

Федеральное агентство по образованию
Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМАХ

Материалы Седьмой Международной
конференции-семинара

(Нижний Новгород, 26–30 ноября 2007 г.)

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2007

УДК 681.3.012:51
ББК 32.973.26–018.2:22
В 93

В 93 Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах. Материалы Седьмой Международной конференции-семинара. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 443 с.

ISBN 978-5-91326-068-0

Редакционная коллегия:

*Р.Г. Стронгин (отв. редактор), В.П. Гергель (зам.отв. редактора),
Д.И. Батищев, В.В. Воеводин, В.А. Гришагин, Ю.Г. Евтушенко,
Л.В. Нестеренко, Я.Д. Сергеев, Б.Н. Четверушкин, В.И. Швецов*

Сборник материалов Седьмой Международной конференции-семинара, состоявшейся в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского 26–30 ноября 2007 г., содержит доклады, посвященные теоретической и практической проблематике параллельных вычислений, ориентированных на использование современных многопроцессорных архитектур кластерного типа.

ISBN 978-5-91326-068-0

ББК 32.973.26–018.2:22

*Конференция организована в рамках Инновационной образовательной
программы ННГУ: Образовательно-научный центр
«Информационно-телекоммуникационные системы:
физические основы и математическое обеспечение»*

Поддержка конференции



Российский фонд фундаментальных исследований



Компания Intel Technologies



Компания IBM



Компания Т-Платформы

© Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, 2007

5. Пинчук В.П. Табличные инварианты на графах и их применение // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – №4 – С.33-45.

РАСЧЁТ НА ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНОМ КЛАСТЕРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ

Г.Г. Исламов, Ю.В. Коган, А.Г. Исламов, О.Л. Лукин

Удмуртский госуниверситет, Ижевск

Пусть вектор $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ пробегает точки n -мерного параллелепипеда $G = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Рассмотрим в течение времени T процесс изменения температуры $u(x, t)$ в параллелепипеде G с удельной теплоёмкостью $c(x)$, плотностью $\rho(x)$ и коэффициентом теплопроводности $k(x)$ при воздействии на него тепловыми источниками и стоками плотности $F(x, t) = b(x)w(t)$, где при $t \in [0, T]$ имеем $w_{\min} \leq w(t) \leq w_{\max}$. Как известно, температура $u(x, t)$ должна удовлетворять для $(x, t) \in G \times (0, T)$ дифференциальному уравнению теплопроводности

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{p_i(x)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x)p_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + F(x, t). \quad (1)$$

Здесь $p_i = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n H_j}{H_i}$ при $n > 2$ и $p_i = \frac{1}{H_i}$ при $n = 1, 2$; H_i - коэффициенты Ламэ криволинейной ортогональной системы координат, такие, что $H_j = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n p_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$ при $n > 2$.

Задачу управления температурой поставим следующим образом. Требуется построить такое кусочно-постоянное допустимое управление

$$w(t) \ (w_{\min} \leq w(t) \leq w_{\max}, t \in (0, T)),$$

при котором уравнение (1) имеет гладкое решение $u(x, t)$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, t) = \mu(x, t), x \in \partial G \quad (2)$$

и дополнительному ограничению вида

$$\alpha(x, t) \leq u(x, t) \leq \beta(x, t) \quad (3)$$

в области $(x, t) \in G \times (0, T)$. Здесь функции $\alpha(x, t)$ и $\beta(x, t)$ задают диапазон изменения температуры внутри параллелепипеда G . Заметим, что мы не фиксируем начальную температуру $u(x, 0)$. Как раз её необходимо определить таким образом, чтобы с помощью управления $w(t)$ из заданного диапазона $[w_{\min}, w_{\max}]$ можно было обеспечить заданный температурный режим для указанной температуры $\mu(x, t)$ на границе ∂G параллелепипеда размерности n .

Поставленная задача порождает дифференциально-разностный аналог задачи управления температурой, описание которой приводится ниже. Введём удобные для этого описания соглашения и обозначения. Если индекс i принимает значения $1, 2, \dots, n$, то будем писать $i = \overline{1, n}$. Пусть $N = (N_1, \dots, N_n)$ есть целочисленный вектор с положительными компонентами. Пусть, далее, мультииндексная переменная $J = (j_1, \dots, j_n)$ ограничена условием $j_k = \overline{0, N_k}, k = \overline{1, n}$. Тогда множество её значений образует целочисленную сетку $0 \leq J \leq N$ (неравенство векторов понимается покомпонентно). Как правило, мы будем отождествлять переменную J с её значением. Мультииндекс J называется внутренним, если при всех $k = \overline{1, n}$ имеем $j_k \neq 0$ и $j_k \neq N_k$. Пусть $J = (j_1, \dots, j_n)$ есть внутренний мультииндекс. Рассматривая уравнение (1) во внутреннем узле

$$x^J = (j_1 h_1, \dots, j_n h_n), h_k = (b_k - a_k) / N_k, k = \overline{1, n},$$

параллелепипеда G при всех $t \in (0, T)$ имеем точное равенство

$$c(x^J) \rho(x^J) \frac{\partial u(x^J, t)}{\partial t} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{p_i(x^J)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x) p_i(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \right) \Big|_{x=x^J} + b(x^J) w(t). \quad (4)$$

Для тех же t будем иметь

$$\alpha(x^J, t) \leq u(x^J, t) \leq \beta(x^J, t). \quad (5)$$

Обозначим через F конечномерное пространство вещественнозначных функций, определённых на конечном множестве внутренних мультииндексов J целочисленной сетки $0 \leq J \leq N$. Пусть вектор-функция $y : (0, T) \rightarrow F$ определяется равенством $y(t)[J] = u(x^J, t)$, а вектор $B \in F$ задаётся как $B[J] = \frac{b(x^J)}{c(x^J)\rho(x^J)}$.

Тогда уравнение (4) может быть записано в виде конечномерной системы дифференциальных уравнений

$$y'(t) = Ay(t) + Bw(t) + v(t), \quad t \in (0, T). \quad (6)$$

Здесь A есть матрица, порождённая одной из распространённых схем дискретизации оператора Лапласа, стоящего в правой части равенства (4). Вектор-функция $v : (0, T) \rightarrow F$ порождена граничным условием (2) и играет роль «помехи», которую необходимо компенсировать с помощью управления $w(t)$ из указанного выше диапазона. В дальнейшем континуальное неравенство (5) мы заменим дискретным аналогом

$$\alpha_i \leq y(t_i) \leq \beta_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Здесь t_i ($0 < t_i < t_{i+1} < T$) есть моменты наблюдения за температурой, а векторы $\alpha_i, \beta_i \in F$ ($\alpha_i \leq \beta_i$) порождены соответственно выражениями $\alpha(x^J, t_i)$ и $\beta(x^J, t_i)$. В наших обозначениях вектор $y(0) \in F$ характеризует начальную температуру во внутренних узлах параллелепипеда G . Теперь мы в состоянии применить результаты работы [1] для получения необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (6)-(7) при заданном допустимом управлении $w(t)$, а также принципа максимума для указания точек переключения кусочно-постоянного управления $w(t)$, принимающего лишь крайние значения $w_{\min}$ и $w_{\max}$.

Если линейный функционал λ принадлежит сопряженному пространству F^* и вектор $g \in F$, то $\lambda \cdot g$ обозначает значение этого функционала на элементе g . Функционал λ называется неотрицательным, если $\lambda \cdot g \geq 0$ для всех $g \geq 0$, $g \in F$.

Теорема 1. Задача (6)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда неравенство

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^1 \cdot (\beta_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i-s)} \{Bw(s) + v(s)\} ds) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \cdot (\alpha_i - \int_0^{t_i} e^{A(t_i-s)} \{Bw(s) + v(s)\} ds) \quad (8)$$

имеет место для любого семейства неотрицательных функционалов $\{\lambda_i^1, \lambda_i^2\}_{i=1}^m$ из сопряженного пространства F^* , удовлетворяющего уравнению

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^1 e^{At_i} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 e^{At_i}. \quad (9)$$

Замечание 1. В действительности неравенство (8) достаточно проверить на конечном числе образующих конуса неотрицательных решений уравнения (9), для отыскания которых можно применить вычислительную схему Н.В. Черниковой [1] либо воспользоваться модификацией симплекс-метода.

Теорема 2. Пусть $v(t)$ есть допустимая помеха для задачи управления (6)-(7), то есть найдётся такое допустимое управление $w(t)$ ($w_{\min} \leq w(t) \leq w_{\max}$, $t \in (0, T)$), при котором указанная задача разрешима. Тогда для некоторого семейства нетривиальных неотрицательных функционалов $\{\lambda_i^1, \lambda_i^2\}_{i=1}^m$ из сопряженного пространства F^* , удовлетворяющего уравнению (9), найдётся компенсирующее помеху $v(t)$ допустимое управление $w^*(t)$, удовлетворяющее при почти всех $s \in (0, T)$ принципу максимума

$$\varphi(s) w^*(s) = \max_{w_{\min} \leq w \leq w_{\max}} \varphi(s) w,$$

где скалярная функция

$$\varphi(s) = \sum_{i=1}^m \text{sign}(t_i - s)^+ (\lambda_i^1 - \lambda_i^2) \cdot e^{A(t_i-s)} B.$$

Здесь используется положительная часть $\sigma^+ = (\sigma + |\sigma|)/2$ числа σ .

Замечание 2. Заметим, что вид уравнения (9) и скалярной функции $\varphi(s)$ упростится, если ввести обозначение $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, при этом не надо требовать неотрицательности этого функционала. Кроме того, нетрудно установить следующее свойство кусочно-непрерывной функции $\varphi(s)$, концы интервалов знакопостоянства которой

определяют точки переключения в нашей задаче управления температурой: $\varphi(s) \equiv 0$ при $s \notin (t_1, t_m)$ и $\varphi(s) = \gamma_k \cdot e^{-As} B$ при $s \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{2, m}$, где функционалы $\gamma_k = \sum_{i=k}^m \lambda_i e^{At_i}$, причём $\gamma_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i e^{At_i} = 0$ и для функционала λ_k имеем представление $\lambda_k = (\gamma_{k+1} - \gamma_k) e^{-At_k}$, $k = \overline{1, m-1}$, $\lambda_m = \gamma_m e^{-At_m}$. Выбирая произвольно функционалы γ_k , $k = \overline{2, m}$, и считая, что $\gamma_1 = 0$, из последних формул получим любое решение системы $\sum_{i=1}^m \lambda_i e^{At_i} = 0$. Теперь остаётся найти положительную и отрицательную части λ_i^+ и λ_i^- функционала λ_i и положить в теореме 1 соответственно $\lambda_i^1 = \lambda_i^+ + \delta$ и $\lambda_i^2 = \lambda_i^- + \delta$, где δ есть произвольный неотрицательный функционал.

На основе этих результатов разработаны эффективные алгоритмы расчёта точек переключения в дифференциально-разностной задаче управления температурой двумерных и трёхмерных параллелепипедов. Дано сравнение численных результатов, полученных на вычислительном кластере с использованием различных технологий распределённого и параллельного программирования (sockets, PThreads, PVM, MPI, OpenMP).

Литература

1. Исламов Г.Г. О допустимых помехах линейных управляемых систем // Изв. Вузов. Математика. – 2002. - № 2. – С. 37-40.