



УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Известия

Института математики и информатики

Выпуск 2 (36)

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_t(s) \doteq x(t + s), \quad s \in [-r, 0]$$

Ижевск 2006

Главный редактор
д. ф.-м. н., профессор **Е. Л. Тонков**

Заместитель главного редактора
д. ф.-м. н., профессор **В. Я. Дерр**

Редакционная коллегия:

д. ф.-м. н., профессор **А. П. Бельтюков**,
д. ф.-м. н., профессор **А. А. Грызлов**,
д. ф.-м. н., профессор **Г. Г. Исламов**,
д. ф.-м. н., профессор **А. В. Летчиков**,
д. ф.-м. н., профессор **Ю. П. Чубурин**

Выпуск содержит труды научной конференции–семинара «Теория управления и математическое моделирование», посвященной 50-летию Ижевского государственного технического университета и 30-летию кафедры прикладной математики и информатики ИжГТУ.

Для специалистов по дифференциальным уравнениям и теории управления.

УДК 517.5

© А. С. Демышев, В. И. Родионов
rodionov@uni.udm.ru

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Ключевые слова: непрерывно дифференцируемая функция, предел по множеству, репер, симплекс.

Abstract. Concept of S-differentiable function of some variables are defined. Necessary and sufficient conditions of S-differentiability are proved.

Пусть $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество, а множество Ω таково, что $\Omega_0 \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega}_0$. Произвольной функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ поставим в соответствие векторную функцию $F : \Omega_*^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующую по следующему правилу:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \dots & \Delta x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta x_{n1} & \dots & \Delta x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \dots \\ \Delta f_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Множество Ω_*^{n+1} состоит из тех наборов $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ из прямого произведения Ω^{n+1} , что векторы $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ (где $\Delta x_i \doteq x_i - x_0$) образуют ортогональный репер с началом в точке x_0 и выпуклая оболочка точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ принадлежит Ω . Невырожденная матрица $\Delta x \doteq \text{col}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ приращений аргументов состоит из элементов $\Delta x_{ij} \doteq x_{ij} - x_{0j}$, а столбец Δf приращений функции состоит из чисел $\Delta f_i \doteq f(x_i) - f(x_0)$. Таким образом, $F = (\Delta x)^{-1} \Delta f$ и легко показать, что непрерывность функции f влечет непрерывность функции F . Элементы $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$ будем называть *симплексами*.

В силу ортогональности векторов $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ справедливо $\Delta x \cdot \Delta x^\top = \text{diag}(\|\Delta x_1\|^2, \dots, \|\Delta x_n\|^2)$ и $|\det \Delta x| = \prod_{i=1}^n \|\Delta x_i\|$, где $\Delta x^\top$ — транспонированная к Δx матрица. Действительно, элементы произведения имеют вид $\sum_{k=1}^n \Delta x_{ik} \Delta x_{jk} = (\Delta x_i, \Delta x_j) = \|\Delta x_i\|^2 \delta_{ij}$. В частности, для обратной матрицы справедливо

$$(\Delta x)^{-1} = \Delta x^\top \cdot \text{diag} \left(\frac{1}{\|\Delta x_1\|^2}, \dots, \frac{1}{\|\Delta x_n\|^2} \right). \quad (2)$$

О п р е д е л е н и е 1. Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *S-дифференцируемой* (или *дифференцируемой в себе*), если для любого $x \in \Omega$ существует конечный предел

$$\lim_* F(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad (3)$$

где символ «*» означает, что предел вычисляется по всем таким симплексам $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$, что $x_0 \rightarrow x, x_1 \rightarrow x, \dots, x_n \rightarrow x$. Другими словами, число $g(x)$ есть предел (3), если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_x такая, что $\|F(x_0, x_1, \dots, x_n) - g(x)\| < \varepsilon$ для любых $x_0, x_1, \dots, x_n \in \Omega \cap U_x$ таких, что $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$. Заметим еще, что (3) — это предел по множеству Ω_*^{n+1} , а точка $(x, x, \dots, x) \in \Omega^{n+1}$ — точка прикосновения этого множества.

Л е м м а 1. Если $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ есть функция S-дифференцируемая, то для любого $x \in \Omega_0$ существует $\text{grad } f(x)$ и

$$\lim_* F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \text{grad } f(x). \quad (4)$$

Существование предела (3) влечет существование предела $\lim_{**} F(x_0, x_1, \dots, x_n)$ (и их равенство), вычисленного по подмножеству $\Omega_{0**}^{n+1} \doteq \{ \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in (\Omega_0)^{n+1} : \Delta x_{ij} = 0 \text{ п } i \neq j \}$, когда $x_0 \rightarrow x, x_1 \rightarrow x, \dots, x_n \rightarrow x$. В этом случае необходимо $\Delta x_{ii} \neq 0$ при всех $i = 1, \dots, n$, а для функции (1) справедливо $F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \text{col} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x_{11}}, \dots, \frac{f(x_n) - f(x_0)}{\Delta x_{nn}} \right)$. Поэтому

$$\lim_* F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \lim_{***} \text{col} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x_{11}}, \dots, \frac{f(x_n) - f(x_0)}{\Delta x_{nn}} \right),$$

где последний предел вычисляется по подмножеству $\Omega_{0***}^{n+1} \doteq \{ \langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in \Omega_{0**}^{n+1} : x_0 = x \}$ при $x_1 \rightarrow x, \dots, x_n \rightarrow x$. Но это и означает, что существует $\text{grad } f(x)$ и справедливо (4).

Функция $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ называется *непрерывно дифференцируемой*, если для любого $x \in \Omega_0$ существует $\text{grad } f(x)$ и функция $\text{grad } f(\cdot) : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна. Непрерывная функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гладкой*, если сужение $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемо и существует непрерывная функция $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что $\text{grad } f(x) = g(x)$ для всех $x \in \Omega_0$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы непрерывная функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ была S -дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была гладкой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предел (3) порождает функцию $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(x) \doteq \lim_* F(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Пусть $x \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$. Существует окрестность U_x такая, что $\|F(x_0, x_1, \dots, x_n) - g(x)\| < \varepsilon$ для любых $x_0, x_1, \dots, x_n \in \Omega \cap U_x$ таких, что $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$. Для любого $y \in \Omega \cap U_x$ существует окрестность U_y такая, что $\|F(y_0, y_1, \dots, y_n) - g(y)\| < \varepsilon$ для любых $y_0, y_1, \dots, y_n \in \Omega \cap U_x \cap U_y$, что $\langle y_0, y_1, \dots, y_n \rangle \in \Omega_*^{n+1}$. Но для этих симплексов выполнено $\|F(y_0, y_1, \dots, y_n) - g(x)\| < \varepsilon$, поэтому $\|g(y) - g(x)\| < 2\varepsilon$ для любого $y \in \Omega \cap U_x$, следовательно, g — непрерывная функция. Согласно лемме 1 $g(x) = \text{grad } f(x)$ для всех $x \in \Omega_0$, поэтому f — гладкая функция.

Достаточность. Зафиксируем $x \in \Omega$ и последовательность $\{ \langle x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k \rangle \}_{k=1}^\infty$ симплексов из Ω_*^{n+1} такую, что $\lim_k x_i^k = x$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как f непрерывна, то F тоже непрерывна, поэтому существует последовательность $\{ \langle y_0^k, y_1^k, \dots, y_n^k \rangle \}_{k=1}^\infty$ симплексов такая, что

$$\text{conv } \langle y_0^k, y_1^k, \dots, y_n^k \rangle \subset \text{Int conv } \langle x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k \rangle \subset \Omega_0$$

и $\|F(y_0^k, y_1^k, \dots, y_n^k) - F(x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k)\| < \varepsilon$. Очевидно, $y_i^k \xrightarrow{k} x$ при любом i , а множество $A \doteq \{x, y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^k, \dots\}$ компактно.

Пусть $\Delta y_i^k \doteq y_i^k - y_0^k$ и $\Delta f_i^k \doteq f(y_i^k) - f(y_0^k)$. Поскольку f — гладкая, то $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Следовательно, существует функция $\lambda = \lambda(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, такая, что $\lambda \rightarrow 0$ при $\|\eta\| \rightarrow 0$ равномерно по всем $\xi \in A$ и

$$\Delta f_i^k = (\text{grad } f(y_0^k), \Delta y_i^k) + \lambda(y_0^k, \Delta y_i^k) \|\Delta y_i^k\|$$

для всех допустимых i и k . Согласно (2) справедлива цепочка

$$\begin{aligned} F(y_0^k, y_1^k, \dots, y_n^k) &= (\Delta y^k)^{-1} \cdot \text{col}(\Delta f_1^k, \dots, \Delta f_n^k) = \text{grad } f(y_0^k) + \\ &+ (\Delta y^k)^{-1} \cdot \text{col}(\lambda(y_0^k, \Delta y_1^k) \|\Delta y_1^k\|, \dots, \lambda(y_0^k, \Delta y_n^k) \|\Delta y_n^k\|) = \\ &= g(y_0^k) + (\Delta y^k)^\top \cdot \text{col}\left(\frac{\lambda(y_0^k, \Delta y_1^k)}{\|\Delta y_1^k\|}, \dots, \frac{\lambda(y_0^k, \Delta y_n^k)}{\|\Delta y_n^k\|}\right) \end{aligned}$$

(заметим, что в силу гладкости f существует непрерывная функция $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что $\text{grad } f(y) = g(y)$ для всех $y \in \Omega_0$). Следовательно, если $\sigma^k \doteq \|F(y_0^k, y_1^k, \dots, y_n^k) - g(y_0^k)\|$, то

$$\sigma^k = \left\| \text{col}\left(\sum_{i=1}^n \lambda(y_0^k, \Delta y_i^k) \frac{\Delta y_{i1}^k}{\|\Delta y_i^k\|}, \dots, \sum_{i=1}^n \lambda(y_0^k, \Delta y_i^k) \frac{\Delta y_{in}^k}{\|\Delta y_i^k\|}\right) \right\|.$$

Поскольку $\lambda \rightarrow 0$, то существует шар $B_\delta(0)$ радиуса $\delta > 0$ такой, что $|\lambda(\xi, \eta)| < \varepsilon$ для любых $(\xi, \eta) \in A \times B_\delta(0)$.

Существует N_1 такое, что $\|y_i^k - x\| < \frac{\delta}{2}$ для любых $k > N_1$ и $i = 0, 1, \dots, n$. В частности, $\|\Delta y_i^k\| < \delta$, то есть $\Delta y_i^k \in B_\delta(0)$, поэтому $|\lambda(y_0^k, \Delta y_i^k)| < \varepsilon$, а $\sigma^k < n^{3/2} \varepsilon$ для любого $k > N_1$.

В силу непрерывности функции g существует N_2 такое, что $\|g(y_0^k) - g(x)\| < \varepsilon$, следовательно, для всех $k > \max\{N_1, N_2\}$ имеет место оценка $\|F(x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k) - g(x)\| < (2 + n^{3/2}) \varepsilon$.

С л е д с т в и е 1. Для того чтобы функция $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ была S -дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывно дифференцируемой.