КАБИНЕТ МИНИСТРОВ РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ ТАТАРСТАН

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.Н. ТУПОЛЕВА

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАН

8-я МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМАХ

HPC-2008

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Казань, 17 – 19 ноября, 2008, Российская Федерация

Казань 2008

УДК 082:061.3
ББК 32

8-я Международная Конференция. Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах (HPC-2008). Казань, ноябрь 17 – 19, 2008. Труды конференции – Казань: Изд. КГТУ, 2008. 356 с.

ISBN 978-5-7579-1188-5

Труды конференции HPC-2008 включают материалы докладов ученых и специалистов из различных городов России, стран ближнего и дальнего зарубежья. Доклады были распределены по четырем секциям. Тематика секций отражает современные направления работ в области параллельных вычислений.

ISBN 978-5-7579-1188-5

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ НАХОЖДЕНИЯ ФОРМУЛЫ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

О.В. Бабич, А.В. Головкова, Е.В. Митрошина

Удмуртский государственный. университет, Ижевск

Пусть G – вещественная $m\times n$-матрица, x – вектор из вещественного n-мерного пространства R^n, $g\in R^m$. Известно, что формулу решений системы неравенств

$$Gx\geq g \tag{1}$$

можно представить в виде

$$x = Mv + Kw, \tag{2}$$

где M и K – некоторые вещественные матрицы, а v и w – произвольные векторы соответствующей размерности, все координаты которых неотрицательны, причем сумма всех координат вектора v положительна. Неравенство векторов понимается, как неравенство всех соответствующих координат. Первое слагаемое в формуле (2) задает многогранник, а второе слагаемое задает многогранный конус с вершиной в начале координат. Вычислить по заданным G и g элементы матриц M и K можно, заменив систему (1) системой

$$Hy\geq 0, y\geq 0 \tag{3}$$

с некоторой матрицей H и вектором y, имеющим размерность, вообще говоря, отличную от n. Формула решений системы (3) имеет более простой вид, так как в отличие от (2) на векторы не накладывается условие положительности суммы их координат. Формула (2) получается (см., например, [1]) из формулы решений системы (3). Если ввести новый вектор $u=Hy\geq 0$, то систему (3) можно записать в виде $Hy-Eu=0, y\geq 0, u\geq 0$, где E – единичная матрица. После соответствующего переобозначения получается система

$$Lz=0, z\geq 0\,. \tag{4}$$

Если задана система уравнений и неравенств

$$Pt=p, t\geq 0\,, \tag{5}$$

то ее можно решить, используя, например, формулу решений системы (4), введя новую переменную $s\geq 0$ и получив систему $Pt-ps=0, t\geq 0, s\geq 0$ вида (4), где вектор z получается приписыванием координаты s к списку координат вектора t. Наконец, систему (4) можно записать в виде (3), заметив, что $Lz=0 \Leftrightarrow Lz\geq 0$ и $-Lz\geq 0$.

Таким образом, независимо от того, какую из систем (1)–(5) мы рассматриваем, формулу ее решений можно получить, используя алгоритм нахождения формулы решений однородной системы неравенств (3) или алгоритм нахождения формулы решений однородной системы уравнений и неравенств (4).

Если из алгоритма Моцкина–Бургера [2, 3] исключить удаление лишних образующих конуса неотрицательных решений системы неравенств, рассмотренных на очередном шаге, то получится другой алгоритм, который удобно описывать, используя идеи Удзавы Х., изложенные в сборнике статей [4].

Пусть $b \in R^n$, $N_p = \{i / b_i > 0\}$, $N_0 = \{j / b_j = 0\}$, $N_n = \{k / b_k < 0\}$, матрицы $N(b)$, $Q(b)$ составлены из столбцов

$$e^l = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T,$$

где единица находится в позиции l, $b_l \in N_p$ или $b_l \in N_0$,

$$e^{ik} = (0,\ldots,0,1/b_i,0,\ldots,0,-1/b_k,0,\ldots,0),$$

где положительные числа $1/b_i,-1/b_k$ находятся в позициях i , k , $b_i \in N_p$ и $b_k \in N_n$; $N(b) = \left[\{b^i\},\{b^j\},\{b^{jk}\}\right], Q(b) = \left[\{b^j\},\{b^{jk}\}\right]$.

Утверждение 1 (Удзава, [4]). $x \ge 0, bx \ge 0 \Leftrightarrow \exists\omega \quad x = N(b)\omega$.

Утверждение 2. $x \ge 0, bx = 0 \Leftrightarrow \exists\omega \quad x = Q(b)\omega$.

Утверждение 3. Столбцы матриц $N(b)$, $Q(b)$ есть минимальные системы образующих конусов неотрицательных решений неравенства и уравнения соответственно.

Утверждение 4.

1) система (3) разрешима $\Leftrightarrow \exists\xi \quad y = R\xi$,

2) система (4) разрешима $\Leftrightarrow \exists\xi \quad z = S\xi$,

где матрицы R и S задаются рекуррентными соотношениями:

$$1)\ T_0 = E, c_i = h_i \cdot T_{i-1}, T_i = T_{i-1}N(c_i), i = 1,\ldots,q, q \le m_H, R = T_q,$$

$$2)\ T_0 = E, c_i = l_i \cdot T_{i-1}, T_i = T_{i-1}Q(c_i), i = 1,\ldots,q, q \le m_L, S = T_q,$$

здесь единичная матрица E имеет порядок, равный размерности пространства неизвестных y или z соответственно, m_H, m_L – числа строк матриц H, L , а h_i, l_i – строки матриц H, L , шаг q является заключительным, если среди столбцов матрицы T_q обнаружен вектор, все координаты которого отрицательны, в этом случае матрица T_q вырождается в вектор-строку, все координаты которой нулевые.

Последовательность вычислений по рекуррентным формулам утверждения 4 будем называть алгоритмом Удзавы решения системы линейных неравенств. В докладе обсуждаются схемы параллельных вычислений и параллельные реализации алгоритмов Удзавы, Моцкина–Бургера и Исламова–Когана [5] решения систем линейных неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Черников С.Н.* Линейные неравенства, –М.: Наука, 1968.

2. *Motzkin T.S.* etc. The double description method, Contributions to the theory of games, 2(1953), 51–73.

3. *Burger E.* Ueber homogene lineare Ungleichungssysteme, Z. angew. Math. und Mech. 36, Nr. 3/4 (1956), 135–139.

4. *Arrow K.J.*, *Hurwicz L.*, *Uzawa H.* Studies in linear and non-linear programming. Stanford University Press, 1958.

5. *Исламов Г.Г.*, *Коган Ю.В.* Об одном алгоритме поиска базисного минора матрицы // Вестник Удмуртского гос. ун-та, 2006.