

Пусть $v_0 \in V$ и удовлетворяет условию

$$(v_0, p) = c(V, p). \tag{11.2}$$

Так как $\delta > 0$, то существует i такой, что $\lambda_i(v_0) > 0$. Поэтому

$$v_0 - \lambda_i(v_0) a_i \in V.$$

Отсюда

$$(v_0, p) - \lambda_i(v_0)(a_i, p) \leqslant c(V, p). \tag{11.3}$$

Из (11.2), (11.3) следует, что

$$(a_i, p) \geqslant 0.$$

Из последнего неравенства и неравенства (11.1) следует, что $(a_i, p) = 0$ и

$$v_0 - \lambda_i(v_0) a_i \in U(V; p),$$

что противоречит строгой выпуклости V в направлении p, а следовательно, и строгой выпуклости V.

Таким образом, $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис. Теорема доказана.

Т е о р е м а 11.6. Пусть положительный базис R^n содержит $n + 1$ вектор. Тогда любые k векторов указанного базиса линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует набор индексов $I \subset \{1, \ldots, n + 1\}$, $|I| = n$ такой, что векторы $a_l, l \in I$ линейно зависимы. Тогда существует гиперплоскость

H, $0 \in H$, содержащая a_l, $i \in I$. Пусть H^+ — полупространство, определяемое H, не содержащее a_q, $q \notin I$ и p единичная нормаль H, направленная в H^+. Тогда $(p, a_i) \leqslant 0$ для всех i. Последнее неравенство противоречит условию положительности базиса. Теорема доказана.

Т е о р е м а 11.7. Если минимальный положительный базис R^n содержит не менее $n+2$ векторов, то существуют линейно зависимые векторы $a_{s_1}, \ldots, a_{s_n}$, входящие в данный минимальный положительный базис.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для любого набора индексов I, $|I| = n$ векторы a_l, $l \in I$ линейно независимы. Считаем, что $I = \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим векторы $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Существуют вещественные числа β_l, одновременно, не обращающиеся в нуль и такие, что

$$0 = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n + \beta_{n+1} a_{n+1}.$$

Если $\beta_l > 0$ для всех l, то векторы $a_1, \ldots, a_{n+1}$ образуют положительный базис, что противоречит условию теоремы.

Если $\beta_l = 0$ при некотором l, то векторы

$$a_1, \ldots, a_{l-1}, a_{l+1}, \ldots, a_{n+1}$$

линейно зависимы, что противоречит предположению теоремы.

Поэтому $\{1, \ldots, n+1\} = I \cup J$, где

$$I = \{l : \beta_l > 0\}, \ J = \{l : \beta_l < 0\}.$$

Так как $a_1, \ldots, a_s (s \geqslant n+2)$ образуют положительный базис, то существуют положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$0 = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s.$$

Отсюда

$$0 = d\sum_{l=1}^{s}\alpha_l a_l + \sum_{r=1}^{n+1}\beta_r a_r =$$

$$= \sum_{l\in I}(d\alpha_l + \beta_l)a_l + \sum_{l\in J}(d\alpha_l + \beta_l)a_l + \sum_{l=n+2}^{s}(d\alpha_l + \beta_l).$$

Выберем $d > 0$ так, чтобы $da_r + \beta_r = 0$ при некотором $r \in J$ и $d\alpha_l + \beta_l \geqslant 0$ для всех $l \in J$

Тогда положительный базис образуют векторы $a_1, \ldots, a_{r-1}$, $a_{r+1}, \ldots, a_s$, что противоречит свойству минимальности исходного базиса. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 11.2. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — минимальный положительный базис R^n такой, что для любых попарно различных $l_1, \ldots, l_n \in \{1, \ldots, s\}$ векторы $a_{l_1}, \ldots, a_{l_s}$ линейно независимы.

Тогда $s = n + 1$.

Т е о р е м а 11.8. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^n. Тогда для любого $a \in R^n$ существует $\mu > 0$ такое, что $a_1, \ldots, a_{s-1}, a + \mu a_s$ образуют положительный базис R^k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует $a \in R^n$ такой, что для всех $\mu > 0$ векторы $a_1, \ldots, a_{s-1}$, $a + \mu a_s$ не образуют положительный базис. Следовательно, для каждого μ существует единичный вектор p_μ такой, что

$$(a_l, p_\mu) \leqslant 0,\ l = 1, \ldots, s-1,$$

$$(a_s, p_\mu) + \frac{1}{\mu}(a, p_\mu) \leqslant 0.$$

В силу компактности единичной сферы можно считать, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} p_\mu = p_0$. Тогда $\|p_0\| = 1$ и $(a_l, p_0) \leqslant 0$ для всех $l = 1, \ldots, s$, что противоречит свойству положительности базиса. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 11.3. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ образуют положительный базис R^n. Тогда для любых векторов $b_l, \ldots, b_s (1 \leqslant l \leqslant s)$ существует $\mu_0 > 0$ такое, что для всех $\mu > \mu_0$ набор

$$a_1, \ldots, a_{l-1}, b_l + \mu a_l, b_{l+1} + \mu a_{l+1}, \ldots, b_s + \mu a_s$$

образует положительный базис R^n.

Т е о р е м а 11.9. Пусть $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r \in R^n$, причем $\mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\} \neq \varnothing$. Тогда

$$\mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\} \cap \mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_r\} \neq \varnothing \tag{11.4}$$

тогда и только тогда, когда система векторов $a_l - b_t$, $l = 1, \ldots, s$, $t = 1, \ldots, r$ образует положительный базис R^k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что условие (11.4) не выполняется. Тогда по теореме отделимости существует единичный вектор p такой, что

$$(a_l - b_t, p) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad l, \ t. \tag{11.5}$$

Последнее означает, что система $\{a_l - b_t\}$ не образует положительный базис.

Если система $\{a_l - b_t\}$ не образует положительный базис, то существует единичный вектор p, для которого справедливо (11.5). Следовательно, множества $\mathrm{co}\{a_1, \ldots, a_s\}$ и $\mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_r\}$ отделимы. Из условия $\mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\} \neq \varnothing$ следует, что данные множества собственно отделимы.

Пусть H — гиперплоскость, собственно отделяющая множества $\mathrm{co}\{a_1, \ldots, a_s\}$ и $\mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_r\}$, а H^-, H^+ — замкнутые полупространства, определяемые H. Считаем, что

$$\mathrm{co}\{a_1, \ldots, a_s\} \subset H^-, \ \mathrm{co}\{b_1, \ldots, b_r\} \subset H^+.$$

Тогда $\mathrm{Intco}\{a_1, \ldots, a_s\} \subset \mathrm{Int} H^-$ и поэтому условие (11.4) не выполняется. Теорема доказана.

Т е о р е м а 11.10. Пусть $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, b_2 \in R^n$ и выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \cap \operatorname{co}\{b_1, b_2\} \neq \varnothing$;

2) $a_{n+1} \in L = \{z : z = tb_1 + (1-t)b_2, t \notin [0,1]\}$.

Тогда существует $j \in \{1, 2\}$ такой, что

$$b_j \in \operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$z \in \operatorname{Intco}\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \cap \operatorname{co}\{b_1, b_2\}.$$

Если $z = b_1$ или b_2, то теорема доказана. Иначе существует $j \in \{1, 2\}$ такой, что $b_j \in (a_{n+1}, z)$. Поэтому существует $\mu \in (0, 1)$, что $b_j = \mu a_{n+1} + (1-\mu)z$. Кроме того, существуют числа $\alpha_l > 0$, $\sum\limits_{l=1}^{n+1} \alpha_l = 1$ такие, что $z = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n+1} a_{n+1}$. Из последних двух соотношений следует, что

$$b_j = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{n+1} a_{n+1}, \text{ причем } \beta_l > 0, \ \sum_{l=1}^{n+1} \beta_l = 1.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 11.11. Пусть x_i, $y_j \in R^n$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots m$ и выполнены следующие условия:

1) $k + m \geqslant n + 2$;

2) в совокупности $\{x_i - y_j, y_r - y_q, r \neq q, x_s - x_l, s \neq l\}$ существуют n линейно независимых векторов. Тогда

$$\operatorname{rico}\{x_i\} \cap \operatorname{rico}\{y_j\} \neq \varnothing \qquad (11.6)$$

тогда и только тогда, когда $\{x_i - y_j\}$ образуют положительный базис.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (11.6) и при этом векторы $\{x_i - y_j\}$ не образуют положительный базис. Тогда существует $p \in R^n, \|p\| = 1,$ что $(x_i - y_j, p) \leqslant 0$ для всех i, j. Отсюда множества $\mathrm{co}\{x_i\}, \mathrm{co}\{y_j\}$ отделимы. Покажем, что $\mathrm{co}\{x_i\}, \mathrm{co}\{y_j\}$ собственно отделимы. Если бы это было не так, то существовала бы гиперплоскость H такая, что

$$\mathrm{co}\{x_i\} \subset H, \ \mathrm{co}\{y_j\} \subset H.$$

Отсюда $x_i - y_j \in L, y_r - y_q \in L, x_s - x_l \in L,$ где L — линейное подпространство, соответствующее H. Последнее соотношение противоречит условию леммы.

Пусть теперь

$$\mathrm{rico}\{x_i\} \cap \mathrm{rico}\{y_j\} = \varnothing.$$

Тогда множества $\mathrm{co}\{x_i\}$, $\mathrm{co}\{y_j\}$ отделимы. Поэтому существует единичный вектор p такой, что $(x_i - y_j, p) \leqslant 0$. Отсюда $\{x_i - y_j\}$ не образуют положительный базис. Теорема доказана.

Л е м м а 11.1. Пусть C_1, C_2 выпуклые множества R^n, причем

$$\mathrm{ri}C_1 \cap \mathrm{ri}C_2 \neq \varnothing, \ \mathrm{ri}C_1 \cap \mathrm{ri}C_2 = \overline{C_1} \cap \overline{C_2}.$$

Тогда $\mathrm{ri}C_1 \cap \mathrm{ri}C_2$ состоит из единственной точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 6.5 и условий леммы

$$\mathrm{ri}(C_1 \cap C_2) = \mathrm{ri}C_1 \cap \mathrm{ri}C_2 = \overline{C_1} \cap \overline{C_2} = \overline{C_1 \cap C_2}.$$

Отсюда получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Л е м м а 11.2. Пусть C_1, C_2 выпуклые множества R^n, причем $\mathrm{ri}C_1 \cap \mathrm{ri}C_2 \neq \varnothing$.

Тогда $\mathrm{aff}C_1 \cap \mathrm{aff}C_2 = \mathrm{aff}(C_1 \cap C_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из включений

$$\mathrm{aff}(C_1 \cap C_2) \subset \mathrm{aff} C_1,\ \mathrm{aff}(C_1 \cap C_2) \subset \mathrm{aff} C_2$$

следует, что $\mathrm{aff}(C_1 \cap C_2) \subset \mathrm{aff} C_1 \cap \mathrm{aff} C_2$.

Пусть $x \in \mathrm{aff} C_1 \cap \mathrm{aff} C_2$, $y \in \mathrm{ri} C_1 \cap \mathrm{ri} C_2$. Рассмотрим точку $z(\lambda) = \lambda x + (1-\lambda) y$. Так как $z(0) = y$, то $z(\lambda) \in C_1$, $z(\lambda) \in C_2$ для всех $\lambda > 0$ и близких к нулю.

Кроме того,

$$x = \frac{1}{\lambda} z(\lambda) + (1 - \frac{1}{\lambda}) y.$$

Так как $\frac{1}{\lambda} + (1 - \frac{1}{\lambda}) = 1$, то x является аффинной комбинацией точек $z(\lambda)$ и y. Следовательно, $x \in \mathrm{aff}(C_1 \cap C_2)$. Лемма доказана.

Л е м м а 11.3. Пусть C_1, C_2 выпуклые множества R^n, причем

$$\mathrm{ri} C_1 \cap \mathrm{ri} C_2 \neq \varnothing,\ \mathrm{ri} C_1 \cap \mathrm{ri} C_2 = \overline{C_1} \cap \overline{C_2}.$$

Тогда $C_1 \cap C_2 = \mathrm{aff} C_1 \cap \mathrm{aff} C_2$ и $C_1 \cap C_2$ состоит из единственной точки.

Доказательство данной леммы непосредственно следует из лемм 11.1 и 11.2.

Т е о р е м а 11.12. Пусть $\{x_1, \ldots, x_{k+1},\ y_1, \ldots, y_{m+1}\}$ — множество точек R^n, причем любые $n+1$ точки аффинно независимы.

$$M_1 = \mathrm{aff}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\},\ M_2 = \mathrm{aff}\{y_1, \ldots, y_{m+1}\},$$

$\dim M_1 = k$, $\dim M_2 = m$, $M_1 \cap M_2$ состоит из единственной точки.

Тогда $k + m = n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $k+m \leqslant n$. Пусть L_1, L_2 — линейные подпространства, соответствующие M_1, M_2. Тогда $\dim L_1 = k, \dim L_2 = m, \dim(L_1 \cap L_2) = 0$. Кроме того,

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

Так как $\dim(L_1 + L_2) \leqslant n$, то $k+m \leqslant n$.

Покажем, что $k+m \geqslant n$. Предположим, что $m+k < n$ и пусть $x \in M_1 \cap M_2$. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j y_j, \ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j = 1.$$

Отсюда

$$0 = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i - \sum_{j=1}^{m+1} \beta_j y_j.$$

Правая часть последнего равенства содержит не более $n+1$ точки, что противоречит аффинной независимости этих точек.

Т е о р е м а 11.13. Пусть $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m\}$ — множество точек R^n, причем $k+m \geqslant n+2$, любые $n+1$ точки аффинно независимы и

$$\mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_k\} \cap \mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_m\} \neq \varnothing.$$

Тогда существуют множества $I \subset \{1, \ldots, k\}, J \subset \{1, \ldots, m\}$ такие, что $|I| + |J| = n+2$,

$$\mathrm{rico}\{x_i, i \in I\} \cap \mathrm{rico}\{y_j, j \in J\} \neq \varnothing$$

и состоит из единственной точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $I = \{1, \ldots, k\}$, $J = \{1, \ldots, m\}$, $M_1 = \mathrm{co}\{x_i, i \in I\}$, $M_2 = \mathrm{co}\{y_j, j \in J\}$, $x \in M_1 \cap M_2$. Тогда

$$x = \sum_{i \in I} \beta_i x_i = \sum_{j \in J} \lambda_j y_j, \ \sum_{i \in I} \beta_i = \sum_{j \in J} \lambda_j = 1, \ \beta_i \geqslant 0, \ \lambda_j \geqslant 0.$$

Определим множества $I_1 = \{i \in I, \beta_i \neq 0\}$, $J_1 = \{j \in J, \lambda_j \neq 0\}$. Тогда $\mathrm{co}\{x_i, i \in I_1\} \cap \mathrm{co}\{y_j, j \in J_1\} \neq \varnothing$, например, точка x принадлежит указанному пересечению. Возьмем теперь в качестве множеств I, J соответственно множества I_1, J_1 и повторим этот процесс до тех пор, пока не получим множества I, J такие, что для всех $x \in M_1 \cap M_2$ будет выполнено $\beta_i > 0, \lambda_j > 0$ для всех $i \in I, j \in J$.

Получаем, что $M_1 \cap M_2 = \mathrm{ri} M_1 \cap \mathrm{ri} M_2$. Из леммы 11.3 следует, что $M_1 \cap M_2 = \mathrm{aff} M_1 \cap \mathrm{aff} M_2$ и $M_1 \cap M_2$ состоит из одной точки.

Из теоремы 11.12 следует, что $\dim M_1 + \dim M_2 = n$. Так как $\dim M_1 = |I| - 1, \dim M_2 = |J| - 1$, то $|I| + |J| = n + 2$ и тем самым теорема доказана.

Т е о р е м а 11.14. Пусть $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m\}$ — множество точек R^k, причем $k + m = n + 2$, любые k векторов из совокупности $\{x_i - y_j,\ y_r - y_s, r \neq s\}$ линейно независимы и, кроме того,

$$\mathrm{rico}\{x_i\} \cap \mathrm{rico}\{y_j\} \neq \varnothing,$$
$$x_{n+1} - y_{\beta_0} = \mu(y_{\beta_0} - y_1) = -\mu(y_1 - y_{\beta_0}),$$

при некотором $\mu > 0$, $\beta_0 \in \{2, \ldots, m\}$.

Тогда

$$\mathrm{rico}\{x_i, i = 1, \ldots, k+1\} \cap \mathrm{rico}\{y_j, j \in 2, \ldots, m\} \neq \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 11.11 следует, что векторы $\{x_i - y_j\}$ образуют положительный базис. Поэтому положительный базис составляют векторы

$$\{x_i - y_{\beta_0} + y_{\beta_0} - y_1, x_i - y_j, i = 1, \ldots, k, j = 2, \ldots m\}$$

Отсюда положительный базис образует набор

$$\{y_{\beta_0} - y_1, x_i - y_j, i = 1, \ldots, k, j = 2, \ldots m\}$$

Заменяя $y_{\beta_0} - y_1$ вектором $x_{k+1} - y_{\beta_0}$, получаем, что положительный базис образуют $\{x_i - y_j,\ i = 1, \ldots, k+1, j = 2, \ldots, m\}$. Из теоремы 11.12 сразу следует, что

$$\operatorname{rico}\{x_i, i = 1, \ldots, k+1\} \cap \operatorname{rico}\{y_j, j \in 2, \ldots, m\} \neq \varnothing.$$

Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Описать все минимальные положительные базисы R^2.
11.2. Описать все минимальные положительные базисы R^3.

§ 12. Разность по Минковскому

Определение 12.1. Пусть A, B — подмножества R^n. Геометрической разностью множеств A и B (или разностью по Минковскому) называется множество

$$A \overset{*}{-} B = \{c \mid c + B \subset A\}.$$

Пример 12.1. Пусть $A = D_r(0)$, $B = D_{2r}(0)$, $r > 0$. Тогда $A \overset{*}{-} B = \varnothing$, $B \overset{*}{-} A = D_r(0)$.

Пример 12.2. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid x, y \in [-1, 1]\},\ B = D_1(0).$$

Тогда $A \overset{*}{-} B = \{(0; 0)\}$.

Замечание 12.1. Из определения геометрической разности следует, что $A \overset{*}{-} B + B \subset A$. Пример 12.2 показывает, что в общем случае $A \overset{*}{-} B + B \neq A$.

Определение 12.2. Множество B полностью выметает A, если $A \overset{*}{-} B + B = A$.

Т е о р е м а 12.1. Пусть A, B — подмножества R^n. Тогда

$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_{b \in B} (A - b). \tag{12.1}$$

Т е о р е м а 12.2. Пусть A, B, C — подмножества R^n, $\lambda \in R^1$. Тогда справедливы следующие соотношения:
1) $(A \overset{*}{-} C) + B \subset (A + B) \overset{*}{-} C$;
2) $(A \overset{*}{-} B) \subset (A + C) \overset{*}{-} (B + C)$;
3) $A \subset (A + B) \overset{*}{-} B$;
4) $(A \overset{*}{-} B) \overset{*}{-} C = A \overset{*}{-} (B + C)$;
5) $(\lambda A) \overset{*}{-} (\lambda B) = \lambda(A \overset{*}{-} B)$;
6) $A \overset{*}{-} (B \cup C) = (A \overset{*}{-} B) \cap (A \overset{*}{-} C)$;
7) $(B \cap C) \overset{*}{-} A = (B \overset{*}{-} A) \cap (C \overset{*}{-} A)$;
8) $(A \overset{*}{-} B) \cup (A \overset{*}{-} C) \subset A \overset{*}{-} (B \cap C)$;
9) $(B \overset{*}{-} A) \cup (C \overset{*}{-} A) \subset (B \cup C) \overset{*}{-} A$;
10) если $B \subset C$, то $A \overset{*}{-} C \subset A \overset{*}{-} B$;
11) если $B \subset C$, то $B \overset{*}{-} A \subset C \overset{*}{-} A$.

Справедливость соответствующих утверждений следует из определения геометрической разности и свойств операций над множествами.

Т е о р е м а 12.3. Пусть A, B — подмножества R^n, A — замкнуто. Тогда $A \overset{*}{-} B$ замнутое множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся соотношением (12.1). Для любого $b \in B$ множество $A - b$ является замнутым. Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством. Теорема доказана.

Т е о р е м а 12.4. Пусть A, B — подмножества R^n, A — выпукло. Тогда $A \overset{*}{-} B$ выпуклое множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для любого $b \in B$ множество $A - b$ выпукло и пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло, то из (12.1) следует, что $A \overset{*}{-} B$ выпуклое множество. Теорема доказана.

Т е о р е м а 12.5. Пусть A, B, C — подмножества R^n, B — компакт, C — выпукло и замкнуто и $A = B + C$. Тогда $C = A \overset{*}{-} B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что $C \subset A \overset{*}{-} B$. Предположим, что $C \neq A \overset{*}{-} B$. Тогда существует точка $x_0 \in A \overset{*}{-} B$, но $x_0 \notin C$. Так как $C \subset A \overset{*}{-} B$, то

$$A = B + C \subset \big(A \overset{*}{-} B\big) + B \subset A$$

и поэтому $\big(A \overset{*}{-} B\big) + B = A$. Следовательно, справедливы следующие равенства

$$A - x_0 = (C - x_0) + B, \tag{12.2}$$

$$A - x_0 = \Big(\big(A \overset{*}{-} B\big) - x_0\Big) + B. \tag{12.3}$$

Так как $0 \notin C - x_0$, то $\{0\}$ и $C - x_0$ строго отделимы ($C - x_0$ — выпукло и замкнуто). Поэтому существуют ненулевой вектор $p \in R^n$ и $\mu \in R^1$ такие, что

$$(p, z) < \mu \text{ для всех } z \in C - x_0,$$
$$(p, 0) > \mu.$$

Отсюда $\mu < 0$. Пусть $a \in A$, тогда $b = a - z \in B$ и поэтому

$$(p, a) = (p, z) + (p, b) \leqslant (p, z) + \max_{b \in B}(p, b).$$

Следовательно,

$$\sup_{a \in A - x_0}(p, a) \leqslant (p, z) + \max_{b \in B}(p, b) < \max_{b \in B}(p, b). \tag{12.4}$$

С другой стороны, так как $0 \in \big(A \overset{*}{-} B\big) - x_0$, то $B \subset A - x_0$. Поэтому

$$\max_{b \in B}(p, b) \leqslant \sup_{a \in A - x_0}(p, a),$$

что противоречит (12.4). Теорема доказана.

Т е о р е м а 12.6. Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество R^n, B — выпуклый компакт. Тогда

$$(A+B) \overset{*}{-} B = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in A$, тогда $y + B \subset A + B$ и поэтому

$$y \in (A+B) \overset{*}{-} B.$$

Пусть $y \in (A+B) \overset{*}{-} B$. Отсюда $y+B \subset A+B$. Предположим, что $y \notin A$. Тогда $\{y\}$ и A строго отделимы. Поэтому существуют $p \in R^n, p \neq 0, \mu \in R^1$ такие, что

$$(p,a) < \mu \text{ для всех } a \in A,$$
$$(p,y) > \mu.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\sup_{a\in A}(p,a) \leqslant \mu < (p,y). \tag{12.5}$$

Пусть точка $b_0 \in B$ такая, что $(p,b_0) = \max_{b\in B}(p,b)$. Так как $y+B \subset A+B$, то существуют $a_1 \in A, b_1 \in B$ такие, что $y + b_0 = a_1 + b_1$. Тогда

$$(p,y) + \max_{b\in B}(p,b) = (p,y) + (p,b_0) =$$
$$= (p,a_1) + (p,b_1) \leqslant \sup_{a\in A}(p,a) + \max_{b\in B}(p,b).$$

Из последнего неравенства получаем неравенство

$$\mu < (p,y) \leqslant \sup_{a\in A}(p,a),$$

которое противоречит (12.5). Теорема доказана.

Т е о р е м а 12.7. Пусть A, B подмножества R^n таковы, что B полностью выметает A. Тогда для любого множества C множество $B+C$ полностью выметает $A+C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$(B+C)+\Big((A+C) \overset{*}{-} (B+C)\Big)\subset (A+C),$$

то достаточно доказать, что

$$(A+C)\subset (B+C)+\Big((A+C) \overset{*}{-} (B+C)\Big).$$

Пусть $x\in A{+}C$. Тогда $x=a{+}c$. Так как B полностью выметает A, то $A=B+(A \overset{*}{-} B)$ и поэтому существует $y\in A \overset{*}{-} B$ такой, что $a=b+y$. Отсюда $x=b+y+c$. Из условия $y\in A \overset{*}{-} B$ имеем $y+B\subset A$ и поэтому $y+B+C\subset A+C$. Отсюда $y\in (A+C) \overset{*}{-} (B+C)$. Следовательно,

$$x=(b+c)+y\in (B+C)+(A+C) \overset{*}{-} (B+C),$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Т е о р е м а 12.8. Пусть A, B — выпуклые компакты R^n, и B полностью выметает A. Тогда для любого выпуклого компакта C справедливо равенство

$$\big(A+C\big) \overset{*}{-} B=\big(A \overset{*}{-} B\big){+}C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что

$$C+\Big(\big(A \overset{*}{-} B\big){+}B\Big)=A+C.$$

Из определения геометрической разности следует, что

$$\Big(\big(A+C\big) \overset{*}{-} B\Big){+}B\subset A+C.$$

Следовательно,

$$\Big((A+C) \overset{*}{-} B\Big)+B \subset C+\Big((A \overset{*}{-} B)+B\Big). \tag{12.6}$$

Так как

$$C+(A \overset{*}{-} B) \subset (A+C) \overset{*}{-} B,$$

то справедливо и включение

$$\Big(C+(A \overset{*}{-} B)\Big)+B \subset \Big((A+C) \overset{*}{-} B\Big)+B.$$

Из последнего включения и (12.6) следует равенство

$$\Big(C+(A \overset{*}{-} B)\Big)+B = \Big((A+C) \overset{*}{-} B\Big)+B.$$

Отсюда

$$c\Big((C+(A \overset{*}{-} B))+B,\varphi\Big)= c\Big(((A+C) \overset{*}{-} B\Big)+B,\varphi\Big).$$

Из свойства опорной функции имеем

$$c\Big((C+(A \overset{*}{-} B)),\varphi\Big)+c(B,\varphi) = c\Big(((A+C) \overset{*}{-} B),\varphi\Big)+c(B,\varphi).$$

Следовательно,

$$c\Big((C+(A \overset{*}{-} B)),\varphi\Big)= c\Big(((A+C) \overset{*}{-} B),\varphi\Big).$$

Значит,

$$\mathrm{co}\Big(C+(A \overset{*}{-} B)\Big)= \mathrm{co}\Big((A+C) \overset{*}{-} B\Big).$$

Ввиду выпуклости этих множеств получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Верно ли, что если A, B, C — замкнутые множества такие, что $A + B = A + C$, то $B = C$.

12.2. Верно ли, что если A, B, C — замкнутые выпуклые множества такие, что $A + B = A + C$, то $B = C$.

12.3. Пусть A — выпуклое множество, $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$. Доказать, что $\alpha A \overset{*}{-} \beta A = (\alpha - \beta)A$.

12.4. Пусть $p_j \in R^n, j \in I = \{1, \ldots, m\}$, $\alpha_j, \beta_j \in R^1, j \in I$,

$$A = \{x \in R^n \mid (p_j, x) \leqslant \alpha_j,\ j \in I\},$$
$$B = \{x \in R^n \mid (p_j, x) \leqslant \beta_j,\ j \in I\} \neq \varnothing,$$
$$C = \{x \in R^n \mid (p_j, x) \leqslant \alpha_j - \beta_j,\ j \in I\}.$$

1. Доказать, что $C \subset A \overset{*}{-} B$;
2. Привести пример, показывающий, что в общем случае $A \overset{*}{-} B \neq C$;
3. Получить условия, при которых будет выполняться равенство $A \overset{*}{-} B = C$.

12.5. Пусть A — строго выпуклый компакт R^n, B — компакт R^n такие, что $A \overset{*}{-} B = \{0\}$. Доказать, что существуют точки $b_1, \ldots, b_k \in B$, $2 \leqslant k \leqslant n + 1$ такие, что

$$A \overset{*}{-} \bigcup_{i=1}^{k} \{b_i\} = \{0\}.$$

12.6. Доказать справедливость формулы

$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_{\varphi \in R^n} \bigl\{x \in R^n \mid (\varphi, x) \leqslant c(A, \varphi) - c(B, \varphi)\bigr\}.$$

12.7. Вычислить $A \overset{*}{-} B$, где

$$A = D_{\sqrt{2}}(0),\ B = \{(x, y) \mid y = 0,\ x \in [-1, 1]\}.$$

12.8. Вычислить $A \overset{*}{-} B$, где

$$A = D_R(0),\ B = \{(x, y) \mid |x| \leqslant \alpha,\ |y| \leqslant \beta\}.$$

12.9. Пусть A, B подмножества R^n. Доказать справедливость следующих равенств:
1) $A \overset{*}{-} B + B \overset{*}{-} B = A \overset{*}{-} B$;
2) $A + B \overset{*}{-} B + B = A + B$;
3) $B \overset{*}{-} \big(B \overset{*}{-} B(\overset{*}{-} A)\big) = B \overset{*}{-} A$.

12.10. Пусть A, B — подмножества R^n, A — замкнуто. Доказать справедливость равенства $A \overset{*}{-} B = A \overset{*}{-} \overline{B}$.

12.11. Доказать, что если A, B — замкнутые, выпуклые подмножества R^1, $A \overset{*}{-} B \neq \varnothing$, то $A \overset{*}{-} B + B = A$. Привести пример, показывающий, что в $R^n, n \geqslant 2$ соответствующее свойство не имеет места.

12.12. Пусть $A_i, i = 1, 2$ — эллипсоиды в R^3, то есть

$$A_i = \{(x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x^2}{a_i^2} + \frac{y^2}{b_i^2} + \frac{z^2}{c_i^2} \leqslant 1,\ (a_i, b_i, c_i > 0).$$

При каких условиях на (a_i, b_i, c_i) множество $A_1 \overset{*}{-} A_2$ будет эллипсоидом?

§ 13. Многозначные отображения

Обозначим через 2^{R^n} совокупность всех непустых подмножеств пространства R^n. Пусть A — подмножество R^m. Отображение F из A в 2^{R^n} будем называть *многозначным.* Таким образом, многозначное отображение ставит в соответствие каждой точке $a \in A$ непустое подмножество $F(a) \subset R^n$. Поэтому класс многозначных отображений включает в себя и обычные однозначные отображения, в том числе и функции.

В данном параграфе мы ограничимся рассмотрением многозначных отображений $F : A \to \Omega(R^n)$, то есть таких многозначных отображений, что для всех a множество $F(a)$ ограничено.

О п р е д е л е н и е 13.1. Многозначное отображение $F : A \to \Omega(R^n)$ называется полунепрерывным сверху в точке a_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $a \in A \cap D^0_\delta(a_0)$ выполнено $F(a) \subset \Big(F(a_0)\Big)_\varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 13.2. Многозначное отображение $F : A \to \Omega(R^n)$ называется полунепрерывным снизу в точке a_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $a \in A \cap D^0_\delta(a_0)$ выполнено $F(a_0) \subset \Big(F(a)\Big)_\varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 13.3. Многозначное отображение $F : A \to \Omega(R^n)$ называется непрерывным в точке a_0, если оно полунепрерывно сверху и снизу в точке a_0.

П р и м е р 13.1. Пусть $F : [0,1] \to \Omega(R^n)$,

$$F(t) = \begin{cases} [0,1;0,5], \ t \neq 0;5, \\ [0;1], \ t = 0,5. \end{cases}$$

Отображение F является полунепрерывным сверху в точке 0,5, но не является полунепрерывным снизу в данной точке.

П р и м е р 13.2. Пусть $F : [0,1] \to \Omega(R^n)$,

$$F(t) = \begin{cases} [0;1], \ t \neq 0;5, \\ [0,1;0,5], \ t = 0,5. \end{cases}$$

Отображение F является полунепрерывным снизу в точке 0,5, но не является полунепрерывным сверху в данной точке.

О п р е д е л е н и е 13.4. Многозначное отображение $F : A \to \Omega(R^n)$ называется непрерывным в точке a_0, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех $a \in A \cap D^0_\delta(a_0)$ выполнено неравенство $h(F(a), F(a_0)) < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е 13.5. Многозначное отображение $F : A \to \Omega(R^n)$ называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке множества A.

Т е о р е м а 13.1. Введенные понятия непрерывности в точке многозначного отображения эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F : A \to \Omega(R^n)$ является непрерывным в смысле определения 13.3. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что для всех $a \in A \cap D_\delta(a_0)$ выполнено

$$F(a_0) \subset F(a) + D^0_\varepsilon(0),\ F(a) \subset F(a_0) + D^0_\varepsilon(0).$$

Из последних двух неравенств и определения расстояния по Хаусдорфу получаем, что $h(F(a), F(a_0)) \leqslant \varepsilon$ и поэтому отображение F непрерывно в точке a_0 в смысле определения 13.4.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы. Теорема доказана.

Т е о р е м а 13.2. Пусть отображения $F, G : A \to \Omega(R^n)$ непрерывны в точке a_0. Тогда
1) отображения $a \to F(a) + G(a)$, $a \to F(a) \cup G(a)$ непрерывны в точке a_0;
2) для любого $\lambda \in R^1$ отображение $a \to \lambda F(a)$ непрерывно в точке a_0.

Т е о р е м а 13.3. Пусть отображение $F : A \to \Omega(R^n)$ непрерывно в точке a_0. Тогда опорная функция $c(F(a), \varphi)$ непрерывна по a в точке a_0 при каждом фиксированном φ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 10.2 справедливо неравенство

$$|c(F(a), \varphi) - c(F(a_0), \varphi)| \leqslant h(F(a), F(a_0))\|\varphi\|,$$

из которого сразу следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 13.4. Пусть отображение $F : A \to \Omega(R^n)$ таково, что опорная функция $c(F(a), \varphi)$ непрерывна по a в точке a_0 при каждом фиксированном φ. Тогда отображение F непрерывно в точке a_0.

Доказательство данной теоремы можно найти в [13].

Т е о р е м а 13.5. Пусть $M_1, \ldots, M_k \in \mathrm{co}K(R^n)$,
$Q \in K(R^n)$, $X_i : Q \to \mathrm{co}K(R^n), i = 1, \ldots, k$,

$$\lambda_i(q) = \min_{\|\varphi_i\|=1} \big(c(X_i(q), \varphi_i) + c(M_i, -\varphi_i)\big).$$

Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(X_i(q) \cap M_i\big) = \varnothing$ при некотором $q \in Q$ тогда и только тогда, когда

$$\min_{q \in Q} \max_i \lambda_i(q) < 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \big(X_i(q_0) \cap M_i\big) = \varnothing$. Это означает, что $X_i(q_0) \cap M_i = \varnothing$ для всех i. Поэтому $X_i(q_0)$ и M_i строго отделимы. Значит, существуют $\varphi_i^0, \|\varphi_i^0\| = 1$ и вещественные числа $\delta_i > 0$ такие, что

$$(x_i, \varphi_i^0) \leqslant (m_i, \varphi_i^0) - \delta_i \text{ для всех } x_i \in X_i(q_0), m_i \in M_i.$$

Отсюда

$$(x_i, \varphi_i^0) + (m_i, -\varphi_i^0) \leqslant -\delta_i < 0 \text{ для всех } x_i \in X_i(q_0), m_i \in M_i.$$

Поэтому

$$\max_{x_i \in X_i(q_0), m_i \in M_i} \big((x_i, \varphi_i^0) + (m_i, -\varphi_i^0)\big) < 0 \text{ или}$$
$$c(X_i(q_0), \varphi_i^0) + c(M_i, -\varphi_i^0) < 0 \text{ для всех } i.$$

Следовательно, $\lambda_i(q_0) < 0$ для всех i. Поэтому

$$\min_{q\in Q}\max_i \lambda_i(q) < 0.$$

Пусть теперь $\min\limits_{q\in Q}\max\limits_i \lambda_i(q) < 0$. Возьмем $q_0 \in Q$ такой, что

$$\min_{q\in Q}\max_i \lambda_i(q) = \max_i \lambda_i(q_0) < 0.$$

Следовательно, $\lambda_i(q_0) < 0$ для всех i. Из определения функций λ_i следует, что существуют $\varphi_i, \|\varphi_i\| = 1$ и такие, что

$$c(X_i(q_0), \varphi_i) + c(M_i, -\varphi_i) < 0.$$

Последнее неравенство означает, что $X_i(q_0) \cap M_i = \varnothing$ для всех i. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 13.6. Функция $f : A \to R^n$ называется однозначной ветвью многозначного отображения $F : A \to \Omega(R^n)$, если для всех $a \in A$ справедливо включение $f(a) \in F(a)$.

О п р е д е л е н и е 13.7. Пусть даны отрезок $[a, b]$ и многозначное отображение $F : [a, b] \to K(R^n)$. Интегралом от многозначного отображения F по отрезку $[a, b]$ называется множество

$$G = \int\limits_a^b F(t)dt = \Big\{ g \;\Big|\; g = \int\limits_a^b f(t)dt,\ f(t) \in F(t) \Big\},$$

где интеграл в правой части вычисляется по всем однозначным ветвям отображения F, интегрируемым по Лебегу.

Т е о р е м а 13.6. Пусть $F : [a, b] \to K(R^n)$ — непрерывное многозначное отображение. Тогда

а) интеграл $\int\limits_a^b F(t)dt$ является непустым выпуклым компактным

подмножеством R^n;
b) для всех $\varphi \in R^n$ справедливо равенство

$$c\Big(\int\limits_a^b F(t)dt, \varphi\Big) = \int\limits_a^b c(F(t), \varphi)dt.$$

Доказательство данной теоремы можно найти в [13].

П р и м е р 13.3. Пусть $F(t) = D_{2t}(0)$, $t \in [0, 1]$. Тогда

$$\int\limits_0^1 c(F(t), \varphi)dt = \int\limits_0^1 2t\|\varphi\|dt = \|\varphi\|.$$

Так как $\|\varphi\|$ является опорной функцией $D_1(0)$, то получаем, что $\int\limits_0^1 D_{2t}(0)dt = D_1(0)$.

П р и м е р 13.4. Пусть $F(t) = F$ для всех $t \in [a, b]$, где F — компакт R^n. Тогда

$$c\Big(\int\limits_a^b F(t), \varphi\Big) = \int\limits_a^b c(F(t), \varphi)dt = \int\limits_a^b c(F, \varphi)dt = c(F, \varphi)(b - a).$$

Следовательно, $\int\limits_a^b F(t)dt = (b - a)\mathrm{co}F$.

Т е о р е м а 13.7. Пусть $F(t)$ — непрерывная матричная функция порядка n, $t \in [0, 1]$, причем $\int\limits_0^1 F(t)dt = E$, M — выпуклый компакт R^n. Для того чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_0^1 F(t)M dt = M \tag{13.1}$$

необходимо, чтобы для всех $\varphi \neq 0$ выполнялось включение

$$M(\varphi) \subset M(F^*(t)\varphi) \text{ для всех } t \in [0,1], \text{ где}$$

$M(\varphi) = \{x \mid x \in M,\ (x,\varphi) = C(M,\varphi)\}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства (13.1) следует равенство

$$\int_0^1 c(M, F^*(t)\varphi)dt = c(M,\varphi).$$

Пусть $z \in M(\varphi)$, тогда

$$c(M,\varphi) = (z,\varphi) =$$

$$= \Big(\int_0^1 F(s)dsz, \varphi\Big) = \int_0^1 (F(s)z,\varphi)ds = \int_0^1 (z, F^*(s)\varphi)ds.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\int_0^1 (z, F^*(s)\varphi)ds = \int_0^1 (M, F^*(t)\varphi)dt, \text{ или}$$

$$\int_0^1 \Big[c(M, F^*(t)\varphi) - (z, F^*(t)\varphi)\Big]dt = 0.$$

Так как подинтегральная функция непрерывна и неотрицательна, то из последнего равенства следует, что для всех $t \in [0,1]$

$$c(M, F^*(t)\varphi) = (z, F^*(t)\varphi).$$

Значит, $z \in M(F^*(t)\varphi)$ для всех t. Теорема доказана.

Т е о р е м а 13.8. Пусть A — непустое подмножество R^n, $F : A \to \mathrm{co}(R^n)$, причем для всякого конечного набора $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset A$ выполнено $\mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} F(x_i)$. Тогда

$$\bigcap_{x \in A} F(x) \neq \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для любого конечного набора точек $\{x_1, \ldots, x_k\}$ справедливо

$$\bigcap_{i=1}^{k} F(x_i) \neq \varnothing.$$

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует набор точек $\{x_1, \ldots, x_k\}$ такой, что

$$\bigcap_{i=1}^{k} F(x_i) = \varnothing.$$

Поэтому

$$\bigcup_{i=1}^{k} \Big(R^n \setminus F(x_i) \Big) = R^n.$$

Пусть ρ_i — разбиение единицы, согласованное с покрытием $\Big\{ R^n \setminus F(x_i) \Big\}_{i=1}^{k}$, такое, что

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i(x) = 1 \text{ для всех } x \in R^n, \ \mathrm{supp}\rho_i \subset R^n \setminus F(x_i).$$

Рассмотрим отображение $\varphi : R^n \to R^n$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i(x) x_i.$$

φ отображает $\mathrm{co}\{x_1,\dots,x_k\}$ в себя и поэтому по теореме Брауэра имеет неподвижную точку x^*. Так как $\sum\limits_{i=1}^{k}\rho_i(x^*)=1$, то существует множество $I\subset\{1,\dots,n\}$ такое, что $\rho_i(x^*)>0$ для $i\in I$ и $\rho_i(x^*)=0$ для $i\notin I$. Тогда

$$x^*=\sum_{i\in I}\rho_i(x^*)x_i^*\in\mathrm{co}\{x_j\mid j\in I\}\subset\bigcup_{i\in I}F(x_i).$$

Следовательно, $x^*\in F(x_j)$ при некотором j, и поэтому $x^*\notin R^n\setminus F(x_j)$, а значит $\rho_j(x^*)=0$. Получили противоречие. Из полученного утверждения и условия компактности множеств $F(x)$ для всех $x\in A$ следует утверждение теоремы.

УПРАЖНЕНИЯ

13.1. Пусть $F:R^2\to\Omega(R^2)$,

$$F(x_1,x_2)=\begin{cases}|x_1-x_2|D_1(0), & x_1x_2\geqslant 0,\\ |x_1+x_2|D_1(0), & x_1x_2<0.\end{cases}$$

Исследовать отображение F на непрерывность.

13.2. Пусть $F:[a,b]\to\mathrm{co}K(R^n)$ — непрерывное отображение. Верно ли, что отображение $\mathrm{ext}F: t\to\mathrm{ext}F(t)$ также является непрерывным?

13.3. Пусть $f:[a,b]\to R^n$ — непрерывная вектор-функция, $B\in\Omega(R^n)$. Доказать, что многозначное отображение $F:[a,b]\to\Omega(R^n)$, $F(t)=f(t)B$ является непрерывным.

13.4. Пусть $F:[0,1]\to\mathrm{co}K(R^1)$,

$$F(t)=\begin{cases}\{0\}, & t\in[0,0,5),\\ [0,1], & t=0,5,\\ \{1\}, & t=(0,5,1].\end{cases}$$

Является ли отображение F полунепрерывным сверху (снизу)?

13.5. Пусть дана непрерывная функция $f : R^1 \times [a,b] \to R^1$. Определим многозначное отображение

$$F(x) = \{z \in [a,b] \mid f(x,z) = \min_{y\in[a,b]} f(x,y)\}.$$

Исследовать отображение F на непрерывность.

13.6. Пусть X — компакт R^m, Y — компакт R^n, $g : X \times Y \to R^1$, $g \in C(X \times Y)$. $F : X \times Y \to \Omega(R^n)$, $F(x) = \{y \in Y \mid g(x,y) \geqslant 0\}$. Доказать, что если $F(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$, то отображение F полунепрерывно сверху на X.

13.7. Пусть X — компакт R^m, Y — компакт R^n, $g : X \times Y \to R^1$, $F : X \times Y \to \Omega(R^n)$,

$$F(x) = \{y \in Y \mid g(x,y) \geqslant 0\}.$$

Верно ли, что если $F(x) \neq \varnothing$ для всех $x \in X$, то отображение F полунепрерывно сверху на X.

13.8. Вычислить $\int\limits_a^b D_{r(t)}(a(t))$, где r –неотрицательная непрерывная скалярная функция, a – непрерывная вектор функция.

13.9. Пусть $B = \{(-1;-1),(1;1)\}$,

$$C(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Вычислить $\int\limits_0^\pi C(t)Bdt$.

13.10. Вычислить $\int\limits_0^1 F(t)dt$, где

$$F(t) = \Big\{(x_1,x_2) \;\Big|\; \frac{x_1^2}{a_1^2(t)} + \frac{x_2^2}{a_2^2(t)} \leqslant 1\Big\},$$

a_1, a_2 — положительные непрерывные функции.

13.11. Вычислить $\int\limits_0^1 F(t)dt$, где

$$F(t) = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant t^2, x_2 \geqslant 0\}.$$

13.12. Вычислить $\int\limits_0^1 F(t)dt$, где

$$F(t) = \big\{(x_1, x_2) \ \big| \ |x_1| + |x_2| \leqslant t\big\}.$$

13.13. Вычислить $\int\limits_0^T F(t)dt$, где

$$F(t) = e^{-At} D_1(0), \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 14. Выпуклые функции

В даном параграфе будем рассматривать функции $f : R^n \to \overline{R} = R^1 \cup \{-\infty, +\infty\}$.

О п р е д е л е н и е 14.1. Эффективным множеством функции $f : R^n \to \overline{R}$ называется множество

$$\mathrm{dom} f = \{x \in R^n \ \big| \ f(x) < +\infty\}.$$

Функция f называется собственной, если $\mathrm{dom} f \neq \varnothing$ и $f(x) > -\infty$ для всех x.

О п р е д е л е н и е 14.2. Надграфиком функции $f : R^n \to \overline{R}$ называется множество

$$\mathrm{epi} f = \{(x, \alpha) \in R^n \times R^1 \ \big| \ f(x) \leqslant \alpha\}.$$

П р и м е р 14.1. Пусть $f : R^n \to \overline{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \|x\| \leqslant 1, \\ +\infty, & \|x\| > 1. \end{cases}$$

Тогда $\mathrm{dom} f = D_1(0)$, $\mathrm{epi} f = D_1(0) \times [-1, \infty)$.

З а м е ч а н и е 14.1. Отметим, что точка $(x, \alpha) \in \mathrm{epi} f$ только в том случае, если $x \in \mathrm{dom} f$.

О п р е д е л е н и е 14.3. Функция f называется выпуклой, если $\mathrm{epi} f$ — выпуклое множество.

П р и м е р 14.2. Пусть A — выпуклое подмножество R^n. Определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A, \\ +\infty, & \text{если, } x \notin A. \end{cases}$$

Так как $\mathrm{epi} f = A \times [0, \infty)$ является выпуклым множеством, то f — выпуклая функция.

П р и м е р 14.3. Выпуклыми функциями являются:
1) $f : R^n \to R^1$, $f(x) = (a, x) + \alpha$, где $a \in R^n, \alpha \in R^1$;
2) $f : R^n \to R^1$, $f(x) = \|x\|$;
3) пусть $A \in \Omega(R^n)$. Тогда по теореме 9.1 опорная функция $c(A, \varphi) : R^n \to R^1$ будет выпуклой;
4) пусть $\mathfrak{L} : R^n \to R^m$ — линейное отображение, $f : R^m \to R^1$ — выпуклая функция. Тогда функция $g : R^n \to R^1$, $g(x) = f(\mathfrak{L}x)$ является выпуклой.

Действительно, пусть $x_1, x_2 \in R^n, \alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = f\big(\mathfrak{L}(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big) =$$
$$f(\alpha \mathfrak{L}x_1 + (1-\alpha)\mathfrak{L}x_2) \leqslant \alpha f(\mathfrak{L}x_1) + (1-\alpha) f(\mathfrak{L}x_2) =$$
$$= \alpha g(x_1) + (1-\alpha) g(x_2).$$

О п р е д е л е н и е 14.4. Собственная функция f называется выпуклой, если для любых $x_1, x_2 \in R^n, \alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2). \tag{14.1}$$

Т е о р е м а 14.1. Пусть f — собственная функция. Тогда определения 14.3 и 14.4 эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f является выпуклой в смысле определения 14.3. Тогда epi$f$ — выпуклое множество. Отметим, что если одно из чисел $f(x_i) = \infty, i = 1, 2,$ то неравенство (14.1) верно. Пусть каждое из чисел $f(x_i) = \infty, i = 1, 2$ конечно. Следовательно, $x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$. Возьмем $\alpha \in [0, 1]$. Точки $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \mathrm{epi} f$. Поэтому точка, в силу выпуклости надграфика,

$$\alpha(x_1, f(x_1)) + (1-\alpha)f(x_2) =$$
$$= \big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)) \in \mathrm{epi} f.$$

Отсюда получаем, что $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in \mathrm{dom} f$ и, кроме того, выполняется неравенство (14.1). Тем самым доказано, что f является выпуклой функцией в смысле определения 14.4.

Пусть теперь f — выпуклая функция в смысле определения 14.4 и $(x_1, \beta_1), (x_2, \beta_2) \in \mathrm{epi} f$, $\alpha \in [0, 1]$. Отметим, что $x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$. Рассмотрим точку

$$\alpha(x_1, \beta_1) + (1-\alpha)(x_2, \beta_2) = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2).$$

Так как $\mathrm{dom} f$ — выпуклое множество, то $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \mathrm{dom} f$ и поэтому

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \leqslant \alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2.$$

Поэтому $\alpha(x_1, \beta_1) + (1-\alpha)(x_2, \beta_2) \in \mathrm{epi} f$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 14.5. Функция f называется вогнутой, если $-f$ является выпуклой функцией.

Т е о р е м а 14.2. (Неравенство Иенсена) Пусть f — собственная функция. Тогда для любого натурального числа k, для любых $x_1, \ldots, x_k \in R^n$, положительных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$ справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если хотя бы одно из чисел $f(x_j) = \infty$, то неравенство верно. Пусть $f(x_j) < \infty$ для всех j. Поэтому $x_j \in \mathrm{dom} f$. Так как f выпуклая функция, то $\mathrm{epi} f$ — выпуклое множество и поэтому для любых $z_1, \ldots, z_k \in \mathrm{epi} f$ точка

$$\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_k z_k \in \mathrm{epi} f.$$

Возьмем в качестве $z_j = (x_j, f(x_j))$. Тогда

$$\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_k z_k = \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k)$$

и поэтому

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_k f(x_k).$$

Теорема доказана.

Приведем некоторые свойства выпуклых функций.

Т е о р е м а 14.3. Пусть $f_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ — выпуклые функции. Тогда функция

$$f(x) = \sup_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha(x)$$

является выпуклой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что

$$\mathrm{epi} f = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathrm{epi} f_\alpha.$$

Поэтому $\mathrm{epi} f$ — выпуклое множество как пересечение выпуклых множеств.

С л е д с т в и е 14.1. Пусть f — выпуклая функция. Тогда функция $f_+ : f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ является выпуклой.

Т е о р е м а 14.4. Пусть $f_j (j = 1, \dots, m)$ — собственные выпуклые функции. Тогда для любых неотрицательных λ_j, $j = 1, \dots, m$ функция

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x)$$

является выпуклой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1, x_2 \in R^n, \alpha \in [0, 1]$. Докажем, что для функции f справедливо неравенство (14.1). Так как f_j — собственные выпуклые функции, то по теореме 14.1 справедливы неравенства

$$f_j(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f_j(x_1) + (1-\alpha) f_j(x_2).$$

Умножая данные неравенства на $\lambda_j \geqslant 0$ и складывая, получаем

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha f_j(x_1) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (1-\alpha) f_j(x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 14.6. Пусть A — подмножество R^n. Будем говорить, что функция $f : A \to \overline{R}$ является выпуклой, если множество A выпукло и функция $\hat{f} : R^n \to \overline{R}$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A, \\ +\infty, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

является выпуклой.

Т е о р е м а 14.5. Пусть A — выпуклое подмножество R^n, f — выпуклая на A функция. Тогда для любого $t \in R^1$ множество

$$M(t) = \{x \in A \mid f(x) \leqslant t\}$$

является выпуклым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $M(t) = \varnothing$, то $M(t)$ выпукло. Пусть $M(t) \neq \varnothing$ и пусть $x_1, x_2 \in M(t), \alpha \in [0,1]$. Тогда $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in A$ в силу выпуклости множества A и выполнены неравенства

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$
$$f(x_1) \leqslant t,\ f(x_2) \leqslant t.$$

Поэтому $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant t$ и, следовательно, $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in M(t)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 14.6. Пусть A — открытое выпуклое подмножество R^n, $f \in C^1(A)$. Для того чтобы функция f была выпуклой на A, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x, y \in A$ выполнялось неравенство

$$f(x) - f(y) \geqslant (f'(y), x - y). \tag{14.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — выпуклая функция, $x, y \in A, \alpha \in (0,1]$. Тогда

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Данное неравенство можно переписать в виде

$$f(y + \alpha(x-y)) \leqslant \alpha\big(f(x) - f(y)\big) + f(y) \text{ или}$$
$$\frac{f(y + \alpha(x-y)) - f(y)}{\alpha} \leqslant f(x) - f(y).$$

Так как последнее неравенство справедливо для всех $\alpha \in (0,1]$, то переходя к пределу по $\alpha \to 0+$ получаем неравенство (14.2).

Пусть выполнено неравенство (14.2), $x_1, x_2 \in A, \alpha \in [0,1]$. Полагая в (14.2) сначала $x = x_1$, $y = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, а затем $x = x_2$, $y = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, получаем, что справедливы следующие неравенства

$$f(x_1) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \big(f'(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2), x_1 - y\big),$$
$$f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \big(f'(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2), x_2 - y\big).$$

Умножая первое неравенство на α, второе на $1-\alpha$, получаем справедливость неравенства

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) - f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Т е о р е м а 14.7. Пусть f — собственная выпуклая на множестве A функция. Тогда f непрерывна на $\mathrm{ri}A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_0 \in \mathrm{ri}A$. Докажем, что f непрерывна в точке a_0. Рассмотрим функцию

$$g : g(y) = f(y + x_0) - f(x_0)$$

и множество $A_0 = A - a_0$. Тогда непрерывность f в точке a_0 равносильна непрерывности g в точке нуль (отметим, что $g(0) = 0$). Поэтому можно считать, что $a_0 = 0$, $f(0) = 0$.

а) $\mathrm{Int}A \neq \varnothing$. Тогда $0 \in \mathrm{Int}A$ и поэтому существует $\delta_0 > 0$ такое, что множество

$$K = \{a = (a_1, \ldots, a_n) \in A \mid a_j \in [-\delta_0, \delta_0]\} \subset A.$$

Обозначим через $M = \max\limits_i f(z_i)$, где z_i точки вида $z_i = \big(\pm\delta_0, \ldots, \pm\delta_0\big)$, $i = 1, \ldots, 2^n = m$ и пусть $x \in K$. Тогда x представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_{j_i}, \text{ где } \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_j = 1,\ z_{j_i} \in \{z_1, \ldots, z_m\}.$$

Так как f — выпуклая функция, то по теореме 14.2 имеем

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(z_{j_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i M = M.$$

Получили, что функция f ограничена сверху на K. Пусть ε — произвольное число $(\varepsilon < 1)$, и рассмотрим множество $U_\varepsilon = \varepsilon K$.

Отметим, что если $x \in U_\varepsilon$, то $\frac{x}{\varepsilon} \in K$. Поэтому для любого $x \in U_\varepsilon$ имеет место

$$f(x) = f(\varepsilon \cdot \frac{x}{\varepsilon} + (1-\varepsilon)\cdot 0) \leqslant \varepsilon f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + (1-\varepsilon)\cdot 0 \leqslant M\varepsilon, \qquad (14.3)$$

$$0 = f(0) = f\Big(\frac{1}{1+\varepsilon}x + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\big(-\frac{x}{\varepsilon}\big)\Big) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon}f(x) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}M. \quad (14.4)$$

Из неравенства (14.4) следует, что $f(x) \geqslant -\varepsilon M$. Следовательно, из неравенств (14.3), (14.4) получаем

$$|f(x)| \leqslant M\varepsilon.$$

Тем самым доказано, что f непрерывна в нуле.

б) Пусть теперь $\mathrm{Int} A = \varnothing$. Тогда $\mathrm{aff} A \neq R^n$. Рассмотрим совокупность всех векторов $\{a\}_{a\in A}$ и выберем из данной совокупности максимальную (по количеству) линейно назависисмую систему $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Пусть

$$L = \{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_m e_m \mid \lambda_i \geqslant 0\}.$$

L — линейное подпространство. Покажем, что $\mathrm{aff} A = L$. Действительно, $A \subset L$, следовательно, $\mathrm{aff} A \subset L$. С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i + \big(1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i\big)\cdot 0$$

и поэтому, в силу следствия 4.1 $L \subset A$. Значит, $L = \mathrm{aff} A$.

Рассмотрим отображение $F : R^m \to L$ вида

$$F(\lambda) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_m.$$

F — линейное непрерывное отображение, и так как $e_1, \ldots, e_m$ линейно независимы, то существует обратное отображение F^{-1}, которое также является линейным и непрерывным. Пусть $Y = F^{-1}(A)$. Так как $F^{-1}(0) = 0$ и $0 \in \mathrm{ri} A$, то 0 — внутренняя точка Y. Кроме того, Y — выпуклое множество. Определим функцию $g : Y \to R^1$, $\quad g(\lambda) = f(F(\lambda))$. g — выпуклая функция, $g(0) = 0, g$ непрерывна в нуле. Так как $f(x) = g(F^{-1}(x))$, то f неперывна в нуле. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 14.2. Для точек $A \setminus \mathrm{ri} A$ теорема 14.6 неверна. Пусть $f : [0,1] \to R^1$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Тогда f выпукла на $[0,1]$, но не является непрерывной в точке 0.

Т е о р е м а 14.8. Пусть A — открытое выпуклое подмножество R^n, $f \in C^2(A)$. Тогда для того, чтобы f была выпуклой на A, необходимо и достаточно, чтобы матрица $f''(a) = \Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\Big)$ была неотрицательно определенной в каждой точке множества A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in A, h \in R^n$. Так как A открыто, то существует $t_0 > 0$ такое, что $x_0 + th \in A$ для всех $t \in [0, t_0]$. Определим функцию

$$g : [0, t_0] \to R^1,\ g(t) = f(x_0 + th).$$

Покажем, что g — выпуклая функция. Пусть $t_1, t_2 \in [0, t_0]$, $\alpha \in [0,1]$. Тогда

$$g(\alpha t_1 + (1-\alpha) t_2) =$$
$$f(x_0 + \big(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2\big)h) = f\big(\alpha(x_0 + t_1 h) + (1-\alpha)(x_0 + t_2 h)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha f(x_0 + t_1 h) + (1-\alpha) f(x_0 + t_2 h) = \alpha g(t_1) + (1-\alpha) g(t_2).$$

Так как $f \in C^2(A)$, то $g \in C^2[0, t_0]$ и поэтому справедливо равенство

$$g(t) = g(0) + t g'(0) + \frac{t^2}{2} g''(0) + r(t),$$

где $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{r(t)}{t^2} = 0$. Так как функция g выпуклая, то по теореме 14.6 справедливо неравенство

$$g(t) - g(0) - t g'(0) \geqslant 0 \text{ для всех } t \in [0, t_0].$$

Следовательно,

$$\frac{t^2}{2} g''(0) + r(t) \geqslant 0, \text{ или } g''(0) + \frac{r(t)}{t^2} \geqslant 0$$

для всех $t \in (0, t_0]$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to 0+$, получаем $g''(0) \geqslant 0$, но $g''(0) = (f''(x_0)h, h)$. Тем самым доказано, что для любой точки $x_0 \in A$ для всех $h \in R^n$ справедливо неравенство $(f''(x_0)h, h) \geqslant 0$. Это и означает, что матрица $f''(x_0)$ неотрицательно определена на множестве A.

Пусть матрица $f''(a)$ неотрицательно определена на множестве A. Возьмем две произвольные точки a, $a_0 \in A$. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, можем записать

$$f(a) = f(a_0) + (\mathrm{grad} f(a_0), a - a_0) +$$
$$+ 0,5\big(f''(a_0 + \gamma(a - a_0))(a - a_0), a - a_0\big), \text{ где } \gamma \in (0, 1).$$

Так как множество A выпуклое, то

$$a_0 + \gamma(a - a_0) = \gamma a + (1 - \gamma)a_0 \in A$$

и поэтому $\big(f''(a_0 + \gamma(a - a_0))(a - a_0), a - a_0\big) \geqslant 0$. Следовательно,

$$f(a) - f(a_0) - (\mathrm{grad} f(a_0), a - a_0) \geqslant 0 \text{ для всех } a, a_0 \in A.$$

Из теоремы 14.6 следует, что f выпукла на A. Теорема доказана.

П р и м е р 14.4. 1). Пусть G — неотрицательно определенная квадратная матрица порядка n, $b \in R^n$, $\alpha \in R^1$. Тогда функция $f : R^n \to R^1$, $f(x) = (Gx, x) + (b, x) + \alpha$ будет выпуклой на R^n. Отметим, что $f''(x) = 2G$ для всех $x \in R^n$.

2). Пусть G — матрица порядка $n \times m$, $b \in R^m$. Тогда функция $f : R^n \to R^1$, $f(x) = |Gx - b|^2$ будет выпуклой на R^n. Действительно,

$$f(x) = \big(Gx - b, Gx - b\big) = (Gx, Gx) - 2(Gx, b) + (b, b) =$$
$$= (G^T Gx, x) - 2(Gx, b) + (b, b)$$

и поэтому $f'' = 2G^T G$, $(G^T Gh, h) = \|Gh\|^2 \geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 14.7. Пусть $f : A \to R^1$. Точка $x_0 \in A$ называется точкой локального минимума функции f, если существует окрестность U точки x_0 (в R^n) такая, что $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех $x \in A \cap U$.

Точка $x_0 \in A$ называется точкой глобального минимума функции f, если $f(x_0) \leqslant f(x)$ для всех $x \in A$.

Т е о р е м а 14.9. Пусть $f : A \to R^1$ — выпуклая на A функция и $x_0 \in A$ — точка локального минимума. Тогда x_0 — точка глобального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как x_0 — точка локального минимума, то существует окрестность U точки x_0 такая, что для всех $x \in A \cap U$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Пусть $y \in A$. Докажем, что $f(x_0) \leqslant f(y)$. Так как множество A выпукло, то точка $x(\alpha) = \alpha y + (1-\alpha)x_0 \in A$ для всех $\alpha \in [0,1]$. Из условия $x(0) = x_0$ и непрерывности $x(\alpha)$ по α следует, что существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $x(\alpha) \in U$ для всех $\alpha \in [0, \alpha_0]$. Поэтому для всех $x(\alpha), \alpha \in [0, \alpha_0]$ справедливо следующее неравенство:

$$f(x_0) \leqslant f(x(\alpha)) = f(\alpha y + (1-\alpha)x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x_0) = f(x_0) + \alpha(f(y) - f(x_0)).$$

Из последнего неравенства следует, что $f(y) - f(x_0) \geqslant 0$, откуда $f(y) \geqslant f(x_0)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Т е о р е м а 14.10. Пусть $f : (a,b) \to R^1$ — выпуклая функция. Тогда для любых $x, y, z \in (a,b), z < y < x$ справедливо неравенство

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} \leqslant \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y}. \qquad (14.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda = \dfrac{y-z}{x-z}$. Тогда $\lambda \in (0,1), 1-\lambda = \dfrac{x-y}{x-z}$, $\lambda x + (1-\lambda)z = y$. Так как f — выпуклая функция, то

$$f(y) = f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z), \text{ или} \tag{14.6}$$

$$f(y) - f(z) \leqslant \lambda(f(x) - f(z)) = \frac{y-z}{x-z}(f(x) - f(z)).$$

Деля обе части последнего неравенства на $(y-z)$, получаем неравенство

$$\frac{f(y) - f(z)}{y-z} \leqslant \frac{f(x) - f(z)}{x-z}. \tag{14.7}$$

Вычитая из обеих частей неравенства (14.6) $f(x)$, получаем неравенство

$$f(y) - f(x) \leqslant (\lambda - 1)f(x) + (1-\lambda)f(z) = (1-\lambda)(f(z) - f(x)).$$

Умножая последнее неравенство на (-1), получаем неравенство

$$f(x) - f(y) \geqslant \frac{x-y}{x-z}(f(x) - f(z)), \text{ или}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x-y} \geqslant \frac{f(x) - f(z)}{x-z}. \tag{14.8}$$

Объединяя неравенства (14.7), (14.8), получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 14.2. Пусть $f : R^1 \to R^1$ — выпуклая функция. Тогда для любых $x_1 \geqslant x_2, y_1 \geqslant y_2$, $x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$ справедливо неравенство

$$\frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \geqslant \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

14.1. Пусть A — выпуклое подмножество R^n, f — определенная на A функция, такая, что для любого $t \in R^1$ множество

$$M(t) = \{x \in A \mid f(x) \leqslant t\}$$

является выпуклым. Следует ли отсюда, что f является выпуклой функцией?

14.2. Пусть A — непустое замкнутое подмножество R^n. $f : R^n \to R^1$, $f(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$. Доказать, что множество A является выпуклым тогда и только тогда, когда функция f является выпуклой.

14.3. Пусть f — неотрицательная, выпуклая на A функция. Будет ли выпуклой на A функция f^2?

14.4. Пусть f, g — неотрицательные, выпуклые на A функции. Будет ли выпуклой на A функция $f \cdot g$?

14.5. Пусть A — выпуклое подмножество $R^n, f : A \to R^1$ и для всех $x, y \in A$ выполнено неравенство

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y).$$

Можно ли утверждать, что f — выпуклая функция?

14.6. Пусть A — выпуклое подмножество $R^n, f : A \to R^1$ — непрерывная функция и для всех $x, y \in A$ выполнено неравенство

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y).$$

Можно ли утверждать, что f — выпуклая функция?

14.7. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых функций, определенных на выпуклом подмножестве $A \subset R^n$, такая, что для всех $x \in A$ существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$. Доказать, что f — выпуклая на A функция.

14.8. Пусть $f : A \to \overline{R}$ — выпуклая на A функция, причем $\mathrm{epi} f$ — замкнутое множество. Можно ли утверждать, что A является замнутым множеством.

14.9. Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество R^n, $\rho : R^n \to R^1$, $\rho(x) = \|x - \pi_A(x)\|^2$, где $\pi_A(x)$ — проекция точки x на множество A. Доказать, что функция $f(x) = \rho^2(x)$ является выпуклой дифференцируемой функцией и
$\mathrm{grad} f(x) = 2(x - \pi_A(x))\rho(x)$.

14.10. Пусть $A \subset R^n$ — выпуклое множество, $f : A \to R^1$ — выпуклая функция. Доказать, что
1) множество точек локального минимума функции f на множестве A есть выпуклое множество;
2) если множество A является замкнутым, $f \in C(A)$, то множество точек локального минимума функции f на множестве A является замкнутым.

14.11. Привести пример линейной функции f, заданной на выпуклом замкнутом множестве A такой, что

$$\sup_{x \in A} f(x) = 0, \text{ но } f(x) < 0 \text{ для всех } x \in A.$$

14.12. Доказать, что выпуклая функция f ограничена сверху на многограннике M и принимает на M наибольшее значение.

14.13. Привести пример выпуклой функции f, заданной и ограниченной на выпуклом компакте M, но не достигающей на M своей верхней грани.

14.14. Доказать, что максимум выпуклой функции на выпуклом многограннике достигается в одной из крайних точек.

14.15. Пусть f — вогнутая функция, заданная на выпуклом множестве X, $g(x) = \left|\min(0; f(x))\right|^q$, $q \geqslant 1$. Доказать, что функция g является выпуклой на X.

14.16. Пусть X — выпуклое подмножество R^n. Функция $f : X \to R^1$ называется *квазивыпуклой* на X, если для всех $x, y \in X$, для любого $\alpha \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}.$$

Верно ли, что выпуклая на X функция является квазивыпуклой на X функцией?

14.17. Пусть A — выпуклое подмножество R^n с непустой внутренностью. Доказать, что если выпуклая непрерывная функция f является неограниченной на A, то она будет неограниченной и на $\mathrm{Int} A$.

14.18. Пусть A — выпуклое подмножество R^n с непустой внутренностью. Верно ли, что если выпуклая функция f является неограниченной на A, то она будет неограниченной и на $\mathrm{Int} A$.

14.19. Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ обозначим через $\overline{x} = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ вектор, составленный из компонет вектора x и такой, что

$$x_{\pi(1)} \geqslant x_{\pi(2)} \geqslant \ldots \geqslant x_{\pi(n)}.$$

Будем говорить, что вектор x мажорирует вектор y, $(x \succ y)$, если

$$\sum_{i=1}^{k} x_{\pi(i)} \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_{\pi(i)}, \text{ для всех } k = 1, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{\pi(i)}.$$

Функция $f : R^n \to R^1$ называется *выпуклой по Шуру,* если для всех x, y, $x \succ y$ верно $f(x) \geqslant f(y)$.

Доказать, что функция $f : R^n \to R^1, f \in C^1(R^n)$ выпукла по Шуру тогда и только тогда, когда
1) f — симметричная функция (т.е. для любой перестановки π множества $\{1, \ldots, n\}$ и для любого $x \in R^n$ выполнено равенство $f(x) = f(x_\pi)$);
2) для любого $z \in R^n$ выполнено неравенство

$$(z_i - z_j) \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}(z) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(z)\Big) \geqslant 0.$$

14.20. Пусть $f : (a, b)^n \to R^1$ — выпуклая функция, $x, y \in (a, b)^n$. Доказать, что если $x \succ y$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i)$.

14.21. Пусть $f[0,\infty) \to R^1$ — выпуклая функция и $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$. Доказать неравенство

$$f(a_1) - f(a_2) + \cdots - f(a_{2n-2}) + f(a_{2n-1}) \geqslant$$
$$\geqslant f(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1}).$$

14.22. Пусть $a_1, \ldots a_n$ — положительные вещественные числа. Доказать неравенство

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot \Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\Big) \geqslant n^2.$$

14.23. Пусть A — выпуклое подмножество R^n. Функция $f : A \to R^1$ называется *псевдовыпуклой,* если из условий $f(u) < f(v)$, $z = \alpha u + (1-\alpha)v, \alpha \in (0,1)$ следует неравенство $f(z) < f(v)$. Привести пример квазивыпуклой функции (см. задачу 14.6), не являющуюся псевдовыпуклой.

14.24. Привести пример псеводовыпуклой функции, не являющейся выпуклой.

14.25. Привести пример функции, выпуклой по Шуру, но не являющейся ни квазивыпуклой, ни псевдовыпуклой.

14.26. Пусть $f : [0,\infty) \to R^1$ — вогнутая функция, $h > 0$. Доказать, что функция

$$g(t) = f(t+h) - f(t)$$

не возрастает на $[0,\infty)$.

14.27. Пусть f — вогнутая на $[0,\infty)$ функция, $f(0) = 0$. Доказать, что для всех $x, y \in [0,\infty)$ справедливо неравенство $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

14.28. Пусть $f : [0,\infty) \to R^1$ — выпуклая функция, $f(0) = 0$. Доказать, что функция $g : g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ не убывает на $(0,\infty)$.

14.29. Пусть $A \subset R^n$, $f : A \to R^1$ — функция такая что $f(x) > 0$ для всех $x \in A$. Функция f называется *логарифмически выпуклой* на A, если функция $\ln f$ является выпуклой на A.

1. Верно ли, что если f выпукла на A и $f(x) > 0$ для всех $x \in A$, то f — логарифмически выпуклая функция?
2. Верно ли, что если f — логарифмически выпуклая функция, то f — выпуклая функция?

14.30. Описать все выпуклые ограниченные функции, определенные на всем пространстве R^n.

14.31. Пусть A — выпуклое подмножество R^n, $f : A \to R^1$ — выпуклая функция. Верно ли, что если множество $\mathrm{epi} f$ замнутое, то A замкнутое множество?

14.32. Пусть A — выпуклое подмножество R^n, $f : A \to R^1$ — выпуклая функция. Верно ли, что если множество $\mathrm{epi} f$ замнутое, то $f \in C(A)$?

14.33. Пусть $f : R^2 \to R^1$,

$$f(u_1, u_2) = \min\{x_1(1 - u_1) + x_2(1 - u_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}.$$

Доказать, что функция f вогнута.

14.34. Пусть $f \in C^2(0, \infty)$. Доказать, что если функция $g(x) = xf(x)$ выпукла на $(0, \infty)$, то функция $h(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ также выпукла на $(0, \infty)$.

14.35. Пусть $p : R^n \to \overline{R}$ и обладает следующими свойствами:
1) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in R^n$;
2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для всех $x \in R^n, \lambda > 0$;
3) $p(0) = 0$.

Доказать, что функция p является выпуклой функцией.

14.36. Пусть $f : A \times B \to R^1$ такова, что $f(x_1, x_2)$ выпукла по x_1 при каждом фиксированном x_2 и выпукла по x_2 при каждом фиксированном x_1. Следует ли отсюда, что f является выпуклой на $A \times B$?

14.37. Пусть $f : R^n_+ \to R^1$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_i > 0.$$

Получить условия на ε_i, при выполнении которых функция f будет вогнутой на R^n_+.

14.38. Пусть M_n — совокупность всех квадратных матриц порядка n над полем вещественных чисел. Определим функцию $f : M_n \to R^1, f(X) = \mathrm{tr} X$. Доказать, что f — выпуклая функция.

14.39. Отображение $f : R^n \to R^m$ называется *изометрией,* если для всех $x, y \in R^n$ справедливо равенство

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

Верно ли, что если f — изометрия, A — выпуклое множество, то множество $f(A)$ также выпукло.

14.40. Пусть A — выпуклый компакт R^n, $b \in R^n, b \neq 0$. Определим функцию $f : A \to R^1$ вида

$$f(a) = \sup\{\lambda \mid -\lambda b \in A - a\}.$$

Доказать, что f является вогнутой функцией.

§ 15. Индивидуальные задания для студентов

ЗАДАНИЕ 1

Найти наименьшее положительное k при котором множество

$$X = \left\{x \in R^2 \;\middle|\; (ax_1^2 + 1)x_2 \leqslant bx_1,\ x_2 \geqslant k\right\}$$

является выпуклым.

№ вар.	a	b	№ вар.	a	b
1	2	1	2	1	5
3	4	2	4	5	1
5	3	4	6	1	2
7	5	3	8	3	1
9	4	5	10	2	3
11	2	6	12	1	3

ЗАДАНИЕ 2

Написать уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$X = \left\{x \in R^3 \;\middle|\; \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{16} \leqslant \frac{x_3}{12}\right\}$$

в точке $x_0 = (a, b, c)$.

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	2	4	24	2	1	2	6
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{3}$	4	1	1	$\frac{15}{4}$
5	2	8	60	6	6	4	120
7	2	3	$\frac{75}{4}$	8	-2	-2	15
9	2	6	39	10	-3	-12	135
11	2	1	$\frac{51}{4}$	12	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$

ЗАДАНИЕ 3

Проверить, является ли точка x_0 крайней точкой многогранника $X = \mathrm{co}\{x^1, x^2, x^3, x^4, x_0\}$, где

$$x^1 = (0; -1; 2),\ x^2 = (2; -1; -2),\ x^3 = (2; 5; 7),$$
$$x^4 = (-3; -2; -4),\ x_0 = (a, b, c).$$

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	2	4	−4	2	1	2	6
3	−3	−2	3	4	1	1	15
5	2	8	60	6	6	−4	2
7	2	3	−5	8	−2	−2	15
9	2	6	9	10	−3	−12	5
11	2	1	−4	12	3	4	8

ЗАДАНИЕ 4

Написать уравнение гиперплоскости, опорной к множеству

$$X = \left\{x \in R^3 \;\middle|\; x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} \leqslant 1\right\},$$

и отделяющей его от точки $x^0 = (a, b, c)$.

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	1	1	−1	2	−1	2	−2
3	−3	−2	0	4	1	−1	3
5	−2	1	2	6	−1	−4	−2
7	−2	−3	−1	8	−2	−2	2
9	2	1	3	10	−3	−2	−5
11	2	1	−4	12	−3	1	2

ЗАДАНИЕ 5

Найти расстояние по Хаусдорфу между множествами $A = \mathrm{co}\{a_1, b_1\}$, $B = \mathrm{co}\{a_2, b_2\}$.

№ вар.	a_1	b_1	a_2	b_2
1	$(1, 1)$	$(-1, 3)$	$(0, -2)$	$(2, -3)$
2	$(-1, 3)$	$(2, -3)$	$(-2, 1)$	$(3, 4)$
3	$(1, -3)$	$(2, -1)$	$(-2, 1)$	$(-3, 4)$
4	$(0, 3)$	$(2, -3)$	$(2, 1)$	$(3, -4)$
5	$(1, 0)$	$(2, -3)$	$(-2, 1)$	$(3, 4)$
6	$(2, 0)$	$(1, -3)$	$(-2, 1)$	$(3, 4)$
7	$(3, 1)$	$(2, -3)$	$(-2, 2)$	$(3, 4)$
8	$(2, -3)$	$(2, 0)$	$(-2, 1)$	$(-3, 4)$
9	$(-1, 1)$	$(0, -3)$	$(-2, 1)$	$(3, 4)$
10	$(-1, 2)$	$(0, -3)$	$(-2, 1)$	$(1, 4)$
11	$(-1, -3)$	$(2, -3)$	$(-2, -1)$	$(3, 4)$
12	$(-1, 6)$	$(1, -3)$	$(-2, 1)$	$(0, 4)$

ЗАДАНИЕ 6

Для каждой точки $A(a, 1), B(b, 1), C(-2, 0)$ определить, при каких значениях параметра k она принадлежит относительной внутренности множества D, задаваемого системой неравенств

$$\begin{cases} -3x_1 + (b+2)x_2 \leqslant 6, \\ 5x_1 + 2x_2 \geqslant -10, \\ 2x_1 - cx_2 \leqslant 5c, \\ kx_1 - x_2 \leqslant -2k, \\ 6x_1 - (b-c)x_2 \leqslant 3(b+c). \end{cases}$$

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	$1/3$	3	5	2	0	4	6
3	$-2/3$	2	4	4	1	7	8
5	1	7	9	6	$-2/3$	2	5
7	$-1/3$	3	4	8	0	4	5
9	$1/3$	5	8	10	$2/3$	6	8
11	-1	1	2	12	-1	1	3

ЗАДАНИЕ 7

Найти сумму множеств $A+B$, где $A = \mathrm{co}\{(1,2),(1,-3),(a,b)\}$, $B = \mathrm{co}\{(0,-1),(1,0),(c,d)\}$.

№ вар.	a	b	c	d	№ вар.	a	b	c	d
1	1	-1	-2	2	2	-2	3	4	5
3	-2	-3	-4	-1	4	3	1	1	3
5	2	4	4	2	6	-1	-1	-2	2
7	2	1	2	-1	8	3	-2	2	-3
9	1	3	3	-2	10	2	-3	-2	4
11	-3	-3	-2	4	12	6	-3	-2	0

ЗАДАНИЕ 8

Найти опорную функцию множеств A, B.

I. A — отрезок с концами в точках $(a,b),(c,d)$.

№ вар.	a	b	c	d	№ вар.	a	b	c	d
1	1	-1	-2	2	2	-2	3	4	5
3	-2	-3	-4	-1	4	3	1	1	3
5	2	4	4	2	6	-1	-1	-2	2
7	2	1	2	-1	8	3	-2	2	-3
9	1	3	3	-2	10	2	-3	-2	4
11	-3	-3	-2	4	12	6	-3	-2	0

II. $B = \{(x, y) \mid a|x| + b|y| \leqslant c.\}$

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	2	3	6	2	1	4	16
3	2	5	20	4	2	7	28
5	3	7	21	6	2	3	18
7	3	4	24	8	5	6	30
9	3	5	30	10	5	7	35
11	5	9	90	12	11	2	44

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1.1. Нет. Рассмотрим два квадратных трехчлена:

$$y_1 = x^2 - 2x + 1,\ y_2 = x^2 + 2x + 1.$$

Пусть $\alpha = 0,5$ и рассмотрим квадратный трехчлен $y = 0,5y_1 + 0,5y_2 = x^2 + 1$, который не имеет вещественных корней.

1.2. Может. Пусть

$$A = \{-n \mid n = 1, 2, \ldots,\},\ B = \left\{n + \frac{1}{n} \mid n = 2, 3, \ldots,\right\}.$$

Множества A, B являются замнутыми. Множество $A+B$ содержит последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=2}^{\infty}$, предельная точка которой не принадлежит $A + B$.

1.3. Пусть для любых неотрицательных чисел λ_1, λ_2 верно равенство

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A \tag{15.1}$$

и $\alpha \in [0, 1]$. Возьмем в качестве $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = 1 - \alpha$. Получаем, что верно равенство

$$A = \alpha A + (1 - \alpha)A,$$

из которого сразу следует, что A — выпуклое множество.

Пусть теперь A — выпуклое множество. Если одно из чисел λ_1, λ_2 равно нулю, то равенство (15.1) верно. Отметим, что всегда справедливо включение

$$(\lambda_1 + \lambda_2)A \subset \lambda_1 A + \lambda_2 A.$$

Пусть $\lambda_1\lambda_2 > 0$ и $z \in \lambda_1 A + \lambda_2 A$. Тогда

$$z = \lambda_1 x + \lambda_2 y = (\lambda_1 + \lambda_2)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}x + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}y\right] = (\lambda_1 + \lambda_2)w.$$

Точка
$$w = \Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}x + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}y\Big] \in A$$
в силу выпуклости множества A. Поэтому точка $z \in (\lambda_1+\lambda_2)A$, что и требовалось доказать.

1.4. Нет. Пусть A — множество рациональных чисел R^1.

1.5. Да. Предположим, что множество A не является выпуклым. Это означает, что существуют точки $x_0, y_0 \in A$, число $\alpha \in (0,1)$ такие, что точка $z = \alpha x_0 + (1-\alpha)y_0) \notin A$, причем $\alpha \neq 0,5$. Определим множества B_{1i}, B_{2i} и точки x_i, y_i следующим образом:
$$B_{10} = \{\beta x_0 + (1-\beta)y_0 \bigm| \beta \in (0, 0,5)\},$$
$$B_{20} = \{\beta x_0 + (1-\beta)y_0 \bigm| \beta \in (0,5, 1)\}.$$
Точка z принадлежит одному из множеств B_{10}, B_{20}. Если $z \in B_{10}$, то полагаем $x_1 = 0,5x_0 + 0,5y_0, y_1 = y_0$, если $z \in B_{20}$, то полагаем $x_1 = x_0, y_1 = 0,5x_0 + 0,5y_0$. Предположим, что множества $B_{1j}, B_{2j}, j = 0, \ldots i-1$ и точки $x_j, y_j, j = 0, 1, \ldots, i$ определены. Определяем множества B_{1i}, B_{2i} и точки x_{i+1}, y_{i+1}.
$$B_{1i} = \{\beta x_i + (1-\beta)y_i \bigm| \beta \in (0, 0,5)\},$$
$$B_{2i} = \{\beta x_i + (1-\beta)y_i \bigm| \beta \in (0,5, 1)\}.$$
Если $z \in B_{1i}$, то полагаем $x_{i+1} = 0,5x_i + 0,5y_i$, $y_{i+1} = y_i$. Если $z \in B_{2i}$, то полагаем $x_{i+1} = x_i$, $y_{i+1} = 0,5x_i + 5y_i$. Полученное семейство точек x_i, y_i обладает следующими свойствами:

a) $x_i, y_i \in A$;

b) $z \in [x_i, y_i] = \{\gamma x_i + (1-\gamma)y_i \bigm| \gamma \in [0,1]|\}$;

c) $[x_{i+1}, y_{i+1}] \subset [x_i, y_i]$ для всех i;

d) $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i - y_i\| = 0$.

Следовательно, по свойству вложенных отрезков
$$z = \lim_{i\to\infty} = \lim_{i\to\infty} y_i.$$

В силу замкнутости A получем, что $z \in A$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

1.6. Да. Пусть

$$x, y \in M, \ z = 0,5x + 0,5y.$$

Тогда

$$\begin{gathered}(Az, z) = 0,25(Ax, x) + 0,25(Ay, y) + 0,5(Ax, y) = \\ = 0,5(Ax, x) + 0,5(Ay, y) - 0,25(A(x - y), x - y) \leqslant \\ \leqslant 0,5(Ax, x) + 0,5(Ay, y) \leqslant 1.\end{gathered}$$

Поэтому, на основании утверждения из предыдущей задачи множество A выпукло.

1.7. $k = 1$.

1.11. Нет. Пусть $A = \{(-1; 0), (1, 0)\}, B = \{(0; 0)\}$.

1.12. Нет. Пусть $A = (0; \infty)$.

1.13. Нет. Пусть $A = \{(x, y) \in R^2 \mid y < \sqrt{2}x, \ x, y - \text{целые} \}$.

1.21. Нет. Пусть $A = \{(1; 1), (2; 2)\}$.

1.30. Пусть $A \cap B$ состоит из k отрезков. Концы отрезков $A \cap B$ являются концами отрезков A или B. Следовательно, рассматривая концы отрезков $A \cap B$, получаем

$$2k \leqslant 2n + 2m. \tag{15.2}$$

Однако при этом левый конец отрезка из всех концов A или B либо не принадлежит $A \cap B$, либо входит в концы A и в концы B. Значит, правую часть неравенства (15.2) можно уменьшить на единицу. Аналогично с самым правым концом. В итоге получаем неравенство

$$2k \leqslant 2n + 2m - 2, \text{ или } k \leqslant n + m - 1.$$

1.31. Нет.

2.2. Нет. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 0\} \cup \{(0, 1)\}.$$

Тогда

$$\mathrm{co}A = \{(x,y) \in R^2 \mid y \in [0,1)\} \cup \{(0,1)\}.$$

2.3. Нет. Пусть $A = \{a\}, B = \{b\}, a \neq b, a, b \in R^n$.

2.4. Нет. Пусть $A = \{(-1;0),(1;0)\}, B = \{(0;0)\}$.

2.8. Пусть $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b\}$ разбиение отрезка $[a,b]$. Рассмотрим

$$S(\sigma, f) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)\Delta_i, \ \tau_i \in [t_{i-1}, t_i], \ \Delta_i = t_i - t_{i-1}.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\Delta_i}{b-a} = 1$ и $\Delta_i \geqslant 0$, то $S(\sigma, f) \in \mathrm{co}A$ для любого разбиения σ и любого набора точек τ_i. Множество $\mathrm{co}A$ является компактным. Так как функция f интегрируема, то

$$f_0 = \lim_{\mathrm{diam}\sigma \to 0} S(\sigma, f)$$

и поэтому $f_0 \in \mathrm{co}A$.

2.14. Возьмем прямую l, не параллельную никакой прямой, проходящей через две отмеченные точки. Проведем 401 прямую параллельно l так, чтобы в каждой из 400 полос между соседними прямыми находилось ровно 5 отмеченных точек. Осталось воспользоваться решением задачи **2.13**.

2.15. Рассмотрим точку

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda a_i + (1-\lambda)h(a_i)).$$

Имеем $a \in A_\lambda$. Так как h – взаимно однозначное отображение, то

$$a = \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i + \frac{(1-\lambda)}{n}\sum_{i=1}^{k} h(a_i) =$$

$$= \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i + \frac{(1-\lambda)}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} a_i.$$

2.16. См. решение задачи **2.15.**

2.17. Рассмотрим выпуклую оболочку всех точек. Получим некоторый многоугольник. Пусть AB — произвольная сторона этого многоугольника. Среди оставшихся точек выберем точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом. Окружность, описанная около треугольника ABC и будет искомой.

3.1. $3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$. Достаточно среди неравенств, задающих A, найти то, которое не выполняется для точки.

3.2. Нет. Пусть

$$A = \{(x, 0) \in R^2 \mid x \in [-1, 1]\}, \ B = \{(0, y) \in R^2 \mid y \in [-1, 1].$$

3.5. Пусть $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Следовательно, A_1, A_2 строго отделимы. Это означает, что существуют $p \in R^n, p \neq 0, \mu \in R^1$ такие, что

$$(p, x) < \mu \text{ для всех } x \in A_1,$$
$$(p, x) > \mu \text{ для всех } x \in A_2.$$

Пусть $x \in A_1, y \in A_2$. Рассмотрим функцию $f : [0, 1]) \to R^1$

$$f(t) = t(p, x) + (1 - t)(p, y).$$

Имеем $f(0) = (p, y) > \mu$, $f(1) = (p, x) < \mu$. Поэтому существует $t_0 \in (0, 1)$, что $f(t_0) = \mu$. Так как $x, y \in A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cup A_2$ выпукло, то $t_0 x + (1 - t_0)y \in A_1 \cup A_2$. Пусть $t_0 x + (1 - t_0)y \in A_1$, тогда $(p, t_0 x + (1 - t_0)y) < \mu$, что противоречит ранее доказанному равенству $(p, t_0 x + (1 - t_0)y) = \mu$. Полученное противоречие и доказывает, что A_1, A_2 имеют общие точки.

3.8. Пусть $z \in A$. Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \left\{x \mid \frac{x_1}{z_1} + \frac{x_2}{z_2} + \cdots + \frac{x_n}{z_n} = n\right\},$$

и пусть u — вершина, ближайшая к началу координат. Тогда $u \in H_{=}\{x \mid \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{z_i} \leqslant n\}$. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{z_i} \leqslant n$. Так как $z_i, u_i > 0$, то $u_i \geqslant n z_i$.

3.10. Пусть каждый их многоугольников A, B, C можно отделить от двух других. Докажем, что их нельзя пересечь одной прямой. Предположим противное: X, Y, Z — точки A, B, C, лежащие на одной прямой. Тогда одна из точек лежит между двумя другими. Пусть Y лежит между X, Z. Следовательно, B нельзя отделить от A и C, так как в противном случае точка Y, должна быть отделена от точек A, C.

Пусть теперь многоугольники нельзя пересечь одной прямой. Отметим, что в этом случае $A \cap B \cap C = \varnothing$. Рассмотрим всевозможные выпуклые оболочки точек $X \in A, Y \in B, Z \in C$ и для каждого треугольника XYZ найдем высоту из вершины Y. Выберем треугольник, у которого эта высота наименьшая. Пусть это будет треугольник $X_0Y_0Z_0$. Прямая, перпендикулярная высоте и проходящая через середину высоты, не пересекает многоугольники B, A, C, так как в противном случае существовал бы треугольник с меньшей высотой, выходящей из Y_0.

4.1. Нет. Пусть

$$A = \{(x, y) \in R^2 \mid x = 1, y \in [-1, 1]\},$$
$$B = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in [-1, 1], y \in [-1, 1]\}.$$

Тогда $\mathrm{ri}B = \mathrm{Int}B, \mathrm{ri}A = \{(x, y) \in R^2 \mid x = 1, y \in (-1, 1)\}$ и $\mathrm{ri}A \cap \mathrm{ri}B = \varnothing$.

4.8. Нет. Пусть $A = [-1, 0], B = [0, 1]$.

5.3. Взять $\gamma = \sup\limits_{a \in A}(p, a)$.

5.4. Нет. Пусть $A = \{x, y) \in R^2 \mid xy \geqslant 1, x > 0\}$. Тогда $A \subset H_+ = \{z \in R^2 \mid (p, z) \geqslant 0,\ p = (0, 1)\}$. Однако любая гиперплоскость $H = \{(x, y) \mid y = \alpha\}$ не является опорной.

5.6. а) Нет. Пусть A — круг в R^2. Проекция A на любую гиперплоскость (прямую) — отрезок.

5.11. Нет. Пусть $A = A_1 \cap A_2$, где

$$A_1 = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \leqslant 2\},$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leqslant 2\}.$$

В точках $(0;\pm 1)$ A имеет бесконечно много опорных гиперплоскостей.

6.8. Нет. Пусть $A = \{(x,y) \in R^2 \bigm| (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Тогда $\mathrm{con}A = \{(x,y) \in R^2 \bigm| x > 0\} \cup \{(0;0)\}$.

6.10. Нет. Пусть

$$K = \{(x,y) \bigm| x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \cup \{(x,y) \bigm| x \leqslant 0, y \leqslant 0\}.$$

6.12. Нет. Пусть $A = B = \{1\}$. Тогда

$$\mathrm{con}(A \times B) = \{(\lambda,\lambda) \mid \lambda \geqslant 0\},$$
$$\mathrm{con}A \times \mathrm{con}B = \{(x,y) \in R^2 \bigm| x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

6.14. Нет. Пусть $A = \{(0;1)\}, B = \{(1;0)\}$. Тогда

$$\mathrm{con}(A + B) = \{(\lambda,\lambda) \bigm| \lambda \geqslant 0\},$$
$$\mathrm{con}A + \mathrm{con}B = \{(x,y) \in R^2 \bigm| x \geqslant 0, y \geqslant 0\}.$$

6.20. Да. $K = R^n$.

7.3. Пусть

$$A = \mathrm{co}\Big(\{x \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\} \cup$$
$$\cup \{x \in R^3 \bigm| x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 \in [-1,1]\}\Big).$$

Тогда точка $(1;0;0)$ принадлежит замыканию множества крайних точек, а сама крайней точкой не является.

7.9 $k = 1$. Воспользоваться теоремой 7.5.

7.13. Пусть $A = \mathrm{co}\{D_1((-2;0)), D_1((2;0))\}$. Тогда точка $(2;1)$ является крайней, но не является выступающей.

7.14. 1). $Ae_i, i = 1,\ldots,n$, где e_i — стандартный ортонормированный базис R^n; 2). Пусть $j \in \{0,\ldots,n-1\}$, тогда точка $x = (x_1,\ldots,x_n)$ такая, что $x_1 = \cdots = x_j = 0$, $x_{j+1} = \cdots = x_n = \frac{1}{n-j}$ будет крайней точкой.

7.18. Пусть

$$A = \{x \in R^3 \mid x_1 = x_2 = 0\},\ H = \{x \in R^3 \mid x_3 = 0\}.$$

Тогда $A \cap H = \{(0;0;0)\}$, но точка $(0;0;0)$ не является крайней точкой множества A.

8.1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — заданные точки. Рассмотрим множества

$$A_i = \{x \in R^2 \mid \|x - a_i\| \leqslant 1\}.$$

A_i — выпуклые замкнутые множества, любые три из которых пересекаются. Следовательно, по теореме Хелли все множества A_i имеют общую точку. Пусть $a \in \bigcap\limits_i A_i$. Тогда $\|a - a_i\| \leqslant 1$ и, следовательно, круг единичного радиуса с центром в точке a содержит все точки a_i.

8.3. Каждый пятиугольник не содержит ровно две вершины семиугольника, поэтому любые три пятиугольника имеют общую вершину, а значит, пересекаются. Следовательно, применима теорема Хелли.

8.4. Докажем, что любые три точки множества A можно накрыть кругом радиуса $r = \frac{\sqrt{3}}{3}d$. Рассмотрим произвольные три точки множества A и рассмотрим треугольник с вершинами в этих точках. Отметим, что каждая сторона треугольника не превосходит d. Если треугольник прямоугольный или тупоугольный, то круг, построенный на его большей стороне как на диаметре, будет содержать треугольник. Пусть треугольник остроугольный. Один из его углов α не меньше $\frac{\pi}{3}$. Тогда радиус описанного круга не превосходит

$$\frac{d}{\sin\alpha} \leqslant \frac{d}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при решении задачи 8.1.

8.5. Достаточность. Каждой функции f вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ поставим в соответствие точку $(a, b, c) \in R^3$ и рассмотрим множества

$$A_k = \{(a, b, c) \mid |f(x_k) - F(x_k)| < \varepsilon\}.$$

Докажем, что множества A_k выпуклы. Пусть

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in A_k, \alpha \in [0,1],$$
$$f_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1,\ f_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2,$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c = \alpha f_1(x) + (1-\alpha) f_2(x).$$

Тогда

$$\begin{gathered} |F(x_k) - f(x_k)| = \\ = |\alpha F(x_k) + (1-\alpha)F(x_k) - (\alpha f_1(x_k) + (1-\alpha) f_2(x_k)| = \\ = |\alpha(F(x_k) - f_1(x_k)) + (1-\alpha)(F(x_k) - f_2(x_k))| \leqslant \\ \leqslant \alpha |F(x_k) - f_1(x_k)| + (1-\alpha)|F(x_k) - f_2(x_k)| < \\ < \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon = \varepsilon. \end{gathered}$$

Из условия задачи следует, что любые четыре множества из набора $\{A_k\}_{k=1}^n$ пересекаются. Поэтому по теореме Хелли все множества $\{A_k\}_{k=1}^n$ имеют общую точку $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$.

Функция $f(x) = \hat{a}x^2 + \hat{b}x + \hat{c}$ и будет искомой.

9.1. Нет. Функция g не удовлетворяет условию $g(\lambda\varphi) = \lambda g(\varphi)$ для всех $\lambda \geqslant 0$.

9.2. 5) $c(A, \varphi) = 0,5\big(|\varphi_1 + \varphi_2| + |\varphi_1 - \varphi_2|\big)$;
6) $c(A, \varphi) = \begin{cases} R\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2},\ \varphi_2 \geqslant 0; \\ R|\varphi_1|,\ \varphi_2 < 0; \end{cases}$

9.10. а) В силу следствия 9.7 справедливо равенство

$$\sum_i \varphi_i \frac{\partial c}{\partial \varphi_i}(A, \varphi) = c(A, \varphi).$$

Дифференцируя данное равенство по φ_j, получим

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi_j}(A, \varphi) = \frac{\partial c}{\partial \varphi_j}(A, \varphi) + \sum_i \varphi_i \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\Big(\frac{\partial c}{\partial \varphi_i}(A, \varphi)\Big),$$

откуда следует а).

10.1. $\|a_1 - a_2\| + |r_1 - r_2|$.

12.1. Нет. Пусть $A = [0, 2]$, $B = \{-1; 1\}$, $C = [-1, 1]$.

12.2. Нет. Пусть $A = R^2$, $B = \{0\}$, $C = R^2_+$.

12.7. $D_{\sqrt{2}}(-1; 0) \cap D_{\sqrt{2}}(1; 0)$.

12.11. Пусть $n = 2$ и

$$A = D_1(0; 0),\ B = \mathrm{co}\{(0; 0), (1; 0)\}.$$

Тогда $A \overset{*}{-} B = D_1(0; 0) \cap D_1((-1; 0)$.

14.1. Нет. Пусть $f(x) = x^3$, тогда для любого t $M(t) = (-\infty, \sqrt[3]{t}]$ — выпуклое множество.

14.8. Нет. Пусть $A = \{x \in R^n \mid \|x\| < 2, \}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \|x\| \leqslant 1, \\ +\infty, & 1 < \|x\| < 2. \end{cases}$$

Тогда $\mathrm{epi} f = D_1(0) \times [0, \infty)$ — замкнутое множество.

14.11. $A = \{(x, y) \in R^2 \bigm| y \leqslant -\frac{1}{x}, x > 0\}$, $f(x, y) = y$.

14.12. См. решение задачи 14.14.

14.13. Пусть $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^2 + y^2 < 1, \\ \dfrac{1}{1 + \varphi}, & \text{если}, x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

где $\varphi \in (0, 2\pi]$ — полярный угол точки (x, y).

14.14. Пусть $\mathrm{ext} A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, $\max\limits_i f(a_i) = f(a_j)$. Из теоремы Крейна-Мильмана следует, что для любой точки $x \in A$ существуют $\alpha_i \geqslant 0, \sum\limits_i \alpha_i = 1$ и такие, что $x = \sum\limits_i \alpha_i a_i$. Из выпуклости функции f получаем

$$f(x) = f\big(\sum_i \alpha_i a_i\big) \leqslant \sum_i \alpha_i f(a_i) \leqslant f(a_j).$$

Из полученного неравенства следует, что максимальное значение функции f достигается в крайней точке a_j.

14.17. Пусть M — произвольное вещественное число. Так как f неограничена на A, то существует точка $z \in A$ такая, что $f(z) > M$. Возьмем произвольную точку $x \in \mathrm{Int} A$ и рассмотрим семейство точек $x(\alpha) = \alpha y + (1-\alpha)z, \alpha \in [0,1]$. Так как $x(\alpha) \in \mathrm{Int} A$ при $\alpha > 0, x(0) = z$, функция f непрерывна, то для для всех α, близких к нулю, будет выполняться неравенство $f(x(\alpha)) > M$.

14.18. Нет. Пусть $A = [0,1] \times [0, \infty)$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 1, \\ y, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

14.20. Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{\pi(i)})$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_{\pi(i)})$, то можно считать, что

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n,\ y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n \text{ и } x_i \neq y_i \text{ для всех } i.$$

Обозначим

$$D_k = \frac{f(x_k) - f(y_k)}{x_k - y_k},\ X_k = \sum_{i=1}^{k} x_i,\ Y_k = \sum_{i=1}^{k} y_i.$$

По условию $X_k \geqslant Y_k, k = 1, \ldots, n-1, X_n = Y_n$. В силу следствия 14.2 имеем $D_k \geqslant D_{k+1}$ и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (X_k - Y_k)(D_k - D_{k+1}) + (X_n - Y_n) D_n \geqslant 0.$$

Используя преобразование Абеля

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n, \text{ где } A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i,$$

получаем $\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k) D_k \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

14.21. Воспользуемся результатом задачи 14.20. Вектор $x = (a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1})$ мажорирует вектор $y = (a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, a)$, где $a = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1}$. Поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} f(y_i)$. Следовательно, справедливо неравенство

$$f(a_2) + \cdots + f(a_{2n}) + f(a) \leqslant f(a_1) + \cdots + f(a_{2n-1}),$$

что и требовалось доказать.

14.22. Можно считать, что справедливо неравенство $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Пусть $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Тогда

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \succ \Big(\frac{S}{n}, \frac{S}{n}, \ldots, \frac{S}{n}\Big).$$

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является выпуклой на $(0, \infty)$ и поэтому, в силу результата задачи 14.20, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f\big(\frac{S}{n}\big),$$

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{1}{S/n} + \cdots + \frac{1}{S/n} = \frac{n^2}{S}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на S, получаем требуемое.

14.23. Пусть $f : R^1 \to R^1$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

f — квазивыпуклая функция. Пусть $u = -1, v = 1, \alpha = 0;75$. Тогда $z = 0;5$. Неравенство $f(u) < f(v)$ верно, а неравенство $f(z) < f(v)$ не выполняется.

14.24. Пусть $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leqslant 2\}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| + |y| = 1, \\ 0, & |x| + |y| \neq 1. \end{cases}$$

14.25. $f : R^2 \to R^1$, $f(x,y) = -xy$. Взяв $u = (1;1)$, $v = (-0,5;-0,5)$, $\alpha = \dfrac{1}{3}$ имеем $f(u) < f(v), z = (0;0), f(v) < f(0)$. Кроме того $f(z) = f(0) > \max\{f(u), f(v)\}$.

14.26. Пусть $0 \leqslant t_1 < t_2$.
a) $t_2 - t_1 < h$. Воспользуемя теоремой 14.10 для точек $t_1, t_2, t_1{+}h$ и $t_2, t_1{+}h, t_2{+}h$. Получаем справедливость неравенств

$$\frac{-f(t_1+h)+f(t_1)}{h} \leqslant \frac{-f(t_1+h)+f(t_2+h)}{t_1+h-t_2},$$
$$\frac{-f(t_1+h)+f(t_2)}{t_1+h-t_2} \leqslant \frac{-f(t_2+h)+f(t_2)}{h}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{-f(t_1+h)+f(t_1)}{h} \leqslant \frac{-f(t_2+h)+f(t_2)}{h}, \text{ или } g(t_1) \geqslant g(t_2).$$

b) $t_2 - t_1 > h$. Рассмотрим разбиение σ отрезка $[t_1, t_2]$ вида

$$t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_s = t_2,$$

причем $\tau_{j+1} - \tau_j < h$. На основании пункта a) будем иметь

$$g(\tau_1) \geqslant g(\tau_2) \geqslant \ldots \geqslant g(\tau_s) = g(t_2).$$

14.27. Если $y = 0$, неравенство верно. Пусть $y > 0$. Воспользуемся результатом задачи 14.26. Возьмем $h = y$ рассмотрим функцию $g(t) = f(t+y) - f(t)$. По ранее доказанному, g не возрастает. Значит, для всех $x > 0$ справедливо неравенство

$$g(x) \leqslant g(0), \quad \text{или} \quad f(x+y) - f(x) \leqslant f(y) - f(0),$$

откуда следует требуемое неравенство.

14.28. Воспользуемя теоремой 14.10, полагая $z = 0$. Получаем, что если $x > y$, то

$$\frac{f(y)-f(0)}{y-0} \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x-0}, \quad \text{или} \quad g(y) \leqslant g(x),$$

что и требовалось доказать.

14.29. 1) Нет. Пусть $f(x) = x, x \in (0, \infty)$. 2) Да.

14.30. $f(x) = const$.

14.36. Нет. $f(x_1, x_2) = -x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{3}{4}} : R_+^2 \to R^1$ является выпуклой по каждому из аргументов, но не является выпуклой как функция двух переменных.

14.37. $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n \leqslant 1$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986.

2. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

3. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

4. *Васильев О.В., Аргучинцев А.В.* Методы оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Физматлит, 1999.

5. *Белоусов Е.Г.* Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.

6. *Мину М.* Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

7. *Лутманов С.В., Аюпов В.В., Гамилова Л.В.* Задачи оптимизации в конечномерных пространствах. Пермь. Изд-во Перм. ун-та, 2007.

8. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высш. шк., 1986.

9. *Яглом И.М., Болтянский В.Г.* Выпуклые фигуры. М: Гостехлит., 1951.

10. *Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.* Теорема Хелли. М: Мир, 1968.

11. *Хадвигер С., Дебруннер С.* Комбинаторная геометрия плоскости. М: Наука, 1965.

12. *Партхасаратхи Т., Рагхаван Т.* Некоторые вопросы игр двух лиц. М: Мир, 1974.

13. *Рокафеллер Р.* Выпуклый анализ. М: Мир, 1973.

14. *Благодатских В.И.* Введение в оптимальное управление. М: Высш. шк., 2001.

15. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М: Наука, 1973.

16. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во Моск. ун-та., 1990.

17. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

18. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М: Физматлит, 2004.

19. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

20. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972.

21. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции. М.: Физматлит, 2006.

22. *Бобылев Н.А.* Об одной теореме Хелли// Математические заметки. 1995. Т. 58, вып. 6. С.818-828.

23. *Киселев Ю.Н.* Линейная теория быстродействия с возмущениями. М.: Изд-во Моск. ун-та., 1986.

24. *Петров Н.Н.* Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, N 4. С. 606–617.

25. *Чикрий А.А., Раппопорт И.С.* Линейная задача преследования несколькими управляемыми объектами//Кибернетика. 1978. N 3. С. 86-92.

26. *Пшеничный Б.Н.* Линейные дифференциальные игры// Автоматика и телемеханика. 1968. N 1. С 65-78.

27. *Половинкин Е.С.* Выпуклый анализ. М.:МФТИ, 2006.

28. *Никольский М.С.* Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх. М.: Изд-во Моск. ун-та., 1984.

Содержание

Николай Никандрович Петров

ВВЕДЕНИЕ В ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

Подписано в печать 18.09.09. Формат $60\times84\ ^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 7,8. Усл. п. л. 9,6.
Тираж 30 экз. Заказ №