ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический
и практический журнал

Серия:
Естественные и технические науки

Том 14, вып. 4, 2009

Журнал основан 5 февраля 1996 г.

Журнал Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Материалы международной конференции
«КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ.
Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2009)», посвященной 15-летию
Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина
и 80-летию Института математики, физики и информатики ТГУ имени Г.Р. Державина.
5–9 октября 2009 г., Тамбов

Е.В. Абрамова	Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле для полуплоскости по нечетным данным	654
А.А. Артемов	Канонические представления обобщенной группы Лоренца на сфере	656
А.А. Бетин	Вычисление присоединенной матрицы на многопроцессорном кластере	659
М.С. Близорукова	О реконструкции неизвестных характеристик в системах второго и третьего порядков	661
Г.П. Бочкарёв	Исследование одного обобщения неравенства Виртингера вариационными методами	663
E. Bravyi	On the solvability of resonance boundary value problems for functional differential equations with monotone operators	665
А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина	О реализации расстояния на множестве решений функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями	667
А.И. Булгаков, Е.В. Корчагина, О.В. Филиппова	Полунепрерывная снизу зависимость от параметров множеств решений функционально-дифференциальных включений с импульсными воздействиями	671
А.И. Булгаков, J.P. Minette	Связность множества решений задачи Коши функционально-дифференциального уравнения с вольтерровым оператором и импульсными воздействиями	673

Т е о р е м а. *Пусть отображение G непрерывно, и при любом $\xi \in \Xi$, $\sigma \in \Sigma$ отображение $G(\xi, \sigma, \cdot)$ на множестве $B\left(x_0, \frac{1}{\alpha}\rho(G(\xi, \sigma_0, x_0), V))\right)$ $\alpha-$накрывает множество V (здесь $B(x, r)$ – замкнутый шар в метрическом пространстве X с центром в точке x, радиуса r). Тогда определенное равенством (1) многозначное отображение $\widetilde{M} : \Xi \times \Sigma \to 2^X$ удовлетворяет условиям* **(C1)** – **(C3)**.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки. Докл. РАН, 2007. Т. 416, №2. С. 151–155.

Abstract: For a given function G and a set V the inclusion $G(\xi, \sigma, x) \in V$ with parameters ξ, σ and an unknown variable x is considered. A compact, upper semi-continuous, continuous for any ξ with respect to σ at a given point σ_0 dependence of a solutions set on parameters is constructed for the case when G is $\alpha-$covering with respect to x function.

Keywords: $\alpha-$covering; inclusion; control problem.

Жуковский Сергей Евгеньевич
аспирант
Российский университет дружбы народов
Россия, Москва
e-mail: zukovskys@mail.ru

Sergey Zhukovskiy
post-graduate student
Russian University of Nations Friendship
Russia, Moscow
e-mail: zukovskys@mail.ru

УДК 517.977.1

УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© **В. А. Зайцев**

Ключевые слова: управляемая система; согласованность; управление спектром; билинейная система.

Аннотация: Получены новые необходимые и достаточные условия глобальной управляемости спектра собственных значений стационарных билинейных управляемых систем, в частности, систем с неполной обратной связью.

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad y = C^*(t)x, \quad (t, x, u, y) \in \mathbb{R}^{1+n+m+k}, \tag{1}$$

в которой управление строится в виде $u = U(t)y$. Замкнутая система принимает вид

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Наряду с системой с неполной обратной связью (2) рассмотрим билинейную систему

$$\dot{x} = (A(t) + u_1(t)A_1(t) + \ldots + u_r(t)A_r(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Эта система имеет более общий вид по сравнению с системой (2). Все коэффициенты систем предполагаем ограниченными, кусочно непрерывными функциями. Рассмотрим задачу о стабилизации системы (3). В стационарном случае она заключается в построении (стационарного) управления, которое перемещает спектр собственных значений матрицы системы в левую полуплоскость. В нестационарном случае речь идет о задаче управления характеристическими показателями Ляпунова. В работе [1] было введено понятие согласованности для системы (1). Система (1) называется *согласованной на* $[t_0, t_0 + \vartheta]$, если существует $l > 0$ такое, что для всякой $G \in M_n$ найдется кусочно непрерывное управление $U : [t_0, t_0 + \vartheta] \to M_{m,k}$ такое, что решение матричной задачи Коши $\dot{Z} = A(t)Z + B(t)U(t)C^*(t)X(t, t_0)$, $Z(t_0) = 0$ удовлетворяет условию $Z(t_0 + \vartheta) = G$, при этом $|U(t)| \leqslant l|G|$, $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$; здесь $X(t, s)$ — матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$. Свойство согласованности системы (1) является обобщением понятия полной управляемости для системы с наблюдателем. Если $C(t) \equiv I$, то есть обратная связь полная: $u = U(t)x$, то согласованность системы (1) эквивалентна полной управляемости системы (1). На основе свойства согласованности в работах Е.Л. Тонкова, С.Н. Поповой, Е.К. Макарова был получен ряд результатов о локальной управляемости показателей Ляпунова системы (2), локальной достижимости и локальной ляпуновской приводимости системы (2) (см. обзор результатов в работе [2]). Далее, в работе [3] определение согласованности было обобщено для билинейной системы (3). Определение для системы (3) такое же, только вместо матрицы $B(t)U(t)C^*(t)$ и управления $U(t) \in M_{m,k}$ записана матрица $\sum_{i=1}^{r} u_i(t)A_i(t)$ и строится управление $u(t) \in \mathbb{R}^r$ соответственно.

Предположим теперь, что системы (2) и (3) стационарны

$$\dot{x} = (A + BUC^*)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\dot{x} = (A + u_1A_1 + \ldots + u_rA_r)x, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Рассмотрим задачу об управлении спектром в системах (4) и (5). Будем говорить, что *спектр собственных значений системы* (4) (*или* (5)) *глобально управляем,* если для любого многочлена $p(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n$, где $\gamma_i \in \mathbb{R}$, существует вещественное постоянное управление $\widehat{U} \in M_{m,k}$ (соответственно $\widehat{u} \in \mathbb{R}^r$) такое, что характеристический многочлен $\chi(A + B\widehat{U}C^*; \lambda)$ (соответственно, $\chi(A + \sum_{i=1}^{r} \widehat{u}_iA_i; \lambda)$) совпадает с $p(\lambda)$. Очевидно, если спектр глобально управляем, то система стабилизируема с помощью стационарного управления.

Для системы с полной обратной связью, то есть системы (4) с матрицей $C = I$, известен классический результат об управляемости спектра: спектр глобально управляем тогда и только тогда, когда пара (A, B) вполне управляема, что в свою очередь равносильно условию $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$. Отметим здесь также, что когда матрица A циклическая, то есть в ее жордановой нормальной форме различным клеткам Жордана соответствуют различные собственные значения (это имеет место, в частности, когда матрица A имеет форму Хессенберга, см. ниже), то тогда условие $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$ равносильно тому, что матрицы $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ линейно независимы (ср. с теоремой 1).

Е.Л. Тонковым был поставлен вопрос о взаимосвязи свойства согласованности и управляемости спектра, а также вопрос о критериях управляемости спектра для системы с неполной обратной связью (4) и для билинейной системы (5). Здесь установлены новые необходимые и достаточные условия глобального управления спектром, в случае когда коэффициенты систем (4) и (5) имеют специальный вид. Эти условия равносильны условиям, указанным в работе [4], но имеют более простую формулировку. Также установлена взаимосвязь между свойством согласованности и глобальной управляемости спектра.

Предположим, что коэффициенты систем (4) и (5) имеют следующий вид: матрица A имеет форму Хессенберга, то есть элементы наддиагонали не равны нулю, а элементы, расположенные выше наддиагонали, равны нулю; первые $p-1$ строк матрицы B и последние $n-p$ строк матрицы C равны нулю; первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц A_l, $l = 1, \ldots, r$ равны нулю; $p \in \{1, \ldots, n\}$. В этих предположениях справедливы теоремы.

Т е о р е м а 1.

1. *Система* (4) *согласованна.*
2. *Спектр системы* (4) *глобально управляем.*
3. *Матрицы* C^*B, C^*AB, $\ldots$, $C^*A^{n-1}B$ *линейно независимы.*

Имеют место импликации $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$.

Т е о р е м а 2.

1. *Система* (5) *согласованна.*
2. *Спектр системы* (5) *глобально управляем.*
3. *Ранг* $(n \times r)$*-матрицы* $\left\{\mathrm{Sp}\,(A_j A^{i-1})\right\}_{i=1}^{n}{}_{,j=1}^{r}$ *равен* n.

Имеют место импликации $1 \Longrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$.

Из этих теорем вытекают очевидные следствия о стабилизации систем (4) и (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попова С.Н., Тонков Е.Л.* Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1687–1696.

2. *Tonkov E.L.* Uniform attainability and Lyapunov reducibility of bilinear control system // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.

3. *Зайцев В.А., Тонков Е.Л.* Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 35–44.

4. *Зайцев В.А.* Об управлении спектром и стабилизации билинейных систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 49–51.

Abstract: new necessary and sufficient conditions of global controllability of eigenvalue spectrum have been obtained for stationary bilinear control systems, in particular, for systems with an incomplete feedback.

Keywords: control system; consistency; control over spectrum; bilinear system.

Зайцев Василий Александрович
к. ф.-м. н., доцент
Удмуртский государственный университет
Россия, Ижевск
e-mail: verba@udm.ru

Vasiliy Zaitsev
candidate of phys.-math. sciences,
senior lecturer
Udmurtian Stste University
Russia, Izhevsk
e-mail: verba@udm.ru