

УДК 519.21

Г. Г. Исламов, Ю. В. Коган

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С ПОЛИЭДРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Для марковского процесса с конечным числом состояний и непрерывным временем находится начальное распределение вероятностей состояний этого процесса, которое обеспечивает в каждый фиксированный момент времени $t_k, k = 1, \dots, m$ средний выигрыш, не меньший порогового значения $\beta_k > 0, k = 1, \dots, m$.

Ключевые слова: марковский процесс, полиэдральные ограничения, задача линейного программирования, параллельный симплекс-метод.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений А. Н. Колмогорова

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^n \lambda_{ji}(t)x_j(t) - x_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t), \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n x_i(t) &\equiv 1, \quad t \geq a, \end{aligned} \quad (1)$$

описывающую марковский случайный процесс с n дискретными состояниями s_i и непрерывным временем t , в котором переход из состояния s_i в состояние s_j происходит под воздействием пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda_{ij}(t) \geq 0, \lambda_{ii}(t) \equiv 0, i, j = 1, \dots, n$ (см. [1]). Здесь $x_i(t)$ — вероятность пребывания случайного процесса в состоянии s_i в момент времени t . Нас интересует случай, когда n велико ($\approx 2^{16}$). Системы с таким числом состояний относятся к классу сложных образований и встречаются в биологии, химии, технике и экономике.

Пусть в фиксированный момент времени $t_k (t_k < t_{k+1}, k = 1, \dots, m-1)$ случайный процесс в состоянии s_j приносит доход (или убыток в зависимости от знака) c_j^k . Тогда системе неравенств

$$\sum_{j=1}^n c_j^k x_j(t_k) \geq \beta_k, \quad k = 1, \dots, m \quad (2)$$

удовлетворяет случайный процесс, средний доход которого в каждый фиксированный момент времени t_k не меньше значения $\beta_k > 0, k = 1, \dots, m$.

Мы предполагаем, что число наблюдений m также велико ($\approx 2^{10}$). Приводимый в теореме 1 критерий разрешимости уравнения (1) с полиэдральными ограничениями (2) (ср. [2]) формулируется в терминах некоторых величин следующих двух расчётных задач большой размерности.

Первая задача, требующая высокой точности вычислений, состоит в решении m задач Коши для однородной сопряжённой системы. Пусть для каждого t_k , $k = 1, \dots, m$ вектор-столбец $y^k(t) = (y_1^k(t), \dots, y_n^k(t))^T$ обозначает решение сопряжённой однородной системы

$$\dot{y}_i^k(\tau) = - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) y_j^k(\tau) + y_i^k(\tau) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(\tau), \quad i = 1, \dots, n, \quad t_k \geq \tau \geq a \quad (3)$$

с начальным условием $y_j^k(t_k) = c_j^k$. Для решения этой системы мы используем алгоритм обобщённого метода Рунге–Кутты, предложенный в работе [3]. В отличие от известных вариантов метода Рунге–Кутты в обобщённом методе для минимизации величины относительной погрешности численного результата используется аппроксимация Паде экспоненциальной функции не в начале координат, а в точке, ближайшей к спектру матрицы системы (3), умноженной на величину шага сетки по переменной τ , в текущем узле. На этом этапе для уменьшения расчётного времени используется технология параллельного программирования.

Вторая расчётная задача состоит в отыскании максимального значения целевой функции следующей экстремальной задачи:

$$\sum_{k=1}^m \beta_k \lambda_k \rightarrow \max, \quad \sum_{k=1}^m y^k(a) \lambda_k \leq e, \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (4)$$

где e — столбец, состоящий из n единиц (сравнение векторов-столбцов по координатам). Для решения этой задачи мы применяем параллельный алгоритм симплекс-метода в виде симплекс-таблиц.

По схеме работы [2] доказывается

Теорема 1. *Задача (1)–(2) разрешима тогда и только тогда, когда максимальное значение целевой функции задачи (4) больше нуля и не превосходит единицы.*

Если строка $q = (q_1, \dots, q_n)$ удовлетворяет условиям

$$qe = 1, \quad q_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad qy^k(a) \geq \beta_k, \quad k = 1, \dots, m, \quad (5)$$

то решение системы уравнений (1) с начальным условием $x_i(a) = q_i$, $i = 1, \dots, n$ удовлетворяет системе неравенств (2). Ниже будет показано,

что решение двойственной к (4) экстремальной задачи после нормировки даёт решение системы равенств и неравенств (5). В учебном пособии [4] разработан последовательный алгоритм в форме симплекс-таблиц одновременного нахождения решений и областей устойчивости для симметричной пары прямой и двойственной задач линейного программирования. Нами исследована параллельная реализация этого алгоритма, использующая методы распределённых вычислений, применённые в диссертации [5]. В конце работы параллельного алгоритма мы получаем максимальное значение целевой функции задачи (4). Если это значение больше нуля и не превосходит единицы, то в силу теоремы 1 задача (1) – (2) разрешима.

Покажем, что решение двойственной к (4) задачи после нормировки даёт одно из начальных состояний марковского процесса с полиэдральными ограничениями. Перейдём от системы равенств и неравенств (5) к задаче

$$qe \rightarrow \min, \quad q_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad qy^k(a) \geq \beta_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что она является двойственной к экстремальной задаче (4). Как известно, обе задачи разрешимы или неразрешимы одновременно. Пусть q^* — решение двойственной задачи (6). Тогда по теореме двойственности $\nu = q^*e$ есть максимальное значение целевой функции прямой задачи (4). Если $0 < \nu < 1$, то $q = q^*/\nu$ удовлетворяет системе (5) и, значит, может быть взято в качестве начального распределения вероятностей состояний марковского процесса (1) с полиэдральными ограничениями (2).

Экстремальные задачи линейного программирования большой размерности всегда привлекали внимание исследователей. Новый интерес к оптимизационным задачам этого класса возник в связи с быстрым распространением в мире кластерных технологий организации высокопроизводительных вычислений. Globus-машина (сервер) в составе вычислительного кластера обеспечивает доступ к его вычислительным ресурсам, а пользователи, имеющие globus-машину (клиента) в сети Internet, получают возможность затребовать необходимый вычислительный ресурс через этот сервер. Толчком к инициированию нашего исследования по распараллеливанию алгоритма симплекс-метода из учебного пособия [4] послужили полученные в [5] важные результаты, касающиеся эффективности параллельной реализации симплекс-метода в виде симплекс-таблиц. Вычислительный эксперимент показал, что эта реализация выигрывает в сравнении с методом обратной матрицы. Преимущество нашего параллельного алгоритма перед алгоритмом работы [5] заключается в том, что он сразу даёт решение четырёх задач: находятся оптимальные планы задач (4) и (6),

а также области устойчивости этих планов. Исходные структуры данных параллельного алгоритма симплекс-метода в виде симплекс-таблиц соответствуют структурам, разработанным в учебном пособии [4]. Подходы к распределению столбцов информационной структуры по процессорам, а также правила выбора столбца, вводимого в базис, заимствованы из работы [5]. Следует отметить, что в указанной работе проведён теоретический анализ времени выполнения для последовательного и параллельного варианта метода симплекс-таблиц, метода обратной матрицы, а также дано сравнение этих методов по эффективности. Подобный анализ модели производительности для взаимодействующих процессоров можно провести и в нашем случае. Это позволяет указать оптимальное число процессоров, которое минимизирует общее время выполнения как функцию размерности, структуры и степени разрежённости матрицы задачи линейного программирования.

Первая симплекс-таблица предложенного в работе [4] алгоритма одновременного решения задач (4) и (6) имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccccc} & & & \lambda_1 & \dots & \lambda_m & & \\ & & & q_{n+1} & \dots & q_{n+m} & & \\ & & \mathbf{0} & -\beta_1 & \dots & -\beta_m & & \\ q_1 & \lambda_{m+1} & 1 & y_1^1(a) & \dots & y_1^m(a) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & \lambda_{m+n} & 1 & y_n^1(a) & \dots & y_n^m(a) & 0 & \dots & 1 \\ & & & 1 & \dots & 0 & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 0 & \dots & 1 & & & \end{array} \right), \quad (7)$$

где справа и снизу приписаны единичные матрицы размеров соответственно n и m . В пособии [4] указаны правило преобразования симплекс-таблиц такой структуры, условие окончания алгоритма, правило нахождения экстремальных значений, оптимальных планов и их областей устойчивости, а также рассмотрены иллюстративные примеры.

Обозначим через P матрицу порядка n , стоящую справа в последней симплекс-таблице, а через Q матрицу порядка m , стоящую снизу в этой таблице. Пусть, далее, $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ — строка, находящаяся в последней симплекс-таблице в положении строки $(-\beta_1, \dots, -\beta_m)$ первой симплекс-таблицы, а нулевые координаты этой строки имеют номера $j_1, \dots, j_t$ ($1 \leq t \leq m$); $U = (u_1, \dots, u_n)^T$ — столбец, находящийся в последней симплекс-таблице в положении столбца из единиц e первой симплекс-таблицы, а нулевые координаты этого столбца имеют номера $i_1, \dots, i_s$ ($1 \leq s \leq n$). Заметим, что величины Δ и U определяют соот-

ответственно решения двойственной задачи (6) и прямой задачи (4), а экстремальное значение целевых функций этих задач находится в последней симплекс-таблице на месте «жирного» нуля в первой симплекс-таблице.

Приведём идею доказательства следующего утверждения, частная формулировка которого дана в учебном пособии [4] для невырожденных задач линейного программирования.

Теорема 2. Область устойчивости прямой задачи (4) даётся системой неравенств

$$\delta\beta \cdot Q \leq \Delta + \sum_{k=1}^s \nu_k \tilde{y}_{i_k},$$

где $\delta\beta = (\delta\beta_1, \dots, \delta\beta_m)$, $\nu_k \geq 0$, $k = 1, \dots, s$ произвольно заданы, а $\tilde{y}_{i_k}$ есть i_k -я строка основной матрицы последней симплекс-таблицы.

Область устойчивости двойственной задачи (6) описывается системой неравенств

$$P \cdot \delta e + U \geq \sum_{k=1}^t \mu_k \tilde{y}^{j_k},$$

где $\delta e = (\delta e_1, \dots, \delta e_n)^T$, $\mu_k \geq 0$, $k = 1, \dots, t$ произвольно заданы, а $\tilde{y}^{j_k}$ есть j_k -й столбец основной матрицы последней симплекс-таблицы.

Доказательство. Введём следующие обозначения. Пусть $\lambda' = \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$, $\lambda'' = (\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+n})^T$, $\beta' = \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $e'' = e = (e_1, \dots, e_n)^T$, $q'' = (q_1, \dots, q_n)$, $q' = (q_{n+1}, \dots, q_{n+m})$, $Y = (y_i^j(a))_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$ — $n \times m$ -матрица. В этих обозначениях прямая задача (4) запишется в виде

$$\beta' \cdot \lambda' \rightarrow \max, \quad \lambda'' = e'' - Y \cdot \lambda', \quad \lambda' \geq 0, \quad \lambda'' \geq 0. \quad (8)$$

Двойственная ей задача (5) примет вид

$$q'' \cdot e'' \rightarrow \min, \quad q' = -\beta' + q'' \cdot Y, \quad q' \geq 0, \quad q'' \geq 0. \quad (9)$$

Согласно критерию Л. В. Канторовича наборы $\{\lambda', \lambda''\}, \{q', q''\}$ будут решениями соответственно задач (8) и (9), если и только если выполнены соотношения дополняющей нежёсткости $q' \cdot \lambda' = 0$, $q'' \cdot \lambda'' = 0$. Сущность упомянутого выше параллельного алгоритма симплекс-метода состоит в том, что мы по определённом алгоритму (описание см. в [4]) последовательно переходим от одного набора $\lambda', \lambda'', q', q''$ к следующему, пока строка $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$, стоящая на месте строки $-\beta$ симплекс-таблицы (7), не станет неотрицательной. Один шаг алгоритма симплекс-метода сводится к тому, что во втором из соотношений (8) (и соответственно (9))

мы переменную λ_l (соответственно q_{n+l}) «меняем местами» с переменной λ_{m+k} (соответственно q_k), где $1 \leq l \leq m$, $1 \leq k \leq n$. В результате такой операции переменные $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+k-1}, \lambda_l, \lambda_{m+k+1}, \dots, \lambda_{m+n}$ оказываются явно выраженными линейно через остальные λ -переменные $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda_{m+k}, \lambda_{l+1}, \dots, \lambda_n$. Аналогично поступаем с q -переменными. Подобно тому как это сделано в [6], можно заметить, что последовательное выполнение шагов симплекс-метода равносильно «перестановке местами» во вторых соотношениях (8) и (9) переменных $\lambda_{s_1}, \dots, \lambda_{s_r}$, где $1 \leq s_1 < \dots < s_r \leq m$ и переменных $\lambda_{m+t_1}, \dots, \lambda_{m+t_r}$, где $1 \leq t_1 < \dots < t_r \leq m$, $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$ (и аналогично для q -переменных). Без ограничения общности можно считать, что «меняются местами» переменные $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (соответственно $q_{n+1}, \dots, q_{n+r}$) и переменные $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+r}$ ($q_1, \dots, q_r$). Введём обозначения

$$\begin{aligned} q''_R &= (q_1, \dots, q_r), & q''_N &= (q_{r+1}, \dots, q_n), \\ \lambda'_R &= (\lambda_1, \dots, \lambda_r)^T, & \lambda'_N &= (\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_m)^T, \\ \lambda''_R &= (\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+r})^T, & \lambda''_N &= (\lambda_{m+r+1}, \dots, \lambda_{m+n})^T, \\ q'_R &= (q_{n+1}, \dots, q_{n+r}), & q'_N &= (q_{n+r+1}, \dots, q_{n+m}). \end{aligned}$$

Вектор-столбцы e''_R, e''_N и вектор-строки β'_R, β'_N определяются аналогично. Представим матрицу Y в виде блочной матрицы

$$Y = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix},$$

где B, C, D, F — матрицы размеров $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ соответственно. В новых обозначениях второе соотношение в задаче (8) примет вид

$$\begin{cases} \lambda''_R = e''_R - B\lambda'_R - C\lambda'_N, \\ \lambda''_N = e''_N - D\lambda'_R - F\lambda'_N. \end{cases} \quad (10)$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \lambda'_R = B^{-1}e''_R - B^{-1}\lambda''_R - B^{-1}C\lambda'_N, \\ \lambda''_N = (e''_N - DB^{-1}e''_R) + DB^{-1}\lambda''_R + (DB^{-1}C - F)\lambda'_N. \end{cases} \quad (11)$$

Аналогично поступаем со вторым соотношением в двойственной задаче (9). Обозначим через $\tilde{Y}$ блочную матрицу, соответствующую полученной системе (11), и введём следующие конкатенации использованных ранее столбцов и строк:

$$\tilde{\lambda}' = ((\lambda''_R)^T, (\lambda'_N)^T)^T, \quad \tilde{\lambda}'' = ((\lambda'_R)^T, (\lambda''_N)^T)^T, \quad \tilde{q}' = (q''_R, q'_N), \quad \tilde{q}'' = (q'_R, q''_N).$$

Имеем

$$\beta' \cdot \lambda' = \tilde{\beta}' \cdot \tilde{\lambda}' - \tilde{\beta}_R \cdot e''_R, \quad q'' \cdot e'' = \tilde{q}'' \cdot \tilde{e}'' - \tilde{\beta}_R \cdot e''_R,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}' &= (-\beta'_R B^{-1}, -\beta'_R B^{-1} C + \beta'_N) = (\tilde{\beta}'_R, \tilde{\beta}'_N), \\ \tilde{e}'' &= ((B^{-1} e''_R)^T, (e''_N - D B^{-1} e''_R)^T)^T = ((\tilde{e}''_R)^T, (\tilde{e}''_N)^T)^T. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим λ, q -наборы, соответствующие $\tilde{\lambda}' = 0$ и $\tilde{q}'' = 0$, то есть наборы $\lambda_0 = ((\tilde{e}''_R)^T, 0, 0, (\tilde{e}''_N)^T)^T$ и $q_0 = (0, -\tilde{\beta}'_N, -\tilde{\beta}'_R, 0)$. Они удовлетворяют соотношениям дополняющей нежёсткости, условиям неотрицательности и вторым соотношениям соответственно задач (8) и (9) и тем самым являются решениями этих оптимальных задач. В итоговой симплекс-таблице, полученной из (7), на месте матрицы Y будет стоять матрица $\tilde{Y}$, на месте строки $-\beta$ строка $\Delta = -\tilde{\beta}'$, на месте столбца $e'' = (1, \dots, 1)^T$ столбец $U = (u_1, \dots, u_n)^T = \tilde{e}''$. Если систему (10) дополнить равенствами $v''_R = -\lambda'_R$, $v''_N = -\lambda'_N$, где $v_R = (v_1, \dots, v_r)^T$, $v_N = (v_{r+1}, \dots, v_m)^T$, и выразить λ'_R через λ''_R , то получим, что матрица Q размерности m , стоящая снизу в итоговой симплекс-таблице, имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -B^{-1} & -B^{-1}C \\ 0 & E_{m-r} \end{pmatrix},$$

где E_{m-r} — единичная матрица порядка $m-r$. Если полученный в качестве решения задачи (8) набор λ_0 остаётся решением задачи, полученной из (8) путём замены вектор-строки β на вектор-строку $\beta + \delta\beta$, то это означает, что в экстремальной задаче

$$(\tilde{\beta} + \widetilde{\delta\beta})' \cdot \tilde{\lambda}' \rightarrow \max, \quad \tilde{\lambda}'' = \tilde{e}'' - \tilde{Y} \cdot \tilde{\lambda}', \quad \tilde{\lambda}' \geq 0, \quad \tilde{\lambda}'' \geq 0 \quad (13)$$

набор $\tilde{\lambda}_0 = (0, (\tilde{e}''^T)^T)$ остаётся решением. Заметим, что вектор $\tilde{\beta} + \widetilde{\delta\beta} = \widetilde{\beta + \delta\beta}$ связан с вектором $\beta + \delta\beta$ теми же линейными соотношениями (12), какими вектор $\tilde{\beta}$ связан с β . Эти соотношения можно записать так:

$$\tilde{\beta}' = \beta' Q. \quad (14)$$

Вектор $\tilde{\lambda}_0$ будет решением задачи (13) тогда и только тогда, когда из условий $-\tilde{y}_{i_k} \cdot \tilde{\lambda}' \geq 0$, $k = 1, \dots, s$, $g_p \cdot \tilde{\lambda}' \geq 0$, $p = 1, \dots, m$ следует, что $-(\tilde{\beta} + \widetilde{\delta\beta}) \cdot \tilde{\lambda}' \geq 0$. Здесь g_p есть p -я строка единичной матрицы размера m . Согласно лемме Фаркаша (см., например, [7]) для этого необходимо

и достаточно, чтобы для некоторых неотрицательных величин $\mu_p, \nu_k, p = 1, \dots, m, k = 1, \dots, s$ имело место разложение

$$\tilde{\beta} + \widetilde{\delta\beta} = - \sum_{p=1}^m \mu_p g_p + \sum_{k=1}^s \nu_k \tilde{y}_{i_k}.$$

Из (14) следует утверждение теоремы.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 384 с.
2. Исламов Г. Г. О полиэдральной разрешимости системы линейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. 1999. № 3. С. 31–37.
3. Исламов Г. Г., Коган Ю. В. Об одном обобщении метода Рунге-Кутты // Изв. Ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск. 2006. Вып. 2 (36). С. 167–172.
4. Исламов Г. Г. Принципы оптимальности: Учеб. пособие. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1998. 124 с.
5. Yarmish G. A. A distributed implementation of the simplex-method. Technical Report TR-CIS-2001-04, Polytechnic University, Brooklin.
6. Исламов Г. Г., Коган Ю. В. Об одном алгоритме поиска базисного минора матрицы // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Ижевск. 2006. № 1. С. 63–70.
7. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. М.: Мир, 1985. 512 с.

Поступила в редакцию 01.09.06

G. G. Islamov, Y. V. Kogan

The algorithm of finding an initial state of Markov process with polyhedral constraints

There is formulated solvability criterion for Markov process with polyhedral constraints. The algorithm of finding an initial state of this process is described.

Исламов Галимзян Газизович
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: gislamov@udm.ru

Коган Юрий Вольфович
Удмуртский государственный
университет
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kyvrak@udmnet.ru