



УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Известия

Института математики и информатики

Выпуск 2 (36)

$$\dot{x}(t) = \int_{-r}^0 dA(t, s)x_t(s), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x_t(s) \doteq x(t + s), \quad s \in [-r, 0]$$

Ижевск 2006

Главный редактор

д. ф.-м. н., профессор **Е. Л. Тонков**

Заместитель главного редактора

д. ф.-м. н., профессор **В. Я. Дерр**

Редакционная коллегия:

д. ф.-м. н., профессор **А. П. Бельтюков,**

д. ф.-м. н., профессор **А. А. Грызлов,**

д. ф.-м. н., профессор **Г. Г. Исламов,**

д. ф.-м. н., профессор **А. В. Летчиков,**

д. ф.-м. н., профессор **Ю. П. Чубурин**

Выпуск содержит труды научной конференции–семинара «Теория управления и математическое моделирование», посвященной 50-летию Ижевского государственного технического университета и 30-летию кафедры прикладной математики и информатики ИжГТУ.

Для специалистов по дифференциальным уравнениям и теории управления.

УДК 517.5 + 517.9

© В. И. Родионов
rodionov@uni.udm.ru

ОБОВЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ЧЕРЕЗ ПРИСОЕДИНЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Ключевые слова: обобщенная функция, прерывистая функция

Abstract. The concept of adjoint distribution on the space of regulated functions are defined. Contrast analysis of distributions and adjoint distributions are realized.

Введение

Произвольная функция $x \in BV[0, 1]$ имеет производную x' , понимаемую как производную почти везде, и обобщенную производную $\dot{x}$, причем суммируемая функция x' сама порождает обобщенную функцию, а равенство обобщенных функций $x' = \dot{x}$ имеет место в том и только в том случае, когда x абсолютно непрерывна [1, с. 348]. В [2] мы предлагаем конструкцию присоединенной обобщенной производной $\overset{\circ}{x}$, для которой справедливо утверждение: равенство обобщенных функций $x' = \overset{\circ}{x}$ имеет место тогда и только тогда, когда x представима в виде суммы абсолютно непрерывной функции и функции скачков [1, с. 336].

Достаточно убедительная аргументация в пользу применения присоединенных обобщенных производных продемонстрирована в [2] при исследовании импульсных систем на этапе интерпретации результатов. Поясним сказанное на примере простейшего импульсного уравнения $dx = d\theta \cdot x$, где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Это уравнение, записанное в терминах обобщенных функций [1, с. 208], имеет вид $\dot{y} = 0$, где $y(t) \doteq x(t) - \int_{\alpha}^t x d\theta$, и имеет всего

одно решение $x = 0$. Если же производные понимать классически, то для почти всех t должно быть выполнено $x'(t) = 0$, а семейство решений перестает быть обозримым (сюда входят константы, функции скачков, сингулярные функции [1, с. 347] и др.). В терминах присоединенных обобщенных функций [2] семейством всех решений уравнения $\overset{\circ}{y} = 0$ являются функции скачков, непрерывные в нуле (в частности, семейством всех непрерывных решений является совокупность функций-констант). Мы видим, что в первом случае решений «крайне мало», во втором — «слишком много», а третий случай — компромиссный.

§ 1. Присоединенные обобщенные производные

Зафиксируем интервал $K \doteq (a, b)$ (ограниченный или неограниченный) и через $G \doteq G(a, b)$ обозначим пространство прерывистых функций, то есть функций $x : K \rightarrow \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0) \doteq \lim_{\tau \rightarrow t-0} x(\tau)$ и $x(t+0) \doteq \lim_{\tau \rightarrow t+0} x(\tau)$ для всех $t \in K$. Через $G_0^{\text{loc}} \doteq G_0^{\text{loc}}(a, b)$ обозначим пространство функций $x : K \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset K$ сужение $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит $G_0[\alpha, \beta]$ (где $G_0[\alpha, \beta]$ — это пространство таких функций $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{t \in [\alpha, \beta] : |x(t)| \geq \varepsilon\}$ состоит из конечного числа точек). Согласно включению $G_0^{\text{loc}} \subset G$ называем функции $x, y \in G$ эквивалентными и пишем $x \sim y$, если $x - y \in G_0^{\text{loc}}$.

Через $BV^{\text{loc}} \doteq BV^{\text{loc}}(a, b)$ обозначим пространство функций локально ограниченной вариации, а через $CBV^{\text{loc}} \doteq CBV^{\text{loc}}(a, b)$ — его подпространство, состоящее из непрерывных функций. Пространство $\Gamma^{\text{loc}} \doteq \Gamma^{\text{loc}}(a, b)$ такое, что $BV^{\text{loc}} \subset \Gamma^{\text{loc}} \subset G$, состоит из функций x , представимых в виде $x = x^c + x_c$, где $x^c \in C \doteq C(a, b)$ — непрерывная функция, а $x_c \in N^{\text{loc}} \doteq N^{\text{loc}}(a, b)$ — «функция скачков» (то есть для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset K$ сужение $x_c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ является функцией скачков).

Пространство $D \doteq D(a, b)$, состоящее из финитных функций пространства CBV^{loc} , называется пространством основных функ-

ций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: говорим, что последовательность функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$, сходится к функции $\varphi \in D$ (и пишем $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если у всех функций φ_n и φ есть общий носитель $[\alpha, \beta] \subset K$ и $\text{Var}_{[\alpha, \beta]}(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow{n} 0$.

Через D' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов $\ell : D \rightarrow \mathbb{C}$ (непрерывность означает, что сходимость последовательности основных функций $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ влечет сходимость $(\ell, \varphi_n) \xrightarrow{n} (\ell, \varphi)$), а его элементы назовем обобщенными функциями. Если $x \in G$, $y \in \Gamma^{\text{loc}}$, то в D' определены линейные непрерывные функционалы $D \rightarrow \mathbb{C}$:

$$(x, \varphi) \doteq \int_K \varphi(t) x(t) dt, \quad (\dot{x}, \varphi) \doteq \int_K \varphi dx \quad (\overset{\circ}{y}, \varphi) \doteq \int_K \varphi \circ dy,$$

где второй функционал задан через интеграл Римана-Стилтьеса и называется *обобщенной производной*, а третий функционал задан через присоединенный интеграл Римана-Стилтьеса и называется *присоединенной обобщенной производной*. Напомним [2], что присоединенный интеграл определен на функциях $u, v \in \Gamma^{\text{loc}}$ и вычисляется по формуле $\int_{\alpha}^{\beta} u dv \doteq \int_{\alpha}^{\beta} u^c dv^c - \int_{\alpha}^{\beta} u_c dv_c$ (он существует тогда и только тогда, когда существует интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} u dv$).

Т е о р е м а 1.1. *Функция $x \in G$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \sim \text{const}$. Непрерывная функция $x \in C$ является решением обобщенного уравнения $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x = \text{const}$. Функция $x \in \Gamma^{\text{loc}}$ является решением обобщенного уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x \in H^{\text{loc}}$. Непрерывная функция $x \in C$ является решением обобщенного уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $x = \text{const}$.*

Решения уравнений $(\dot{x}, \varphi) \equiv (y, \varphi)$ и $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (y, \varphi)$ будем называть «первообразными» функции $y \in G$. В каждом из четырех

случаев теоремы 1.1 имеем первообразные: $x = r + Y$, $x = Y$, $x = h + Y$, $x = Y$, где $Y(t) \doteq c + \int_0^t y(s) ds$, а $r \in G_0^{\text{loc}}$, $h \in H^{\text{loc}}$ — произвольные функции (точка $(\alpha, c) \in K \times \mathbb{C}$ тоже произвольна).

Множество $X \subseteq G$, оператор $V : X \rightarrow G$ и функция $x \in X$ порождают в D' функционал $(\dot{V}x, \varphi) \doteq \int_K \varphi dVx$, а множество $X \subseteq \Gamma^{\text{loc}}$, оператор $V : X \rightarrow \Gamma^{\text{loc}}$ и функция $x \in X$ порождают в D' функционал $(\dot{V}x, \varphi) \doteq \int_K \varphi \circ dVx$. В соответствии с

теоремой 1.1 каждое из уравнений $(\dot{V}x, \varphi) \equiv 0$ или $(\dot{V}x, \varphi) \equiv 0$ равносильно совокупностям уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} (Vx)(t) = c + r(t) \\ x \in X \\ \forall c \in \mathbb{C} \forall r \in G_0^{\text{loc}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (Vx)(t) = v(t) \\ x \in X \\ \forall v \in H^{\text{loc}} \end{array} \right.$$

Если, например, $(Vx)(t) \doteq x(t) - \int_0^t x(s) ds$, то в первом случае получаем семейство решений $x(t) = ce^t + r(t)$, $c \in \mathbb{C}$, $r \in G_0^{\text{loc}}$, а во втором случае имеем $x(t) = h(t)e^t$, $h \in H^{\text{loc}}$. При $X = \mathbb{C}$ в обоих случаях совокупность решений имеет вид $x(t) = ce^t$.

Решая приведенные совокупности уравнений, можно провести сопоставительный анализ решений для следующих типов уравнений: импульсные уравнения, сингулярные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения с разрывной правой частью и др.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
2. Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. 2005. Вып. 1 (31). С. 3–78.