



УДК

Об одном уточнении метода перезаказов для балансовой модели*Исламов Г. Г., док-р физ.мат. наук, проф.*

Балансовая модель экономики записывается в виде

$$x = Ax + y, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор объёмов производства (план), $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – матрица норм затрат, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ – вектор, обеспечивающий баланс между вектором x и вектором затрат ресурсов в сфере производства Ax . Понятно, что все величины x_i и a_{ij} неотрицательны, тогда так компоненты вектора y могут принимать значения любого знака. Если все $y_i \geq 0$, то вектор y называется вектором конечной продукции. Все балансовые модели делятся на два класса:

1) продуктивные – те, которые при некотором плане $x > 0$ обеспечивают $y = x - Ax > 0$; Здесь и далее векторные неравенства вида $x > 0$ означают, что все компоненты соответствующего вектора x положительны.

2) все остальные (непродуктивные).

Существуют различные критерии продуктивности балансовой модели экономики, например, спектральный радиус $r(A)$ матрицы A меньше единицы, матрица $D = E - A$, где E – единичная матрица, обратима и все элементы обратной матрицы D^{-1} неотрицательны. На основе этих, и более сложных критериев, можно строить всевозможные алгоритмы проверки продуктивности и исследовать их вычислительную сложность. Так, условие Хокинса-Саймона [1] и алгоритм поиска базисного минора матрицы работы [2] позволяют указать один из таких алгоритмов, который основан на следующем утверждении: матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда все разрешающие элементы, выбираемые последовательно на основной диагонали, положительны. Среди балансовых моделей особо выделяют неразложимые модели – такие, для которых граф матрицы A сильно связан. Экономически это означает, что продукция любой отрасли прямо или косвенно использует продукцию остальных отраслей. Для неразложимых моделей можно указать более слабые условия проверки продуктивности.

Почему продуктивные модели представляют интерес? Эти модели описывают многоотраслевые экономики, которые могут развиваться за счёт внутренних ресурсов, и, тем самым, обеспечивать важное свойство государства – экономическую независимость. Тогда как непродуктивные экономики могут функционировать исключительно за счёт импорта.

Почему важны алгоритмы проверки продуктивности? Инновационные процессы в обществе, быстрое развитие свободных рыночных отношений, интеграция в

мировое экономическое пространство неизбежно приводят к качественным и количественным изменениям в экономике страны. Качественно это выражается в том, что появляются новые и исчезают старые отрасли. Может сильно измениться структура хозяйственных связей. Количественно это выражается в изменении размера, структуры и значений элементов матрицы A норм отраслевых затрат. Эта матрица лежит в основе балансовых соотношений (1), которые необходимы для государственного учёта и контроля за использованием денежных, интеллектуальных и материальных ресурсов в какой бы форме собственности они не находились.

Балансовые модели с разложимыми матрицами норм затрат указывают на то, что в соответствующей экономике имеются большие резервы в установлении хозяйственных связей между отраслями. Поэтому здесь возникает интересная задача указания минимального набора хозяйственных связей, установление которых обеспечит свойство неразложимости новой экономики.

Для продуктивных моделей экономики итерационный процесс

$$x(0) = y, \quad x(k+1) = Ax(k) + y, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

сходится к единственному решению $x(\infty)$ уравнения (1) при любой правой части y . Этот итерационный процесс среди экономистов получил название метода перезаказов. Вычислительные эксперименты с матрицами больших размеров $n \approx 10^5$ показывают, что сходимость $x(k)$ к решению $x(\infty)$, как правило, очень медленная. Это не единственный недостаток метода перезаказов: его нельзя применить к непродуктивным моделям, значение которых возрастает в эпоху интеграции в мировое экономическое пространство.

В чём состоит наше уточнение метода перезаказов? Предлагается использовать неявный метод перезаказов следующего вида

$$x(0) = y, \quad (E - H)x(k+1) = (A - H)x(k) + y, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

который требует обращения матрицы $(E - H)$. Если $H = pq^T$ – одноранговая матрица, то $(E - H)^{-1} = E + H/(1 - q^T p)$ есть одноранговое возмущение единичной матрицы. Этот случай рассмотрен в работах [3] и [4], где строится итерационный процесс вида (3), для которого относительная погрешность решения ограничена сверху величиной δ^k , если геометрические кратности собственных значений матрицы A , лежащих вне круга радиуса $\delta < 1$, равны единице. В общем случае для обеспечения геометрической скорости δ^k в подходящей эквивалентной норме необходимо и достаточно, чтобы спектральный радиус матрицы $(E - H)^{-1}(A - H)$ был бы меньше δ . Из всех матриц H , обеспечивающих выполнение этого неравенства, представляют интерес те, которые имеют минимальный ранг. В силу результатов работ [3] и [5] этот минимальный ранг равен максимальной геометрической кратности тех собственных значений матрицы A , которые лежат вне круга радиуса

$\delta < 1$. Мы видим, что уточнение метода перезаказов применимо и для непродуктивных моделей. Вся трудность рассматриваемого метода заключена в построении вспомогательной матрицы H . Частичный ответ на этот вопрос содержится в работе [3]. Для полного решения этой проблемы требуются дополнительные построения: подпространства Крылова для матрицы A и т. д. (см. работу [5]).

.....

Список литературы

1. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. – 520 с.
2. Исламов Г.Г., Коган Ю.В. Об одном алгоритме поиска базисного минора матрицы // Вестник удмуртского университета. – 2006. – №1 : Математика. – С. 63 – 70.
3. Исламов Г.Г. О границе применимости итерационного метода // Математическое моделирование и информационные технологии. Межвуз. сб. науч. тр., Ижевск. – 1991. – С. 14–18.
4. Исламов Г.Г. Об одном классе одноранговых возмущений // Известия вузов. Математика. – 2005, №2. – С. 30 – 33
5. Исламов Г.Г. Об управлении спектром динамической системы // Дифференц. уравнения. – 1987, Т. 23, №8. – С. 1299 – 1302.