ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

МАТЕМАТИКА 2006. №1

УДК 512.64

Г. Г. Исламов, Ю. В. Коган

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОИСКА БАЗИСНОГО МИНОРА МАТРИЦЫ

Рассматривается задача определения ....

Ключевые слова: базисный минор, разрешенный элемент, матрица.

Предлагается алгоритм поиска базисного минора [см. [1]] (ненулевого минора максимального порядка) $m \times n$ - матрицы A, позволяющий одновременно вычислить

1) значение базисного минора;

2) обратную матрицу для матрицы этого минора;

3) в базисе строк (столбцов) матрицы A, отвечающих базисному минору, координаты тех строк (столбцов) матрицы A, которые не входят в этот минор.

Метод заключается в построении последовательности матриц

$$A_0 = A, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_r, \tag{1}$$

где A_{k+1} получается путём простого преобразования элементов предыдущей матрицы $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$.

В текущей матрице A_k есть запрещённые строки и запрещённые столбцы, остальные строки и столбцы этой матрицы называются разрешёнными.

В матрице $A_0 = A$ все строки и столбцы разрешённые. Для перехода от A_k к следующей матрице A_{k+1} последовательности (1) в разрешённых строках и столбцах матрицы A_k возьмём произвольный ненулевой элемент $a_{\mu_k \nu_k}^{(k)}$ (будем называть его разрешающим элементом). Если такого элемента нет, т. е. нет свободных строк и столбцов, либо все элементы в разрешённых строках и столбцах матрицы A_k нули, то последовательность (1) завершается матрицей $A_k : r = k$.

В последовательности (1) содержится вся необходимая информация для получения заключений 1), 2) и 3) (см. ниже теорему).

Если разрешённые строка μ_k и столбец ν_k есть и $a^{(k)}_{\mu_k\nu_k} \neq 0$, то формируем элементы матрицы A_{k+1} по следующему простому правилу

$$a^{(k+1)}_{ij} = \frac{1}{a^{(k)}_{\mu_k\nu_k}} \begin{cases} 1 & \text{, если } i = \mu_k, j = \nu_k; \\ -a^{(k)}_{ij} & \text{, если } i = \mu_k, j \neq \nu_k; \\ a^{(k)}_{ij} & \text{, если } i \neq \mu_k, j = \nu_k; \\ a^{(k)}_{ij} \cdot a^{(k)}_{\mu_k\nu_k} - a^{(k)}_{\mu_k j} \cdot a^{(k)}_{i\nu_k} & \text{, если } i \neq \mu_k, j \neq \nu_k. \end{cases}$$

Список запрещенных строк и столбцов матрицы A_{k+1} получается из списка запрещенных строк и столбцов матрицы A_k путём добавления номеров μ_k и ν_k использованного разрешающего элемента $a^{(k)}_{\mu_k\nu_k} \neq 0$, стоящего в разрешённых строках и столбцах матрицы A_k.

Теорема 1. *Пусть A_r - последняя матрица построенной выше последовательности* (1)*. Тогда*

1) *Минор матрицы A, составленный из запрещенных строк и столбцов матрицы A_r, базисный и равен произведению*

$$\prod_{k=0}^{r-1} a^{(k)}_{\mu_k\nu_k}.$$

2) *Подматрица, составленная из запрещенных строк и столбцов матрицы A_r, является обратной матрицей к матрице указанного в заключении* 1) *теоремы базисного минора.*

3) *В базисе строк (столбцов) матрицы A, отвечающих найденному базисному минору, координаты тех строк (столбцов) матрицы, которые не входят в базисный минор, находятся в соответствующих строках (столбцах,взятых со знаком минус) матрицы A_r.*

П р и м е р 1. Поясним метод следующим образом.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$. Символ точка (.) используется для обозначения запрещённых строк и столбцов, а символ подчёркивания (_) выделяет разрешающий элемент. Имеем следующую последовательность вида (1): $A_0 = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 11 \end{pmatrix}$;

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & -2 & -5 \\ & 3 & \underline{-2} & -9 \\ & 4 & -2 & -9 \\ & \cdot & & \end{pmatrix}; \; A_2 = \begin{pmatrix} \cdot & -2 & 1 & 4 \\ \cdot & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{2} \\ & 1 & 1 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}.$$

МАТЕМАТИКА 2006. №1

По теореме минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ базисный, его значение равно -2. Обратная матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Разложения по базисным строкам и столбцам имеют вид

$$(4,6,11) = 1\cdot(1,2,5) + 1\cdot(3,4,6); \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = (-4)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{9}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, а вектор-столбец $\tilde{x}$ (соответственно) $\tilde{y}$ получается из x (соответственно y) заменой координаты x_{ν_k} на y_{μ_k} (y_{μ_k} на x_{nu_k}). Заметим, что переход от матрицы A_k к матрице A_{k+1} ($k = 0, \ldots, r-1$) равносилен тому, от соотношения

$$y = A_k x \tag{2}$$

мы переходим к соотношению $\tilde{y} = A_{k+1}\tilde{x}$, выражая x_{ν_k} из равенства

$$y_{\mu_k} = \sum_{j=1}^{n} a^{(k)}_{\mu_k j} x_j : \quad x_{\nu_k} = -\frac{1}{a^{(k)}_{\mu_k \nu_k}} \sum_{j\neq\nu_k} a^{(k)}_{\mu_k j} x_j + \frac{1}{a^{(k)}_{\mu_k \nu_k}} y_{\mu_k},$$

и исключая x_{ν_k} из остальных соотношений (2):

$$y_i = \sum_{j\neq\nu_k} a^{(k)}_{ij} x_j + a^{(k)}_{i\nu_k} x_{\nu_k} =$$

$$= \frac{1}{a^{(k)}_{\mu_k \nu_k}} \left(\sum_{j\neq\nu_k} (a^{(k)}_{\mu_k\nu_k} a^{(k)}_{ij} - a^{(k)}_{\mu_k j} a^{(k)}_{i\nu_k}) x_j + a^{(k)}_{i\nu_k} y_{\mu_k} \right)$$

для $i \neq \mu_k$. Поэтому переход от матрицы $A = A_0$ к матрице A_k означает, что мы из равенства $y = Ax$ последовательно выражаем переменные $x_{\nu_0}, \ldots, x_{\nu_{k-1}}$ и остальные переменные $y_i, i \neq \nu_l, l = 0, \ldots, k-1$ через переменные $y_{\mu_0}, \ldots, y_{\mu_{k-1}}$ и остальные переменные $x_j, j \neq \mu_l, l = 0, \ldots, k-1$. Запишем такой переход с помощью блочной матрицы. Без ограничения общности можно считать, что $\mu_k = \nu_k = k-1, k = 1, \ldots, r$. Представим матрицу A в виде блочной матрицы $A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$, где B, C, D, E – матрицы размеров $k\times k, k\times(n-k), (m-k)\times k, (m-k)\times(n-k)$ соответственно. Запишем вектор-столбцы x и y в виде $x = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}$, где $x^{'}, x^{''}, y^{'}, y^{''}$ — вектор-столбцы размера $k, n-k, k, m-k$ соответственно. Соотношение (2) равносильно системе

$$y^{'} = Bx^{'} + Cx^{''}, y^{''} = Dx^{'} + Ex^{''}. \tag{3}$$

Следуя предложенному алгоритму, мы можем из системы (3) однозначно с помощью линейных соотношений выразить $\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{''} \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} y^{'} \\ x^{''} \end{pmatrix}$. В частности, если $x^{''} = 0$, то $y^{'} = 0$ тогда и только тогда, когда $x^{'} = 0$, т. е. уравнение $Bx^{'} = 0$ имеет только нулевое решение и поэтому матрица B обратима. Из (3) следует, что

$$x^{'} = B^{-1}y - B^{-1}Cx^{''}, y^{''} = DB^{-1}y^{'} + (E - DB^{-1}C)x^{''}, \text{ то есть}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}C \\ DB^{-1} & E - DB^{-1}C \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Согласно алгоритму вычисления матрицы A_k (в исходных обозначениях) имеем

$$a^{(k)}_{\mu_{k-1}\nu_{k-1}} = \frac{1}{a^{(k-1)}_{\mu_{k-1}\nu_{k-1}}},$$

что совпадает с элементом $(B^{-1})_{kk}$, который, по известному правилу нахождения элементов обратной матрицы через алгебраические дополнения исходной матрицы, равен $\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, где Δ_{k-1} и Δ_k главные миноры порядков $k-1$ и k матрицы B. В исходных обозначениях Δ_k — минор матрицы A равный $A\begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{k-1} \\ \nu_0 & \cdots & \nu_{k-1} \end{pmatrix}$. Итак,

$$a^{(k-1)}_{\mu_{k-1}\nu_{k-1}} = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} = \frac{A\begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{k-1} \\ \nu_0 & \cdots & \nu_{k-1} \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{k-2} \\ \nu_0 & \cdots & \nu_{k-2} \end{pmatrix}}$$

и, значит, утверждения 1) и 2) теоремы доказаны.

Чтобы доказать 3) заметим, что если $k = r$, то либо $k = n$, либо $k = m$, либо $E - DB^{-1}C = 0$. Если обозначить j-ый столбец матрицы A через $a^{(j)}$, то разложение j-го столбца матрицы A по базису первых k столбцов имеет вид $a^{(j)} = \sum_{i=1}^{k} a^{(i)}u_{ij}, j = k+1, \ldots, n$. Если ввести матрицу U с элементами u_{ij}, то это разложение равносильно системе

$$C = BU, \; E = DU,$$

которая, в свою очередь, эквивалентна системе

$$U = B^{-1}C,\ E = DB^{-1}C \text{ (если } k < n,\ k < m). \tag{5}$$

Аналогично, если i-ую строку матрицы A обозначить через $a_{(i)}$, то разложение i-ой строки матрицы A по базису первых k строк имеет вид $a_{(i)} = \sum_{j=1}^{k} v_{ij}a_{(j)}, i = k+1,\ldots,m$. Если через V обозначить матрицу с элементами v_{ij}, то последнее равенство равносильно системе

$$VB = D,\ VC = E,$$

которая равносильна системе

$$V = DB^{-1},\ E = DB^{-1}C \text{ (если } k < n,\ k < m). \tag{6}$$

Сравнивая (4), (5), (6), получаем утверждение 3) теоремы.

Доказанная теорема позволяет вычислить не только ранг r квадратной вещественной матрицы A, но и получить следующий критерий положительности всех угловых [см. [1]] (ведущих главных [см. [2]], последовательных главных [см. [3]]) миноров этой матрицы.

Следствие 1. Все угловые миноры вещественной квадратной матрицы A порядка n положительны тогда и только тогда, когда указанный выше алгоритм для $\mu_k = \nu_k = k$ даёт положительную последовательность $r = n$ разрешающих элементов последовательности (1)

$$a_{kk}^{(k-1)} > 0,\ k = 1,\ldots,r. \tag{7}$$

Кроме того, в случае симметричности матрицы A из доказательства приведённой выше теоремы следует, что число положительных и число отрицательных собственных значений этой матрицы совпадают с соответствующими числами положительных и отрицательных разрешающих элементов в последовательности (1). Отсюда получаем

Следствие 2. Вещественная симметрическая матрица A положительно определена тогда и только тогда, когда выполнено условие (2), где $r = n$ - порядок матрицы A.

Применяя следствие 1 к матрице Гурвица [см. [2]] многочлена $f = z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ с вещественными коэффициентами, получим необходимое и достаточное условие устойчивости этого многочлена, т. е. условие, при котором все его корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости.

В качестве примера возьмём многочлен четвёртой степени $f = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$. В силу необходимого условия Стодолы [см. [2]] все $a_i > 0, i = 1, \ldots, 4$ для устойчивого многочлена. Если положить $a_0 = 1, a_k = 0$ при $k < 0$ или $k > n = 4$, то (i, j)-элемент матрицы Гурвица для f есть просто a_{2i-j}.

Имеем $A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$, причем соответствующая последовательность разрешающих элементов находится рекурсивно

$$a_{11}^{(0)} = a_1,\ a_{22}^{(1)} = a_2 - a_3 \cdot 1/a_{11}^{(0)},\ a_{33}^{(2)} = a_3 - a_4 \cdot a_1/a_{22}^{(1)},\ a_{44}^{(3)} = a_4.$$

На основании сказанного выше положительность этих величин есть необходимое и достаточное условие устойчивости многочлена четвёртой степени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 01.09.2005

G. G. Islamov, Y. V. Kogan
Lyapunov exponents of linear system with delay

The paper presents the conditions of total controllability of the linear nonstationary system when a rank of Krasovskii matrix is less than a dimension of the system.

Исламов Галимзян Газизович
Удмуртский государственный университет,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1
e-mail: gislamov@udm.ru

Коган Юрий Вольфович
Удмуртский государственный университет,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1
e-mail: petrov@vodki.net