ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический и практический журнал

Серия: Естественные и технические науки

Том 14, вып. 4, 2009

Журнал основан 5 февраля 1996 г.

Журнал Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук

СОДЕРЖАНИЕ

Материалы международной конференции
«КОЛМОГОРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ.
Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2009)», посвященной 15-летию
Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина
и 80-летию Института математики, физики и информатики ТГУ имени Г.Р. Державина.
5–9 октября 2009 г., Тамбов

Подставляя $\delta = \|Ff(\cdot)\|_{L\infty(\mathbb{R}^d)}/\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в выражение для S, получаем после несложных преобразований требуемое неравенство. На функции $\widehat{f}(\cdot)$, как легко убедиться, оно обращается в равенство и поэтому константа K — наименьшая из возможных.

Подобные неравенства, но когда вместо степеней оператора Лапласа рассматриваются производные, изучались в работе [2]. Доказательство данного неравенства следует рассуждениям из этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2003 2-е изд.

2. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функциональный анализ и его приложения. 2003. Т. 37. Вып. 3. С. 51-64.

Abstract: the paper is devoted to determination of the exact constant in the inequality for fractional powers of Laplace operator; the proof is based on the Lagrange principle in theory of extremum.

Keywords: Laplace operator; extremal problem; Fourier transform.

Сивкова Елена Олеговна
старший преподаватель
Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
Россия, Москва
e-mail: sivkova_elena@inbox.ru

Elena Sivkova
senior teacher
Moscow State Institute of
Radiotechnics, Electronics and Automatics
Russia, Moscow
e-mail: sivkova_elena@inbox.ru

УДК 517.921

ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ОСИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТО [1]

© П. М. Симонов, А. В. Чистяков

Ключевые слова: винеровский процесс; линейное уравнение Ито; задача об ограниченных решениях, теорема Боля-Перрона; равномерно экспоненциальная устойчивость.

Аннотация: Для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений Ито

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + b(t)x(t)w(dt) + \phi(dt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

с интегрально ограниченными (в среднем) коэффициентами изучается вопрос о существовании единственного ограниченного решения при ограниченном аддитивном возмущении $\phi(dt)$, являющимся стохастической

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Пермского края (грант № 07-01-96060-р-урал-а) и ЗАО "ПРОГНОЗ".

ограниченной мерой; показано, что если класс возмущений достаточно велик (содержит абсолютно непрерывные меры с суммируемой плотностью), то существование ограниченного решения возможно только в случае равномерной экспоненциальной устойчивости, то есть очень быстрой стабилизации решений однородной системы; это утверждение — прямое следствие сильной необратимости потока событий, необходимого для реализации винеровской меры $w(dt)$.

Рассмотрим линейную систему уравнений Ито

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)x(t)w(dt) + f(t)dt, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

где $n \times n$-матричные процессы $A(t)$, $B(t)$ и n-мерный процесс $f(t)$ согласованы с потоком σ-алгебр $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$, порожденным на исходном вероятностном пространстве (Ω, F, P) скалярной винеровской мерой $w(dt)$. Винеровской мерой называется стохастическая мера на $\mathbb{R}$, такая, что при всех $s \in \mathbb{R}$ случайный процесс $w_s(t) = w([s,t))$, $t \geqslant s$ является стандартным броуновским движением на полуоси $[s, \infty)$.

Для нормировки случайных величин φ со значениями в конечномерных нормированных пространствах зафиксируем число $p \in [1, \infty)$ и положим $|\varphi| = (\mathrm{E}||\varphi||^p)^{1/p}$. Случайный процесс $x(t)$ будем называть ограниченным, если $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| < \infty$. Соответственно, процесс $f(t)$ будем называть интегрально ограниченным, если $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\int\limits_t^{t+1} ||f(s)||\, ds| < \infty$. При условиях:

$$\text{a)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{vrai}\sup_{\omega\in\Omega} \int_t^{t+\delta} ||A(s)||\, ds \overset{\delta\to 0+}{\to} 0; \ \text{b)} \sup_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{vrai}\sup_{\omega\in\Omega} \int_t^{t+\delta} ||B(s)||^2\, ds \overset{\delta\to 0+}{\to} 0$$

задача Коши $dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)x(t)w_s(dt) + f(t)dt$, $t > s$, $x(s) = x_s$ имеет единственное решение для всех F_s-измеримых начальных значений x_s и всех F_t-согласованных возмущений $f(t)$. Уравнение (10) называется *равномерно экспоненциально устойчивым*, если существуют константы $C > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что при всех $s \in \mathbb{R}$ для любого решения однородной задачи Коши справедлива оценка $|x(t)| < Ce^{-\alpha(t-s)}|x_s|$, $t > s$.

Решением уравнения (10) называется F_t-согласованный случайный процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такой, что при каждом $s \in \mathbb{R}$ ограничение $x(t)$ на полуось $[0, \infty)$ является решением задачи Коши.

Т е о р е м а. *Уравнение (10) имеет точно одно ограниченное решение $x(t)$ при каждом интегрально ограниченном возмущении $f(t)$ тогда и только тогда, когда это уравнение равномерно экспоненциально устойчиво.*

Abstract: the question of existence of unique bounded solution at bounded additive change of $\phi(dt)$, which is stochastic bounded measure, is investigated for the linear system of Itô ordinary differential equations

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + b(t)x(t)w(dt) + \phi(dt) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

with integrally bounded (on the average) coefficients; it is showed, that if the class of these changes is enough wide (contains absolutely continuous measures with summable density), then existence of bounded solution is possible only in case of uniform exponential stability, i. e. very fast stabilization of solution of homogeneous system; this statement is the direct corollary of the strong events flow irreversibility which is necessary for realization of Wiener measure $w(dt)$.
Keywords: Wiener process; linear equation Itô; problem about the bounded solution; Bohl-Perron's theorem; uniformly exponentially stability.

Симонов Пётр Михайлович
д. ф.-м. н., профессор
Пермский государственный университет
Россия, Пермь
e-mail: simonov@econ.psu.ru

Petr Simonov
doctor of phys.-math. sciences, professor
Perm State University,
Russia, Perm
e-mail: simonov@econ.psu.ru

Чистяков Александр Владимирович
к. ф.-м. н., доцент
Удмуртский государственный университет
Россия, Ижевск
e-mail: simpm@mail.ru

Aleksandr Chistyakov
candidate of phys.-math. sciences, senior lecturer
Udmurtian State University
Russia, Izhevsk
e-mail: simpm@mail.ru

УДК 517.977.5

МОНОТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ [1]

© С. П. Сорокин

Ключевые слова: функции Ляпунова; неравенства Гамильтона-Якоби; множество достижимости; условия оптимальности.

Аннотация: В докладе речь пойдет об оценках множеств достижимости и связанных с ними необходимых и достаточных условиях оптимальности в задачах управления; оценки и условия оптимальности основаны на использовании семейств функций типа Ляпунова - решений неравенств Гамильтона-Якоби.

Решения неравенств и уравнения Гамильтона–Якоби (то есть функции типа Ляпунова, Кротова, Беллмана) находят широкое применение в теории управления при изучении вопросов инвариантности, достижимости, управляемости и оптимальности [1–4]. В докладе речь пойдет об аппроксимациях и точном описании множества достижимости (точнее, множества соединимых точек) управляемой системы, оценках целевого функционала задачи и условиях оптимальности. Ключевую роль в подходе играет оперирование *произвольными множествами* таких функций.

Приведем некоторые из указанных результатов применительно к следующей задаче оптимального управления (P_Δ) с общими (не разделенными) концевыми ограничениями:

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u(t) \in U, \tag{1}$$

$$\big(x(t_0), x(t_1)\big) \in C,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00741) и СО РАН (интеграционный проект СО РАН–УрО РАН № 85).