

Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences
Lomonosov Moscow State University

International Conference

DIFFERENTIAL EQUATIONS and TOPOLOGY

**Dedicated to the Centennial Anniversary of
Lev Semenovich Pontryagin
(1908–1988)**

ABSTRACTS

Moscow, June 17–22, 2008

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Международная конференция

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТОПОЛОГИЯ

**посвященная 100-летию со дня рождения
Льва Семёновича Понтрягина
(1908–1988)**

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва, 17–22 июня 2008 г.

**Международная конференция
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТОПОЛОГИЯ
посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина
Москва, 17–22 июня 2008 г.**

ОРГАНИЗАТОРЫ

Математический институт имени В.А. Стеклова РАН
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

ПРОВОДИТСЯ ПРИ ПОДДЕРЖКЕ

Российская академия наук
Российский фонд фундаментальных исследований
Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ
Механико-математический факультет МГУ
Российский университет дружбы народов

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Сопредседатели:

Д.В. Аносов
В.В. Козлов

Члены программного комитета:

А.А. Аграчев, В.И. Арнольд, В.М. Бухштабер,
В.А. Васильев, А.Б. Васильева,
Р.В. Гамкрелидзе, А.А. Давыдов, В.А. Ильин,
Ф.М. Кириллова,
Ю.Н. Киселев (ответственный секретарь),
Н.Н. Красовский (зам. председателя),
А.В. Кряжмский, А.Б. Куржанский,
Ю.С. Ледяев, Г.И. Марчук,
Ю.А. Митропольский, Е.Ф. Мищенко
(зам. председателя), Е.И. Моисеев,
С.М. Никольский, С.П. Новиков,
А.Н. Паршин, А.М. Самойленко,
В.М. Тихомиров, Е.Л. Тонков,
Г.Л. Харатишвили, Л.П. Шильников,
R.S. Baheti, A.V. Balakrishnan, F.H. Clarke,
P. Gruber, F. Hirzebruch, A. Isidori,
G. Leitmann, Cz. Olech, J. Palis, M.M. Peixoto

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Сопредседатели:

Ю.С. Осипов (Президент РАН)
В.А. Садовничий (Ректор МГУ)

Члены оргкомитета:

Д.В. Аносов, С.М. Асеев (зам. председателя),
В.В. Белокуров,
Н.Л. Григоренко (зам. председателя),
А.Б. Жижченко,
В.М. Закалюкин (зам. председателя)
М.И. Зеликин, С.П. Коновалов, В.В. Козлов,
А.Б. Куржанский, А.В. Лукшин,
А.А. Мальцев, А.В. Михалев, А.С. Мищенко,
Е.Ф. Мищенко, Е.И. Моисеев,
М.С. Никольский, Н.Х. Розов, А.Г. Сергеев,
Л.Д. Фаддеев,
Е.Н. Хайлов (ответственный секретарь),
В.Н. Чубариков

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ	6
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	24
ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ	214
ТОПОЛОГИЯ	422
АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ	488

2. Ito K. "On stochastic differential equations *Memoirs*, American mathematical society, 4, 1-51 (1951).
3. Dixit A. *The Art of Smooth Pasting*. Princeton University, New Jersey, USA, (1993).
4. Hull J.C. *Options, Futures, and other derivative securities*, second edition. Prentice-Hall, London, United Kingdom, (1993).
5. Yeung D.W.K. and Petrosyan L.A. *Cooperative stochastic differential games*, Springer Verlag, (2006).

Иванов А.Г., Институт математики и механики, Екатеринбург, Россия (iagsoft@imm.uran.ru)

Ушаков А.В., Институт математики и механики, Екатеринбург, Россия (beerzone@olympus.ru)

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ СЕЧЕНИЙ МАКСИМАЛЬНОГО СТАБИЛЬНОГО МОСТА В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

CONSTRUCTING THE THREE-DIMENSIONAL SECTIONS OF THE MAXIMAL STABLE BRIDGE IN A LINEAR DIFFERENTIAL GAME

Рассматривается линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad x \in R^m, \quad u \in P \subset R, \quad v \in Q \subset R, \quad m \geq 3.$$

Цель первого игрока, распоряжающегося управлением u , — привести три выделенные компоненты фазового вектора x в момент окончания θ на выпуклое, замкнутое, ограниченное множество $M \subset R^3$. Интересы второго игрока, в ведении которого находится управление v , противоположны. Ограничения P и Q — отрезки.

С помощью стандартного преобразования [1, стр. 160] сделаем переход к трехмерной эквивалентной системе без фазовой переменной в правой части.

Требуется построить альтернированный интеграл Л.С. Понтрягина [2] или, что то же самое, — максимальный стабильный мост [1].

Излагаемая ниже схема алгоритма соответствует статье [3]. В начале 80-х годов М.А.Зархом была разработана программа на языке Фортран, реализующая алгоритм статьи. Сейчас создана новая версия, ориентированная на современную вычислительную технику.

Для построения максимального стабильного моста перейдем к аппроксимирующей игре, разбивая ось t с шагом Δ влево от момента θ точками t_i , где $i = 0, 1, \dots$, при этом $t_0 = \theta$. На каждом шаге замораживаем динамику эквивалентной системы. Результатом построений будут t -сечения $W_i = W(t_i) \subset R^3$ аппроксимирующего максимального стабильного моста W . Полагаем $W_0 = \tilde{M}$, где $\tilde{M}$ — многогранник, аппроксимирующий множество M .

Построение сечений происходит в итерационной попятной процедуре: на первом шаге на основе множества $\tilde{M}$ строится множество $W_1 = W(\theta - \Delta)$, которое также является выпуклым многогранником в R^3 ; на втором шаге на основе W_1 идет построение выпуклого многогранника $W_2 = W(\theta - 2\Delta)$ и т.д.

На каждом шаге попятной процедуры построение очередного t -сечения моста сводится к операциям над выпуклыми многогранниками, а именно, к построению суммы многогранника и отрезка (учет действий первого игрока) и построению геометрической разности [2] многогранника и отрезка (учет действий второго игрока).

Геометрической разности соответствует процедура овыпукления некоторой положительно однородной кусочно-линейной функции в R^3 , относительно которой априорно известны места нарушений её локальной выпуклости. Последнее позволяет провести операцию овыпукления экономно и быстро. Полученная на i -ом шаге выпуклая оболочка совпадает с опорной функцией многогранника W_i .

В докладе будут приведены примеры просчета сечений максимальных стабильных мостов для нескольких дифференциальных игр.

Созданную программу в дальнейшем предполагается использовать как составную часть программы синтеза адаптивного управления в линейных задачах с неизвестным уровнем динамической помехи.

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, (1974).
2. Понтрягин Л.С. "Линейные дифференциальные игры, 2" *Докл. АН СССР*, 175, No. 4, 764–766 (1967).
3. Зарх М.А., Пацко В.С. "Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка," *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*, No. 6, 162–169 (1987).

Исламов Г.Г., Удмуртский госуниверситет, Ижевск, Россия (ggislamov@udm.net)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ

DIFFERENCE-DIFFERENTIAL PROBLEM OF TEMPERATURE CONTROL

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ — произвольная точка криволинейной ортогональной системы координат, принадлежащая трёхмерному параллелепипеду $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Рассмотрим в течение времени $t \in [0, T]$ процесс изменения температуры $u(x, t)$ в параллелепипеде G с удельной теплоёмкостью $c(x)$,

плотностью $\rho(x)$ и коэффициентом теплопроводности $k(x)$ при воздействии на него тепловыми источниками и стоками плотности $F(x, t) = b(x)w(t)$, где при $t \in [0, T]$ имеем $w_{\min} \leq w(t) \leq w_{\max}$. Как известно [1], температура $u(x, t)$ должна удовлетворять для $(x, t) \in G \times (0, T)$ дифференциальному уравнению теплопроводности

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{p_i(x)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x)p_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + F(x, t). \quad (1)$$

Здесь $p_i(x) = \left(\prod_{j=1, j \neq i}^3 g_j(x) \right) / g_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, а $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ – метрические коэффициенты. Задачу управления температурой поставим следующим образом. Требуется построить такое допустимое кусочно-постоянное управление $w(t)$, при котором уравнение (1) имеет гладкое решение $u(x, t)$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, t) = \mu(x, t), x \in \partial G \quad (2)$$

и дополнительному ограничению вида

$$\alpha(x, t_i) \leq u(x, t_i) \leq \beta(x, t_i), i = 1, \dots, m \quad (3)$$

в области $x \in G$. Здесь функции $\alpha(x, t)$ и $\beta(x, t)$ задают диапазон изменения температуры внутри параллелепипеда G , а $t_i (0 < t_i < t_{i+1} < T)$ есть моменты наблюдения за температурой. Заметим, что мы не фиксируем начальную температуру $u(x, 0)$. Как раз её необходимо определить таким образом, чтобы с помощью управления $w(t)$ из допустимого диапазона $[w_{\min}, w_{\max}]$ можно было обеспечить заданный температурный режим внутри параллелепипеда G для указанной температуры $\mu(x, t)$ на границе ∂G этого параллелепипеда.

Поставленная задача порождает дифференциально-разностный аналог задачи управления температурой относительно выбранной системы узлов $x^J = (j_1 h_1, j_2 h_2, j_3 h_3)$, $h_k = (b_k - a_k) / N_k$, $k = 1, 2, 3$. Обозначим через F конечномерное пространство вещественнозначных функций, определённых на конечном множестве внутренних мультииндексов $J = (j_1, j_2, j_3)$ целочисленной решётки $0 \leq J \leq N = (N_1, N_2, N_3)$. Пусть вектор-функция $y : (0, T) \rightarrow F$ определяется равенством $y(t)[J] = u(x^J, t)$, а вектор $B \in F$ задаётся как $B[J] = \frac{b(x^J)}{c(x^J)\rho(x^J)}$. Тогда отвечающее уравнению (1) конечномерная система дифференциальных уравнений запишется в виде

$$y'(t) = Ay(t) + Bw(t) + \nu(t), \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

Здесь A есть матрица, порожденная одной из распространённых схем дискретизации оператора Лапласа. Вектор-функция $\nu : (0, T) \rightarrow F$ порождена граничным условием (2) и играет роль "помехи которую необходимо компенсировать с помощью управления $w(t)$ из указанного выше диапазона. При этом непрерывное неравенство (3) заменится дискретным аналогом

$$\alpha_i \leq y(t_i) \leq \beta_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Здесь векторы $\alpha_i, \beta_i \in F (\alpha_i \leq \beta_i)$ имеют компоненты соответственно $\alpha(x^J, t_i)$ и $\beta(x^J, t_i)$. В наших обозначениях вектор $y(0) \in F$ характеризует начальную температуру во внутренних узлах параллелепипеда G .

Теперь мы в состоянии применить результаты работы [2] для получения необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (4)-(5) при заданном допустимом управлении $w(t)$, а также принцип максимума для указания точек переключения кусочно-постоянного управления $w(t)$, принимающего лишь крайние значения $w_{\min}$ и $w_{\max}$.

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., *Вычислительная теплопередача*, М.: Едиториал УРСС, (2003).
2. Исламов Г.Г., "О допустимых помехах линейных управляемых систем", *Изв. Вузов. Математика*, No. 2, 37–40 (2002).

Кавинов А.В., МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия (kavinov@newmail.ru)

Крищенко А.П., МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия (apkri@999.ru)

УПРАВЛЕНИЕ ХАОСОМ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К ЭКВИВАЛЕНТНОМУ КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

CHAOS CONTROL BY TRANSFORMING AN AFFINE CONTROL SYSTEM TO THE CANONICAL FORM

Рассматривается задача управления хаосом при помощи малых управлений применительно к аффинным системам с управлением

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (1)$$