



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год
ISSN 1819-3161

УЧРЕДИТЕЛЬ

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

Главный редактор

Д.А. Новиков

**Заместители главного
редактора**

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пащенко

Редактор

Т.А. Гладкова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «СенСиДат-Контрол»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 272.
Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru
www.ipu.ru/period/pu

Оригинал-макет
и электронная версия
подготовлены
ООО «Авансес Солюшнз»

Отпечатано с готовых диапозитивов
в типографии ГКС

Подписано в печать
24.10.2008 г.

Заказ № PB608

Журнал зарегистрирован
в Министерстве
Российской Федерации
по делам печати,
телерадиовещания
и средств массовых
коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ №77-11963
от 06 марта 2002 г.

Журнал входит в Перечень ведущих
рецензируемых журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой
степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:
80508 и 81708 в каталоге Роспечати
38006 в объединенном каталоге
«Пресса России»

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

6.2008

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Кудинов Ю.И., Кудинов И.Ю. Нечеткое моделирование и кластеризация 2

Математические проблемы управления

Жирабок А.Н. Канонические формы нелинейных динамических систем 11

Анализ и синтез систем управления

Земляков С.Д., Данилова Е.А. Решение задачи поиска области сходимости
движения частного случая релейной нестационарной системы 18

Системный анализ

Абрамова Н.А., Коврига С.В. Некоторые критерии достоверности моделей
на основе когнитивных карт 23

Управление в социально-экономических системах

Михненко П.А. Применение теории систем со случайной скачкообразной
структурой в моделях современных организаций 34

Гребенюк Е.А. Построение моделей, описывающих динамику изменения
во времени концентраций загрязняющих веществ в атмосфере 42

Ицкович Э.Л., Юрченко В.Е. Методика распределения финансовых ресурсов
предприятия среди различных по тематике инновационных проектов 51

Лямина М.А. Воздействие мультипликативного эффекта на баланс
инвестиций и сбережений в жилищном секторе 59

Управление технологическими процессами

Гарькина И.А., Данилов А.М. Управление качеством материалов со специальными
свойствами 67

Управление подвижными объектами

Борисов В.Г., Начинкина Г.Н., Шевченко А.М. Модальный метод оптимизации
энергетической системы управления полетом летательных аппаратов 74

Краткие сообщения

Родионова А.Г. О моментах переключения кусочно-постоянного управления
в задаче быстрогодействия для линейной стационарной системы второго
порядка с комплексными собственными значениями 81

* * *

Владимир Лазаревич Эпштейн 84

* * *

Указатель статей, опубликованных в 2008 году 86

Contents and abstracts 90

О МОМЕНТАХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

А.Г. Родионова

Приведены явные формулы для моментов переключения кусочно-постоянного управления в задаче быстрогодействия для линейной системы второго порядка с постоянными коэффициентами в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные значения.

Ключевые слова: задача быстрогодействия, множество управляемости, кусочно-постоянное управление, момент переключения.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1)$$

где $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — постоянные вещественные матрицы размерности 2×2 и $2 \times m$ соответственно, а $u(\cdot)$ — кусочно-непрерывное управление (допустимое управление) со значениями в выпуклом многограннике $U \subset R^m$ с вершинами $u_1, \dots, u^p$. Через $D_\sigma \subset R^2$ обозначим множество управляемости в начало координат системы (1) на отрезке $[0, \sigma]$. Напомним, что точка x_0 принадлежит множеству D_σ , если существует кусочно-непрерывное управление $t \rightarrow u_0(t) \in U, t \in [0, \sigma]$, такое, что при $u = u_0(t)$ система (1) имеет решение $x = x(t), t \in [0, \sigma]$, удовлетворяющее условиям $x(0) = x_0, x(\sigma) = 0$.

Через $T(x_0)$ обозначим наименьшее время (время быстрогодействия), за которое возможен переход из состояния x_0 в начало координат под действием допустимого управления, т. е. $T(x_0) = \inf\{t \geq 0 | x_0 \in D_t\}$. Если $x_0 \notin D_t$ для любого $t > 0$, то полагаем $T(x_0) = +\infty$. Задача нахождения допустимого управления, переводящего точку x_0 в начало координат за наименьшее время, называется задачей быстрогодействия, а управление, которое решает эту задачу, называется оптимальным в смысле быстрогодействия.

В рамках работы мы предполагаем, что $0 \in \text{int } U$ и выполнено условие общности положения, налагаемое на коэффициенты уравнения (1) и на расположение многогранника U : если w — это вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника U , то векторы Bw и ABw линейно независимы в R^2 .

При сделанных предположениях принцип максимума Л.С. Понтрягина является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности в линейной задаче быстрогодействия [1, с. 94]. Следовательно, задача отыскания граничных точек множества управляемости D_σ (выпуклого компакта) системы (1) сводится к задаче нахождения управлений, удовлетворяющих принципу максимума на отрезке $[0, \sigma]$. Другими словами, для произвольного вектора $\psi^0 = (\cos \varphi, \sin \varphi) \in S^1$ (где $\varphi \in [0, 2\pi)$, а S^1 — единичная сфера в R^2) найдется единственное управление $\hat{u}: [0, \sigma] \rightarrow U$ такое, что почти для всех $t \in [0, \sigma]$ имеет место равенство $\max_{u \in U} \psi^0 e^{-At} Bu = \psi^0 e^{-At} B \hat{u}(t)$, где $\psi^0 e^{-At}$ — это решение начальной задачи $\dot{\psi} = -\psi A, \psi(0) = \psi^0$.

Данное управление порождает на границе ∂D_σ точку $x_0 = -\int_0^\sigma e^{-At} B \hat{u}(t) dt$. Верно и обратное утверждение: для любого $x_0 \in \partial D_\sigma$ найдется $\psi^0 \in S^1$ и со-

ответствующее ему управление $\hat{u}: [0, \sigma] \rightarrow U$ такое, что $x_0 = -\int_0^\sigma e^{-At} B \hat{u}(t) dt$. Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между точками сферы $S^1 \subset R^2$ и граничными точками множества управляемости D_σ (т. е. $S^1 \leftrightarrow \partial D_\sigma$).

Более того, оказывается, что управление $\hat{u}: [0, \sigma] \rightarrow U$ — это кусочно-постоянная функция со значениями лишь в вершинах многогранника U [1, с. 112]. Каждую точку разрыва функции $\hat{u}(t)$ будем называть *моментом переключения* управления (в соответствии с работами [1–4] ее называют точкой переключения). Здесь уместно отметить, что если $\hat{t}$ — точка разрыва оптимального управления $\hat{u}(t)$ и если $\hat{u}(\hat{t} - 0) = u^r$, $\hat{u}(\hat{t} + 0) = u^s$, где $u^r \neq u^s$ ($r \neq s$) — различные вершины многогранника U , то мы будем говорить, что при $t = \hat{t}$ происходит переключение оптимального управления $\hat{u}(t)$ из вершины u^r в вершину u^s . Таким образом, нахождение оптимального управления $\hat{u}(t)$ равносильно отысканию его моментов переключения, причем множество моментов переключения функции $\hat{u}(t)$ содержится в конечном множестве $\{t \in [0, \sigma]: f^r(t) = f^s(t), r \neq s\}$, где $f^r(t) \doteq \psi^0 e^{-At} B u^r$.

Другими словами, задача поиска моментов переключения функции $\hat{u}(t)$ равносильна построению верхней огибающей графиков семейства функций $f^r(t)$, $t \in [0, \sigma]$, $r = \overline{1, p}$, что, в конечном счете, сводит исходную задачу к вычислительной процедуре отыскания моментов совпадения значений двух функций $f^r(t)$ и $f^s(t)$ при $r \neq s$.

МОМЕНТЫ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

В работе найдены моменты совпадения значений функций $f^r(t)$ и $f^s(t)$ в случае, когда матрица A имеет комплексные собственные значения, т. е. коэффициенты матрицы A удовлетворяют неравенству $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$ (в этом случае, очевидно, $a_{12} \neq 0 \neq a_{21}$). Введем в рассмотрение число μ и матрицу C :

$$\mu \doteq \sqrt{-(a_{11} - a_{22})^2/4 - a_{12}a_{21}} > 0,$$

$$C \doteq \begin{pmatrix} 1 & (a_{22} - a_{11})/2\mu \\ 0 & -a_{21}/\mu \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (a_{22} - a_{11})/2a_{21} \\ 0 & -\mu/a_{21} \end{pmatrix},$$

$$D \doteq C^{-1}AC = \begin{pmatrix} (a_{11} + a_{22})/2 & \mu \\ -\mu & (a_{11} + a_{22})/2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $A^k = CD^kC^{-1}$ при всех k , следовательно,

$$f^r(t) = \psi_0 e^{-At} B u^r = (\psi_0 C) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k t^k}{k!} (C^{-1} B u^r)$$

для любого r . Таким образом, моменты совпадения значений функций $f^r(t)$ и $f^s(t)$ при $r \neq s$ совпадают с нулями функции

$$\begin{aligned} F(t) &\doteq f^r(t) - f^s(t) = \\ &= (\psi^0 C) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{D^k t^k}{k!} C^{-1} B (u^r - u^s). \end{aligned}$$

Равенство $(a_{11} + a_{22})^2 + 4\mu^2 = 4\det A$ носит элементарный характер, поэтому $\Delta \doteq \det A > 0$. Существует $\alpha \in (0, \pi)$, определяемое равенством

$$\sin \alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\Delta}} \quad \left(\text{при этом } \cos \alpha = \frac{a_{11} + a_{22}}{2\sqrt{\Delta}} \right), \text{ такое, что}$$

матрица D допускает представление $D = \sqrt{\Delta} \times \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Индукцией по k легко показать,

$$\text{что } D^k = (\sqrt{\Delta})^k \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix}. \text{ Следовательно,}$$

$$\begin{aligned} F(t) &= (\cos \varphi, \sin \varphi) \times \\ &\times C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!} C^{-1} B (u^r - u^s). \end{aligned}$$

В силу условия общности положения вектор $v^r \doteq B(u^r - u^s) \in R^2$ отличен от нуля, поэтому найдется угол $\omega^r \in [0, 2\pi)$ такой, что $v^r = \|v^r\| \text{col}(\cos \omega^r, \sin \omega^r)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{\|v^{rs}\|} &= (\cos \varphi, \sin \varphi) C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \times \\ &\times \frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!} C^{-1} \begin{pmatrix} \cos \omega^r & \sin \omega^r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вектор $(\cos \varphi, \sin \varphi) = \left(\cos \varphi, \frac{a_{22} - a_{11}}{2\mu} \cos \varphi - \frac{a_{21}}{\mu} \sin \varphi \right)$ коллинеарен и сонаправлен вектору



$(\cos \bar{\varphi}, \sin \bar{\varphi})$, где $\bar{\varphi} = \arg \left[\cos \varphi + i \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2\mu} \cos \varphi - \frac{a_{21}}{\mu} \sin \varphi \right) \right]$, $\bar{\varphi} \in [0, 2\pi)$. Аналогично вектор $C^{-1} \text{col}(\cos \omega^{rs}, \sin \omega^{rs}) = \text{col} \left(\cos \omega^{rs} + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{21}} \sin \omega^{rs}, -\frac{\mu}{a_{21}} \sin \omega^{rs} \right)$ коллинеарен и сонаправлен вектору $\text{col}(\cos \bar{\omega}^{rs}, \sin \bar{\omega}^{rs})$, где $\bar{\omega}^{rs} = \arg \left[\cos \omega^{rs} + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{21}} \sin \omega^{rs} - i \frac{\mu}{a_{21}} \sin \omega^{rs} \right]$, $\bar{\omega}^{rs} \in [0, 2\pi)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{F(t)}{\|v^{rs}\|} &= (\cos \bar{\varphi}, \sin \bar{\varphi}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \times \\ &\times \frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!} \begin{pmatrix} \cos \bar{\omega}^{rs} \\ \sin \bar{\omega}^{rs} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{\Delta})^k t^k}{k!} \cos(\bar{\varphi} + k\alpha - \bar{\omega}^{rs}). \end{aligned}$$

Если $\beta \doteq \bar{\varphi} - \bar{\omega}^{rs}$, то

$$\begin{aligned} 2 \frac{F(t)}{\|v^{rs}\|} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\Delta} t)^k}{k!} \cos(\beta + k\alpha) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\Delta} t)^k}{k!} (e^{i(\beta + k\alpha)} + e^{-i(\beta + k\alpha)}) = \\ &= e^{i\beta} e^{-\sqrt{\Delta} t e^{i\alpha}} + e^{i\beta} e^{-\sqrt{\Delta} t e^{-i\alpha}} = \\ &= e^{-i\beta} e^{-\sqrt{\Delta} t e^{i\alpha}} \{ e^{2i\beta} e^{-\sqrt{\Delta} t (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} + 1 \}, \end{aligned}$$

следовательно, уравнение $F(t) = 0$ равносильно уравнению $e^{2i(\beta - \sqrt{\Delta} t \sin \alpha)} = -1$, что, в свою очередь, означает, что $-\beta + \mu t = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема. Моменты совпадения значений функций $f^r(t)$ и $f^s(t)$ при $r \neq s$ задаются равенством $t_k^{rs} = (\pi/2 + k\pi + \bar{\varphi} - \bar{\omega}^{rs})/\mu$, $t_k^{rs} \in [0, \sigma]$, где $\mu = \sqrt{-(a_{11} - a_{22})^2/4 - a_{12}a_{21}}$,

$$\bar{\varphi} = \arg \left[\cos \varphi + i \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2\mu} \cos \varphi - \frac{a_{21}}{\mu} \sin \varphi \right) \right],$$

$$\bar{\omega}^{rs} = \arg \left[\cos \omega^{rs} + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{21}} \sin \omega^{rs} - i \frac{\mu}{a_{21}} \sin \omega^{rs} \right]. \diamond$$

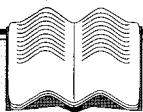
В заключение отметим, что случай, когда матрица системы имеет вещественные собственные значения, хорошо изучен и описан в литературе (например, в работе [1, с. 176]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — Там же, 1979. — 432 с.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — Там же, 1988. — 552 с.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — Там же, 1976. — 392 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским.

Родионова Алла Григорьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент, Удмуртский государственный университет, ☎ (3412) 91-61-31, e-mail: rodionov@uni.udm.ru



Содержание сборника "Управление большими системами", 2008, вып. 21, <http://ubs.mtas.ru>

- Андрienko A. Я., Тропова Е. И. Целочисленная оптимизация в задачах управления безопасностью объектов РКТ. — С. 16—26.
- Багдасарян А. Г. Общая структура информационной экспертной системы моделирования и анализа сложных иерархических систем в контуре управления. — С. 58—70.
- Баранов А. А., Денисов А. Р., Левин М. Г. Подсистема имитационного моделирования работы производственных линий. — С. 173—185.
- Губанов Д. А., Чхартишвили А. Г. О стратегической рефлексии в биматричных играх. — С. 49—57.
- Губко Г. В. Механизмы оценки безопасности заповедника. — С. 131—144.
- Золотова Т. В. Игровая постановка задачи стимулирования производственных предприятий на разработку мер по снижению ущерба окружающей среде. — С. 145—164.
- Карташов В. Я., Новосельцева М. А. Структурно-параметрическая идентификация линейных стохастических объектов с использованием непрерывных дробей. — С. 27—48.
- Спесивцев А. В., Кимяев И. Т. Информационная модель нечеткого логического регулятора с интеллектуализированной базой знаний. — С. 165—172.
- Кузнецов Л. А., Перевозчиков А. В. Оценка кредитной истории физических лиц на основе нечетких моделей. — С. 84—106.
- Тихонов С. В. Методика перехода от IDEF0 к модели в терминах теории систем массового обслуживания при исследовании бизнес-процессов организации. — С. 5—15.
- Федеряков А. С. Влияние фундаментальных трейдеров на процесс ценообразования на искусственном рынке ценных бумаг. — С. 107—130.