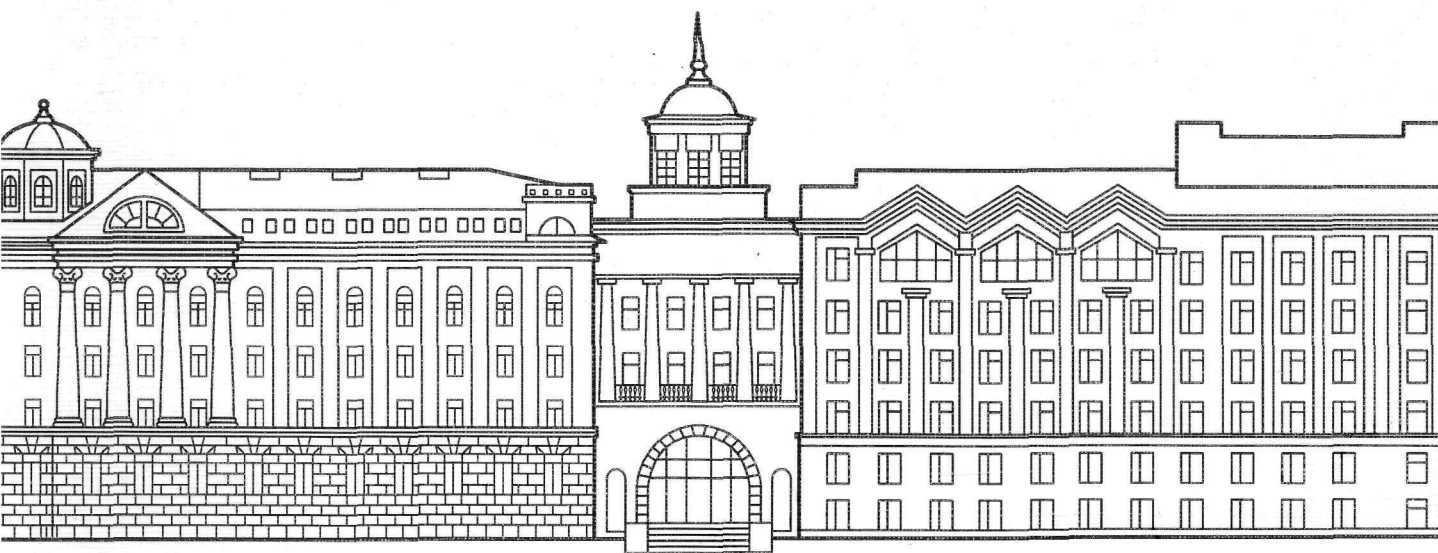




ИЗВЕСТИЯ

ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ



Выпуск 3 (37)

Ижевск

2006

УДК 517.934

© Л. И. Родина

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ
ДЛЯ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

Исследуется задача о локальной управляемости для линейной нестационарной системы со случайными параметрами. Для систем такого типа не всегда доступна информация о поведении системы "в будущем", поэтому возникает задача о существовании неупреждающего управления. Управление $u(t, x)$ называется *неупреждающим*, если для его построения в момент времени $t = \tau$ используется информация о поведении системы только при $t \leq \tau$.

Рассматривается система

$$\dot{x} = A(f^t \omega)x + B(f^t \omega)u, \quad (t, \omega, x, u) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

где функция $t \rightarrow \xi(f^t \omega) \doteq (A(f^t \omega), B(f^t \omega))$ переменного t кусочно-постоянна при каждом $\omega \in \Omega$. Предполагается, что $u \in U$, где U — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^m$, содержащий нуль в своей внутренности. Получены достаточные условия существования неупреждающего управления для системы (1), а также оценка снизу вероятности того, что исходная система локально управляема на фиксированном отрезке времени. Разработан алгоритм построения неупреждающего управления.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим вероятностные пространства $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$, где Ω_1 — пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, $\theta_k \in (0, \infty)$, пространство $\Omega_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots), \varphi_k \in \Psi\}$, $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^s$ — конечное множество матричных пар $\psi_j \doteq (A_j, B_j)$, $\mathfrak{F}_i$ — σ -алгебра, порожденная соответствующими цилиндрическими множествами, μ_i — продолжение меры $\tilde{\mu}_i$, определенной на алгебре цилиндрических множеств, на σ -алгебру $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим также вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$, где пространство $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, построение σ -алгебры $\mathfrak{F}$ и вероятностной меры μ описано в [1].

На $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mu_2)$ для каждого $\theta \in \Omega_1$ введем последовательность случайных величин $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \dots)$, где $\zeta_k(\omega) = \zeta_k(\varphi, \theta) = \varphi_k$, $\varphi_k \in \Psi$. Предполагаем, что ζ образует *стационарную в узком смысле* цепь Маркова, которая однозначно определяется матрицей переходных вероятностей $P = (p_{ij})_{i,j=1}^s$ и начальным распределением $\pi = (\pi_i)_{i=1}^s$ (см. [2, с. 122]).

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^\infty : \tau_0 = 0, \tau_k(\theta) = \sum_{i=1}^k \theta_i$, где $\theta_1, \theta_2, \dots$ — независимые случайные величины, причем $\theta_2, \theta_3, \dots$ одинаково распределены. Определим процесс восстановления $\nu(t) = \max\{k : \tau_k \leq t\}$, $t \geq 0$. Предполагаем, что $\nu(t)$ — стационарный процесс восстановления. Пусть $f_1^t \theta = (\tau_{\nu+1} - t, \theta_{\nu+2}, \theta_{\nu+3}, \dots)$, $t > 0$, $f_2^t(\theta)\varphi = (\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}, \dots)$. На $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ определим преобразование сдвига $f^t \omega = f^t(\theta, \varphi) = (f_1^t \theta, f_2^t(\theta)\varphi)$, которое сохраняет меру μ (см. [3, с. 190]).

Пусть $\xi(\omega) = \zeta_0(\omega)$ — случайная величина на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. Определим случайный процесс $\xi(f^t \omega) = (A(f^t \omega), B(f^t \omega))$, порождаемый потоком $f^t \omega$. Тогда $\xi(f^t \omega)$ принимает постоянные значения φ_k при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$ и является стационарным в узком смысле случайным процессом (см. [2, с. 433], [3, с. 167]). Систему (1) отождествим с функцией $\xi : \Omega \rightarrow \Psi$. При каждом фиксированном ω функция $\xi(f^t \omega)$ задает линейную детерминированную систему. В качестве *допустимых управлений* системы ξ берутся всевозможные ограниченные, измеримые по Лебегу функции $u_\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \in \mathbb{R}^m$. Решения системы ξ , соответствующие управлению $u_\omega(t, x, x_0)$, будем понимать в смысле А. Ф. Филиппова.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00258).

Пусть $D_{[t_0, t_1]}(\omega)$ — множество управляемости системы $\xi(f^t\omega)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, то есть множество всех точек, которые можно перевести в нуль на $[t_0, t_1]$ при фиксированном $\omega \in \Omega$, $\mathcal{D}_{[t_0, t_1]}(\omega)$ — множество неупреждающе управляемых состояний системы $\xi = \xi(f^t\omega)$ на $[t_0, t_1]$. Система ξ называется *локально управляемой с вероятностью μ_0* на отрезке $[t_0, t_1]$, если $\mu\{\omega : 0 \in \text{int } D_{[t_0, t_1]}(\omega)\} = \mu_0$ и *неупреждающе локально управляемой с вероятностью μ_0* на $[t_0, t_1]$, если вероятность $\mu\{\omega : 0 \in \text{int } \mathcal{D}_{[t_0, t_1]}(\omega)\} = \mu_0$.

§ 2. Существование неупреждающего управления для системы с произвольным числом состояний

Обозначим через ξ_i , $i = 1, \dots, s$ систему $\dot{x} = A_i x + B_i u$, $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Пусть $L(\xi_i)$ — пространство управляемости, $X_i(t, \vartheta) \doteq X_i(t - \vartheta)$ — матрица Коши данной системы. Предполагаем, что $\dim L(\xi_i) \leq n$.

Назовем конечную последовательность $W = (\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})$, $\psi_{i_j} \in \Psi$, словом W . Поставим в соответствие слову W линейные системы $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$ и пространства управляемости этих систем $L(\xi_{i_1}), \dots, L(\xi_{i_k})$. Предположим, что для слова W найдутся подпространства $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{k-1}$ такие, что любую начальную точку системы можно перевести на $\mathcal{M}_1$, затем любую точку $\mathcal{M}_i$ перевести на $\mathcal{M}_{i+1}$, а любую точку $\mathcal{M}_{k-1}$ перевести в нуль. Предполагаем также, что существуют управления, которые удерживают траекторию решения системы, выходящую из точек $\mathcal{M}_i$, $i = 1, \dots, k-1$, в этом подпространстве до следующего момента переключения. Кроме того, для всех систем $\xi_1, \dots, \xi_s$ должна существовать положительно определенная функция $V(x)$ такая, что траектории решений этих систем, начинающиеся в точке x_0 , все время остаются внутри поверхности уровня $V(x) = V(x_0)$. Если выполнены указанные выше условия, то вероятность того, что система неупреждающе управляема на отрезке $[0, T]$, равна вероятности появления слова W на данном отрезке.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что слово $W = (\psi_{i_1}, \dots, \psi_{i_k})$, положительно определенная функция $V \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ и подпространства $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{k-1}$ удовлетворяют условиям:*

- (1) $\mathcal{M}_\ell \subset L(\xi_{i_\ell}) + X_{i_\ell}^{-1}(\alpha) \mathcal{M}_{\ell+1}$, $\ell = 1, \dots, k-2$, $\mathcal{M}_{k-1} \subset L(\xi_{i_k})$, $\mathcal{M}_1 + L(\xi_{i_1}) = \mathbb{R}^n$;
- (2) $\min_{u \in U} \langle \frac{\partial V(x)}{\partial x}, A_i x + B_i u \rangle \leq 0$ для всех $i = 1, \dots, s$ и всех $x \in O_\varepsilon^n$;
- (3) существуют управления $u_\ell(x)$, что $A_{i_\ell} x + B_{i_\ell} u_\ell(x) \subset \mathcal{M}_\ell$ и $\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x}, A_{i_\ell} x + B_{i_\ell} u_\ell(x) \rangle \leq 0$ для всех $x \in \mathcal{M}_\ell \cap O_\varepsilon^n$, $\ell = 1, \dots, k-1$.
- (4) $V(x + u_\ell j) \geq V(x)$ для всех $u \in U$, $x \in \mathcal{M}_j$, $j \in L(\xi_{i_j})$, $j = 1, \dots, k-1$.

Тогда система ξ неупреждающе управляема на $[0, T]$ с вероятностью $\mu(T)$, для которой при $T \geq [r(N+3) - 2]\beta$, $r, N \geq 1$, справедлива оценка $\mu(T) \geq p Q \frac{1 - (q_1 - p q_{i_k})^r}{1 - q_1 + p q_{i_k}}$.

Если все состояния цепи Маркова сообщающиеся, то $\mu(T) \rightarrow 1$ при $T \rightarrow \infty$.

Здесь $p = p_{i_1, i_2} \dots p_{i_{k-1}, i_k}$ — условная вероятность перехода из состояния ψ_{i_1} в ψ_{i_2} , и так далее, в ψ_{i_k} ; q_j — вероятность первого попадания из ψ_j в ψ_{i_1} не более чем за N шагов, $Q = \sum_{j=1}^s \pi_j q_j$ — вероятность первого попадания не более чем за N шагов.

Список литературы

1. Баранова О. В. О равномерной глобальной управляемости линейной системы со стационарными случайными параметрами // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1843–1850.
2. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
3. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.

Родина Людмила Ивановна
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Ижевск
e-mail: rdl@uni.udm.ru