Федеральное агентство по образованию РФ
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

**В.В. Головизин**

# Основные задачи курса «Алгебра и геометрия». Часть I. Основные задачи векторной алгебры

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2009

УДК 514.12
ББК 22.151
Г 60

Рецензенты: к.ф.-м.н. **М.А. Воронецкая**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

Г60 **Головизин В.В.**
Основные задачи курса «Алгебра и геометрия». Часть I: Основные задачи векторной алгебры: учеб.-метод. пособие. Ижевск, 2009. 156 с.

Первая часть учебно-методического пособия предназначена для студентов, изучающих векторную алгебру в рамках любого курса высшей математики. Пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий и при подготовке индивидуальных заданий студентам.

Пособие содержит решения задач, которые тематически разбиты на главы, и имеют сквозную нумерацию. Номера упражнений, помещенных в конце пособия, совпадают номерами соответствующих задач.

УДК 514.12
ББК 22.151

## Предисловие

Для любого вузовского преподавателя математики не является секретом то обстоятельство, что в последние годы в университет приходят студенты с весьма разным уровнем математической подготовки. Автор данного пособия преследовал цель помочь нашим студентам первого курса обучения (в первую очередь, студентам, имеющим невысокий уровень) в освоении одного из самых основных, фундаментальных курсов учебной программы – курса алгебры и геометрии, и очень надеется, что эта помощь не будет отвергнута или проигнорирована.

Наибольшую трудность у студентов вызывает решение задач, даже стандартных. Практические занятия, на которых студентов обучают решению задач, имеют жесткие временные рамки. В соответствии со стандартами образовательных программ часть обучения каждый студент обязан проводить самостоятельно, и на это в учебных планах отводится немало часов. Представляемое Вашему вниманию, уважаемый читатель, пособие предназначено помочь Вам в Вашей самостоятельной работе.

Автор стремился донести до читателя идеи решения, дать образцы логического мышления, научить применять полученный теоретический материал в конкретных задачах, помогая тем самым читателю пробрести необходимые практические навыки, умение думать и размышлять над задачей.

Все основные задачи курса тематически разбиты на главы, но основной методической единицей пособия является задача. При этом соблюдается единый принцип подачи учебного материала. После формулировки каждой задачи приводятся необходимые теоретические сведения, затем следует подробное решение задачи в общем виде, которое иллюстрируются конкретными числовыми примерами.



Ориентироваться в пособии довольно легко. С помощью оглавления читатель находит интересующую его тему – главу. В начале пособия приводится полный список задач, имеющих сквозную нумерацию. Упражнения, приведенные в конце пособия, для удобства читателя имеют номера, совпадающие с номерами задач.

Читатель может по своему желанию проработать отдельную главу, решая все задачи главы последовательно, или же ознакомиться с решением отдельной задачи. Можно сразу же проверить понимание материала, решив соответствующее упражнение. Впрочем, вдумчивый читатель может не торопиться с чтением предложенного решения и попытаться справиться с задачей самостоятельно.

В заключение отметим, что пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий, коллоквиумов и, особенно, для подготовки индивидуальных заданий студентам.

## СПИСОК ЗАДАЧ

### Глава 1. Метод координат

1. Найти расстояние между двумя точками.
2. На координатной прямой найти точки, удаленные от данной точки на заданное расстояние.
3. Найти отношение, в котором данная точка делит данный отрезок.
4. Найти координаты точки, которая делит данный отрезок в данном отношении.
5. Найти центр тяжести системы из двух материальных точек.
6. Найти центр тяжести системы из трех материальных точек.
7. Найти центр тяжести однородного треугольника.
8. Найти центр тяжести трапеции.
9. Найти центр тяжести однородного многоугольника.

### Глава 2. Косоугольная система координат

10. Построить точку с заданными координатами в косоугольной системе координат и найти расстояние до нее от начала координат.
11. Найти координаты заданной точки в косоугольной системе координат.
12. Найти расстояние от точки с заданными координатами в косоугольной системе координат до осей координат.
13. Найти координаты точки в косоугольной системе координат, если известны расстояния от нее до осей координат.

### Глава 3. Полярная система координат

14. Найти полярные координаты заданной точки в полярной системе координат.



15. Построить точку с заданными полярными координатами в полярной системе координат.
16. Найти расстояние между двумя точками в полярной системе координат.
17. Найти площадь треугольника с известными вершинами в полярной системе координат.
18. Найти внутренний угол треугольника с известными вершинами в полярной системе координат.

### Глава 4. Полярная система координат и ПДСК

19. Найти декартовые координаты точки по ее полярным координатам.
20. Найти полярные координаты точки по ее декартовым координатам.

### Глава 5. Действия с векторами

21. Построить вектор, равный сумме двух данных векторов по правилу параллелограмма.
22. Построить вектор, равный сумме двух или более данных векторов по правилу треугольника.
23. Построить вектор, равный произведению вектора на число.
24. Построить вектор, противоположный данному.
25. Построить разность векторов.
26. Построить и вычислить проекцию вектора на ось.
27. Построить и вычислить проекцию вектора на вектор.
28. Вычислить скалярное произведение векторов, используя его определение и простейшие свойства.
29. Найти угол между векторами, если известно их скалярное произведение и их модули.
30. Вычислить скалярное произведение векторов, используя его определение и свойство линейности.

31. Определить ориентацию данной тройки векторов.
32. Построить векторное произведение двух векторов.
33. Вычисление модуля векторного произведения векторов с использованием его определения и свойств.
34. Вычисление смешанного произведения векторов с использованием его определения и свойств.
35. Определить ориентацию данной тройки векторов, используя свойства смешанного произведения.

### Глава 6. Линейные операции с векторами в координатной форме

36. Найти декартовую координату вектора числовой оси, записать его в координатной форме, найти его модуль, орт и направляющий косинус, определить его ориентацию на координатной оси.
37. Найти декартовую координату вектора координатной оси по известным координатам его начала и конца и записать его в координатной форме. Найти его модуль, орт и направляющий косинус. Определить его ориентацию на координатной оси.
38. Найти координаты суммы векторов и произведения вектора на число для векторов координатной оси.
39. Найти декартовые координаты вектора координатной плоскости, его модуль, орт и направляющие косинусы.
40. Найти декартовые координаты вектора координатной плоскости, его модуль, орт и направляющие косинусы по известным координатам его начала и конца.
41. Найти координаты суммы векторов и произведения вектора на число для векторов координатной плоскости.
42. Найти полярный угол вектора на координатной плоскости.
43. Найти декартовые координаты вектора координатного пространства, его модуль, орт и направляющие косинусы.



44. Найти декартовые координаты вектора координатного пространства, его модуль, орт и направляющие косинусы по известным координатам его начала и конца.
45. Найти декартовые координаты суммы векторов и произведения вектора на число для векторов координатного пространства.
46. Найти декартовые координаты радиус-вектора точки с известными координатами и координаты точки, если известны декартовые координаты ее радиус-вектора.
47. Определить, коллинеарные ли векторы, заданные в координатной форме.

### Глава 7. Разложение вектора по произвольному базису геометрическим способом

48. Построить разложение вектора по произвольному базису на прямой и вычислить его координату.
49. Построить разложение вектора по произвольному базису на плоскости и вычислить его координаты.
50. Построить разложение вектора по произвольному базису пространства и вычислить его координаты.

### Глава 8. Линейные операции с векторами в произвольном базисе

51. Линейные операции с векторами в координатной форме относительно произвольного базиса на прямой.
52. Линейные операции с векторами в координатной форме относительно произвольного базиса на плоскости.
53. Линейные операции с векторами в координатной форме относительно произвольного базиса пространства.

## Глава 9. Координаты вектора в ортонормированном базисе

54. Построить нормированный базис на прямой и найти координату вектора данной прямой относительно построенного базиса.
55. Построить ортонормированный базис плоскости и найти координаты вектора плоскости относительно построенного базиса.
56. Построить ортонормированный базис пространства и найти координаты произвольного вектора относительно построенного базиса.

## Глава 10. Произведения векторов в координатной форме

57. Найти скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно ортонормированного базиса.
58. Найти векторное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно ортонормированного базиса.
59. Найти смешанное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно ортонормированного базиса.

## Глава 11. Применение скалярного произведения векторов

60. Найти модуль, орт и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно ортонормированного базиса.
61. Найти угол между векторами, заданными в координатной форме относительно ортонормированного базиса.
62. Определить, являются ли два вектора, заданные в координатной форме относительно ортонормированного базиса, ортогональными.



63. Найти проекцию вектора на вектор, если оба вектора заданы в координатной форме относительно ортонормированного базиса, и найти, в частности, проекции вектора на координатные оси.
64. Найти работу, производимую вектором силы вдоль вектора перемещения материальной точки, если оба вектора заданы в координатной форме относительно ортонормированного базиса.

## Глава 12. Применение векторного произведения векторов

65. Найти синус угла между двумя векторами, заданными в координатной форме.
66. Определить, являются ли два вектора, заданные в координатной форме, коллинеарными.
67. Найти координаты вектора, перпендикулярного двум неколлинеарным векторам, заданным в координатной форме.
68. Найти двугранный угол между гранями треугольной пирамиды, если известны координаты ее вершин.
69. Найти площадь треугольника, если известны координаты его вершин.
70. Определить момент силы относительно данной точки.
71. Найти линейную скорость точки тела, вращающегося вокруг оси с заданной угловой скоростью.

## Глава 13. Применение смешанного произведения векторов

72. Определить, компланарны ли три вектора, заданные в координатной форме.
73. Определить ориентацию трех некомпланарных векторов, заданных в координатной форме.
74. Вычислить объем треугольной пирамиды, если известны координаты ее вершин.

75. Вычислить высоту треугольной пирамиды, если известны координаты ее вершин.

## Глава 14. Разложение вектора по произвольному базису алгебраическим способом

76. Найти координаты вектора относительно данного базиса на прямой, если вектор и базис даны в координатной форме.
77. На плоскости найти координаты вектора относительно данного базиса, если вектор и базис даны в координатной форме.
78. В пространстве найти координаты вектора относительно данного базиса, если вектор и базис даны в координатной форме.

## Глава 15. Вычисление модуля и направляющих косинусов вектора в произвольном базисе

79. Найти модуль и направляющий косинус вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного базиса на прямой.
80. Найти модуль и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного базиса на плоскости.
81. Найти модуль и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного базиса в пространстве.



# Глава 1. Метод координат

**Задача 1. Найти расстояние между двумя точками.**

Решение. Мы полагаем, что в пространстве введена прямоугольная декартовая система координат (в дальнейшем сокращенно ПДСК) Oxyz. Пусть $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ – две произвольные точки пространства. Тогда расстояние между ними можно найти по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\,.$$

Если точки A и B даны на координатной плоскости Oxy, то $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Если точки даны на координатной оси Ox, то $A(x_A)$, $B(x_B)$ и $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = | x_B - x_A |$.

**Замечание.** Расстояние между точками A и B можно находить и как модуль вектора $\overline{AB}$. Для этого находим декартовые координаты вектора $\overline{AB}$ и используем формулу вычисления его модуля. Понятно, что при этом получаются те же самые формулы.

**Пример.** Найти длины сторон треугольника ABC, если даны координаты его вершин:

$$A(1; -1; 0),\ B(0; 1; 0),\ C(3; 1; 1).$$

Решение. Очевидно,

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{5}\,,$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (1+1)^2 + (1-0)^2} = 3\,,$$

$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}\,.$$

Ответ: $\sqrt{10}$, 3, $\sqrt{5}$.

**Задача 2. На координатной прямой найти точки, удаленные от данной точки на заданное расстояние.**

Решение. Пусть на координатной оси Ох дана точка $A(x_A)$ и положительное число а. Нужно найти координаты точек М(х), таких, что $AM = a$. Так как $AM = |x - x_A|$, то, по сути, нужно решить уравнение

$$|x - x_A| = a.$$

Нет никакой необходимости решать это уравнение алгебраическими методами, т.к. с геометрической точки зрения ответ очевиден.

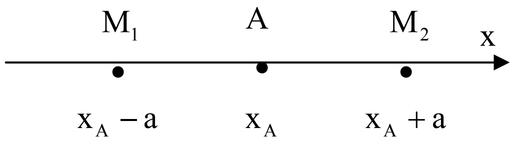



Рис. 1.

Здесь $AM_1 = AM_2 = a$, поэтому координата точки $M_1$ на величину a меньше координаты точки А, а координата точки $M_2$ на величину а больше координаты точки А.

Ответ: $M_1(x_A - a)$, $M_2(x_A + a)$.

**Пример.** На оси Ох найти точки, удаленные от точки А(–7) на расстояние, равное 11.

Ответ: $M_1(-18)$, $M_2(4)$.

**Замечание.** Аналогично решаются неравенства

$$|x - x_A| < a, \ |x - x_A| \le a, \ |x - x_A| > a, \ |x - x_A| \ge a.$$

Решим, например, неравенство $|x - x_A| < a$. С геометрической точки зрения решить данное неравенство означает найти координаты всех точек М(х) на оси Ох, которые удалены от точки А на расстояние меньшее чем a, то есть для которых $AM < a$.



Из рисунка 1 мы видим, что все точки, удаленные от точки А на расстояние меньшее чем а, находятся на интервале $(M_1, M_2)$, т.е. решением данного неравенства является интервал $x \in (M_1, M_2)$. Аналогично решаются и другие, указанные выше, неравенства.

**Задача 3. Найти отношение, в котором данная точка делит данный отрезок.**

**Определение.** Говорят, что точка С делит отрезок прямой АВ, считая от точки А, в отношении $\lambda$, если $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$.

**Обозначение.** Отношение, в котором точка С делит отрезок АВ, считая от точки А, обозначаем $\lambda_{AB}^{C}$.

Решение. Рассмотрим различные случаи этой задачи.

1) Известно, что точка С находится на отрезке АВ и известны расстояния АС и ВС. Тогда точка С делит отрезок АВ внутренним образом и

$$\lambda_{AB}^{C} = \frac{AC}{BC}.$$

2) Известно, что точка С находится вне отрезка АВ и известны расстояния АС и ВС. Тогда точка С делит отрезок АВ внешним образом и

$$\lambda_{AB}^{C} = -\frac{AC}{BC}.$$

3) Известны координаты всех трех точек:

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad B(x_B, y_B, z_B) \quad \text{и} \quad C(x_C, y_C, z_C).$$

Тогда

$$\lambda_{AB}^{C}=\frac{x_C-x_A}{x_B-x_C}=\frac{y_C-y_A}{y_B-y_C}=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_C}. \qquad (1)$$

**Пример.** Известно, что точки A(0; –3; z), B(2; –2; 1) и C(4; y; –2) находятся на одной прямой. Найти отношение, в котором точка C делит отрезок AB, ординату точки C и аппликату точки A.

Решение. С помощью формулы (1) находим искомое отношение:

$$\lambda_{AB}^{C}=\frac{x_C-x_A}{x_B-x_C}=\frac{4-0}{2-4}=-2.$$

Используя формулу (1) и найденное отношение, находим:

$$\lambda_{AB}^{C}=\frac{y_C-y_A}{y_B-y_C}, \quad -2=\frac{y+3}{-2-y}, \quad 4+2y=y+3, \quad y=-1.$$

Аналогично, $\lambda_{AB}^{C}=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_C}$, $-2=\frac{-2-z}{1+2}$, $z=4$.

Ответ: $\lambda_{AB}^{C}=-2$, $y_C=-2$, $z_A=4$.

**Задача 4. Найти координаты точки, которая делит данный отрезок в данном отношении.**

Решение. Пусть известны координаты концов отрезка AB и $\lambda_{AB}^{C}$. Тогда координаты точки C легко находятся из равенств (1):

$$x_C=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}, \quad y_C=\frac{y_A+\lambda\cdot y_B}{1+\lambda}, \quad z_C=\frac{z_A+\lambda\cdot z_B}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

В частности, если точка C – это середина отрезка AB, то

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}, \quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}, \quad z_C=\frac{z_A+z_B}{2}. \qquad (3)$$



**Пример 1.** Пусть A(–2; –7), B(13; 4), $\lambda_{AB}^{C}=\frac{3}{4}$. Найти координаты точки C.

Решение. По формулам (3) находим:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-2+\frac{3}{4}13}{1+\frac{3}{4}}=\frac{31}{7},$$

$$y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{-7+\frac{3}{4}\cdot 4}{1+\frac{3}{4}}=-\frac{16}{7}.$$

Ответ: $C\left(\frac{31}{7};-\frac{16}{7}\right)$.

**Пример 2.** Пусть A(–1; –7; 4), B(13; 5; –6). Найти координаты середины отрезка AB.

Решение.

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+13}{2}=6, \quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-7+5}{2}=-1,$$

$$z_C=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{4-6}{2}=-1.$$

Ответ: C(6; –1; –1).

**Задача 5. Найти центр тяжести системы из двух материальных точек.**

**Определение.** Пусть имеется отрезок AB, концы которого являются материальными точками с массами $m_A$ и $m_B$ соответственно. Точка C отрезка AB, для которой выполняется равенство

$$m_A \cdot AC = m_B \cdot BC,$$

где AC и BC – длины соответствующих отрезков, называется геометрическим центром тяжести (в дальнейшем просто ГЦТ) системы из двух материальных точек.

Из определения следует, что ГЦТ системы из двух материальных точек A и B является точка C, которая делит отрезок AB внутренним образом в отношении

$$\lambda_{AB}^{C} = \frac{AC}{CB} = \frac{m_B}{m_A}.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** (О координатах ГЦТ системы двух материальных точек.) Пусть $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ – две произвольные материальные точки с массами $m_A$ и $m_B$ соответственно. Пусть точка $C(x_C, y_C, z_C)$ является их ГЦТ. Тогда

$$x_C = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B}{m_A + m_B}, \quad y_C = \frac{y_A \cdot m_A + y_B \cdot m_B}{m_A + m_B},$$

$$z_C = \frac{z_A \cdot m_A + z_B \cdot m_B}{m_A + m_B}. \qquad (4)$$

**Пример.** Пусть A(–1; –7; 4), B(13; 5; –6) – две материальные точки, причем масса точки A в три раза меньше массы точки B. Найти координаты их ГЦТ.

Решение. По условию, $m_B = 3m_A$. Подставляя данные задачи в формулы (4), находим:

$$x_C = \frac{x_A \cdot m_A + x_B \cdot m_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A(x_A + 3x_B)}{4m_A} = \frac{-1+39}{4} = \frac{19}{2},$$



$$y_C = \frac{y_A \cdot m_A + y_B \cdot m_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A(y_A + 3y_B)}{4m_A} = \frac{-7+15}{4} = 2,$$

$$z_C = \frac{z_A \cdot m_A + z_B \cdot m_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A(z_A + 3z_B)}{4m_A} = \frac{4-18}{4} = -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{19}{2}; 2; -\frac{7}{2}\right)$.

**Задача 6. Найти центр тяжести системы из трех материальных точек.**

**Определение.** ГЦТ системы из n ($n \geq 3$) материальных точек $A_1, A_2, ..., A_n$ с массами $m_1, m_2, ..., m_n$ называется ГЦТ системы из двух материальных точек: C и $A_n$ с массами $m_C = m_1 + m_2 + ... + m_{n-1}$ и $m_n$ соответственно, где C – это ГЦТ системы из $(n-1)$-й материальных точек

$$A_1, A_2, ..., A_{n-1}.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема.** (О ГЦТ системы из n материальных точек.) Пусть $A_1(x_1, y_1, z_1), ..., A_n(x_n, y_n, z_n)$ – система из n ($n \geq 2$) материальных точек с массами $m_1, ..., m_n$ соответственно, и точка C является их ГЦТ. Тогда

$$x_C = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + ... + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n},$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + ... + y_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n},$$

$$z_C = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + ... + z_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}. \qquad (5)$$

В частности, при $n = 3$, получаем:

$$x_C = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y_C = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + y_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$z_C = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + z_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \qquad (6)$$

**Пример.** Пусть на оси Ох даны три материальные точки: $A(-17)$, $m_A = 3$, $B(9)$, $m_B = 1$, $C(30)$, $m_C = 2$. Найти их ГЦТ.

Решение. Используем первую из формул (6):

$$x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{-17 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 30 \cdot 2}{3 + 1 + 2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Ответ: 2,5.

**Задача 7. Найти центр тяжести однородного треугольника.**

Решение. Если известны координаты вершин треугольника (вырезанного из однородного материала), то его ГЦТ можно найти по формулам:

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \; y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \; z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}. \quad (7)$$

**Пример.** Найти ГЦТ треугольника с вершинами A(0; 3; 9), B(–2; –3; 17), C(11; –12; 10).

Решение. Вычисляем по формулам (7):

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0 - 2 + 11}{3} = 3,$$

$$y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 - 3 - 12}{3} = -4, \quad z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 12.$$

Ответ: (3; –4; 12).



**Задача 8. Найти центр тяжести трапеции.**

Решение. Разобьем трапецию ABCD на два треугольника ABC и ACD. Найдем центры тяжести обоих треугольников. Пусть E – центр тяжести треугольника ABC, F – центр тяжести треугольника ACD. Поместим в точку E массу, численно равную площади треугольника ABC: $m_E = \frac{1}{2} BC \cdot h$, где h – высота трапеции. В точку F помещаем массу, численно равную площади треугольника ACD: $m_F = \frac{1}{2} AD \cdot h$. Обозначим $a = AD$ длину нижнего основания, $b = BC$ длину верхнего основания. Тогда $m_E = \frac{bh}{2}$, $m_F = \frac{ah}{2}$. Теперь ГЦТ трапеции совпадает с ГЦТ системы из двух материальных точек E и F.

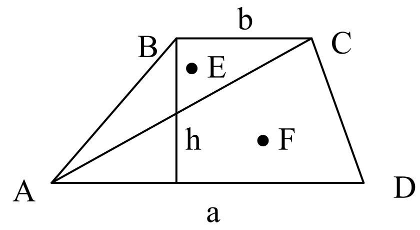



Рис. 2.

$$x = \frac{x_E m_E + x_F m_F}{m_E + m_F} = \frac{x_E \frac{bh}{2} + x_F \frac{ah}{2}}{\frac{bh}{2} + \frac{ah}{2}} = \frac{bx_E + ax_F}{a + b}.$$

По аналогичным формулам находятся остальные координаты.

**Пример.** Пусть $A(-2;\,2;\,-3)$, $B(1;\,4;\,-5)$, $C(0;\,7;\,-1)$, $D(-4;\,8;\,5)$ – координаты вершин трапеции. Найти ее ГЦТ.
Решение. Вычисляем координаты ГЦТ треугольников ABC и ACD (см. задачу 7), точек E и F соответственно.

$$x_E = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = -\frac{1}{3}, \qquad y_E = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{13}{3},$$

$$z_E = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = -3, \qquad x_F = \frac{x_A + x_D + x_C}{3} = -2,$$

$$y_F = \frac{y_A + y_D + y_C}{3} = \frac{17}{3}, \qquad z_F = \frac{z_A + z_D + z_C}{3} = \frac{1}{3}.$$

Для определения параллельных сторон трапеции ABCD находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (3;\,2;\,-2), \quad \overline{BC} = (-1;\,3;\,4), \quad \overline{CD} = (-4;\,1;\,6),$$

$$\overline{AD} = (-2;\,6;\,8),$$

откуда мы видим, что $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AD} = 2\overline{BC}$.
Определяем длины верхнего и нижнего оснований трапеции:

$$b = |\overline{BC}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}, \quad a = 2b = 2\sqrt{26}.$$

Находим координаты ГЦТ трапеции:

$$x = \frac{bx_E + ax_F}{a+b} = \frac{x_E + 2x_F}{3} = \frac{-\frac{1}{3} + 2(-2)}{3} = -\frac{13}{9},$$

$$y = \frac{y_E + 2y_F}{3} = \frac{47}{9}, \qquad z = \frac{z_E + 2z_F}{3} = -\frac{7}{9}.$$

Ответ: $\left(-\frac{13}{9};\,\frac{47}{9};\,-\frac{7}{9}\right)$.

**Задача 9. Найти центр тяжести однородного многоугольника.**

Решение. Разбиваем данный многоугольник на треугольники и находим их центры тяжести. В центр тяжести



каждого треугольника помещаем массу, равную массе треугольника. Так как многоугольник однородный, то его масса пропорциональна его площади. Можно положить удельную плотность равную 1 и считать, что масса любой плоской однородной фигуры численно равна ее площади. Таким образом, в центр тяжести каждого треугольника помещаем массу, численно равную площади треугольника. В результате получаем несколько материальных точек с известными координатами и массами. Осталось применить соответствующие формулы для вычисления координат ГЦТ системы из n материальных точек.

$$x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + \ldots + x_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$y = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + \ldots + y_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

$$z = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + \ldots + z_n \cdot m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

**Пример.** Из правильного шестиугольника ABCDEF со стороной a и центром O вырезали треугольник OBC. Найти центр тяжести оставшейся фигуры.
Решение. Введем ПДСК Oxy как на рисунке 3. Легко заметить, что в силу симметрии OCDE и OBAF – равные ромбы, ГЦТ которых находятся в точках G и H соответственно, а площадь каждого из них равна двум площадям треугольника OAB. ГЦТ фигуры из указанных двух ромбов, очевидно, находится в начале координат, а площадь этих двух ромбов равна $4S$, где через S обозначена площадь треугольника OAB.

Обозначим через I – ГЦТ треугольника OEF с массой S. Таким образом, имеем две материальные точки – точку O с массой 4S и точку I с массой S.

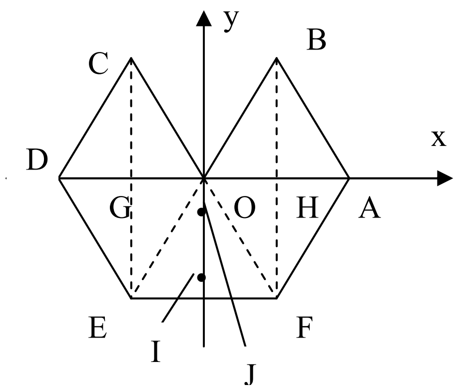


Рис. 3.

Найдем координаты $(x_I, y_I)$ точки I. Ясно, что $x_I = 0$, $y_I = -\frac{2}{3}h$, где h – высота равностороннего треугольника со стороной a, т.е. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $y_I = -\frac{2}{3}h = -\frac{a}{\sqrt{3}}$. Имеем,

$$O(0;\,0),\ m_O = 4S; \quad I\,(0; -\frac{a}{\sqrt{3}}), \quad m_I = S.$$

Обозначим через J – ГЦТ искомой фигуры. Тогда точка J есть ГЦТ системы из двух материальных точек O и I.

$$x_J = \frac{x_O m_O + x_I m_I}{m_O + m_I} = \frac{m_I}{M}x_I, \quad y_J = \frac{m_I}{M}y_I,$$

где $M = m_O + m_I = 5S$ – масса всей плоской фигуры.

Таким образом,

$$x_J = \frac{1}{5}x_I = 0, \quad y_J = \frac{1}{5}y_I = -\frac{a}{5\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\left(0; -\frac{a}{5\sqrt{3}}\right)$.



## Глава 2. Косоугольная система координат

**Задача 10. Построить точку с заданными координатами в косоугольной системе координат и найти расстояние до нее от начала координат.**

Решение. Пусть на плоскости дана косоугольная система координат Oxy с координатным углом $\varphi$ и даны координаты точки M(a, b). На координатной оси Ox откладываем точку $M'(a)$ и проводим через нее прямую параллельную оси ординат Oy. На координатной оси Oy откладываем точку $M''(b)$ и проводим через нее прямую параллельную оси Ox.

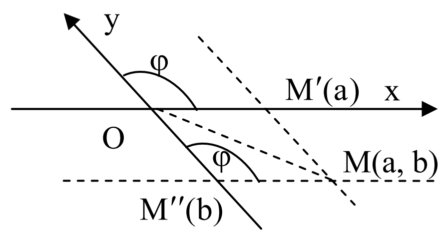


Рис. 4.

Точка M пересечения построенных прямых будет искомой. Расстояние OM есть длина диагонали параллелограмма со сторонами |a| и |b|, лежащая против угла равному координатному углу $\varphi$:

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,|\,ab\,|\cos\varphi}.$$

**Пример.** В косоугольной системе координат Oxy с координатным углом $\varphi = 135^{\circ}$ построить точку M(1; – 1) и найти расстояние OM.

Решение. На оси Ox откладываем точку A(1), а на оси Oy – точку B(–1). Через точку A проводим прямую параллельную оси Oy, а через B – параллельную Ox. Построенные прямые пересекаются в искомой точке M.

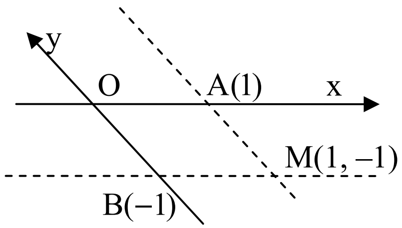



Рис. 5.

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2 - 2|ab|\cos\varphi} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

**Задача 11. Найти координаты заданной точки в косоугольной системе координат.**

Решение. Эта задача – обратная предыдущей. Через данную точку необходимо провести две прямые параллельные координатным осям, и найти координаты их точек пересечения с координатными осями.

Пусть прямая, проведенная через данную точку M параллельно оси Oy пересекает ось Ox в точке $M'$, а прямая проведенная через точку M параллельно оси Ox пересекает ось Oy в точке $M''$. Далее находим координату точки $M'$ на координатной прямой Ox: $M'(a)$ и находим координату точки $M''$ на координатной прямой Oy: $M''(b)$. Тогда точка M имеет по определению координаты (a, b).

**Пример.** Дан правильный шестиугольник ABCDEF со стороной 1, точка O – его центр и дана косоугольная система координат с началом координат в центре O и координатным углом $30^{\circ}$. Найдите в этой системе координат координаты всех вершин данного шестиугольника.



Решение.

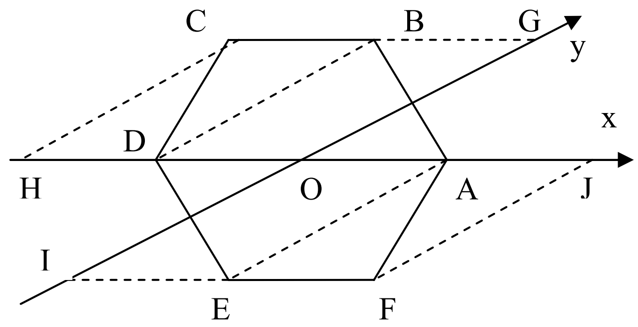



Рис. 6.

По условию задачи имеем $OA = OD = 1$, поэтому точка A имеет координаты A(1; 0), а D(–1; 0). По построению CBDH, AEFJ, ODBG – равные параллелограммы, поэтому J(2), H(–2). По теореме косинусов из треугольника BCD с углом C равным $120^{\circ}$ находим BD:

$$BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD\cdot BC\cdot\cos 120^{\circ} = 1+1-2(-0,5) = 3\,,$$

$BD = AE = OI = OG = \sqrt{3}$ и $G(\sqrt{3})$, $I(-\sqrt{3})$. Отсюда,

$$B(-1;\sqrt{3}),\ C(-2;\sqrt{3}),\ E(1;-\sqrt{3}),\ F(2;-\sqrt{3})\,.$$

Ответ: A(1; 0), $B(-1;\sqrt{3})$, $C(-2;\sqrt{3})$, D(–1; 0), $E(1;-\sqrt{3})$, $F(2;-\sqrt{3})$.

**Задача 12. Найти расстояние от точки с заданными координатами в косоугольной системе координат до осей координат.**

Решение. Воспользуемся рисунком 4, из которого мы видим, что расстояние от точки M до оси Ox есть высота параллелограмма $OM'MM''$ с основанием $OM'$, т.е. равна площади этого параллелограмма, деленная на основание:

$$d(M;Ox)=\frac{S_{OM'MM''}}{|a|}=\frac{|ab|\sin(\pi-\varphi)}{|a|}=|b|\sin\varphi.$$

Аналогично,

$$d(M;Oy)=\frac{S_{OM'MM''}}{|b|}=\frac{|ab|\sin(\pi-\varphi)}{|b|}=|a|\sin\varphi.$$

Ответ: $d(M(a;b);Ox)=|b|\sin\varphi$, $d(M(a;b);Oy)=|a|\sin\varphi$.

**Пример.** В косоугольной системе координат Oxy с координатным углом $\varphi=135^{o}$ найти расстояния от точки $M(1;-1)$ до осей координат.

Решение. Здесь $|a|=|b|=1$, $\sin\varphi=\sin 135^{o}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$$d(M(1;-1);Ox)=|b|\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$d(M(1;-1);Oy)=|a|\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $d(M;Ox)=d(M;Oy)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Задача 13. Найти координаты точки в косоугольной системе координат, если известны расстояния от нее до осей координат.**

Решение. Сразу же заметим, что точки

$$M_1(a;b),\ M_2(a;-b),\ M_3(-a;b),\ M_4(-a;-b)$$

находятся на одинаковых расстояниях от осей координат. Это можно увидеть непосредственно из чертежа или из формул предыдущей задачи.



Пусть $d(M;Ox)=h_1$ – расстояние от точки M до оси Ox, $d(M;Oy)=h_2$ – расстояние от точки M до оси Oy. Из формул задачи 12 находим $|a|=\frac{h_2}{\sin\varphi}$, $|b|=\frac{h_1}{\sin\varphi}$.

Опишем геометрический способ нахождения одной из четырех искомых точек.

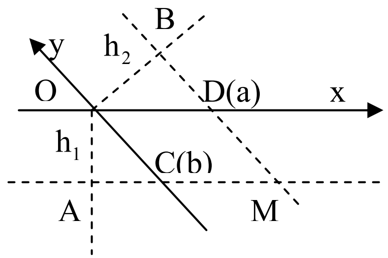



Рис. 7.

В начале координат восстанавливаем перпендикуляры к оси Ox и оси Oy. Затем откладываем на этих перпендикулярах расстояния $OA=h_1$ и $OB=h_2$. Через точку A проводим прямую параллельную Ox, а через точку B – прямую параллельную оси Oy. Проведенные прямые пересекутся в искомой точке M.

Дальнейшие действия совпадают с действиями в задаче 11. Пусть C – точка пересечения прямой AM с осью Oy, а D – точка пересечения прямой BM с осью Ox. Пусть a – координата точки D на оси Ox, b – координата точки C на оси Oy. Тогда (a, b) – координаты искомой точки M.

**Пример.** В системе координат Oxy с координатным углом $\varphi=60^{o}$ найти точки, находящиеся на расстоянии 1 от оси Ox и на расстоянии 2 от оси Oy.

Решение. Воспользуемся формулами

$$|a| = \frac{h_2}{\sin\varphi}, \quad |b| = \frac{h_1}{\sin\varphi},$$

где a – абсцисса, b – ордината искомых точек,

$$h_1 = d(M; Ox) = 1, \quad h_2 = d(M; Oy) = 2, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Получаем

$$|a| = \frac{h_2}{\sin\varphi} = \frac{4}{\sqrt{3}},\ |b| = \frac{h_1}{\sin\varphi} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $M_1(\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $M_2(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3})$, $M_3(\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3})$, $M_4(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{2\sqrt{3}}{3})$.



## Глава 3. Полярная система координат

**Задача 14. Найти полярные координаты заданной точки в полярной системе координат.**

Решение. Пусть на некоторой плоскости дана полярная система координат и произвольная точка плоскости.

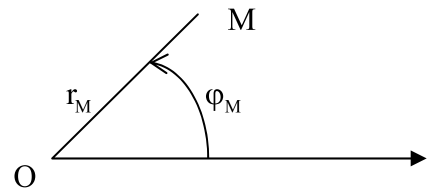



Рис. 8.

Соединим точку M с полюсом отрезком прямой и найдем длину OM этого отрезка. По определению, OM есть полярный радиус точки M. Измеряем доступными нам средствами угол $\varphi_M$ между полярной осью и полярным радиусом точки M – угол поворота полярной оси против часовой стрелки до совпадения с полярным радиусом. По определению, $\varphi_M$ есть полярный угол точки M. Упорядоченная пара $(r_M; \varphi_M)$ есть искомые полярные координаты точки M.

**Пример.** Полюс полярной системы координат находится в вершине правильного шестиугольника со стороной 1, полярная ось проходит через его сторону. Найти полярные координаты всех вершин.

Решение. Смотрите рисунок 9. По условию задачи, $OA = 1$. Тогда $A(1; 0)$ – полярные координаты точки A. Из треугольника OAB по теореме косинусов находим OB.

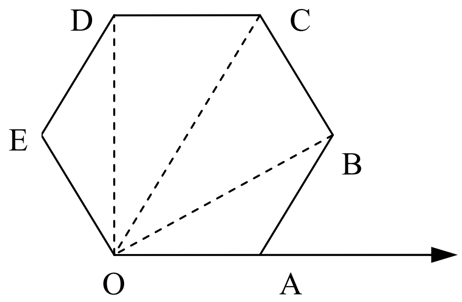



Рис. 9.

$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2OA \cdot AB \cdot \cos A = 1 + 1 - 2\cos 120^o = 3$, отсюда, $B(\sqrt{3}; \frac{\pi}{6})$ – полярные координаты точки B; OC – ось симметрии правильного шестиугольника, отсюда, $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle AOE = 60^o$, OC – диаметр описанной окружности, т.е. $OC = 2$ и $C(2; \frac{\pi}{3})$ – полярные координаты точки C; $\angle EOD = \angle AOB = 30^o$, отсюда $\angle AOD = 90^o$, $OD = AB = \sqrt{3}$, тогда, $D(\sqrt{3}; \frac{\pi}{2})$ – полярные координаты точки D; $E(1; \frac{2\pi}{3})$ – полярные координаты точки E.

Ответ: $O(0;\ 0)$, $A(1; 0)$, $B(\sqrt{3}; \frac{\pi}{6})$, $C(2; \frac{\pi}{3})$, $D(\sqrt{3}; \frac{\pi}{2})$, $E(1; \frac{2\pi}{3})$.



**Задача 15. Построить точку с заданными полярными координатами в полярной системе координат.**

Решение. Пусть на некоторой плоскости дана полярная система координат и известны полярные координаты некоторой точки $M(r_M; \varphi_M)$. Для построения точки M проводим луч OA с началом в полюсе O, так, чтобы угол между полярной осью и проведенным лучом был равен $\varphi_M$, причем этот угол должен быть равен углу поворота полярной оси против часовой стрелке до совпадения с лучом OA. Далее, на построенном луче OA от точки O откладываем отрезок, длина которого равна $r_M$. Тогда второй конец этого отрезка есть искомая точка M. Смотрите рисунок 8.

**Пример.** В полярной системе координат на плоскости постройте треугольник OAB и найдите его площадь, если O – полюс, $A(1; \frac{\pi}{3})$, $B(2; \frac{5\pi}{6})$.

Решение. Вводим на плоскости полярную систему координат и строим лучи OC и OD:

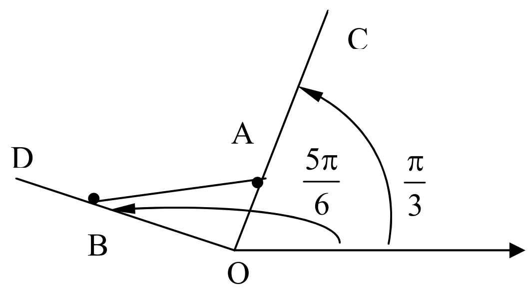



Рис. 10.

На луче OC откладываем отрезок OA, $OA = 1$. На луче OD откладываем отрезок OB, $OB = 2$. Угол O треугольника

OAB является прямым: $\angle AOB = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Отсюда, находим $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 1$.

Ответ: рисунок 10, $S_{AOB} = 1$.

**Задача 16. Найти расстояние между двумя точками в полярной системе координат.**

Решение. Рассмотрим два возможных случая (смотрите рисунки 11 и 12).

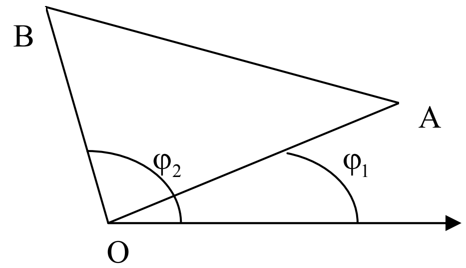



Рис. 11.

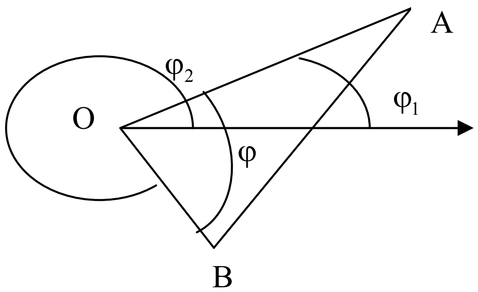



Рис. 12.



Пусть $A(a; \varphi_1)$, $B(b; \varphi_2)$ – произвольные точки, заданные своими полярными координатами. Тогда в треугольнике OAB, $\angle AOB = \varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$, если $|\varphi_2 - \varphi_1| \in (0; \pi)$ или $\varphi = 2\pi - |\varphi_2 - \varphi_1|$, если $|\varphi_2 - \varphi_1| \in (\pi; 2\pi)$. Смотрите рисунки 11 и 12.

По теореме косинусов из треугольника OAB находим:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}.$$

Ответ: $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}$.

**Пример.** В треугольнике OAB, O – полюс полярной системы координат, $A(3; \frac{\pi}{6})$, $B(\frac{3}{2}; -\frac{\pi}{6})$ – их полярные координаты. Найти длину стороны AB.

Решение. Смотрите рисунок 12а.

$$\angle AOB = \varphi = |\varphi_A - \varphi_B| = 30^o + 30^o = 60^o.$$

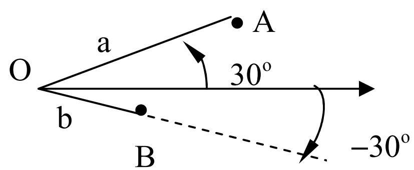



Рис. 12а.

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi} = \sqrt{9 + \frac{9}{4} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 3\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}} = 3\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

**Задача 17. Найти площадь треугольника с известными вершинами в полярной системе координат.**

Решение. Пусть $A(a;\varphi_1)$, $B(b;\varphi_2)$, $C(c;\varphi_3)$ – полярные координаты вершин треугольника.

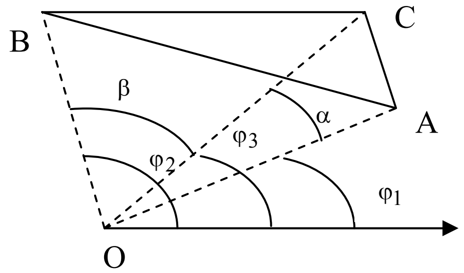



Рис. 13.

Из рисунка 13 мы видим, что $S_{ABC}=S_{OAC}+S_{OBC}-S_{OAB}$. Обозначим через $\alpha=\angle AOC$, $\beta=\angle BOC$. Тогда вычисляя углы $\alpha$ и $\beta$ как в предыдущей задаче, находим:

$$S_{OAC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin\alpha,\quad S_{OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\cdot\sin\beta,$$

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin(\alpha+\beta).$$

Отсюда,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(ac\cdot\sin\alpha+bc\cdot\sin\beta-ab\cdot\sin(\alpha+\beta)).$$

**Пример.** Вычислить площадь треугольника, если известны полярные координаты его вершин:

$$A(1;\frac{\pi}{6}),\quad B(1;\frac{5\pi}{6}),\quad C(1;\frac{3\pi}{2}).$$

Решение. Построим чертеж, смотрите рисунок 14.



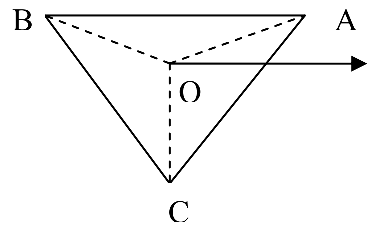



Рис. 14.

Из рисунка мы видим, что $S_{ABC}=S_{OAC}+S_{OBC}+S_{OAB}$. Легко видеть, что $\Delta_{OAC}=\Delta_{OAB}=\Delta_{OBC}$ по двум сторонам и углу между ними: $OA=OB=OC=1$, $\angle AOC=\angle AOB=\angle BOC=120^o$. Отсюда,

$$S_{ABC}=3S_{OAB}=\frac{3}{2}OA\cdot OB\cdot\sin 120^o=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $S_{ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

**Задача 18. Найти внутренний угол треугольника с известными вершинами в полярной системе координат.**

Решение. По известным полярным координатам вершин треугольника мы можем найти стороны треугольника, как в задаче 16. Тогда внутренний угол треугольника можно найти по теореме косинусов.

**Пример.** Найти внутренние углы треугольника, если известны полярные координаты его вершин: $A(1;\frac{\pi}{6})$, $B(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\pi}{3})$, $C(1;\frac{3\pi}{2})$.

Решение. Выполним чертеж, смотрите рисунок 15.

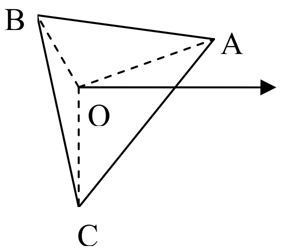



Рис. 15.

Обозначим $\alpha = \angle AOB$, $\beta = \angle AOC$, $\gamma = \angle BOC$. Тогда,

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},\ \beta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3},\ \gamma = \frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6},$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = \sqrt{1 + 1 - 2\cos\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3},$$

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma} = \sqrt{\frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Далее, по теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C,$$

откуда $\cos C = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \dfrac{\frac{7}{3} + 3 - \frac{4}{3}}{2\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Аналогично находим, $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{1}{2}$,

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{1}{2\sqrt{7}}.$$

Ответ: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$, $\angle C = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.



## Глава 4. Полярная система координат и ПДСК

**Задача 19. Найти декартовые координаты точки по ее полярным координатам.**

Решение. Связь между полярными и декартовыми координатами точки устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\varphi \end{cases},$$

где $(r, \varphi)$ – полярные координаты точки M, $(x, y)$ – ее декартовые координаты.

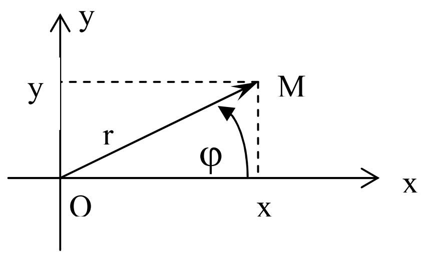



Рис. 16.

**Пример.** Найти декартовые координаты точки M, если ее полярный радиус $r = 2$, а полярный угол $\varphi = \dfrac{5\pi}{3}$.

Решение сводится к вычислению:

$$x = r \cdot \cos\varphi = 2\cos\frac{5\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

$$y = r \cdot \sin\varphi = 2\sin\frac{5\pi}{3} = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}.$$

Ответ: $M(1; -\sqrt{3})$.

**Задача 20. Найти полярные координаты точки по ее декартовым координатам.**

Решение. Пусть M(x, y) – декартовые координаты точки M. Тогда ее полярный радиус можно найти по формуле:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Сложнее вычислить полярный угол. Рассмотрим все случаи расположения точки M на плоскости.

1) Точка M расположена на положительной полуоси абсцисс, т.е. $x > 0,\ y = 0$. Тогда $\varphi_M = 0$.

2) Точка M расположена на положительной полуоси ординат, т.е. $x = 0,\ y > 0$.. Тогда $\varphi_M = \frac{\pi}{2}$.

3) Точка M расположена на отрицательной полуоси абсцисс, т.е. $x < 0,\ y = 0$. Тогда $\varphi_M = \pi$.

4) Точка M расположена на отрицательной полуоси ординат, т.е. $x = 0,\ y < 0$. Тогда $\varphi_M = \frac{3\pi}{2}$.

5) Точка M расположена в первой четверти, т.е. $x > 0$, $y > 0$. Тогда $\varphi_M \in (0; \frac{\pi}{2})$ и $\varphi_M = \arccos\frac{x}{r} = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

или $\varphi_M = \arcsin\frac{y}{r} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ или $\varphi_M = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

6) Точка M расположена во второй четверти, т.е. $x < 0$, $y > 0$. Тогда $\varphi_M \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ и $\varphi_M = \arccos\frac{x}{r} = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

или $\varphi_M = \pi - \arcsin\frac{y}{r} = \pi - \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$



или $\varphi_M = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$.

7) Точка M расположена в третьей четверти, т.е. $x < 0$, $y < 0$. Тогда $\varphi_M \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$ и

$$\varphi_M = -\arccos\frac{x}{r} + 2\pi = -\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\pi$$

или $\varphi_M = \pi - \arcsin\frac{y}{r} = \pi - \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

или $\varphi_M = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi$.

8) Точка M расположена в четвертой четверти, т.е. $x > 0$, $y < 0$. Тогда $\varphi_M \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$ и

$$\varphi_M = -\arccos\frac{x}{r} + 2\pi = -\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\pi$$

или $\varphi_M = \arcsin\frac{y}{r} + 2\pi = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2\pi$

или $\varphi_M = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi$.

**Пример.** Найти полярные координаты следующих точек, заданных декартовыми координатами: $A(\sqrt{3}; 0)$, $B(0;\ 1)$, $C(-\sqrt{3}; 0)$, $D(0;\ -1)$, $E(\sqrt{3}; 1)$, $F(-\sqrt{3}; 1)$, $G(-\sqrt{3}; -1)$, $H(\sqrt{3}; -1)$.

Решение. Смотрите рисунок 17.

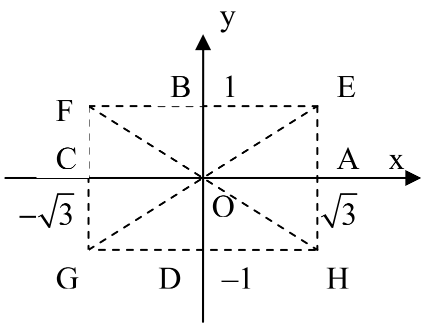



Рис. 17.

Вычисляем полярные радиусы точек:

$OA = OC = \sqrt{3}$, $OB = OD = 1$, $OE = OF = OG = OH = 2$.

Вычисляем полярные углы точек:

$$\varphi_A = 0,\quad \varphi_B = \frac{\pi}{2},\quad \varphi_C = \pi,\quad \varphi_D = \frac{3\pi}{2},$$

$$\varphi_E = \operatorname{arctg}\frac{y_E}{x_E} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\varphi_F = \arccos\frac{x_F}{r_F} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6},$$

$$\varphi_G = \operatorname{arctg}\frac{y_G}{x_G} + \pi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6},$$

$$\varphi_H = \operatorname{arctg}\frac{y_H}{x_H} + 2\pi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + 2\pi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}.$$

Ответ: $A(\sqrt{3};0)$, $B(1;\frac{\pi}{2})$, $C(-\sqrt{3};\pi)$, $D(1;\frac{3\pi}{2})$, $E(2;\frac{\pi}{6})$, $F(2;\frac{5\pi}{6})$, $G(2;\frac{7\pi}{6})$, $H(2;\frac{11\pi}{6})$.



# Глава 5. Действия с векторами

**Задача 21. Построить вектор равный сумме двух данных векторов по правилу параллелограмма.**

Решение. Оба данных вектора откладываем от одной точки и рассматриваем их как смежные стороны параллелограмма. Достраиваем до параллелограмма: через конец каждого вектора проводим прямую параллельную другому вектору.

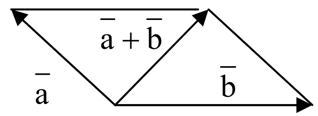



Рис. 18.

По определению суммы двух векторов, вектор $\bar{a}+\bar{b}$, отложенный от той же точки, что и векторы слагаемые, совпадает с диагональю построенного параллелограмма.

Ответ: рисунок 18.

**Задача 22. Построить вектор равный сумме двух или более данных векторов по правилу треугольника.**

Решение. Пусть даны 3 вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$. Найдем их сумму $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

Отложим вектор $\bar{a}$ от произвольно выбранной точки A и обозначим его конец через B. Тогда $\bar{a} = \overline{AB}$. Отложим вектор $\bar{b}$ от точки B и обозначим его конец через C, тогда $\bar{b} = \overline{BC}$. Отложим вектор $\bar{c}$ от точки C и обозначим его конец через D, тогда $\bar{c} = \overline{CD}$. По правилу треугольника сложения векторов, искомый вектор $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \overline{AD}$.

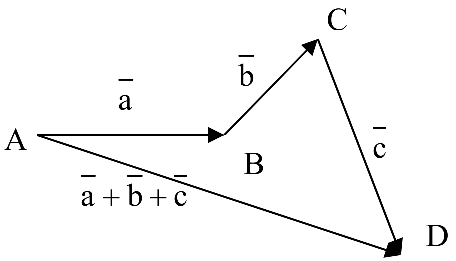



Рис. 19.

Ответ: рисунок 19.

**Задача 23. Построить вектор равный произведению вектора на число.**

Решение. Пусть дан вектор $\overline{a}$ и число k. Найдем их произведение $k\cdot\overline{a}$.

По определению умножения вектора на число, вектор $k\cdot\overline{a}$ коллинеарный вектору $\overline{a}$ и его модуль $|k\cdot\overline{a}|=|k|\cdot|\overline{a}|$. Отложим вектор $\overline{a}$ от произвольно выбранной точки A и обозначим его конец через B. Тогда $\overline{a}=\overline{AB}$. Проведем через точки A и B прямую L. Отложим вектор $k\cdot\overline{a}$ от точки A, тогда его конец, обозначим его через C, лежит на прямой L и $\overline{AC}=k\cdot\overline{a}$, причем его длина $AC=|k\cdot\overline{a}|$.

Если число $k>0$, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ – сонаправленные: $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{AC}$, смотрите рисунок 20.

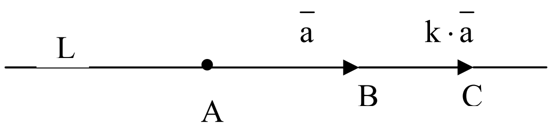



Рис. 20.



Если же число $k<0$, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ имеют противоположные направления: $\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{AC}$, смотрите рисунок 21.

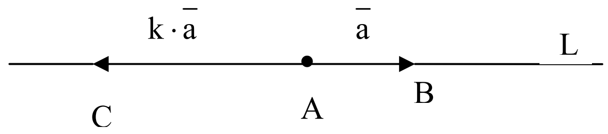



Рис. 21.

Ответ: рисунки 20 и 21.

**Задача 24. Построить вектор, противоположный данному.**

Решение. По теореме о простейших свойствах векторного пространства, для любого вектора $\overline{a}$ противоположный ему вектор $-\overline{a}=(-1)\cdot\overline{a}$. Тогда, в соответствии с предыдущей задачей получаем, что векторы $-\overline{a}$ и $\overline{a}$ имеют равные модули, но противоположные направления.

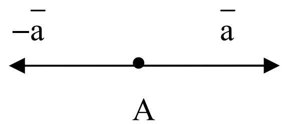



Рис. 22.

Ответ: рисунок 22.

**Задача 25. Построить разность векторов.**

Решение. По определению, разностью $\overline{a}-\overline{b}$ называется вектор $\overline{a}+(-\overline{b})$, т.е. $\overline{a}-\overline{b}\doteq\overline{a}+(-\overline{b})$. Иначе, разностью векторов $\overline{a}-\overline{b}$ называется такой вектор $\overline{c}$, что $\overline{a}=\overline{b}+\overline{c}$.

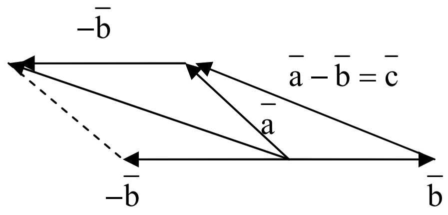



Рис. 23.

Из рисунка мы видим, что если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отложены от одной точки, то начало вектора $\bar{a}-\bar{b}$ находится в конце вектора $\bar{b}$, а конец вектора $\bar{a}-\bar{b}$ находится в конце вектора $\bar{a}$.
Ответ: рисунок 23.

**Задача 26. Построить и вычислить проекцию вектора на ось.**

Решение. Проекция вектора не зависит от точки приложения вектора (от выбора точки начала вектора). Поэтому откладываем данный вектор от любой точки данной оси и находим проекцию конца вектора на данную ось. По определению проекции

$$\text{пр}_L \overline{AB} \doteq \begin{cases} AB', & \text{если } \overline{A'B'} \uparrow\uparrow L \\ -AB', & \text{если } \overline{A'B'} \uparrow\downarrow L \end{cases}.$$

На рисунке 24 вектор $\overline{AB'} \uparrow\uparrow L$, т.е. правоориентирован на оси L, поэтому $\text{пр}_L \overline{AB} = AB'$, на рисунке 25, $\overline{AB'} \uparrow\downarrow L$, т.е. левоориентирован на оси L, поэтому $\text{пр}_L \overline{AB} = -AB'$. Какой знак имеет проекция на ось зависит и от величины угла между вектором и осью. Если угол между вектором и осью острый, то проекция положительна. В противном случае проекция отрицательна.



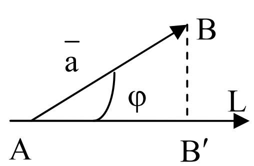



Рис. 24.

или

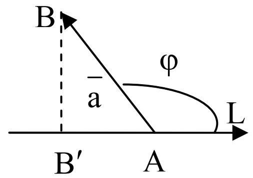



Рис. 25.

Вычислить проекцию вектора на ось можно по формуле:

$$\text{пр}_L \bar{a} = |\bar{a}| \cos(\bar{a} \wedge L).$$

**Пример.** Построить и вычислить на координатной плоскости Oxy проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси и на ось L, если известно, что $|\bar{a}| = 6$, $(\bar{a} \wedge Ox) = \dfrac{\pi}{6}$, $(\bar{a} \wedge Oy) = \dfrac{2\pi}{3}$, $(L \wedge Ox) = \dfrac{\pi}{4}$, $(L \wedge Oy) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. Для построения проекций отложим вектор $\bar{a}$ от начала координат, получаем $\bar{a} = \overline{OA}$.

Напомним, что углом между вектором и осью (между осями) называется наименьший угол поворота между вектором и осью (между осями) до положения сонаправленности вектора и оси (до положения сонаправленности осей). Находим проекции конца вектора, точки A, на координатные оси, т.е. опускаем перпендикуляры на координатные оси из точки A и получаем две точки: $A'$ и $A''$.

Так как вектор $\overline{OA'} \uparrow\uparrow Ox$, то $\text{пр}_x \bar{a} = OA'$. Так как $\overline{OA''} \uparrow\downarrow Oy$, то $\text{пр}_y \bar{a} = -OA''$.

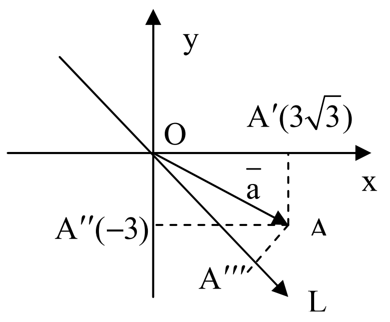



Рис. 26.

Вычисляем величины проекций:

$$\text{пр}_x \bar{a} = |\bar{a}| \cos(\bar{a} \hat{,} Ox) = 6 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{пр}_y \bar{a} = |\bar{a}| \cos(\bar{a} \hat{,} Oy) = 6 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = 6\,(-\frac{1}{2}) = -3.$$

Аналогично находим проекцию вектора $\bar{a}$ на ось L:

$$\text{пр}_L \bar{a} = OA''' = |\bar{a}| \cos(\bar{a}, L) = 6 \cdot \cos 15^{\circ}.$$

Косинус пятнадцати градусов легко вычислить с помощью формулы половинного угла:

$$\cos 15^{\circ} = \sqrt{\frac{1+\cos 30^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \quad \text{пр}_L \bar{a} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}.$$

Ответ: рисунок 26, $\text{пр}_x \bar{a} = OA' = 3\sqrt{3}$, $\text{пр}_y \bar{a} = -OA'' = -3$,

$$\text{пр}_L \bar{a} = OA''' = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}.$$



**Замечание.** По определению декартовые координаты вектора есть проекции вектора на координатные оси и в координатной форме записи

$$\bar{a} = (\text{пр}_x \bar{a}, \text{пр}_y \bar{a}) = (3\sqrt{3}; -3).$$

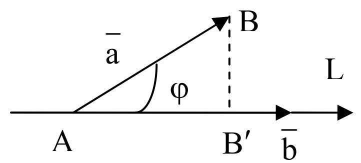
По определению, координаты точки A равны координатам ее радиус-вектора, так что

$$\overline{OA} = \bar{a} = (3\sqrt{3}; -3), \quad A(3\sqrt{3}; -3).$$

**Задача 27. Построить и вычислить проекцию вектора на вектор.**

Решение. Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и требуется найти проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$.

По определению, проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ есть проекция вектора $\bar{a}$ на ось L, где $\bar{b} \uparrow\uparrow L$. Отложим оба вектора от одной точки, и через начало и конец вектора $\bar{b}$ проведем ось L, сонаправленную с вектором $\bar{b}$: $\bar{b} \uparrow\uparrow L$.



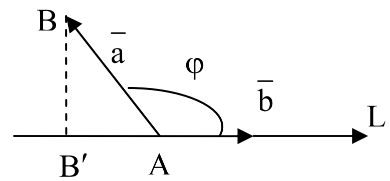




Рис. 27. или Рис. 28.

Таким образом, задача сводится к предыдущей, и так как $\bar{b} \uparrow\uparrow L$, то $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = (\bar{a} \wedge L)$, и $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{b})$.

Заметим, что проекцию вектора на вектор можно вычислить с помощью скалярного произведения: так как

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a} \hat{\ } \bar{b}) = |\bar{b}|\, \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}, \text{ то } \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

**Пример.** Найти проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{a}+\bar{b}$, если $\bar{a}\perp\bar{b}$ и $|\bar{a}|=|\bar{b}|=2$.

Решение. Отложим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ от произвольной точки A и построим вектор $\bar{a}+\bar{b}$. Смотрите рисунок 29.

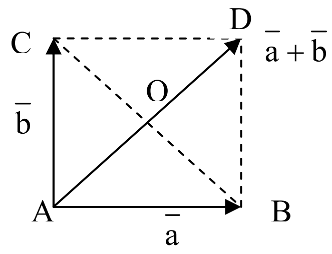



Рис. 29.

В квадрате ABDC его диагонали пересекаются в точке O, делятся в ней пополам и являются взаимно перпендикулярными, следовательно, точка O является проекцией точки B на прямую AD и, так как $AO=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot AB=\sqrt{2}$, то отсюда следует, что $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\sqrt{2}$.

Ответ: рисунок 29, $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=AO=\sqrt{2}$.

**Задача 28. Вычислить скалярное произведение векторов, используя его определение и простейшие свойства.**

**Определение.** Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

**Обозначение**: $\bar{a}\cdot\bar{b}\doteq|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})$.



Простейшие свойства скалярного произведения.

1). Скалярное произведение подчиняется закону коммутативности:

$$\forall\bar{a},\bar{b},\quad \bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}.$$

2). Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов нулевой или векторы ортогональные:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \Leftrightarrow (\bar{a}=\bar{0}) \text{ или } (\bar{b}=\bar{0}) \text{ или } (\bar{a}\perp\bar{b}).$$

3). Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^2\doteq\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2.$$

4). $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$.

**Пример 1.** Дано: $|\bar{a}|=\sqrt{3}$, $|\bar{b}|=2$, $(\bar{a}\wedge\bar{b})=150^\circ$. Найти:

а) скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}$; б) скалярный квадрат вектора $\bar{a}$; в) проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$.

Решение. а) $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\bar{a}\wedge\bar{b})=\sqrt{3}\cdot2\cdot\cos150^\circ=-3$;

б) $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=3$; в) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}=\frac{-3}{2}=-1{,}5$.

Ответ: а) $\bar{a}\cdot\bar{b}=-3$; б) $\bar{a}^2=3$; в) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=-1{,}5$.

**Пример 2.** Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}\cdot\bar{b}$, если $|\bar{a}|=0{,}5$ и $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=-4$.

Решение. $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=0{,}5\cdot(-4)=-2$.

Ответ: $\bar{a}\cdot\bar{b}=-2$.

**Задача 29. Найти угол между векторами, если известно их скалярное произведение и их модули.**

Ответ: $(\bar a \wedge \bar b) = \arccos\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar a|\cdot|\bar b|}$.

**Пример.** Найти угол между векторами, если $\bar a\cdot\bar b = -6$, $|\bar a| = |\bar b| = \sqrt{6}$.

Решение.

$$(\bar a \wedge \bar b) = \arccos\frac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar a|\cdot|\bar b|} = \arccos\frac{-6}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \arccos(-1) = \pi .$$

Ответ: $180^{\circ}$.

**Задача 30. Вычислить скалярное произведение векторов, используя его определение и свойство линейности.**

Свойство линейности скалярного произведения:

1) скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов.

$$\forall\, \bar a, \bar b, \bar c:\quad (\bar a+\bar b)\cdot\bar c = \bar a\cdot\bar c + \bar b\cdot\bar c;$$

2) скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения.

$$\forall\, \bar a, \bar b \text{ и } \forall \alpha\in R:\quad (\alpha\cdot\bar a)\cdot\bar b = \alpha(\bar a\cdot\bar b).$$

**Следствие.** Для любых векторов $\bar a, \bar b, \bar c, \bar d$ и для любых скаляров $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ верно равенство

$$(\alpha\bar a+\beta\bar b)\cdot(\gamma\bar c+\delta\bar d) =$$
$$=(\alpha\gamma)(\bar a\cdot\bar c)+(\alpha\delta)(\bar a\cdot\bar d)+(\beta\gamma)(\bar b\cdot\bar c)+(\beta\delta)(\bar b\cdot\bar d).$$

**Пример.** Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Решение. Пусть ABCD произвольный параллелограмм.



Обозначим $\bar a = \overline{AB}$, $\bar b = \overline{AD}$. Тогда $\bar a+\bar b = \overline{AC}$, $\bar a-\bar b = \overline{DB}$.

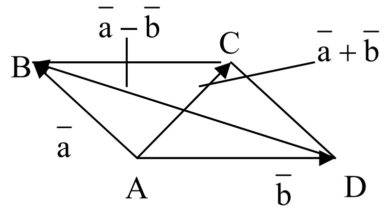



Рис. 30.

$$AC^2 = |\overline{AC}|^2 = \overline{AC}^2 = (\bar a+\bar b)^2 = \bar a^2 + 2\cdot\bar a\cdot\bar b+\bar b^2;$$
$$BD^2 = |\overline{DB}|^2 = \overline{DB}^2 = (\bar a-\bar b)^2 = \bar a^2 - 2\cdot\bar a\cdot\bar b+\bar b^2;$$
$$AC^2+BD^2 = 2\bar a^2+2\bar b^2 = 2|\bar a|^2+2|\bar b|^2 = 2(AB^2+AD^2) \quad\text{или}$$
$$AC^2+BD^2 = AB^2+BC^2+CD^2+AD^2,\ \text{ч.т.д.}$$

**Задача 31. Определить ориентацию данной тройки векторов.**

Пусть $\{\bar a, \bar b, \bar c\}$ – упорядоченная тройка некомпланарных векторов, отложенных от одной точки.

**Определение.** Говорят, что упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\bar a, \bar b, \bar c\}$ имеет правую (левую) ориентацию, если кратчайший поворот первого вектора $\bar a$ ко второму вектору $\bar b$ в плоскости, в которой они лежат, происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке), если наблюдать этот поворот со стороны третьего вектора $\bar c$.

**Пример.** Определить ориентацию следующих троек векторов: а) $\{\bar i, \bar j, \bar k\}$; б) $\{\bar k, \bar j, \bar i\}$, в) $\{\bar i-\bar j, \bar k, \bar i+\bar j\}$.

Решение. а) $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Пусть наблюдатель смотрит на плоскость, в которой лежат векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ со стороны третьего вектора $\bar{k}$, т.е. сверху.

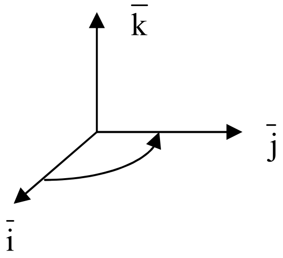



Рис. 31.

Тогда кратчайший поворот первого вектора $\bar{i}$ ко второму вектору $\bar{j}$ происходит для наблюдателя против часовой стрелки.

Ответ: тройка $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ имеет правую ориентацию.

б) $\{\bar{k}, \bar{j}, \bar{i}\}$. Пусть наблюдатель смотрит на плоскость, в которой лежат векторы $\bar{k}$ и $\bar{j}$ со стороны третьего вектора $\bar{i}$.

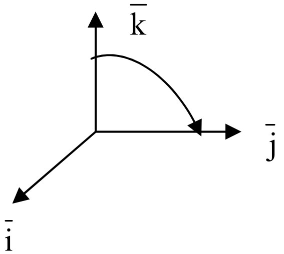



Рис. 32.



Тогда кратчайший поворот первого вектора $\bar{k}$ ко второму вектору $\bar{j}$ происходит для наблюдателя по часовой стрелке.

Ответ: тройка $\{\bar{k}, \bar{j}, \bar{i}\}$ имеет левую ориентацию.

в) $\{\bar{i}-\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}+\bar{j}\}$. Пусть наблюдатель смотрит на плоскость, в которой лежат векторы $\bar{i}-\bar{j}$ и $\bar{k}$ и со стороны третьего вектора $\bar{i}+\bar{j}$.

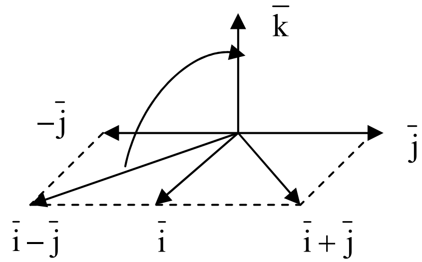



Рис. 33.

Тогда кратчайший поворот первого вектора $\bar{i}-\bar{j}$ ко второму вектору $\bar{k}$ происходит для наблюдателя по часовой стрелке.

Ответ: тройка $\{\bar{i}-\bar{j}, \bar{k}, \bar{i}+\bar{j}\}$ имеет левую ориентацию.

**Задача 32. Построить векторное произведение двух векторов.**

**Определение.** Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется третий вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{a}$ и $\bar{a} \times \bar{b} \perp \bar{b}$;

2) тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}\}$ имеет правую ориентацию;

3) $|\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin(\overline{a}\wedge\overline{b})$.

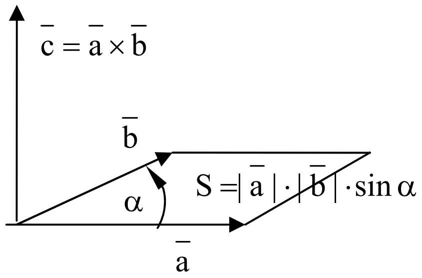



Рис. 34.

Из определения следует, что, если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a}\times\overline{b}$ отложить от одной точки, то

1) вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) кратчайший поворот вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ происходит против часовой стрелки, если смотреть «сверху», т.е. со стороны вектора $\overline{a}\times\overline{b}$;

3) длина вектора $\overline{a}\times\overline{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, как на его сторонах.

**Пример.** Дан треугольник ABC, $AB=1$, $AC=4$ и $\angle A=120^{o}$. Постройте векторное произведение вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$ и найдите площадь данного треугольника.

Решение. Найдем модуль векторного произведения вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$:

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}| = |\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|\cdot\sin 120^{o} = 1\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$



Отсюда, $S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{3}$. Выполним чертеж:

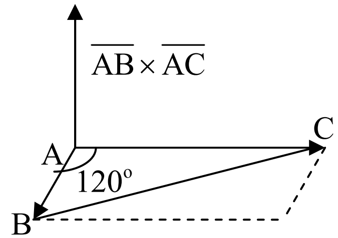



Рис. 35.

Здесь $\overline{AB}\times\overline{AC}\perp\overline{AB}$ и $\overline{AB}\times\overline{AC}\perp\overline{AC}$, т.е. вектор $\overline{AB}\times\overline{AC}$ перпендикулярен плоскости треугольника ABC.

Ответ: рисунок 35, $S_{ABC}=\sqrt{3}$.

**Задача 33. Вычисление модуля векторного произведения векторов, используя его определение и свойства.**

**Пример.** Доказать, что площадь параллелограмма равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть ABCD параллелограмм. Обозначим $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$ и угол между диагоналями AC и BD через $\alpha$. Тогда $\overline{AC}=\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{DB}=\overline{a}-\overline{b}$.

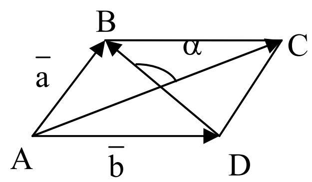



Рис. 36.

Из определения векторного произведения следует, что площадь параллелограмма равна $S=|\bar{a}\times\bar{b}|$.

С другой стороны, используя свойство линейности векторного произведения и его простейшие свойства, получаем равенство:

$$\overline{AC}\times\overline{DB}=(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}\times\bar{a}-\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}=$$

$$=2(\bar{b}\times\bar{a}).$$

Здесь $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{b}\times\bar{b}=\bar{0}$, $-\bar{a}\times\bar{b}=\bar{b}\times\bar{a}$. Отсюда следует

$$S=|\bar{a}\times\bar{b}|=\frac{1}{2}|\overline{AC}\times\overline{DB}|=\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot|\overline{DB}|\cdot\sin\alpha$$

или $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$, ч.т.д.

**Задача 34. Вычисление смешанного произведения векторов, используя его определение и свойства.**

**Пример.** В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD со сторонами $AB=a$, $AD=b$ и углом $\angle A=120^{o}$. Боковое ребро $AS=c$, $\angle SAB=60^{o}$, SO – высота пирамиды, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Найти острый угол $\alpha$ между высотой пирамиды и перпендикуляром OK к боковой грани ABS.

Решение. Обозначим $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$, $\overline{AS}=\bar{c}$.



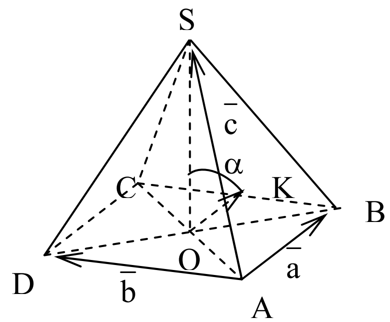


Рис. 37.

Вектор $\overline{OK}\uparrow\uparrow\bar{a}\times\bar{c}$ и угол $\alpha$ равен углу между векторами $\bar{a}\times\bar{c}$ и $\overline{OS}$. Отсюда,

$$\cos\alpha=\frac{(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\overline{OS}}{|\bar{a}\times\bar{c}|\cdot|\overline{OS}|}.$$

Далее, $\overline{OS}=\overline{AS}-\overline{AO}=\bar{c}-\frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})=\bar{c}-\frac{1}{2}\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}$

и $(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\overline{OS}=(\bar{a}\times\bar{c})\cdot(\bar{c}-\frac{1}{2}\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b})=-\frac{1}{2}\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{b}=\frac{1}{2}\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}$.

Тройка векторов $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ имеет правую ориентацию, поэтому

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}>0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{6}\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=V_{SABD}=\frac{1}{2}V=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{осн}H=\frac{1}{6}|\bar{a}\times\bar{b}|\cdot|\overline{OS}|,$$

где мы обозначили буквой V объем пирамиды SABCD. Отсюда, $(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\overline{OS}=\frac{1}{2}\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}=\frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}|\cdot|\overline{OS}|$ и

$$\cos\alpha=\frac{(\bar{a}\times\bar{c})\cdot\overline{OS}}{|\bar{a}\times\bar{c}|\cdot|\overline{OS}|}=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|\cdot|\overline{OS}|}{2|\bar{a}\times\bar{c}|\cdot|\overline{OS}|}=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{2|\bar{a}\times\bar{c}|}=$$

$$= \frac{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin 120^{\circ}}{2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \sin 60^{\circ}} = \frac{b}{2c}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos \frac{b}{2c}$.

**Задача 35. Определить ориентацию данной тройки векторов, используя свойства смешанного произведения.**

Решение. Известно, что если $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} > 0$, то тройка $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ имеет правую ориентацию, если $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} < 0$, то тройка $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ имеет левую ориентацию. Если же $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$, то тройка $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ – компланарная.

Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда построенного на векторах сомножителях как на ребрах.

При транспозиции двух сомножителей смешанное произведение меняет знак, а при круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не изменяется.

**Пример 1.** Вычислить $\bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{k}$.

Решение. Тройка векторов $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ имеет правую ориентацию (смотрите задачу 31, рисунок 31) и $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, поэтому их смешанное произведение равно объему куба, который построен на этих векторах как на ребрах.

Ответ: $\bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} = 1$.

**Пример 2.** Определить ориентацию тройки векторов:

а) $\{\bar{i} + \bar{j}, -\bar{i} - \bar{k}, -\bar{j} - \bar{k}\}$; б) $\{\bar{i} - \bar{j}, \bar{j} + \bar{k}, \bar{i} + \bar{k}\}$.

Решение.

а) $(\bar{i} + \bar{j})(-\bar{i} - \bar{k})(-\bar{j} - \bar{k}) = (\bar{i} + \bar{j})(\bar{i} + \bar{k})(\bar{j} + \bar{k}) =$



$$= \bar{i} \cdot \bar{i} \cdot \bar{j} + \bar{i} \cdot \bar{i} \cdot \bar{k} + \bar{i} \cdot \bar{k} \cdot \bar{j} + \bar{i} \cdot \bar{k} \cdot \bar{k} +$$
$$+ \bar{j} \cdot \bar{i} \cdot \bar{j} + \bar{j} \cdot \bar{i} \cdot \bar{k} + \bar{j} \cdot \bar{k} \cdot \bar{j} + \bar{j} \cdot \bar{k} \cdot \bar{k} = \bar{i} \cdot \bar{k} \cdot \bar{j} + \bar{j} \cdot \bar{i} \cdot \bar{k} =$$
$$= -2\bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} = -2 < 0.$$

б) $(\bar{i} - \bar{j})(\bar{j} + \bar{k})(\bar{i} + \bar{k}) = \bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{i} + \bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} + \bar{i} \cdot \bar{k} \cdot \bar{i} + \bar{i} \cdot \bar{k} \cdot \bar{k} +$

$$+(-\bar{j}) \cdot \bar{j} \cdot \bar{i} + (-\bar{j}) \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} + (-\bar{j}) \cdot \bar{k} \cdot \bar{i} + (-\bar{j}) \cdot \bar{k} \cdot \bar{k} =$$
$$= \bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} - \bar{j} \cdot \bar{k} \cdot \bar{i} = \bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} - \bar{i} \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} = 0.$$

Ответ: а) левая; б) компланарная.

## Глава 6. Линейные операции с векторами в координатной форме

**Задача 36. Найти декартовую координату вектора числовой оси, записать его в координатной форме, найти его модуль, орт и направляющий косинус, определить его ориентацию на координатной оси.**

Решение. Пусть дана координатная ось Ox и вектор $\bar{a} \parallel Ox$. Тогда данный вектор можно записать в виде

$$\bar{a} = (a_x),$$

где число $a_x = пр_x \bar{a}$ называется декартовой координатой вектора $\bar{a}$. Такая форма записи вектора называется координатной. Такая запись отражает факт отождествления вектора координатной оси с числом, по которому мы определяем и длину вектора и его направление на оси.

Проекцию вектора на ось можно вычислить по формуле:

$$пр_x \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos(\bar{a} \wedge Ox).$$

**Определение.** Угол между вектором и координатной осью называется его направляющим углом, а косинус направляющего угла называется направляющим косинусом вектора.

Угол между вектором и осью абсцисс принято обозначать греческой буквой

$$\alpha = (\bar{a} \wedge Ox).$$

По условию задачи $\bar{a} \parallel Ox$, то либо $\alpha = 0$ при $\bar{a} \uparrow\uparrow Ox$ и $\cos\alpha = 1$, либо $\alpha = \pi$ при $\bar{a} \uparrow\downarrow Ox$ и $\cos\alpha = -1$.

**Определение.** Если $\bar{a} \uparrow\uparrow Ox$, то говорят, что вектор $\bar{a}$ имеет на оси Ox правую ориентацию, если $\bar{a} \uparrow\downarrow Ox$, то вектор $\bar{a}$ имеет на оси Ox левую ориентацию.



**Определение.** Ортом вектора называется единичный вектор, сонаправленный с данным.

Если дан вектор $\bar{a}$, то его орт обозначается $\bar{a}^o$. Из определения следует, что $\bar{a}^o = \left(\dfrac{a_x}{|\bar{a}|}\right) = (\cos\alpha)$ – запись орта вектора $\bar{a}$ в координатной форме.

Таким образом, мы получили все ответы на вопросы задачи:

1) $\bar{a} = (a_x)$ – координатная форма записи;

2) $a_x = пр_x \bar{a} = |\bar{a}|$, если $\bar{a} \uparrow\uparrow Ox$, т.е. если вектор $\bar{a}$ имеет на оси Ox правую ориентацию, и в этом случае $\bar{a} = (|\bar{a}|)$;

3) $a_x = пр_x \bar{a} = -|\bar{a}|$, если $\bar{a} \uparrow\downarrow Ox$, т.е. если вектор $\bar{a}$ имеет на оси Ox левую ориентацию, и в этом случае $\bar{a} = (-|\bar{a}|)$;

4) $|\bar{a}| = |a_x| = |пр_x \bar{a}|$;

5) $\cos\alpha = \dfrac{пр_x \bar{a}}{|\bar{a}|}$, где $\cos\alpha = 1$, если $\bar{a} \uparrow\uparrow Ox$ и $\cos\alpha = -1$, если $\bar{a} \uparrow\downarrow Ox$;

6) $\bar{a}^o = \left(\dfrac{a_x}{|\bar{a}|}\right) = (\cos\alpha)$.

**Пример.** Найти декартовую координату вектора оси Ox, записать его в координатной форме, найти его орт и направляющий косинус, если его модуль равен 4 и вектор на оси левоориентированный.

Решение. Левая ориентация вектора $\bar{a}$ на оси Ox означает, что $\bar{a} \uparrow\downarrow Ox$, откуда сразу же следует, что $a_x = -|\bar{a}| = -4$ и $\cos\alpha = -1$ и $\bar{a}^o = (-1)$.

Ответ: $a_x = -4$, $\bar{a} = (-4)$, $\cos\alpha = -1$, $\bar{a}^o = (-1)$.

**Задача 37. Найти декартовую координату вектора координатной оси по известным координатам его начала и конца, и записать его в координатной форме. Найти его модуль, орт и направляющий косинус. Определить его ориентацию на координатной оси.**

Решение. Пусть $\bar{a} = \overline{AB}$ и $x_A$ – координата точки A, $x_B$ – координата точки B на координатной оси Ox. Известно, что декартовая координата вектора $\overline{AB}$ равна

$$a_x = (AB)_x = x_B - x_A.$$

Тогда, координатная форма записи вектора $\overline{AB}$ имеет вид:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A).$$

Модуль вектора $\overline{AB}$ равен

$$|\overline{AB}| = |x_B - x_A|.$$

Орт вектора $\overline{AB}$ равен

$$\overline{AB}^o = \left(\frac{x_B - x_A}{|x_B - x_A|}\right) = (\cos\alpha).$$

Направляющий косинус

$$\cos\alpha = \frac{x_B - x_A}{|x_B - x_A|} = \pm 1.$$

Здесь, $\cos\alpha = 1$, если $x_B - x_A > 0$ и тогда вектор $\overline{AB}$ имеет правую ориентацию на оси Ox, т.е. $\overline{AB} \uparrow\uparrow Ox$; если $x_B - x_A < 0$, то $\cos\alpha = -1$ и вектор $\overline{AB}$ имеет левую ориентацию на оси Ox, т.е. $\overline{AB} \uparrow\downarrow Ox$.



**Пример 1.** Найти декартовую координату вектора $\overline{AB}$ и записать его в координатной форме, если точки A и B лежат на оси Ox и имеют координаты: A(–2), B(–9). Найти его модуль, орт, направляющий косинус и определить его ориентацию на оси Ox.

Решение.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A) = (-9 - (-2)) = (-7), \quad \overline{AB} \uparrow\downarrow Ox,$$

$$|\overline{AB}| = |x_B - x_A| = |-7| = 7, \quad \overline{AB}^o = (-1), \quad \cos\alpha = -1.$$

Ответ: $\overline{AB} = (-7), |\overline{AB}| = 7, \overline{AB} \uparrow\downarrow Ox, \overline{AB}^o = (-1), \cos\alpha = -1.$

**Пример 2.** Найти координаты конца вектора $\overline{AB}$, лежащего на оси Ox, если $A(-11)$, $|\overline{AB}| = 9$ и $\overline{AB} \uparrow\downarrow Ox$.

Решение. Так как $\overline{AB} \uparrow\downarrow Ox$, то $\overline{AB} = (-|\overline{AB}|) = (-9)$.

Далее, $\overline{AB} = (x_B - x_A) = (-9)$, откуда $x_B - x_A = -9$ и $x_B = x_A - 9 = -11 - 9 = -20$.

Ответ: $B(-20)$.

**Пример 3.** Пусть $A\left(\frac{a+1}{2}\right)$, $B(a^2)$, $C\left(a^2 + \frac{a-1}{2}\right)$ – точки на координатной оси Ox. Найти декартовую координату вектора $\overline{AB}$, если известно, что $\overline{AB} = -2 \cdot \overline{AC}$ и $\overline{AB} \neq \bar{0}$.

Решение. Имеем,

$$\overline{AB} = (x_B - x_A) = (a^2 - \frac{a+1}{2}),$$

$$\overline{AC} = (x_C - x_A) = (a^2 + \frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{2}) = (a^2 - 1).$$

При умножении вектора на число его координата умножается на это число:

$$-2 \cdot \overline{AC} = (-2a^2 + 2).$$

Равные векторы имеют равные координаты, отсюда,

$$a^2 - \frac{a+1}{2} = -2a^2 + 2 \quad \text{или} \quad 3a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{5}{2} = 0\,.$$

Решаем получившееся квадратное уравнение:

$$a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{5}{6}\,.$$

При $a = 1$, $\overline{AB} = (a^2 - \frac{a+1}{2}) = (0)$, т.е. $\overline{AB} = \overline{0}$.

При $a = -\frac{5}{6}$, $\overline{AB} = (a^2 - \frac{a+1}{2}) = \left(\frac{11}{18}\right)$.

Ответ: $\overline{AB} = \left(\frac{11}{18}\right)$.

**Задача 38. Найти координаты суммы векторов и произведения вектора на число для векторов координатной оси.**

Решение. Действует очень простое правило: *при сложении векторов оси их декартовые координаты складываются, а при умножении вектора оси на действительное число его декартовая координата умножается на это число*.

Пусть $\overline{a} = (a_x)$, $\overline{b} = (b_x)$, $\alpha, \beta \in R$. Тогда

$$\alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} = (\alpha \cdot a_x + \beta \cdot b_x)\,.$$

**Пример.** Пусть на координатной оси Ox даны два вектора, записанные в координатной форме: $\overline{a} = (-7)$, $\overline{b} = (11)$. Найти:
а) $\overline{a} + \overline{b}$, б) $-\overline{a}$; в) $\overline{a} - \overline{b}$; г) $-3\overline{a}$; д) $2\overline{a} - 5\overline{b}$.

Решение. а) $\overline{a} + \overline{b} = (-7 + 11) = (4)$; б) $-\overline{a} = -(-7) = (7)$;
в) $\overline{a} - \overline{b} = (-7 - 11) = (-18)$; г) $-3\overline{a} = -3(-7) = (21)$;
д) $2\overline{a} - 5\overline{b} = 2(-7) - 5(11) = (-14 - 55) = (-69)$.

Ответ: а) $\overline{a} + \overline{b} = (4)$; б) $-\overline{a} = (7)$; в) $\overline{a} - \overline{b} = (-18)$;



г) $-3\overline{a} = (21)$; д) $2\overline{a} - 5\overline{b} = (-69)$.

**Задача 39. Найти декартовые координаты вектора координатной плоскости, его модуль, орт и направляющие косинусы.**

**Определение.** Декартовыми координатами вектора $\overline{a}$ на координатной плоскости Oxy называется упорядоченная пара чисел $\overline{a} = (a_x, a_y)$, где $a_x = \text{пр}_x \overline{a}$, $a_y = \text{пр}_y \overline{a}$.

Известно, что вектор отождествляется со своими координатами и запись вектора в виде $\overline{a} = (a_x, a_y)$ называется координатной формой записи вектора $\overline{a}$.

Если известны модуль вектора $\overline{a}$ и его направляющие углы, т.е. углы между вектором $\overline{a}$ и координатными осями: $\alpha = (\overline{a} \wedge Ox)$, $\beta = (\overline{a} \wedge Oy)$
или направляющие косинусы вектора $\overline{a}$, т.е. $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, то

$$a_x = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha,\ a_y = |\overline{a}| \cdot \cos\beta,$$

$$\overline{a} = (a_x, a_y) = (|\overline{a}| \cdot \cos\alpha, |\overline{a}| \cdot \cos\beta) = |\overline{a}|(\cos\alpha, \cos\beta)\,.$$

Обозначим $\overline{a^o} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Тогда $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a^o}$, откуда следует, что $|\overline{a^o}| = 1$ и вектор $\overline{a^o} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ – орт вектора $\overline{a}$. Так как $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

Сформулируем ответы на вопросы задачи:

1) декартовые координаты вектора $\overline{a}$ на координатной плоскости Oxy $\overline{a} = (a_x, a_y)$, где $a_x = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha$,

$$a_y = |\overline{a}| \cdot \cos\beta,\ \alpha = (\overline{a} \wedge Ox),\ \beta = (\overline{a} \wedge Oy);$$

2) $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; 3) $\bar{a}^o = (\cos\alpha, \cos\beta)$;

4) $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$.

**Пример.** В прямоугольном равнобедренном треугольнике найти косинус угла между гипотенузой и медианой острого угла.

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол C – прямой и $CA = CB$, AD – медиана. Введем ПДСК так, что C – начало координат, катет CA лежит на оси абсцисс, CB – на оси ординат, смотрите рисунок 38.

Пусть $AC = BC = 2a$, тогда непосредственно из рисунка видно, что

$$\text{пр}_x \overline{AD} = -AC = -2a, \ \text{пр}_y \overline{AD} = CD = a,$$

откуда $\overline{AD} = (-2a; a) = a\cdot(-2; 1)$,

$$|\overline{AD}| = a\sqrt{5}, \ \cos\alpha = \frac{(AD)_x}{|\overline{AD}|} = \frac{-2a}{a\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \ \varphi = \alpha - \frac{3}{4}\pi.$$

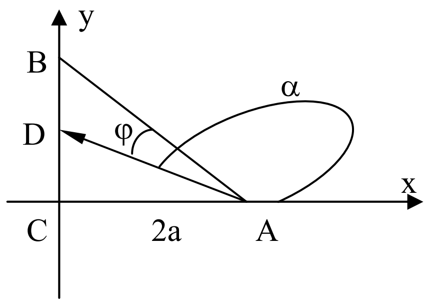



Рис. 38.

Используя формулу косинуса разности, находим



$$\cos\varphi = \cos\left(\alpha - \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\alpha\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\alpha\sin\frac{3\pi}{4}.$$

Из треугольника ACD находим

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

**Замечание.** Еще легче эту задачу можно решить с помощью скалярного произведения векторов.

Легко видеть, что $\overline{AB} = (-2a; 2a) = 2a\cdot(-1; 1)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|} = \frac{2a^2(2+1)}{2a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

**Задача 40. Найти декартовые координаты вектора координатной плоскости, его модуль, орт и направляющие косинусы по известным координатам его начала и конца.**

Решение. Пусть $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ – две произвольные точки координатной плоскости. Тогда

$$\text{пр}_x \overline{AB} = x_B - x_A, \ \text{пр}_y \overline{AB} = y_B - y_A,$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A), \ |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

$$\overline{(AB)}^o = \left(\frac{x_B - x_A}{|\overline{AB}|}, \frac{y_B - y_A}{|\overline{AB}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta),$$

$$\cos\alpha = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

**Пример.** Пусть A(–1; 2), B(3; –4), C(0; 6) и AD – медиана треугольника ABC , O – точка пересечения медиан. Найдите координаты вектора $\overline{OD}$, его модуль, орт и направляющие косинусы.

Решение. Точка D – середина стороны BC. Отсюда

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+0}{2} = 1{,}5, \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1.$$

Для вычисления координат точки пересечения медиан треугольника воспользуемся готовыми формулами:

$$x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-1+3+0}{3} = \frac{2}{3},$$

$$y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2-4+6}{3} = \frac{4}{3}.$$

Вычисляем все, что требуется в этой задаче:

$$\overline{OD} = (x_D - x_O;\, y_D - y_O) = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}; 1 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{6}(5; -2),$$

$$|\overline{OD}| = \frac{1}{6}\sqrt{5^2 + (-2)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{29}.$$

Ответ: $\overline{OD} = \left(\frac{5}{6}; -\frac{2}{6}\right)$, $|\overline{OD}| = \frac{1}{6}\sqrt{29}$,

$\overline{OD}^{o} = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}; -\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$, $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{29}}$.



**Задача 41. Найти координаты суммы векторов и произведения вектора на число для векторов координатного пространства.**

Решение. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2)$, $\alpha, \beta \in R$. Тогда

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2).$$

**Пример.** Пусть $\overline{a} = (4; -7)$, $\overline{b} = (7; -13)$. Найти координаты вектора: а) $\overline{a} + \overline{b}$; б) $-\overline{a}$; в) $\overline{a} - \overline{b}$; г) $-3\overline{b}$; д) $3\overline{a} - 4\overline{b}$.

Ответ: а) $\overline{a} + \overline{b} = (11; -20)$; б) $-\overline{a} = (-4; 7)$;

в) $\overline{a} - \overline{b} = (-3; 6)$; г) $-3\overline{b} = (-21; 39)$; д) $3\overline{a} - 4\overline{b} = (-16; 31)$.

**Задача 42. Найти полярный угол вектора на координатной плоскости.**

Решение. Если $\overline{a} = (a_x; a_y)$ и обозначить полярный угол вектора через $\varphi$, то $\cos\varphi = \frac{a_x}{|\overline{a}|}$, $\sin\varphi = \frac{a_y}{|\overline{a}|}$, т.е.

$$\overline{a}^{o} = \left(\frac{a_x}{|\overline{a}|}; \frac{a_y}{|\overline{a}|}\right) = (\cos\varphi; \sin\varphi).$$

Ответ: 1) $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$, $\varphi = \arccos\frac{a_x}{|\overline{a}|} = \arcsin\frac{a_y}{|\overline{a}|} = \mathrm{arctg}\,\frac{a_y}{a_x}$;

2) $\varphi \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$,

$$\varphi = \arccos\frac{a_x}{|\overline{a}|} = \pi - \arcsin\frac{a_y}{|\overline{a}|} = \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{a_y}{a_x};$$

3) $\varphi \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$,

$$\varphi = 2\pi - \arccos\frac{a_x}{|\bar{a}|} = \pi - \arcsin\frac{a_y}{|\bar{a}|} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{a_y}{a_x};$$

4) $\varphi \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$,

$$\varphi = 2\pi - \arccos\frac{a_x}{|\bar{a}|} = 2\pi + \arcsin\frac{a_y}{|\bar{a}|} = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{a_y}{a_x};$$

5) если $\bar{a} = (0; a_y)$,

$$\text{то } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ при } a_y > 0 \text{ и } \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ при } a_y < 0;$$

6) если $\bar{a} = (a_x; 0)$, то $\varphi = 0$ при $a_x > 0$ и $\varphi = \pi$ при $a_x < 0$.

**Пример.** Найти полярный угол вектора:

а) $\bar{a} = (3; 4)$; б) $\bar{a} = (-3; 4)$; в) $\bar{a} = (-3; -4)$; г) $\bar{a} = (3; -4)$.

Решение. Находим, $|\bar{a}| = 5$;

а) $\bar{a}^o = (\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$, $\varphi = \arccos\frac{3}{5} = \arcsin\frac{4}{5} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$;

б) $\bar{a}^o = (-\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$,

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi - \arcsin\frac{4}{5} = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right);$$

в) $\bar{a}^o = (-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$, $\varphi = 2\pi - \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi + \arccos\frac{3}{5} =$

$$= \pi - \arcsin\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi + \arcsin\frac{4}{5} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3};$$

г) $\bar{a}^o = (\frac{3}{5}; -\frac{4}{5})$,



$$\varphi = 2\pi - \arccos\frac{3}{5} = 2\pi - \arcsin\frac{4}{5} = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

**Задача 43. Найти декартовые координаты вектора координатного пространства, его модуль, орт и направляющие косинусы.**

**Определение.** Декартовыми координатами вектора $\bar{a}$ в координатном пространстве Oxyz называется упорядоченная тройка чисел $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, где

$$a_x = \text{пр}_x \bar{a},\ a_y = \text{пр}_y \bar{a},\ a_z = \text{пр}_z \bar{a}.$$

Решение. Известно, что вектор отождествляется со своими координатами и запись вектора в виде

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

называется координатной формой записи вектора $\bar{a}$.

Если известны модуль вектора $\bar{a}$ и его направляющие углы, т.е. углы между вектором $\bar{a}$ и координатными осями:

$$\alpha = (\bar{a} \wedge Ox),\ \beta = (\bar{a} \wedge Oy),\ \gamma = (\bar{a} \wedge Oz)$$

или направляющие косинусы вектора $\bar{a}$, т.е. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, то

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha,\ a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta,\ a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma,$$

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) = (|\bar{a}| \cdot \cos\alpha, |\bar{a}| \cdot \cos\beta, |\bar{a}| \cdot \cos\gamma)$$

или $\bar{a} = |\bar{a}|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Обозначим $\bar{a}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Тогда $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^o$, откуда следует, что $|\bar{a}^o| = 1$ и вектор $\bar{a}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – орт вектора $\bar{a}$. Так как $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Сформулируем ответы на вопросы задачи:

1) декартовые координаты вектора $\bar{a}$: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, где

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha,\ a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta,\ a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma,\ \alpha = (\bar{a} \wedge Ox),$$

$$\beta = (\bar{a} \wedge Oy),\ \gamma = (\bar{a} \wedge Oz);$$

2) $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

3) $\bar{a}^o = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$;

4) $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}$.

**Пример.** Дан куб, точки A, B и C – середины трех ребер. Ребра с точками B и C параллельны и скрещиваются с ребром, на котором лежит точка A (смотрите рисунок 39). Найти косинус угла при вершине A треугольника ABC.
Решение. Введем ПДСК Oxyz как показано на рисунке 39.

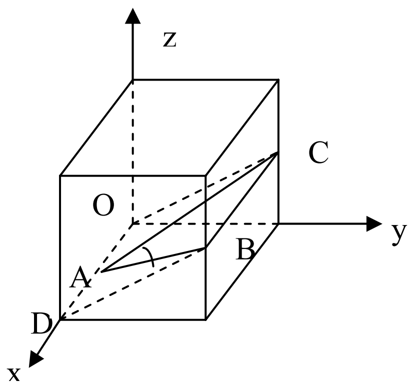



Рис. 39.

Очевидно, что точка O есть проекция точки C на ось Ox, а точка D – это проекция точки B. Тогда угол $\alpha_1 = (\overline{AC} \wedge Ox) = \angle CAD$ – направляющий угол вектора $\overline{AC}$, угол $\alpha_2 = (\overline{AB} \wedge Ox) = \angle BAD$ – направляющий угол вектора $\overline{AB}$. Искомый угол $\angle CAB = \alpha_1 - \alpha_2$.

Ясно, что размеры куба роли не играют. Пусть сторона куба равна 1. Тогда проекции векторов $\overline{AC}$ и $\overline{AB}$ на координатные оси очевидны:

$$\overline{AC} = (-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}),\ \overline{AB} = (\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}),$$

$$|\overline{AC}| = |\overline{AB}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}},\quad \cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\angle CAB = \alpha_1 - \alpha_2 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \arccos\frac{1}{\sqrt{6}} =$$

$$= \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{6}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{6}} = \pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Обозначим, для удобства записи $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$. Тогда

$$\cos A = \cos(\pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}) = \cos(\pi - 2\varphi) = -\cos 2\varphi =$$

$$= 1 - 2\cos^2\varphi = 1 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\cos A = \dfrac{2}{3}$.

**Замечание.** Еще легче задача решается с помощью скалярного произведения:

$$\cos A = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{|\overline{AC}|\cdot|\overline{AB}|} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}.$$

**Задача 44. Найти декартовые координаты вектора координатного пространства, его модуль, орт и направляющие косинусы по известным координатам его начала и конца.**

Решение. Пусть $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ – две произвольные точки. Тогда

$$\text{пр}_x \overline{AB} = x_B - x_A,\ \text{пр}_y \overline{AB} = y_B - y_A,\ \text{пр}_z \overline{AB} = z_B - z_A,$$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$

$$\overline{(AB)}^{o} = \left(\frac{x_B - x_A}{|\overline{AB}|}, \frac{y_B - y_A}{|\overline{AB}|}, \frac{z_B - z_A}{|\overline{AB}|}\right),$$

$$\cos\alpha = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_B - z_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

**Пример.** В правильном тетраэдре найти угол между апофемами соседних граней.

Решение. Введем систему координат как на рисунке 40.

Здесь AM, CN и BK – высоты и медианы правильного треугольника ABC, P – точка их пересечения, PD – высота



тетраэдра, DM – апофема грани BCD, KD – апофема грани ADC, угол KDM – искомый, O – начало координат есть точка пересечения высоты CN и средней линии KM.

Найдем координаты вершин тетраэдра:

$$A(ON; -AN; 0),\quad B(ON; BN; 0),\quad C(-OC; 0; 0),$$
$$D(OP; 0; PD).$$

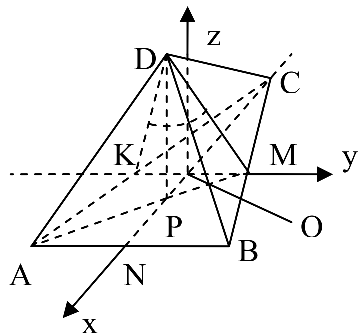



Рис. 40.

В равностороннем треугольнике со стороной 1 высота равна

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2},\ ON = OC = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$OP = ON - PN = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12},\ AN = BN = \frac{1}{2}.$$

Высота тетраэдра

$$H = PD = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{1 - (\frac{2}{3}h)^2} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда,

$$A(\frac{\sqrt{3}}{4}; -\frac{1}{2}; 0),\ B(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{2}; 0),\ C(-\frac{\sqrt{3}}{4}; 0; 0),\ D(\frac{\sqrt{3}}{12}; 0; \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

Точки K и M – середины сторон AC и BC, так что

$$K(0; -\frac{1}{4}; 0),\ M(0; \frac{1}{4}; 0).$$

Находим координаты векторов $\overline{DK}$ и $\overline{DM}$:

$$\overline{DM} = (-\frac{\sqrt{3}}{12}; \frac{1}{4}; -\sqrt{\frac{2}{3}}),\ \overline{DK} = (-\frac{\sqrt{3}}{12}; -\frac{1}{4}; -\sqrt{\frac{2}{3}}),$$

$$|\overline{DM}| = |\overline{DK}| = \sqrt{\frac{3}{144} + \frac{1}{16} + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{48} + \frac{35}{48}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos(\overline{DM} \wedge \overline{DK}) = \frac{\overline{DM} \cdot \overline{DK}}{|\overline{DM}| \cdot |\overline{DK}|} = \frac{\frac{1}{48} - \frac{1}{16} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\arccos\frac{5}{6}$.

**Задача 45. Найти декартовые координаты суммы векторов и произведения вектора на число для векторов координатного пространства.**

Решение. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\alpha, \beta \in R$. Тогда

$$\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2).$$

**Пример.** Пусть $\overline{a} = (-1; 3; 4)$, $\overline{b} = (7; -13; 0)$. Найти координаты вектора:

а) $\overline{a} + \overline{b}$; б) $-\overline{a}$; в) $\overline{a} - \overline{b}$; г) $-3\overline{b}$; д) $3\overline{a} - 4\overline{b}$.

Ответ:

а) $\overline{a} + \overline{b} = (6; -10; 4)$; б) $-\overline{a} = (1; -3; -4)$;

в) $\overline{a} - \overline{b} = (-8; 16; 4)$; г) $-3\overline{b} = (-21; 39; 0)$;

д) $3\overline{a} - 4\overline{b} = (-31; 51; 12)$.



**Задача 46. Найти декартовые координаты радиус-вектора точки с известными координатами и координаты точки, если известны декартовые координаты ее радиус-вектора.**

Решение. Известно, что координаты точки в координатном пространстве совпадают с декартовыми координатами её радиус-вектора.

Пусть $M(x_M, y_M, z_M)$ – произвольная точка координатного пространства Oxyz. Тогда ее радиус вектор $\overline{r}_M = \overline{OM}$ имеет координаты $\overline{r}_M = \overline{OM} = (x_M, y_M, z_M)$.

Ответ: $\overline{r}_M = \overline{OM} = (x_M, y_M, z_M) \Leftrightarrow M(x_M, y_M, z_M)$.

**Пример 1.** Найти радиус-вектор точки M(–2; 7; –12).

Ответ: $\overline{r}_M = \overline{OM} = (-2; 7 -12)$

**Пример 2.** Известны координаты радиус-вектора точки A: $\overline{r}_A = \overline{OA} = (13; -6 -1)$. Найти координаты точки A.

Ответ: A(13; –6; –1).

**Задача 47. Определить, коллинеарные ли векторы, заданные в координатной форме.**

Решение. Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ – два ненулевых вектора координатного пространства. Тогда

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \alpha \cdot \overline{b},$$

где $\alpha \in R$. Последнее равенство в координатной форме имеет вид:

$$(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2) \text{ или } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \alpha.$$

Отсюда следует правило (условие коллинеарности двух ненулевых векторов): *Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.*

**Пример.** Коллинеарные ли векторы:

а) $\overline{a} = (-1; 3; 4)$ и $\overline{b} = (7; -21; 0)$;

б) $\overline{a} = (-1; 3; 4)$ и $\overline{c} = (7; -21; -28)$;

в) $\overline{d} = (-1; 3; 0)$ и $\overline{b} = (7; -21; 0)$;

г) $\overline{e} = (-1; 0; 0)$ и $\overline{f} = (7; 0; 0)$;

д) $\overline{g} = (0; -2; 0)$ и $\overline{f} = (7; 0; 0)$?

Решение. а) $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, т.к. их соответствующие координаты не пропорциональны:

$$\frac{7}{-1} = \frac{-21}{3} \neq \frac{0}{4} \text{ и для любого числа } \alpha \in R,\ \overline{b} \neq \alpha \cdot \overline{a}.$$

б) $\overline{a} \parallel \overline{c}$, т.к. их соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{7}{-1} = \frac{-21}{3} = \frac{-28}{4} = -7$ и $\overline{c} = (-7) \cdot \overline{a}$.

в) Так как третья координата у обоих векторов равна нулю, то оба они лежат на координатной плоскости Оху и они будут коллинеарными тогда и только тогда, когда их первые две соответствующие координаты пропорциональны. $\overline{d} \parallel \overline{b}$, т.к. их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{7}{-1} = \frac{-21}{3} = -7 \text{ и } \overline{b} = (-7) \cdot \overline{d}.$$

г) Оба вектора лежат на оси Ох, следовательно, $\overline{e} \parallel \overline{f}$ и их первые координаты также пропорциональны:

$$\frac{7}{-1} = -7 \text{ и } \overline{f} = (-7) \cdot \overline{e}.$$

д) Вектор $\overline{f} = (7; 0; 0)$ лежит на оси Ох, а вектор $\overline{g} = (0; -2; 0)$ – на оси Оу, следовательно, они не коллинеарные. Формально, их соответствующие координаты не пропорциональны и для любого числа $\alpha \in R$, $\overline{f} \neq \alpha \cdot \overline{g}$.

Ответ: а) $\overline{a} \nparallel \overline{b}$; б) $\overline{a} \parallel \overline{c}$; в) $\overline{d} \parallel \overline{b}$; г) $\overline{e} \parallel \overline{f}$; д) $\overline{f} \nparallel \overline{g}$.



## Глава 7. Разложение вектора по произвольному базису геометрическим способом

**Задача 48. Построить разложение вектора по произвольному базису на прямой и вычислить его координату относительно данного базиса.**

**Определение.** Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или на прямой, параллельной данной.

**Определение.** Разложением вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{e}\}$ называется равенство

$$\overline{a} = k \cdot \overline{e},$$

где скаляр k называется координатой вектора $\overline{a}$ относительно базиса $\{\overline{e}\}$.

**Теорема.** Любой вектор прямой может быть разложен по базису этой прямой и притом единственным образом.

**Определение.** Угол между данным вектором $\overline{a}$ и базисным вектором $\overline{e}$ называется направляющим углом вектора $\overline{a}$ и обозначается

$$(\overline{a} \wedge \overline{e}) = \alpha.$$

Косинус этого угла называется направляющим косинусом вектора $\overline{a}$.

Решение. Пусть даны произвольная прямая L и два произвольных ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{e}$ коллинеарных прямой L, отложенные от произвольной точки А этой прямой, т.е. другими словами нам известны модули обоих векторов и направляющий угол. Требуется вычислить координату k. Возможны два случая, смотрите рисунки 41 и 42:

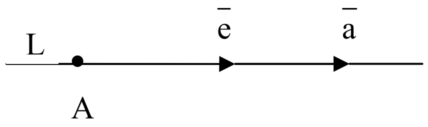



Рис. 41.

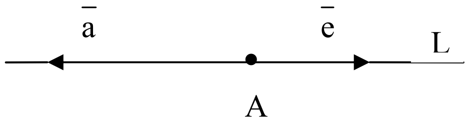



Рис. 42.

Из равенства $\bar{a} = k \cdot \bar{e}$ и из определения умножения вектора на число следует, что

$$|k| = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|},$$

а знак числа k зависит от направляющего угла $\alpha$.

Если $\alpha = 0$, то $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{e}$ и $k > 0$, если $\alpha = \pi$, то $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{e}$ и $k < 0$. Отсюда следует, что $k = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|} \cos\alpha$.

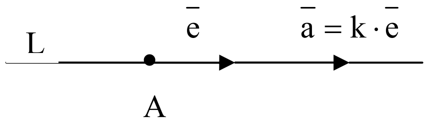



Рис. 43.

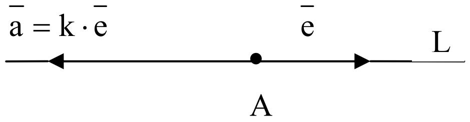



Рис. 44.



Ответ: рисунки 43, 44 ($k = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|}$, $k = -\frac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|}$ соответственно).

**Замечание.** Координату k вектора $\bar{a}$ относительно базиса $\{\bar{e}\}$ можно получить с использованием скалярного произведения.

Умножим вектор $\bar{e}$ скалярно на обе части равенства $\bar{a} = k \cdot \bar{e}$. Получаем

$$\bar{e} \cdot \bar{a} = \bar{e} \cdot (k \cdot \bar{e}) = k(\bar{e} \cdot \bar{e}) = k|\bar{e}|^2.$$

Мы воспользовались здесь свойствами скалярного произведения. Так как

$$\bar{e} \cdot \bar{a} = |\bar{e}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\alpha,$$

то, отсюда получаем $|\bar{e}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\alpha = k|\bar{e}|^2$. Выражаем k:

$$k = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|} \cos\alpha.$$

**Пример.** Разложить вектор $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}\}$, если $|\bar{e}| = 2$, $|\bar{a}| = 3$ и $\alpha = (\bar{a} \wedge \bar{e}) = \pi$.

Решение. Отложим данные векторы от какой-нибудь точки:

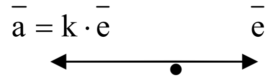



Рис. 45.

Так как $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{e}$, то $k = -\frac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|} = -\frac{3}{2}$.

Ответ: рисунок 45, $\bar{a} = -\frac{3}{2} \cdot \bar{e}$.

**Задача 49. Построить разложение вектора по произвольному базису на плоскости и вычислить его координаты.**

**Определение.** Базисом на плоскости называется любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, лежащих на данной плоскости или на плоскостях, параллельных данной.

**Определение**. Разложением вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ называется равенство

$$\overline{a} = k_1\overline{e}_1 + k_2\overline{e}_2,$$

где упорядоченная пара скаляров $(k_1, k_2)$ называется координатами вектора $\overline{a}$ относительно базиса $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$.

**Теорема**. Любой вектор плоскости может быть разложен по базису этой плоскости и притом единственным образом.

**Определение**. Углы между данным вектором $\overline{a}$ и базисными векторами $\overline{e}_1$ и $\overline{e}_2$ называются направляющими углами вектора $\overline{a}$ и обозначаются

$$(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{e}_1) = \alpha, \quad (\overline{a}\,\hat{}\,\overline{e}_2) = \beta.$$

Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$.

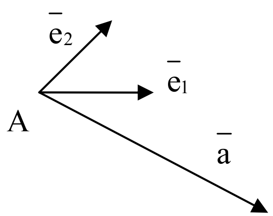



Рис. 46.



Решение. Пусть на плоскости дан произвольный базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ и произвольный вектор $\overline{a}$, отложенные от произвольной точки A (рисунок 46).

Мы полагаем, что нам известны модули базисных векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и угол между ними $(\overline{e}_1\,\hat{}\,\overline{e}_2) = \varphi$, а также модуль вектора $\overline{a}$ и его направляющие углы $\alpha$ и $\beta$.

а) Построение разложения вектора по базису.

Построим четыре прямые. Проведем прямую $L_1$, на которой лежит вектор $\overline{e}_1$, прямую $L_2$, на которой лежит вектор $\overline{e}_2$. Через конец вектора $\overline{a}$ проведем прямую параллельную вектору $\overline{e}_1$ и прямую параллельную вектору $\overline{e}_2$. Эти четыре прямые высекают параллелограмм (смотрите рисунок 47). По правилу параллелограмма $\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2$, где $\overline{e}_1 \parallel \overline{a}_1 \parallel L_1$ и $\overline{e}_2 \parallel \overline{a}_2 \parallel L_2$, $\{\overline{e}_1\}$ – базис $L_1$, $\{\overline{e}_2\}$ – базис $L_2$.

Вектор $\overline{a}_1$ можно разложить по базису $\{\overline{e}_1\}$: $\overline{a}_1 = k_1 \cdot \overline{e}_1$, а вектор $\overline{a}_2$ можно разложить по базису $\{\overline{e}_2\}$: $\overline{a}_2 = k_2 \cdot \overline{e}_2$, откуда мы получаем разложение вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$: $\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 = k_1\overline{e}_1 + k_2\overline{e}_2$.

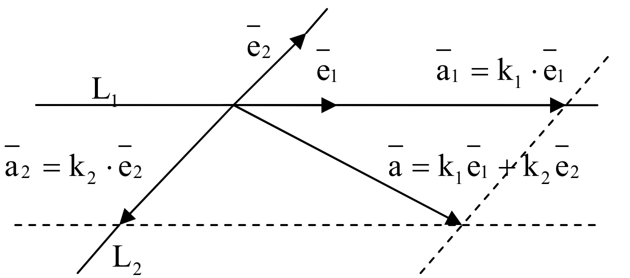



Рис. 47.

Ответ: рисунок 47.

б) Вычисление координат $(k_1, k_2)$ вектора $\bar{a}$ геометрическим способом (на примере рисунка 47).

Для вычисления координат, как в задаче 48, нам необходимо найти модули $|\bar{a}_1|$ и $|\bar{a}_2|$, зная которые легко находим координаты. Так, например, из рисунка 47 мы видим, что

$$k_1 = \frac{|\bar{a}_1|}{|\bar{e}_1|}, \; k_2 = -\frac{|\bar{a}_2|}{|\bar{e}_2|}.$$

Для вычисления модулей необходимо решить треугольник, в котором известны все углы и одна сторона. Следующий рисунок выполнен на основе предыдущего:

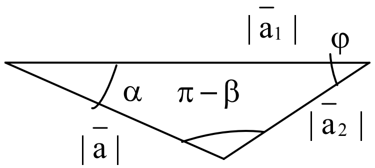



Рис. 48.

По теореме синусов $\dfrac{|\bar{a}|}{\sin\varphi} = \dfrac{|\bar{a}_1|}{\sin(\pi-\beta)} = \dfrac{|\bar{a}_2|}{\sin\alpha}$, откуда находим

$$|\bar{a}_1| = \frac{|\bar{a}|\sin\beta}{\sin\varphi}, \quad |\bar{a}_2| = \frac{|\bar{a}|\sin\alpha}{\sin\varphi}, \quad k_1 = \frac{|\bar{a}|\sin\beta}{|\bar{e}_1|\sin\varphi},$$

$$k_2 = -\frac{|\bar{a}|\sin\alpha}{|\bar{e}_2|\sin\varphi}.$$

Ответ: рисунок 48,
$(k_1, k_2)$ – координаты вектора $\bar{a}$ относительно базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, где $k_1 = \dfrac{|\bar{a}|\sin\beta}{|\bar{e}_1|\sin\varphi}$, $k_2 = -\dfrac{|\bar{a}|\sin\alpha}{|\bar{e}_2|\sin\varphi}$.



в) Вычисление координат $(k_1, k_2)$ вектора $\bar{a}$ алгебраическим способом.

Умножим вектор $\bar{e}_1$ скалярно на обе части равенства

$$\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2:$$

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{a} = \bar{e}_1 \cdot (k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2) = k_1(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + k_2(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2).$$

Здесь мы воспользовались свойством линейности скалярного произведения. Обозначим для удобства записи:

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{a} = |\bar{e}_1| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\alpha = b_1, \; \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = |\bar{e}_1|^2 = a_{11},$$

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = |\bar{e}_1| \cdot |\bar{e}_2| \cdot \cos\varphi = a_{12}.$$

Тогда получаем: $b_1 = k_1a_{11} + k_2a_{12}$, или, в более привычном виде:

$$a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = b_1.$$

Аналогичное уравнение получаем при умножении вектора $\bar{e}_2$ скалярно на уравнение $\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2$:

$$a_{21}k_1 + a_{22}k_2 = b_2,$$

где обозначено

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{a} = |\bar{e}_2| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\beta = b_2, \; \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = |\bar{e}_2| \cdot |\bar{e}_1| \cdot \cos\varphi = a_{21},$$

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = |\bar{e}_2|^2 = a_{22}.$$

В результате мы получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными $k_1, k_2$:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 = b_2 \end{cases}$$

с известными коэффициентами $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ и известными свободными членами $b_1, b_2$.

Решая полученную систему, например, по формулам Крамера, находим координаты $k_1, k_2$ вектора $\bar{a}$ относительно базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и получаем ответ.

Ответ: $\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2$, где $(k_1, k_2)$ – координаты вектора $\bar{a}$ относительно базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$:

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

**Пример.** Разложить вектор $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и найти его координаты, если $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1, |\bar{a}| = 4$, $(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = \varphi = \frac{\pi}{3}$,

$\alpha = (\bar{a} \wedge \bar{e}_1) = \beta = (\bar{a} \wedge \bar{e}_2) = \frac{5\pi}{6}$.

Решение. а) Отложим все три вектора от одной точки и построим геометрическое разложение данного вектора по данному базису:

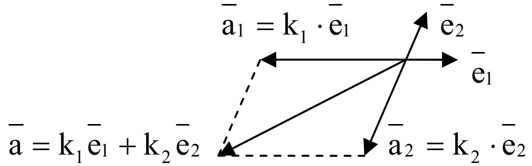



Рис. 49.

б) Координаты $k_1$ и $k_2$ находим как в задаче 48, учитывая, что $\bar{a}_1 \uparrow\downarrow \bar{e}_1$ и $\bar{a}_2 \uparrow\downarrow \bar{e}_2$

$$k_1 = -\frac{|\bar{a}_1|}{|\bar{e}_1|} = -|\bar{a}_1|, \quad k_2 = -\frac{|\bar{a}_2|}{|\bar{e}_2|} = -|\bar{a}_2|.$$



Модули векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ можно найти, решив простую геометрическую задачу. Из условий задачи следует, что параллелограмм разложения является ромбом с острым $60^o$. Действительно,

$$(\bar{a} \wedge \bar{a}_1) = \pi - (\bar{a} \wedge \bar{e}_1) = \pi - \beta = \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad (\bar{a} \wedge \bar{a}_2) = \pi - \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, диагональ параллелограмма является биссектрисой, а поэтому параллелограмм является ромбом со стороной равной $|\bar{a}_1|$, и $k_1 = k_2 = -|\bar{a}_1|$. Осталось найти боковую сторону равнобедренного треугольника с углом при вершине в $120^o$.

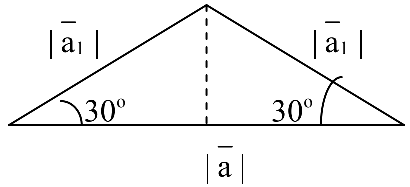



Рис. 50.

Из прямоугольного треугольника находим

$$\frac{|\bar{a}|}{2} = |\bar{a}_1|\cos 30^o, \; |\bar{a}_1| = \frac{|\bar{a}|}{2\cos 30^o} = \frac{4}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\bar{a} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\bar{e}_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\bar{e}_2.$$

в) Вычислим координаты $k_1$ и $k_2$ алгебраическим способом. Умножаем поочередно векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ скалярно на обе части равенства $\bar{a} = k_1\bar{e}_1 + k_2\bar{e}_2$:

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{a} = \bar{e}_1 \cdot (k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2) = k_1 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + k_2 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2),$$
$$\bar{e}_2 \cdot \bar{a} = \bar{e}_2 \cdot (k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2) = k_1 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + k_2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2).$$

Вычисляем скалярные произведения:

$$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = |\bar{e}_1|^2 = 1,\ \bar{e}_1 \cdot \bar{a} = |\bar{e}_1| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot 4 \cdot \cos\frac{5\pi}{6} = -2\sqrt{3},$$
$$\bar{e}_2 \cdot \bar{a} = |\bar{e}_2| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\beta = -2\sqrt{3},\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = |\bar{e}_2|^2 = 1,$$
$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = |\bar{e}_1| \cdot |\bar{e}_2| \cdot \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Подставляем в систему

$$\begin{cases} \bar{e}_1 \cdot \bar{a} = k_1 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + k_2 (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{a} = k_1 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + k_2 (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) \end{cases} : \quad \begin{cases} k_1 + \frac{1}{2} k_2 = -2\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} k_1 + k_2 = -2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Умножим второе уравнение системы на $-2$ и сложим:

$$\frac{1}{2} k_2 - 2k_2 = 2\sqrt{3} \text{ или } k_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ откуда } k_1 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\bar{a} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \bar{e}_1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \bar{e}_2$.

**Задача 50. Построить разложение вектора по произвольному базису пространства и вычислить его координаты.**

**Определение.** Базисом в пространстве называется любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

**Определение.** Разложением вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ называется равенство $\bar{a} = k_1 \cdot \bar{e}_1 + k_2 \cdot \bar{e}_2 + k_3 \cdot \bar{e}_3$, где упорядоченная тройка скаляров $(k_1, k_2, k_3)$ называется координатами вектора $\bar{a}$ относительно базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.



**Теорема.** Любой вектор пространства может быть разложен по базису и притом единственным образом.

**Определение.** Углы между данным вектором $\bar{a}$ и базисными векторами $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ называются направляющими углами вектора $\bar{a}$ и обозначаются

$$(\bar{a} \wedge \bar{e}_1) = \alpha,\ (\bar{a} \wedge \bar{e}_2) = \beta,\ (\bar{a} \wedge \bar{e}_3) = \gamma.$$

Косинусы этих углов называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$.

Решение. Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – произвольный базис пространства векторов, и пусть $\bar{a}$ произвольный вектор. Мы полагаем, что нам известны модули базисных векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, все попарные углы между ними, а также модуль вектора $\bar{a}$ и его направляющие углы.

а) Построение разложения вектора по базису.

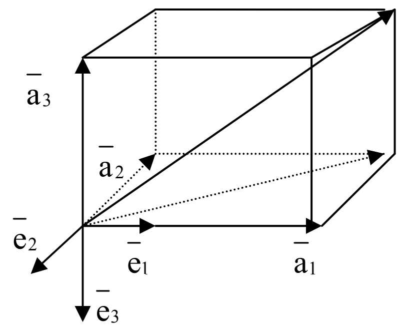



Рис. 51.

Проведем следующие геометрические построения. Отложим все три базисных вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и вектор $\bar{a}$ от одной точки и построим шесть плоскостей: плоскость, в которой лежат базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, плоскость $\bar{e}_1, \bar{e}_3$ и плоскость $\bar{e}_2, \bar{e}_3$. Далее, через конец вектора $\bar{a}$ проведем три плоскости параллельные соответствующим, только что построенным, трем плоскостям. Эти шесть плоскостей высекают параллелепипед:

По правилу сложения векторов $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3$. По построению $\bar{a}_1 \parallel \bar{e}_1$, следовательно, вектор $\bar{a}_1$ можно разложить по базису $\{\bar{e}_1\}$: $\bar{a}_1 = k_1 \cdot \bar{e}_1$, где $k_1 = \pm \dfrac{|\bar{a}_1|}{|\bar{e}_1|}$.

Аналогично,

$$\bar{a}_2 = k_2 \cdot \bar{e}_2 \text{ и } \bar{a}_3 = k_3 \cdot \bar{e}_3, \text{ где } k_2 = \pm \frac{|\bar{a}_2|}{|\bar{e}_2|},\ k_3 = \pm \frac{|\bar{a}_3|}{|\bar{e}_3|}.$$

Отсюда, $\bar{a} = k_1 \cdot \bar{e}_1 + k_2 \cdot \bar{e}_2 + k_3 \cdot \bar{e}_3$.

Ответ: рисунок 51.

б) Вычисление координат $(k_1, k_2, k_3)$ геометрическим способом. Эту задачу можно решить чисто геометрически, решая соответствующие треугольники и находя модули векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. Однако, в силу того, что существует гораздо более простой алгебраический способ вычисления координат $(k_1, k_2, k_3)$ с помощью скалярного произведения (см. ниже следующий пункт), то мы не будем здесь этим заниматься.

в) Вычисление координат $(k_1, k_2, k_3)$ алгебраическим способом. Умножим последовательно базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ на обе части равенства

$$\bar{a} = k_1 \cdot \bar{e}_1 + k_2 \cdot \bar{e}_2 + k_3 \cdot \bar{e}_3.$$



Тогда, применяя свойство линейности скалярного произведения, получаем систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $k_1, k_2, k_3$:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 \cdot \bar{a} = k_1(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + k_2(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) + k_3(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3) \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{a} = k_1(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + k_2(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) + k_3(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3) \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{a} = k_1(\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1) + k_2(\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2) + k_3(\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3) \end{cases}.$$

Вычисляя скалярные произведения, находим коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы. Решая систему, например, по формулам Крамера, находим неизвестные координаты $(k_1, k_2, k_3)$ и получаем ответ.

Ответ: $\bar{a} = k_1 \cdot \bar{e}_1 + k_2 \cdot \bar{e}_2 + k_3 \cdot \bar{e}_3$, где

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{a} & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{a} & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{a} & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 \end{vmatrix}},\quad k_2 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a} & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a} & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a} & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 \end{vmatrix}},$$

$$k_3 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{a} \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{a} \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3 \end{vmatrix}}.$$

**Пример.** Разложить вектор $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, если $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, $|\bar{a}| = 3$, $(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = \frac{\pi}{3}$, $\bar{e}_3 \perp \bar{e}_1$, $\bar{e}_3 \perp \bar{e}_2$, угол между вектором $\bar{a}$ и базисными векторами одинаковый и равен $60^o$.

Решение. Умножим последовательно базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ на обе части равенства $\bar{a} = k_1 \cdot \bar{e}_1 + k_2 \cdot \bar{e}_2 + k_3 \cdot \bar{e}_3$:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 \cdot \bar{a} = k_1(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1) + k_2(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) + k_3(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3) \\ \bar{e}_2 \cdot \bar{a} = k_1(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1) + k_2(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2) + k_3(\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3) \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{a} = k_1(\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1) + k_2(\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2) + k_3(\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3) \end{cases}.$$

Вычисляем скалярные произведения:

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = |\bar{e}_i|^2 = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_j = 0, \quad j = 1, 2, \ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \frac{1}{2},$$

$$\bar{a} \cdot \bar{e}_i = \frac{3}{2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя эти результаты в систему, получаем:

$$\begin{cases} k_1 + \frac{1}{2}k_2 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}k_1 + k_2 = \frac{3}{2} \\ k_3 = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Решая полученную систему, получаем

$$k_1 = k_2 = 1, \quad k_3 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \frac{3}{2} \cdot \bar{e}_3$.



## Глава 8. Линейные операции с векторами в произвольном базисе

### Задача 51. Линейные операции с векторами в координатной форме относительно произвольного базиса на прямой.

Решение. Пусть $\{\bar{e}\}$ – произвольный базис прямой L и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ лежат на прямой L. Пусть $\bar{a} = k_1\bar{e}$, $\bar{b} = k_2\bar{e}$, $\alpha \in R$ – произвольное число. Тогда

$$\bar{a} + \bar{b} = k_1\bar{e} + k_2\bar{e} = (k_1 + k_2)\bar{e} \text{ и } \alpha\bar{a} = (\alpha k_1)\bar{e}.$$

Аналогично, получаем:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \ \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = (\alpha k_1 + \beta k_2)\bar{e}.$$

Если векторы записать в координатной форме, то и операции сложения и умножения на число можно записать в координатной форме. Пусть $\bar{a} = k_1\bar{e} = (k_1)$, $\bar{b} = k_2\bar{e} = (k_2)$, $\alpha \in R$ – произвольное число. Тогда

$$\bar{a} + \bar{b} = (k_1) + (k_2) = (k_1 + k_2) \text{ и } \alpha\bar{a} = \alpha \cdot (k_1) = (\alpha k_1).$$

Аналогично,

$$\forall \alpha, \beta \in R, \ \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \alpha(k_1) + \beta(k_2) = (\alpha k_1 + \beta k_2).$$

Ответ: при сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении вектора на число его координата умножается на это число.

**Пример.** Пусть $\bar{a} = -3\bar{e}$, $\bar{b} = 7\bar{e}$, $\bar{c} = -5\bar{e}$. Представить вектор $\bar{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. Задача заключается в вычислении коэффициентов x и y, для которых будет верным равенство

$$x\bar{a} + y\bar{b} = \bar{c}.$$

Равные векторы имеют равные координаты относительно одного и того же базиса. Находим координаты обоих векторов, стоящих в левой и в правой части этого равенства.

Так как по условию задачи $\bar{a} = -3\bar{e} = (-3)$, $\bar{b} = 7\bar{e} = (7)$, $\bar{c} = -5\bar{e} = (-5)$, то $x\bar{a} + y\bar{b} = x(-3) + y(7) = (-3x + 7y)$ и приравнивая координаты векторов $x\bar{a} + y\bar{b}$ и $\bar{c}$, получаем $-3x + 7y = -5$. Это уравнение имеет бесконечно много решений, например, $x = 4,\ y = 1$.

Ответ: $\bar{c} = 4\bar{a} + \bar{b}$.

**Задача 52. Линейные операции с векторами в координатной форме относительно произвольного базиса на плоскости.**

Решение. Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – произвольный базис какой-нибудь плоскости $\sigma$ и векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ лежат на ней. Пусть $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$, $\bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2$, $\alpha \in R$ – произвольное число. Тогда

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2) + (b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2) =$$

$$= (a_1 + b_1)\bar{e}_1 + (a_2 + b_2)\bar{e}_2 \quad \text{и} \quad \alpha\bar{a} = (\alpha a_1)\bar{e}_1 + (\alpha a_2)\bar{e}_2.$$

Аналогично, получаем: $\forall \alpha, \beta \in R$,

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = (\alpha a_1 + \beta b_1)\bar{e}_1 + (\alpha a_2 + \beta b_2)\bar{e}_2.$$

Если векторы записать в координатной форме, то и операции сложения и умножения на число можно записать в координатной форме. Пусть

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 = (a_1, a_2),\ \bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 = (b_1, b_2),\ \alpha \in R.$$

Тогда

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$\alpha\bar{a} = \alpha \cdot (a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2).$$

Аналогично, $\forall \alpha, \beta \in R$,

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2) = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2).$$



**Замечание.** Линейные операции с векторами в координатной форме удобнее производить, когда упорядоченная пара координат вектора записывается в виде столбца:

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha\bar{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: при сложении векторов их соответствующие координаты, относительно одного и того же базиса, складываются, а при умножении вектора на число обе его координаты умножаются на это число.

**Пример.** Пусть $\bar{a} = -2\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 = (-2, 9)$, $\bar{b} = 3\bar{e}_1 - 14\bar{e}_2 = (3, -14)$, $\bar{c} = -5\bar{e}_1 - 19\bar{e}_2 = (-5, -19)$. Найти координаты вектора $\bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c}$ относительно базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.

Решение.

$$\bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -14 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -5 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 + 15 \\ 9 - 28 + 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 38 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c} = (19, 38)$.

**Задача 53. Линейные операции с векторами в координатной форме относительно произвольного базиса пространства.**

Решение. Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – произвольный базис, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – произвольные векторы, $\alpha \in R$ – произвольное число. Пусть, далее,

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3,\ \bar{b} = b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3.$$

Тогда

$$\bar{a}+\bar{b}=(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)+(b_1\bar{e}_1+b_2\bar{e}_2+b_3\bar{e}_3)=$$
$$=(a_1+b_1)\bar{e}_1+(a_2+b_2)\bar{e}_2+(a_3+b_3)\bar{e}_3,$$
$$\alpha\bar{a}=\alpha(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)=(\alpha a_1)\bar{e}_1+(\alpha a_2)\bar{e}_2+(\alpha a_3)\bar{e}_3.$$

Если векторы записать в координатной форме, то и операции сложения и умножения на число можно записать в координатной форме. При этом, линейные операции с векторами в координатной форме удобнее производить, когда упорядоченная тройка координат вектора записывается в виде столбца:

$$\bar{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \bar{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

$$\bar{a}+\bar{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix},\qquad \alpha\bar{a}=\alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1\\\alpha a_2\\\alpha a_3\end{pmatrix},$$

$$\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}=\alpha\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1+\beta b_1\\\alpha a_2+\beta b_2\\\alpha a_3+\beta b_3\end{pmatrix}.$$

Ответ: при сложении векторов их соответствующие координаты относительно одного и того же базиса, складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

**Пример.** Пусть

$$\bar{a}=\bar{e}_1-2\bar{e}_2+5\bar{e}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix},\qquad \bar{b}=-\bar{e}_1+4\bar{e}_2-2\bar{e}_3=\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}.$$



Найти координаты вектора $3\bar{a}-2\bar{b}$ относительно базиса $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$.

Решение.

$$3\bar{a}-2\bar{b}=3\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2\\-6-8\\15+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-14\\19\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\bar{a}+2\bar{b}=(5,-14,19)$.

## Глава 9. Координаты вектора в ортонормированном базисе

**Задача 54. Построить нормированный базис на прямой и найти координату вектора данной прямой относительно построенного базиса.**

**Определение.** Нормированным базисом на прямой называется любой вектор единичной длины,, лежащий на данной прямой.

Решение. Согласно определению, для построения нормированного базиса данной прямой достаточно отложить от любой ее точки вектор единичной длины, так, чтобы его конец также лежал на этой прямой:

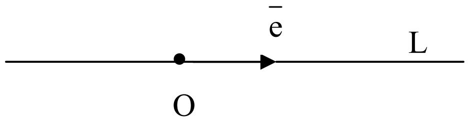



Рис. 52.

Здесь, $|\bar{e}|=1$, $\{\bar{e}\}$ – нормированный базис прямой L.

Пусть теперь $\bar{a}$ – произвольный вектор этой прямой. Отложим его от точки O и найдем координату вектора $\bar{a}$ относительно данного базиса $\{\bar{e}\}$:

$$\bar{a}=k\cdot\bar{e},$$

где $|k|=\dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{e}|}=|\bar{a}|$. Таким образом, координата k вектора $\bar{a}$ относительно нормированного базиса $\{\bar{e}\}$ по абсолютной величине равна модулю вектора $\bar{a}$ и $k>0$, если вектор $\bar{a}$ сонаправлен с базисным вектором $\bar{e}$, и $k<0$ в противном случае.



**Определение.** Вектор единичной длины, сонаправленный с координатной осью Ox называется ортом оси Ox и обозначается $\bar{i}$.

Как правило, вектор $\bar{i}$ откладывают от начала координат:

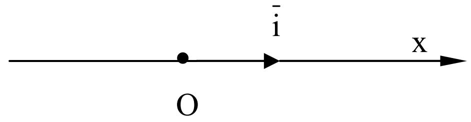



Рис. 53.

Очень важным является тот факт, что координата любого вектора относительно нормированного базиса $\{\bar{i}\}$ совпадает с его декартовой координатой на этой оси, т.е. если $\bar{a}=k\cdot\bar{i}$, то $a_x=\text{пр}_x\bar{a}=k$ и координатная запись вектора $\bar{a}=(k)$ является также и сокращением записи $\bar{a}=k\cdot\bar{i}$.

**Пример.** Пусть A(29), B(–7) – точки на координатной оси Ox. Найдите координату вектора $\overline{AB}$ относительно нормированного базиса этой прямой: а) $\{\bar{i}\}$; б) $\{-\bar{i}\}$.

Решение. Находим декартовую координату вектора $\overline{AB}$: $\overline{AB}=(x_B-x_A)=(-36)$. Следовательно, $\overline{AB}=(-36)\cdot\bar{i}$.

Ответ: а) $\overline{AB}=(-36)\cdot\bar{i}$ и координата вектора $\overline{AB}$ относительно базиса $\{\bar{i}\}$ равна $-36$;

б) $\overline{AB}=36\cdot(-\bar{i})$ и координата вектора $\overline{AB}$ относительно базиса $\{-\bar{i}\}$ равна $36$.

**Задача 55. Построить ортонормированный базис плоскости и найти координаты вектора плоскости относительно построенного базиса.**

**Определение.** Базис плоскости $\{\bar e_1, \bar e_2\}$ называется ортонормированным, если базисные векторы имеют единичную длину и угол между ними равен $90^\circ$:

$$|\bar e_1| = |\bar e_2| = 1, \quad (\bar e_1 \wedge \bar e_2) = 90^\circ.$$

**Определение.** Говорят, что упорядоченная пара неколлинеарных векторов, отложенных от одной точки, имеет правую ориентацию, если кратчайший поворот первого вектора ко второму (вокруг их общего начала) происходит против часовой стрелки. В противном случае, говорят, что векторы имеют левую ориентацию.

**Замечание.** Как правило, ортонормированный базис выбирают с правой ориентацией.

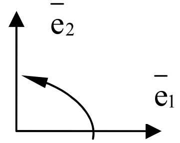



Рис. 54.

Решение. Пусть $\bar a$ – произвольный вектор плоскости и $\bar a = k_1 \bar e_1 + k_2 \bar e_2$ – его разложение по ортонормированному базису $\{\bar e_1, \bar e_2\}$. Поставим задачу вычисления его координат $(k_1, k_2)$. Эту задачу можно решить двумя способами.

а) Можно действовать также как в задаче 49, но при этом нам должны быть известны модуль вектора $\bar a$ и его направляющие косинусы.

Умножим вектор $\bar e_1$ скалярно на обе части равенства



$$\bar a = k_1 \bar e_1 + k_2 \bar e_2:$$

$$\bar e_1 \cdot \bar a = \bar e_1 \cdot (k_1 \bar e_1 + k_2 \bar e_2) = k_1 (\bar e_1 \cdot \bar e_1) + k_2 (\bar e_1 \cdot \bar e_2).$$

Здесь мы воспользовались свойством линейности скалярного произведения.

Так как базис ортонормированный, то

$$\bar e_1 \cdot \bar e_1 = |\bar e_1|^2 = 1, \quad \bar e_1 \cdot \bar e_2 = |\bar e_1| \cdot |\bar e_2| \cdot \cos 90^\circ = 0,$$

$$k_1 = \bar e_1 \cdot \bar a = |\bar a| \cdot \cos\alpha = \text{пр}_{\bar e_1} \bar a.$$

Аналогично находим вторую координату

$$k_2 = |\bar a| \cdot \cos\beta = \text{пр}_{\bar e_2} \bar a.$$

Таким образом, разложение вектора $\bar a$ по ортонормированному базису $\{\bar e_1, \bar e_2\}$ имеет вид:

$$\bar a = k_1 \bar e_1 + k_2 \bar e_2 = (k_1, k_2) = (|\bar a| \cos\alpha, |\bar a| \cos\beta) =$$

$$= |\bar a| (\cos\alpha, \cos\beta) \quad \text{или} \quad \bar a = (\text{пр}_{\bar e_1} \bar a, \text{пр}_{\bar e_2} \bar a)$$

Ответ: $\bar a = |\bar a| (\cos\alpha, \cos\beta)$ или $\bar a = (\text{пр}_{\bar e_1} \bar a, \text{пр}_{\bar e_2} \bar a)$, где $\alpha = (\bar a \wedge \bar e_1)$, $\beta = (\bar a \wedge \bar e_2)$ – направляющие углы вектора $\bar a$.

б) Второй способ заключается во введении на плоскости правоориентированной ПДСК Oxy, так, чтобы базисные векторы служили ортами координатных осей, смотрите рисунок 55. В этом случае принято обозначение

$$\bar e_1 = \bar i \text{ – орт оси Ox}, \quad \bar e_2 = \bar j \text{ – орт оси Oy}.$$

В этом случае, направляющие углы вектора $\bar a$ совпадают с углами между вектором и осями координат, а координаты вектора $\bar a$ относительно ортонормированного базиса $\{\bar i, \bar j\}$ совпадают с декартовыми координатами вектора $\bar a$, т.е. с его проекциями на координатные оси:

$$\bar a = (\text{пр}_x \bar a, \text{пр}_y \bar a) = (\text{пр}_x \bar a) \cdot \bar i + (\text{пр}_y \bar a) \cdot \bar j.$$

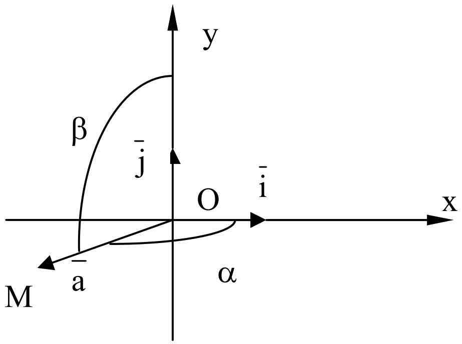



Рис. 55.

Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно найти декартовые координаты данного вектора.
Ответ: $\bar{a} = (\text{пр}_x\bar{a}, \text{пр}_y\bar{a}) = (\text{пр}_x\bar{a})\cdot\bar{i} + (\text{пр}_y\bar{a})\cdot\bar{j}$.

**Замечание.** Из решения задачи следует, что для построения ортонормированного базиса и вычисления координат вектора относительно этого базиса достаточно построить правоориентированную ПДСК на плоскости Oxy, отметить орты координатных осей $\bar{i}$ и $\bar{j}$ и вычислить декартовые координаты данного вектора. Для этого необходимо знать либо модуль вектора и его направляющие косинусы, либо координаты начала и конца вектора. Т.е. эта задача сводится к уже решенным ранее задачам. Смотри главу 6, задачи 39 и 40.

**Пример.** В треугольнике ABC известен угол A и стороны $AB = c$, $AC = b$. Найти длину медианы $m_A$, проведенную из вершины A.
Решение.



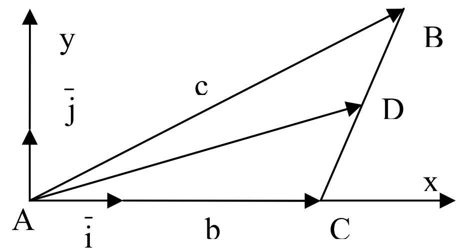



Рис. 56.

Введем ПДСК Oxy, как на рисунке 56, и найдем декартовые координаты вектора $\overline{AD}$, а затем и длину медианы

$$m_A = |\overline{AD}|.$$

Легко видеть, что $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$. Находим декартовые координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\text{пр}_x\overline{AB} = c\cdot\cos A, \quad \text{пр}_y\overline{AB} = c\cdot\sin A, \quad \text{пр}_x\overline{AC} = b,$$

$$\text{пр}_y\overline{AC} = 0, \quad \overline{AB} = (c\cdot\cos A, c\cdot\sin A), \quad \overline{AC} = (b, 0),$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}(b + c\cdot\cos A, c\cdot\sin A) \text{ и}$$

$$m_A = |\overline{AD}| = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2bc\cdot\cos A + c^2}.$$

Ответ: $m_A = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2bc\cdot\cos A + c^2}$.

**Задача 56. Построить ортонормированный базис пространства и найти координаты произвольного вектора относительно построенного базиса.**

Решение. Задача решается аналогично предыдущей. Строим правоориентированную ПДСК Oxyz, орты координатных осей $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ образуют правоориентированный ортонормированный базис. Координаты любого вектора $\bar{a}$

относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ совпадают с декартовыми координатами вектора $\bar{a}$:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} = (a_x, a_y, a_z), \quad a_x = пр_x \bar{a} = |\bar{a}| \cos\alpha,$$

$$a_y = пр_y \bar{a} = |\bar{a}| \cos\beta, \quad a_z = пр_z \bar{a} = |\bar{a}| \cos\gamma.$$

Таким образом, для решения задачи необходимо знать либо модуль вектора и его направляющие косинусы, либо координаты начала и конца вектора. Т.е. эта задача сводится к уже решенным ранее задачам. Смотрите главу 6, задачи 43 и 44.

**Пример.** В основании треугольной пирамиды OABC лежит прямоугольный треугольник OAB, $OA = OB = OC = a$, ребро OC перпендикулярно плоскости основания. Найдите длины отрезков OM и MC, где M – центр тяжести грани ABC.

Решение. Вводим ПДСК как на рисунке 57, $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ – ортонормированный базис.

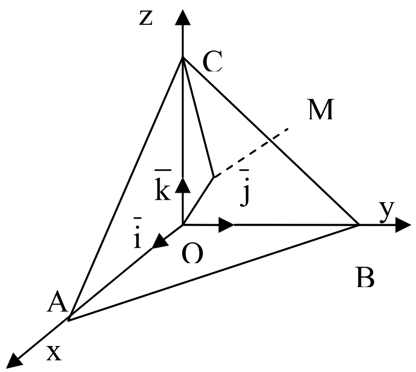



Рис. 57.

Используя условия задачи, находим координаты вершин пирамиды:

A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; 0; a).



Воспользуемся задачей 9 для вычисления координат точки M:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{a+0+0}{3} = \frac{a}{3}, \; y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{a}{3},$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{a}{3}.$$

Находим координаты векторов $\overline{OM}$ и $\overline{CM}$:

$$\overline{OM} = (x_M, y_M, z_M) = (\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3}) = \frac{a}{3}(1; 1; 1),$$

$$\overline{CM} = (x_M - x_C, y_M - y_C, z_M - z_C) = \frac{a}{3}(1; 1; -2).$$

Отсюда находим искомые расстояния:

$$OM = |\overline{OM}| = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad CM = |\overline{CM}| = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Ответ: $OM = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $CM = \frac{a}{3}\sqrt{6}$.

**Задача 57. Найти скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно ортонормированного базиса.**

Решение. Пусть $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ – ортонормированный базис,

$$\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k} = (x_1, x_2, x_3), \ \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

– два вектора, заданные своими координатами относительно данного ортонормированного базиса.

Заметим сразу же, что если ортонормированный базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ совмещен с ПДСК Oxyz, то координаты вектора относительно ортонормированного базиса совпадают с его декартовыми координатами. Мы будем считать, что так это и есть.

Скалярное произведение данных векторов можно вычислить по формуле:

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 .$$

Аналогичная формула справедлива для векторов, заданных в координатной форме относительно ортонормированного базиса на плоскости $\{\bar{i}, \bar{j}\}$.

Если $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2)$, то

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 .$$

Если $\bar{x} = x_1\bar{i} = (x_1)$, $\bar{y} = (y_1)$ – координаты векторов на прямой относительно нормированного базиса $\{\bar{i}\}$, то их скалярное произведение равно:

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = x_1y_1 .$$

**Пример 1.** Найти скалярное произведение векторов:

$$\bar{x} = -3\bar{i} + 6\bar{j} - 8\bar{k}, \quad \bar{y} = 5\bar{i} + 9\bar{j} + 6\bar{k}$$



Решение. $\bar{x}\cdot\bar{y} = (-3)\cdot 5 + 6\cdot 9 + (-8)\cdot 6 = -15 + 54 - 48 = -9$.

Ответ: $-9$.

**Пример 2.** На координатной плоскости Oxy даны вершины треугольника: A(–1; 9), B(7; –3), C(–4; –5). Найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

Решение. Сначала находим координаты нужных векторов: $\overline{AB} = (8; -12)$, $\overline{AC} = (-3; -14)$. Тогда

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 8\cdot(-3) + (-12)\cdot(-14) = -24 + 168 = 144 .$$

Ответ: $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = 144$ .

**Пример 3.** На координатной оси Ox даны точки: A(–1), B(–17), C(14). Найти скалярное произведение векторов $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

Решение. Относительно базиса $\{\bar{i}\}$ на оси Ox координата вектора $\overline{AB} = (-16)$, вектора $\overline{AC} = (15)$, их скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = (-16)\cdot 15 = -240$.

Ответ: –240.

**Задача 58. Найти векторное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно ортонормированного базиса.**

Решение. Пусть $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ – ортонормированный базис,

$$\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k} = (x_1, x_2, x_3), \quad \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

– два вектора, заданные своими координатами относительно данного ортонормированного базиса. Тогда

$$\bar{x}\times\bar{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\cdot\bar{k} .$$

Пусть векторы заданы в координатной форме относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ на плоскости:

$$\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} = (x_1, x_2), \quad \bar{y} = (y_1, y_2).$$

Тогда, для вычисления их векторного произведения, можно пользоваться этой же формулой, полагая равной нулю их третью координату:

$$\bar{x} = x_1 \cdot \bar{i} + x_2 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} = (x_1, x_2, 0), \qquad \bar{y} = (y_1, y_2, 0),$$

$$\bar{x} \times \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}.$$

Заметим, что из определения векторного произведения следует, что векторное произведение векторов, лежащих на одной прямой, равно нулевому вектору, так, что выписывать для этого случая формулу их векторного произведения не имеет смысла.

**Пример.** На координатной плоскости Oxy даны вершины треугольника: A(–1; 9), B(7; –3), C(–4; –5). Найти векторное произведение векторов $\overline{AB} \times \overline{AC}$.

Решение. Вычисляем координаты векторов $\overline{AB} = (8; -12)$, $\overline{AC} = (-3; -14)$ и вычисляем их векторное произведение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 8 & -12 & 0 \\ -3 & -14 & 0 \end{vmatrix} = -148\bar{k}.$$

Ответ: $(0; 0; -148)$.

**Задача 59. Найти смешанное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно ортонормированного базиса.**



Решение. Пусть

$$\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}, \quad \bar{y} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}, \quad \bar{z} = z_1\bar{i} + z_2\bar{j} + z_3\bar{k}$$

– три произвольных вектора. Тогда

$$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Так как смешанное произведение компланарных векторов равно нулю, то не имеет смысла рассматривать смешанное произведение векторов лежащих на одной плоскости или на одной прямой.

**Пример.** В координатном пространстве Oxyz даны вершины треугольной пирамиды: A(0; 1; 1), B(1; 0; 1), C(1; 2; 0), D(1; –1; –1). Вычислить смешанное произведение $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

Решение. Находим координаты векторов:

$$\overline{AB} = (1; -1; 0), \quad \overline{AC} = (1; 1; -1), \quad \overline{AD} = (1; -2; -2) \quad \text{и}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

Ответ: –1.

## Глава 11. Применение скалярного произведения векторов

**Задача 60. Найти модуль, орт и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно ортонормированного базиса.**

Решение. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$. Найдем его скалярный квадрат. По формуле скалярного произведения векторов в координатной форме относительно ортонормированного базиса, находим:

$$\bar{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Отсюда, по свойствам скалярного произведения:

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Аналогичные формулы справедливы для вектора плоскости $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j}$ или прямой $\bar{x} = x_1\bar{i}$:

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{или} \quad |\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2} = \sqrt{x_1^2} = |x_1|.$$

Орт вектора: $\bar{x}^o = \dfrac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \dfrac{x_1}{|\bar{x}|}\cdot\bar{i} + \dfrac{x_2}{|\bar{x}|}\cdot\bar{j} + \dfrac{x_3}{|\bar{x}|}\cdot\bar{k}$.

Аналогично находится орт вектора плоскости или прямой:

$$\bar{x}^o = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \frac{x_1}{|\bar{x}|}\cdot\bar{i} + \frac{x_2}{|\bar{x}|}\cdot\bar{j} \quad \text{или} \quad \bar{x}^o = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = \frac{x_1}{|\bar{x}|}\cdot\bar{i} = \frac{x_1}{|x_1|}\cdot\bar{i}.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$:

$$a_x = \text{пр}_x\bar{a} = |\bar{a}|\cos\alpha, \quad a_y = \text{пр}_y\bar{a} = |\bar{a}|\cos\beta,$$

$$a_z = \text{пр}_z\bar{a} = |\bar{a}|\cos\gamma.$$

Откуда,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$



Так как декартовые координаты вектора совпадают с координатами вектора относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, то для вектора $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$ имеем:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\bar{x}|}, \quad \cos\beta = \frac{x_2}{|\bar{x}|}, \quad \cos\gamma = \frac{x_3}{|\bar{x}|}.$$

Тогда орт вектора $\bar{x}$ можно записать в виде:

$$\bar{x}^o = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma).$$

Аналогичные формулы имеют место для вектора плоскости и прямой.

**Пример.** Найти модуль, орт и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, если A(4; 20; 11), B(–2; 13; 17).

Решение. Находим координаты вектора $\overline{AB}$ и его модуль:

$$\overline{AB} = (-6; -7; 6), \ |\overline{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2 + 6^2} = \sqrt{121} = 11.$$

Тогда

$$\overline{AB}^o = \left(\frac{-6}{11}; \frac{-7}{11}; \frac{6}{11}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \ \cos\alpha = -\frac{6}{11},$$

$$\cos\beta = -\frac{7}{11}, \ \cos\gamma = \frac{6}{11}.$$

Ответ: $|\overline{AB}| = 11$, $\overline{AB}^o = \left(\dfrac{-6}{11}; \dfrac{-7}{11}; \dfrac{6}{11}\right)$, $\cos\alpha = -\dfrac{6}{11}$, $\cos\beta = -\dfrac{7}{11}$, $\cos\gamma = \dfrac{6}{11}$.

**Задача 61. Найти угол между векторами, заданными в координатной форме относительно ортонормированного базиса.**

Решение. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$, $\bar{y} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$.

Из определения скалярного произведения следует

$$\cos(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}.$$

Находим скалярное произведение и их модули как в задачах 37 и 40, и, подставляя в предыдущую формулу, получаем:

$$(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Эта формула остается справедливой и для векторов на плоскости: $\bar{x} = x_1 \bar{i} + x_2 \bar{j}$, $\bar{y} = y_1 \bar{i} + y_2 \bar{j}$,

$$(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}.$$

Эта формула остается верной и для векторов на прямой:

$$\bar{x} = x_1 \bar{i}, \quad \bar{y} = y_1 \bar{i}, \quad (\bar{x} \wedge \bar{y}) = \arccos \frac{x_1 y_1}{\sqrt{x_1^2} \cdot \sqrt{y_1^2}} = \arccos \frac{x_1 y_1}{|x_1 y_1|}.$$

**Пример.** Найти угол между векторами $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$.

Решение.

$$(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \arccos\left(\frac{1+2-4}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1+4}}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{3\sqrt{6}}\right).$$

Ответ: $(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \arccos\left(\dfrac{-1}{3\sqrt{6}}\right)$.

**Задача 62. Определить, являются ли два вектора, заданные в координатной форме относительно ортонормированного базиса, ортогональными.**

Решение. Из определения скалярного произведения векторов следует, что два ненулевых вектора ортогональны



тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Пусть

$$\bar{x} = x_1 \bar{i} + x_2 \bar{j} + x_3 \bar{k}, \quad \bar{y} = y_1 \bar{i} + y_2 \bar{j} + y_3 \bar{k}.$$

Тогда

$$\bar{x} \perp \bar{y} \iff x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0.$$

**Пример.** Докажите, что треугольник ABC прямоугольный, если A(5; –3; 1), B( 1; –2; 6), C(1; 1; –3).

Решение. $\overline{AB} = (-4; 1; 5)$, $\overline{AC} = (-4; 4; -4)$, $\overline{BC} = (0; 3; -9)$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 16 + 4 - 20 = 0$, т.е. $\angle BAC = 90^\circ$, ч.т.д.

**Задача 63. Найти проекцию вектора на вектор, если оба вектора заданы в координатной форме относительно ортонормированного базиса, и найти, в частности, проекции вектора на координатные оси.**

Решение. Из простейших свойств скалярного произведения следует, что

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b}.$$

Отсюда,

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Пусть $\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$, $\bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}$. Тогда

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

По «основной теореме векторной алгебры» координаты вектора относительно базиса из ортов координатных осей $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ПДСК Oxyz, совпадают с проекциями вектора на координатные оси. Этот же результат следует из предыдущего равенства, если мы учтем, что

$\bar{i} = 1\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$, $\bar{j} = 0\cdot\bar{i} + 1\cdot\bar{j} + 0\cdot\bar{k}$, $\bar{k} = 0\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + 1\cdot\bar{k}$:

$$пр_{\bar{i}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{i}}{|\bar{i}|} = \frac{a_1}{1} = a_1,\quad пр_{\bar{j}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{j}}{|\bar{j}|} = a_2,\quad пр_{\bar{k}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{k}}{|\bar{k}|} = a_3.$$

Осталось заметить, что

$$пр_x\bar{a} = пр_{\bar{i}}\bar{a},\ пр_y\bar{a} = пр_{\bar{j}}\bar{a},\ пр_z\bar{a} = пр_{\bar{k}}\bar{a},$$

откуда следует, что

$$пр_x\bar{a} = a_1,\ пр_y\bar{a} = a_2,\ пр_z\bar{a} = a_3.$$

Ответ: $пр_{\bar{b}}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$, $пр_x\bar{a} = a_1$,

$пр_y\bar{a} = a_2$, $пр_z\bar{a} = a_3$.

**Пример.** В прямоугольном треугольнике ABC, где A(5; –3; 1), B( 1; –2; 6), C(1; 1; –3), найдите проекции катетов на гипотенузу.

Решение. Легко устанавливаем (см. пример предыдущей задачи), что $\angle BAC = 90^{\circ}$. Пусть AD – высота, опущенная из прямого угла на гипотенузу, смотрите рисунок 58.

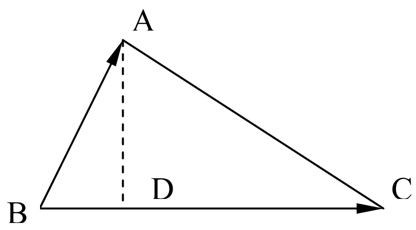



Рис. 58.

Требуется найти BD и CD. Из определения проекции вектора на вектор следует, что

$$BD = пр_{\overline{BC}}\overline{BA} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}{|\overline{BC}|},\quad CD = пр_{\overline{CB}}\overline{CA} = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CB}|}.$$



Находим: $\overline{BA} = (4; -1; -5)$, $\overline{BC} = (0; 3; -9)$, $|\overline{BC}| = 3\sqrt{10}$,

$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -3 + 45 = 42,\ BD = \frac{14}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда, $CD = BC - BD = 3\sqrt{10} - \dfrac{14}{\sqrt{10}} = \dfrac{16}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\dfrac{14}{\sqrt{10}}$, $\dfrac{16}{\sqrt{10}}$.

**Задача 64. Найти работу, производимую вектором силы вдоль вектора перемещения материальной точки, если оба вектора заданы в координатной форме относительно ортонормированного базиса.**

Решение. Работа равна скалярному произведению векторов силы и перемещения: $A = \bar{F}\cdot\bar{s}$.

**Пример.** Какую работу производит сила $\bar{F} = (1; -1; 3)$ при перемещении материальной точки из точки A(2; –3; –1) в точку B(4; –7; 11)?

Решение. $\overline{AB} = (2; -4; 12)$, $A = \bar{F}\cdot\overline{AB} = 2 + 4 + 33 = 39$.

Ответ: 39.

## Глава 12. Применение векторного произведения векторов

**Задача 65. Найти синус угла между двумя векторами, заданными в координатной форме.**

Решение. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$, $\bar{y} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$.
Из определения векторного произведения следует

$$\sin(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \frac{|\bar{x} \times \bar{y}|}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}.$$

Находим векторное произведение векторов и их модули как в задачах 58 и 60, и, подставляя в предыдущую формулу, получаем

$$\sin(\bar{x} \wedge \bar{y}) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

**Пример.** Найти синус угла между векторами
$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j}$.

Решение. $|\bar{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $|\bar{b}| = \sqrt{2}$,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}, \quad |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

$$\sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

**Задача 66. Определить, являются ли два вектора, заданные в координатной форме, коллинеарными.**



Решение. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$, $\bar{y} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$.
Из простейших свойств векторного произведения следует, что

$$\bar{x} \parallel \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} \times \bar{y} = \bar{0} \quad \text{или} \quad \bar{x} \parallel \bar{y} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \bar{0}.$$

**Пример.** Определить, коллинеарные ли векторы

$$\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}, \quad \bar{b} = -3\bar{i} + 6\bar{j} - 12\bar{k}.$$

Решение.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & -12 \end{vmatrix} = 0 \cdot \bar{i} - 0 \cdot \bar{j} - 0 \cdot \bar{k} = \bar{0}.$$

Ответ: векторы коллинеарны.

**Задача 67. Найти координаты вектора, перпендикулярного двум неколлинеарным векторам, заданными в координатной форме.**

Решение. Пусть $\bar{x} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$, $\bar{y} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$.
Из определения векторного произведения следует, что $\bar{x} \times \bar{y} \perp \bar{x}$ и $\bar{x} \times \bar{y} \perp \bar{y}$. Так как по условию $\bar{x} \nparallel \bar{y}$, то $\bar{x} \times \bar{y} \neq \bar{0}$.

Ответ: $\bar{x} \times \bar{y}$.

**Пример.** Найти вектор перпендикулярный векторам

$$\bar{a} = -5\bar{i} + 6\bar{j} + 7\bar{k} \text{ и } \bar{b} = 3\bar{i} + 8\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Решение. $$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = -80\bar{i} + \bar{j} - 58\bar{k}.$$

Ответ: $-80\bar{i} + \bar{j} - 58\bar{k}$.

**Задача 68. Найти двугранный угол между гранями треугольной пирамиды, если известны координаты его вершин.**

Решение. Пусть $A_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ – координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найдем двугранный угол при ребре $A_1A_2$. Этот угол равен углу между плоскостями граней $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_4$.

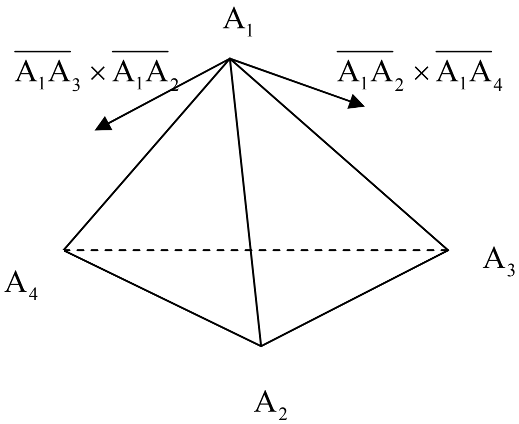



Рис. 59.

Угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами. Остальное видно из рисунка.

Ответ: $(A_1A_2A_3 \wedge A_1A_2A_4) = (\overline{A_1A_3} \times \overline{A_1A_2} \wedge \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_4})$.

**Пример.** Найти двугранный угол между гранями правильного тетраэдра.

Решение. Пусть ABCD правильный тетраэдр. Искомый угол не зависит от величины ребра пирамиды. Пусть ребро равно 1. Введем ПДСК Oxyz. Начало координат поместим в центре основания ABC, ось абсцисс направим параллельно BC:



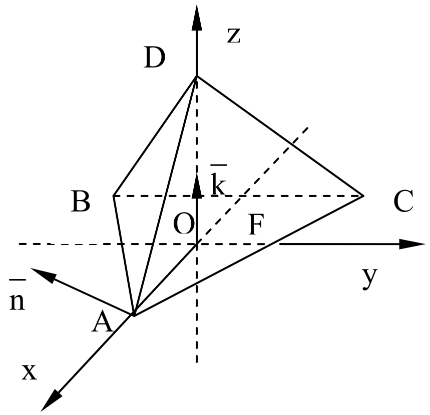



Рис. 60.

Найдем координаты вершин пирамиды. Высота в правильном треугольнике со стороной 1 равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно,

$$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad OF = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$OD = \sqrt{1 - AO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда, $A(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0)$, $B(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}; 0)$, $C(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2}; 0)$,

$$D(0; 0; \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

Находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0), \quad \overline{AD} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

Находим вектор $\overline{n}$ перпендикулярный грани ABD:

$$\overline{n}=\overline{AD}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Ясно, что орт оси Oz, вектор $\overline{k}$ перпендикулярен грани ABC. Поэтому, угол между гранями ABC и ABD равен углу между векторами $\overline{n}$ и $\overline{k}=(0,0,1)$:

$$(ABC\ \hat{}\ ABD)=(\overline{n}\ \hat{}\ \overline{k})=\arccos\frac{\overline{n}\cdot\overline{k}}{|\overline{n}|\cdot|\overline{k}|}=$$

$$=\arccos\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}}=\arccos\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$.

**Задача 69. Найти площадь треугольника, если известны координаты его вершин.**

Решение. Следует из определения векторного произведения.

Ответ: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|$.

**Пример.** Найти площадь треугольника, если его вершины имеют координаты: A(1; –1; 2), B(–1; 3; –4), C(–3; 6; –8).

Решение. $\overline{AB}=(-2;4;-6)$, $\overline{AC}=(-4;7;-10)$,

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & 4 & -6\\ -4 & 7 & -10\end{vmatrix}=(2;4;2),$$

$$2S_{\Delta ABC}=|\overline{AB}\times\overline{AC}|=2\sqrt{1+4+1}=2\sqrt{6}.$$

Ответ: $S_{\Delta ABC}=\sqrt{6}$.

**Задача 70. Определить момент силы относительно данной точки.**

Решение. Пусть $\overline{F}=\overline{AB}$ – вектор силы, приложенный к точке A, и пусть C – произвольная точка.

В механике моментом силы $\overline{F}$ относительно точки C называется вектор $\overline{M}$ равный векторному произведению вектора $\overline{CA}$ на вектор силы $\overline{F}=\overline{AB}$:

$$\overline{M}=\overline{CA}\times\overline{F}.$$

Величина момента равна величине силы на плечо h

$$M=F\cdot h.$$

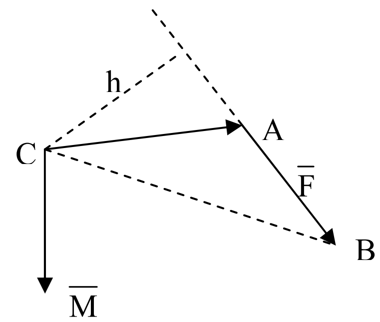



Рис. 61.

**Пример.** Пусть к точке A(–2; 1; –6) приложена сила $\overline{F}=(3;-5;1)$. Найти момент этой силы и его величину относительно начала координат.

Решение. $\overline{M} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 1 & -6 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = (-29; -16; 7)$.

Ответ: $\overline{M} = (-29; -16; 7)$, $M = \sqrt{29^2 + 16^2 + 7^2} = \sqrt{1146}$.

**Задача 71. Найти линейную скорость точки тела, вращающегося вокруг оси с заданной угловой скоростью.**

Решение.

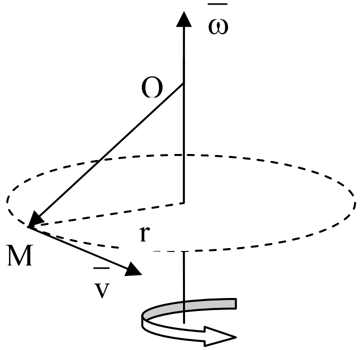



Рис. 62.

Пусть M точка тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью $\overline{\omega}$, O – произвольная точка этой оси, $\overline{v}$ – вектор линейной скорости точки M. Тогда $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{OM}$. Величина линейной скорости

$$v = \omega \cdot r = |\overline{\omega}| \cdot |\overline{OM}| \cdot \sin(\overline{\omega} \,\hat{,}\, \overline{OM}).$$

**Пример.** Пусть правильный тетраэдр с ребром равным 1 м вращается вокруг своей высоты, как вокруг оси, с угловой скоростью 2 об/мин. Найдите линейную скорость центра тяжести боковой грани.

Решение. Введем ПДСК как в примере задачи 48. Пусть тетраэдр вращается вокруг оси Oz. Угловая скорость



$\omega = 4\pi$ радиан/мин, вектор угловой скорости равен $\overline{\omega} = 4\pi\overline{k} = (0; 0; 4\pi)$.

Обозначим через M центр тяжести боковой грани ABD.

Так как координаты ее вершин уже вычислены:

$$A(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0), \quad B(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}; 0), \quad D(0; 0; \sqrt{\frac{2}{3}}),$$

то легко находим координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_D}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}) = \frac{1}{6\sqrt{3}},$$

$$y_M = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}, \quad z_M = \frac{1}{3}(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Вычисляем вектор линейной скорости точки M:

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{OM} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 4\pi \\ \frac{1}{6\sqrt{3}} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = (\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}; 0).$$

Вычисляем величину линейной скорости:

$$v = |\overline{v}| = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} |(\sqrt{3}; 1; 0)| = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \text{ м/мин} \quad \text{или} \quad v = \frac{2\pi}{25\sqrt{3}} \text{ км/ч}.$$

Ответ: $v = \frac{2\pi}{25\sqrt{3}} \approx 0{,}15$ км/ч.

## Глава 13. Применение смешанного произведения векторов

**Задача 72. Определить, компланарны ли три вектора, заданные в координатной форме.**

Решение. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

**Пример.** Определить, компланарны ли векторы

$$\bar{a} = (1; -3; -2),\ \bar{b} = (0; 1; -1),\ \bar{c} = (3; 2; -1)\ ?$$

Решение. Вычисляем смешанное произведение

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 15 = 16 .$$

Ответ: нет.

**Задача 73. Определить ориентацию трех некомпланарных векторов, заданных в координатной форме.**

Решение. Данная тройка векторов имеет правую ориентацию, если их смешанное произведение положительно и левую в противном случае.

**Пример.** Определить ориентацию векторов

$$\bar{a} = (1; -3; -2),\ \bar{b} = (0; 1; -1),\ \bar{c} = (3; 2; -1) .$$

Решение. Вычисляем смешанное произведение

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 15 = 16 .$$

Ответ: правая.



**Задача 74. Вычислить объем треугольной пирамиды, если известны координаты его вершин.**

Решение. Объем треугольной пирамиды SABC равен

$$V = \frac{1}{6} | \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AS} | .$$

**Пример.** Вычислить объем треугольной пирамиды ABCD, если A(–9, –1; 4), B(–6; –4; 1), C(–5; –2; 2), D(7; 3; 2).

Решение. $\overline{AB} = (3; -3; -3) = 3(1; -1; -1)$, $\overline{AC} = (4; -1; -2)$, $\overline{AD} = (16; 4; -2) = 2(8; 2; -1)$,

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = 6\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 8 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

Прибавим первый столбец ко второму и к третьему:

$$= 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 6(21 - 20) = 6 .$$

Ответ: $V_{ABCD} = 1$.

**Задача 75. Вычислить высоту треугольной пирамиды, если известны координаты его вершин.**

Решение. Пусть H – высота, опущенная из вершины S треугольной пирамиды SABC на плоскость основания ABC. Тогда,

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} H, \quad H = \frac{6V}{2S_{ABC}} = \frac{|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AS}|}{|\overline{AB}\times\overline{AC}|} .$$

**Пример.** Вычислить высоту треугольной пирамиды ABCD, опущенную из вершины D, если

A(–9, –1; 4), B(–6; –4; 1), C(–5; –2; 2), D(7; 3; 2).

Решение. Воспользуемся примером предыдущей задачи:

$$\overline{AB} = (3; -3; -3) = 3(1; -1; -1),\ \overline{AC} = (4; -1; -2),$$

$$\overline{AD} = (16; 4; -2) = 2(8; 2; -1),\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = 6.$$

Далее,

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = 3\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3(\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}),$$

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}| = 3\sqrt{1+4+9} = 3\sqrt{14},$$

$$H = \frac{|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}|}{|\overline{AB}\times\overline{AC}|} = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{7}}$.



## Глава 14. Разложение вектора по произвольному базису алгебраическим способом

**Задача 76. Найти координаты вектора относительно данного базиса на прямой, если вектор и базис заданы в координатной форме.**

Решение. Пусть $\{\bar{e}\}$ – произвольный базис прямой,

$$\bar{a} = a_1\bar{e} = (a_1) \text{ и } \bar{b} = b_1\bar{e} = (b_1)$$

– два ненулевых вектора, лежащие на этой прямой и заданные в координатной форме относительно базиса $\{\bar{e}\}$.

Поставим задачу вычисления координаты вектора $\bar{a}$ относительно базиса $\{\bar{b}\}$, т.е. найти число k, для которого верно равенство

$$\bar{a} = k\cdot\bar{b}.$$

Так как равные векторы имеют равные координаты относительно одного и того же базиса, то $(a_1) = k(b_1) = (kb_1)$ или $a_1 = k\cdot b_1$, откуда $k = \frac{a_1}{b_1}$ и $\bar{a} = \frac{a_1}{b_1}\cdot\bar{b}$.

Ответ: $\bar{a} = \frac{a_1}{b_1}\cdot\bar{b} = \left(\frac{a_1}{b_1}\right)$.

**Пример 1.** Разложить вектор $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}\}$, если вектор и базис заданы своими координатами относительно какого-нибудь базиса: $\bar{a} = (-3)$, $\bar{e} = (12)$.

Решение. Разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}\}$ имеет вид:

$$\bar{a} = k\cdot\bar{e}.$$

Следовательно, их координаты относительно старого базиса равны: $(-3) = k(12)$, $k = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $\bar{a} = -\frac{1}{4} \cdot \bar{e}$.

**Пример 2.** Пусть на координатной оси даны координаты трех точек: A(–7), B(3) и C(11). Найти отношение, в котором точка A делит отрезок CB.

Решение. По определению, $\overline{CA} = \lambda_{CB}^{A} \cdot \overline{AB}$. Значит, задача сводится к разложению вектора $\overline{CA}$ по базису $\{\overline{AB}\}$. Вычисляем декартовые координаты векторов $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$, т.е. координаты этих векторов относительно нормированного базиса $\{\bar{i}\}$ координатной оси: $\overline{CA} = (-18)$, $\overline{AB} = (10)$. Отсюда получаем: $-18 = \lambda_{CB}^{A} \cdot 10$ и $\lambda_{CB}^{A} = \frac{-18}{10} = -\frac{9}{5}$.

Ответ: $\lambda_{CB}^{A} = -\frac{9}{5}$.

**Задача 77. На плоскости найти координаты вектора относительно данного базиса, если вектор и базис даны в координатной форме.**

Решение. Пусть на какой-нибудь плоскости даны три вектора и известны их координаты относительно какого-нибудь базиса $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ этой плоскости:

$$\bar{a} = (a_1, a_2),\ \bar{b} = (b_1, b_2),\ \bar{c} = (c_1, c_2),$$

причем $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Тогда $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ также является базисом на данной плоскости.

Поставим задачу нахождения координат вектора $\bar{c}$ относительно базиса $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, т.е. найти коэффициенты $x$ и $y$ разложения

$$\bar{c} = x \cdot \bar{a} + y \cdot \bar{b}.$$



Используя действия с векторами в координатной форме и условие равенства векторов, получаем:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}.$$

Определитель системы не равен нулю. Действительно, если бы $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то отсюда следовало бы, что $a_1 b_2 = a_2 b_1$ или $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$ и $\bar{a} = k \cdot \bar{b}$, т.е. $\bar{a} \parallel \bar{b}$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, система имеет единственное решение (x, y), которое и будет ответом в данной задаче.

**Пример 1.** Разложить вектор $\bar{c}$ по базису $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, если векторы заданы в координатной форме относительно какого-нибудь базиса: $\bar{a} = (2; -1)$, $\bar{b} = (-1; 1)$, $\bar{c} = (-11; 13)$.

Решение. Разложение вектора $\bar{c}$ по базису $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ имеет вид: $\bar{c} = x \cdot \bar{a} + y \cdot \bar{b}$ или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 13 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы используем запись координат вектора в виде столбца. Отсюда, по правилам действий с векторами в координатной форме, получаем:

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}.$$

Равные векторы имеют равные координаты относительно одного и того же базиса:

$$\begin{cases} 2x - y = -11 \\ -x + y = 13 \end{cases}.$$

Решаем полученную систему и получаем: $x = 2$, $y = 15$.

Ответ: $\bar{c} = 2\bar{a} + 15\bar{b}$.

**Пример 2.** Пусть ABCD равнобочная трапеция, $AB = CD = 1$, $\angle A = 30^o$, $BC = \sqrt{3}$, точка O – середина основания AD, точка M – центр тяжести треугольника OCD. Найти координаты вектора $\overline{BM}$ относительно базиса $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

Решение. Введем прямоугольную декартовую систему координат. Пусть основание AD лежит на оси Ox, точку O возьмем за начало координат.

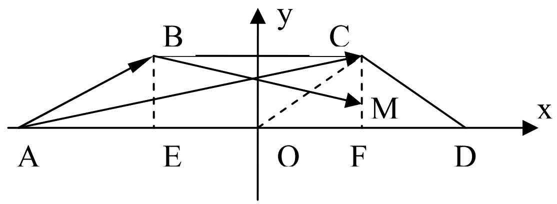



Рис. 63.

Исходя из данных задачи, находим координаты вершин трапеции:

$$AE = AB\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} = FD, \quad OE = OF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$BE = FC = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$A(-\sqrt{3};\,0),\ B(-\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{2}),\ C(\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{2}),\ D(\sqrt{3};\,0).$$

Находим декартовые координаты векторов, т.е. их координаты относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$:

$$\overline{AB} = (\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{2}),\ \overline{AC} = (\frac{3\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{2}),\ \overline{OC} = (\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{2}) = \overline{AB},$$



откуда следует, что $OC = AB = CD = 1$ и треугольник OCD равнобедренный и

$$MF = \frac{1}{3}CF = \frac{1}{6}, \quad M(\frac{\sqrt{3}}{2};\,\frac{1}{6}), \quad \overline{BM} = (\sqrt{3};\,-\frac{1}{3}).$$

Разложим вектор $\overline{BM}$ по базису $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ и найдем его координаты в этом базисе. Пусть $\overline{BM} = x\cdot\overline{AB} + y\cdot\overline{AC}$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y = \sqrt{3} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x + 3y = -2 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем $x = -2$, $y = \frac{4}{3}$.

Ответ: $\overline{BM} = (-2)\cdot\overline{AB} + \frac{4}{3}\cdot\overline{AC}$.

**Задача 78. В пространстве найти координаты вектора относительно данного базиса, если вектор и базис даны в координатной форме.**

Решение. Пусть в пространстве даны четыре вектора, заданные своими координатами относительно какого-нибудь базиса:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \bar{c} = (c_1, c_2, c_3),$$

$$\bar{d} = (d_1, d_2, d_3),$$

причем тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ является некомпланарной и потому также является базисом.

Поставим задачу разложить вектор $\bar{d}$ по базису $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ и найти его координаты в этом базисе. Разложение вектора $\bar{d}$ по базису $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ имеет вид:

$$\overline{d} = x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b} + z \cdot \overline{c},$$

или, в координатной форме (записывая координаты векторов столбцами):

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Используя действия с векторами в координатной форме, получаем равенство:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие координаты, получаем систему:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}.$$

По условию векторы $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ некомпланарные, поэтому их смешанное произведение не равно нулю:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.е. определитель системы не равен нулю и система имеет единственное решение (x, y, z), которое и будет решением задачи. Это решение можно найти, например, по формулам Крамера.

Ответ: $\overline{d} = (x, y, z)$ – координаты вектора $\overline{d}$ относительно базиса $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$.



**Пример.** Найти координаты вектора $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ относительно базиса $\{\overline{i} + \overline{j}, \overline{j} + \overline{k}, \overline{k} + \overline{i}\}$.

Решение. Обозначим

$$\overline{e}_1 = \overline{i} + \overline{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{e}_2 = \overline{j} + \overline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{e}_3 = \overline{k} + \overline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Разложение вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ имеет вид:

$$\overline{a} = x \cdot \overline{e}_1 + y \cdot \overline{e}_2 + z \cdot \overline{e}_3$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему, решение которой: $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\overline{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

## Глава 15. Вычисление модуля и направляющих косинусов вектора в произвольном базисе

**Задача 79. Найти модуль и направляющий косинус вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного базиса на прямой.**

Решение. Пусть на прямой L задан базис $\{\overline{e}\}$ и произвольный вектор $\overline{a}=k\cdot\overline{e}=(k)$.

Поставим задачу вычисления модуля вектора $\overline{a}$ и его направляющего косинуса $\cos\alpha$, где $\alpha=(\overline{a}\wedge\overline{e})$. Из равенства $\overline{a}=k\cdot\overline{e}$ находим, что $|\overline{a}|=|k|\cdot|\overline{e}|$. Далее,

$$\text{если } k>0,\text{ то } \overline{a}\uparrow\uparrow\overline{e} \quad\text{и}\quad \alpha=0,\quad \cos\alpha=1;$$
$$\text{если } k<0,\text{ то } \overline{a}\uparrow\downarrow\overline{e} \quad\text{и}\quad \alpha=\pi,\quad \cos\alpha=-1.$$

Заметим, что если $\overline{a}=\overline{0}$, то $|\overline{a}|=0$. По определению нулевой вектор можно считать сонаправленным любому. Полагаем по определению, $\overline{0}\uparrow\uparrow\overline{e}$ и $\alpha=0$, $\cos\alpha=1$.

Ответ: если $\overline{a}=k\cdot\overline{e}$ и $k\neq 0$ то $|\overline{a}|=|k|\cdot|\overline{e}|$, $\cos\alpha=\dfrac{k}{|k|}$;

если $\overline{a}=\overline{0}$, то $|\overline{a}|=0$, $\cos\alpha=1$.

**Пример.** Дано: $\overline{a}=(-4)\cdot\overline{e}$, $\overline{b}=(-2)\cdot\overline{e}$, $|\overline{e}|=11$. Найти модуль и направляющий косинус вектора $5\overline{a}-7\overline{b}$.

Решение. По правилам действий с векторами в координатной форме, получаем

$$5\overline{a}-7\overline{b}=5\cdot(-4)-7\cdot(-2)=(-6)=(-6)\cdot\overline{e},$$

откуда находим,

$$|5\overline{a}-7\overline{b}|=|(-6)|\cdot|\overline{e}|=6\cdot 11=66,\ \cos\alpha=\frac{-6}{6}-1.$$

Ответ: $|5\overline{a}-7\overline{b}|=66$, $\cos\alpha=-1$.



**Задача 80. Найти модуль и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного базиса на плоскости.**

Решение. Пусть $\{\overline{e}_1,\overline{e}_2\}$ произвольный базис плоскости и $\overline{a}=a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2=(a_1,a_2)$. Мы полагаем, что нам известны модули базисных векторов и угол между ними $(\overline{e}_1\wedge\overline{e}_2)=\varphi$.

Для вычисления модуля вектора $\overline{a}$ вычисляем его скалярный квадрат

$$\overline{a}^2=(a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2)^2=a_1^2\overline{e}_1^2+(2a_1a_2)(\overline{e}_1\cdot\overline{e}_2)+a_2^2\overline{e}_2^2=$$
$$=a_1^2\,|\overline{e}_1|^2+(2a_1a_2)\cdot|\overline{e}_1|\cdot|\overline{e}_2|\cdot\cos\varphi+a_2^2\,|\overline{e}_2|^2,$$

откуда

$$|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2\,|\overline{e}_1|^2+(2a_1a_2)\cdot|\overline{e}_1|\cdot|\overline{e}_2|\cdot\cos\varphi+a_2^2\,|\overline{e}_2|^2}\,.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{a}$:

$$\cos\alpha=\cos(\overline{a}\wedge\overline{e}_1),\quad \cos\beta=\cos(\overline{a}\wedge\overline{e}_2)$$

Для этого умножим поочередно базисные векторы скалярно на вектор $\overline{a}$:

$$\overline{e}_1\cdot\overline{a}=\overline{e}_1(a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2)=a_1(\overline{e}_1\cdot\overline{e}_1)+a_2(\overline{e}_1\cdot\overline{e}_2),$$
$$\overline{e}_2\cdot\overline{a}=\overline{e}_2(a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2)=a_1(\overline{e}_2\cdot\overline{e}_1)+a_2(\overline{e}_2\cdot\overline{e}_2).$$

С другой стороны,

$$\cos\alpha=\frac{\overline{e}_1\cdot\overline{a}}{|\overline{e}_1|\cdot|\overline{a}|},\ \cos\beta=\frac{\overline{e}_2\cdot\overline{a}}{|\overline{e}_2|\cdot|\overline{a}|}.$$

Отсюда получаем

$$\cos\alpha=\frac{a_1\,|\overline{e}_1|^2+a_2\,|\overline{e}_1|\cdot|\overline{e}_2|\cdot\cos\varphi}{|\overline{e}_1|\cdot|\overline{a}|},$$
$$\cos\beta=\frac{a_2\,|\overline{e}_2|^2+a_1\,|\overline{e}_1|\cdot|\overline{e}_2|\cdot\cos\varphi}{|\overline{e}_2|\cdot|\overline{a}|}.$$

Запоминать эти формулы не нужно, а ответ лучше дать в следующем виде.

Ответ: $|\bar{a}| = \sqrt{(a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2)^2}$, $\bar{a}^o = \dfrac{1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a} = \dfrac{a_1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{e}_1 + \dfrac{a_2}{|\bar{a}|}\cdot\bar{e}_2$,

$$\cos\alpha = \frac{\bar{e}_1\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_1|\cdot|\bar{a}|},\quad \cos\beta = \frac{\bar{e}_2\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_2|\cdot|\bar{a}|}.$$

**Пример.** В параллелограмме ABCD, $\angle A = 60^o$, $AB = 2, AD = 3$. Найти длину диагонали AC и углы, образованные ею со сторонами параллелограмма.

Решение.

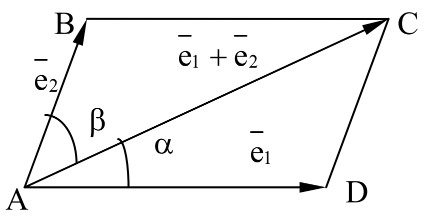



Рис. 64.

Обозначим $\overline{AD} = \bar{e}_1$, $\overline{AB} = \bar{e}_2$, $(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = \varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Тогда

$$|\bar{e}_1| = 3,\ |\bar{e}_2| = 2,\ \overline{AC} = \bar{a} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2.$$

Найдем

$$\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = |\bar{e}_1|\cdot|\bar{e}_2|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 3.$$

Вычисляем требуемое:

$$AC = |\bar{a}| = \sqrt{(\bar{e}_1+\bar{e}_2)^2} = \sqrt{\bar{e}_1^2 + 2\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 + \bar{e}_2^2} = \sqrt{9+6+4} = \sqrt{19}.$$

Углы между диагональю AC и сторонами параллелограмма есть направляющие углы вектора $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$.



Найдем скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на базисные векторы:

$$\bar{a}\cdot\bar{e}_1 = (\bar{e}_1+\bar{e}_2)\cdot\bar{e}_1 = \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2\cdot\bar{e}_1 = 9+3 = 12,$$

$$\bar{a}\cdot\bar{e}_2 = (\bar{e}_1+\bar{e}_2)\cdot\bar{e}_2 = \bar{e}_2^2 + \bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = 4+3 = 7.$$

Находим направляющие углы:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{e}_1}{|\bar{a}|\cdot|\bar{e}_1|} = \frac{12}{3\sqrt{19}} = \frac{4}{\sqrt{19}},\ \cos\beta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{e}_2}{|\bar{a}|\cdot|\bar{e}_2|} = \frac{7}{2\sqrt{19}}.$$

Ответ:

$$AC = \sqrt{19},\ \angle DAC = \arccos\frac{4}{\sqrt{19}},\ \angle BAC = \arccos\frac{7}{2\sqrt{19}}.$$

**Задача 81. Найти модуль, орт и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного базиса в пространстве.**

Решение. Эта задача решается аналогично предыдущей. Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ произвольный базис пространства и $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$. Мы полагаем, что нам известны модули базисных векторов и углы между ними:

$$(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2) = \varphi_1,\ (\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3) = \varphi_2,\ (\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_3) = \varphi_3.$$

Для вычисления модуля вектора $\bar{a}$ вычисляем его скалярный квадрат:

$$\bar{a}^2 = (a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3)^2.$$

Раскрываем скобки и находим скалярные произведения базисных векторов.

Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \cos(\bar{a}\wedge\bar{e}_1),\ \cos\beta = \cos(\bar{a}\wedge\bar{e}_2),\ \cos\gamma = \cos(\bar{a}\wedge\bar{e}_3).$$

Для этого умножим поочередно базисные векторы скалярно на вектор $\bar{a}$:

$$\bar{e}_1\cdot\bar{a}=\bar{e}_1\cdot(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)=a_1(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1)+a_2(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2)+$$
$$+a_3(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_3)$$
$$\bar{e}_2\cdot\bar{a}=\bar{e}_2\cdot(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)=a_1(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_1)+a_2(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_2)+$$
$$+a_3(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_3),$$
$$\bar{e}_3\cdot\bar{a}=\bar{e}_3\cdot(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)=a_1(\bar{e}_3\cdot\bar{e}_1)+a_2(\bar{e}_3\cdot\bar{e}_2)+$$
$$+a_3(\bar{e}_3\cdot\bar{e}_3).$$

С другой стороны,

$$\cos\alpha=\frac{\bar{e}_1\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_1|\cdot|\bar{a}|},\ \cos\beta=\frac{\bar{e}_2\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_2|\cdot|\bar{a}|},\ \cos\gamma=\frac{\bar{e}_3\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_3|\cdot|\bar{a}|}.$$

Подставляем в эти равенства вычисленные скалярные произведения и получаем направляющие косинусы.

Ответ: $|\bar{a}|=\sqrt{(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)^2}$,

$$\cos\alpha=\frac{\bar{e}_1\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_1|\cdot|\bar{a}|},\qquad \cos\beta=\frac{\bar{e}_2\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_2|\cdot|\bar{a}|},\qquad \cos\gamma=\frac{\bar{e}_3\cdot\bar{a}}{|\bar{e}_3|\cdot|\bar{a}|},$$

$$\bar{a}^{o}=\frac{1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}=\frac{a_1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{e}_1+\frac{a_2}{|\bar{a}|}\cdot\bar{e}_2+\frac{a_3}{|\bar{a}|}\cdot\bar{e}_3.$$

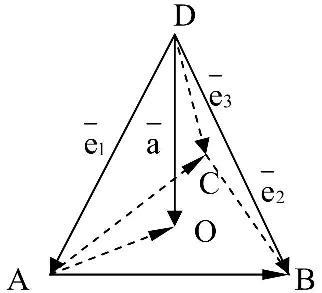



Рис. 65.



**Пример.** В правильном тетраэдре (рисунок 65) с ребром $a$ найти его высоту и углы между высотой тетраэдра и боковыми ребрами.

Решение. Пусть ABCD правильный тетраэдр, DO – его высота. Тогда точка O является центром треугольника ABC, лежащего в основании пирамиды.

Обозначим: $\overline{DA}=\bar{e}_1$, $\overline{DB}=\bar{e}_2$, $\overline{DC}=\bar{e}_3$, $\overline{DO}=\bar{a}$. Тогда искомые углы являются направляющими углами вектора $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$. Находим: $\overline{AC}=\bar{e}_3-\bar{e}_1$, $\overline{AB}=\bar{e}_2-\bar{e}_1$. Разложим вектор $\overline{AO}$ по базису $\{\overline{AC},\overline{AB}\}$ в плоскости основания.

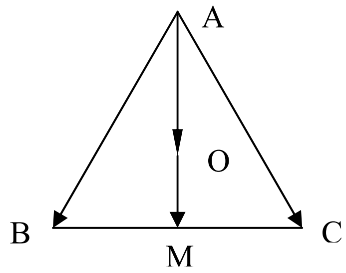



Рис. 66.

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}),\quad \overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}=\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC}),$$
$$\overline{AO}=\frac{1}{3}(\bar{e}_2-\bar{e}_1+\bar{e}_3-\bar{e}_1)=\frac{1}{3}(-2\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3),$$
$$\bar{a}=\overline{DO}=\bar{e}_1+\overline{AO}=\bar{e}_1+\frac{1}{3}(-2\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)=\frac{1}{3}(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3).$$

Скалярные квадраты базисных векторов равны между собой и равны: $\bar{e}_k^{\,2}=|\bar{e}_k|^2=a^2,\ k=1,2,3.$

Попарные скалярные произведения базисных векторов равны друг другу и равны

$$\bar{e}_k \cdot \bar{e}_m = |\bar{e}_k| \cdot |\bar{e}_m| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2,\ k, m = 1, 2, 3,\ k \neq m.$$

Отсюда, $|\bar{a}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3)^2} =$

$$= \frac{a}{3}\sqrt{\bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2 + 2(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3)} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Находим скалярные произведения вектора $\bar{a}$ на базисные векторы:

$$\bar{a} \cdot \bar{e}_k = \frac{1}{3}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_k = \frac{1}{3}(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_k + \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_k + \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_k) = \frac{2a^2}{3},$$

$k = 1, 2, 3$. Находим направляющие косинусы вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{a}}{|\bar{e}_1| \cdot |\bar{a}|} = \frac{\frac{2}{3}a^2}{a \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Аналогично, находим: $\cos\beta = \cos\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: высота пирамиды равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$; углы между высотой пирамиды и боковыми ребрами равны между собой и равны $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$.



## УПРАЖНЕНИЯ

1. Известно, что расстояние между точками $A\left(-3x - \frac{1}{3}\right)$ и $B\left(\frac{3x-5}{4} - 1\right)$ координатной прямой равно 3. Найдите x.

2. На оси Ox найти точки, удаленные от точки $A\left(-3x - \frac{1}{3}\right)$ на расстояние больше 11.

3. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC, если $BC = 1$ и является ребром куба, а AB – его диагональю. (Указание. Введите ПДСК, найдите координаты вершин треугольника ABC и для вычисления координат точки D используйте основное свойство биссектрисы треугольника.)

4. В равнобедренном треугольнике ABC, BD – высота, $AB = BC$, точка O – центр описанной окружности. Найдите отношение, в котором точка O делит высоту BD, считая от точки B и координаты точки O, если

$$A(3;2),\ B(4;6),\ C(8;5).$$

Указание: постройте чертеж на координатной плоскости, радиус описанной окружности найдите по формуле: $R = \frac{abc}{4S}$, где a, b, c – стороны треугольника, S – его площадь.

5. Пусть точка C лежит на оси абсцисс и является ГЦТ системы из двух материальных точек: A(2; –5) с массой $m_A = 8$ и точки B(–3; 7) с массой $m_B$. Найдите массу точки B и координаты точки C.

6. В середину средней линии MN треугольника ABC, $MN \parallel AC$, помещена масса, численно равная его площади, а в вершины A и C помещены массы численно равные половине его площади. Найдите ГЦТ данной системы трех материальных точек, если A(–1; 0), B(0; 4), C(4; 5).

7. Найдите ГЦТ треугольника ABC, если $A(-2;-1), B(-1;3), C(3;4)$.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 точка F есть центр тяжести треугольника ACD. Введите ПДСК и найдите центр тяжести трапеции $FBB_1D_1$.

9. Из правильного шестиугольника ABCDEF со стороной a и центром O вырезали треугольник ABC. Найти центр тяжести оставшейся фигуры.

10. В косоугольной системе координат Oxy с координатным углом $\varphi = 150^{o}$ построить точку M(–1; 1) и найти длину отрезка OM.

11. Дан правильный шестиугольник ABCDEF со стороной 1 и косоугольная система координат Oxy, такая, что сторона EF лежит на оси Ox, а сторона CD – на оси Oy. Найдите в этой системе координат координаты всех вершин данного шестиугольника.

12. Дан правильный шестиугольник ABCDEF со стороной 1 и косоугольная система координат Oxy, такая, что сторона EF лежит на оси Ox, а сторона CD – на оси Oy. Найдите расстояния всех вершин данного шестиугольника от осей координат.

13. В системе координат Oxy с координатным углом $\varphi = 150^{o}$ найти точки, находящиеся на расстоянии $\sqrt{3}$ от оси Ox и на расстоянии $\frac{1}{\sqrt{3}}$ от оси Oy.

14. Найдите площадь треугольника OAB, если O – полюс полярной системы координат, $A(1;0)$, $B(1;\frac{\pi}{3})$ – полярные координаты его вершин. Постройте чертеж.

15. Полюс полярной системы координат находится в вершине A правильного шестиугольника ABCDEF со стороной 1, полярная ось проходит через вершину C. Найти полярные координаты всех вершин.



16. Найдите расстояние между двумя точками, заданными полярными координатами: $A(\sqrt{3};\frac{\pi}{5})$, $B(\sqrt{\frac{3}{2}};\frac{23\pi}{15})$.

17. Вычислить площадь треугольника, если известны полярные координаты его вершин: $A(1;\frac{\pi}{6})$, $B(1;\frac{\pi}{2})$, $C(1;\frac{5\pi}{3})$.

18. Вычислить углы треугольника, если известны полярные координаты его вершин: $A(1;\frac{\pi}{6})$, $B(1;\frac{\pi}{2})$, $C(1;\frac{5\pi}{3})$.

19. Найти декартовые координаты точки M, если ее полярный радиус $r = \sqrt{3}$, а полярный угол $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

20. Найти полярные координаты следующих точек, заданных декартовыми координатами: $A(1;0)$, $B(0;\sqrt{3})$, $C(-1;\ 0)$, $D(0;-\sqrt{3})$, $E(1;\sqrt{3})$, $F(-1;\sqrt{3})$, $G(-1;-\sqrt{3})$, $H(1;-\sqrt{3})$.

21. Пусть ABCD – прямоугольная трапеция, $\angle D = 90^{o}$. Постройте вектор: а) $\overline{BA} + \overline{BC}$; б) $\overline{AC} + \overline{AD}$.

22. Пусть ABCD – произвольный четырехугольник. Постройте векторы:

а) $\overline{AC} + \overline{DB}$; б) $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC}$; в) $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} + \overline{BC}$.

23. Пусть A, B и C три произвольные точки, не лежащие на одной прямой. Постройте вектор

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}).$$

Верно ли равенство $\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{BA} + \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AC}$?

24. Пусть ABC – произвольный треугольник.

а) Постройте векторы: $-\overline{AB}$, $-\overline{AC}$, $-\overline{BC}$.

б) Верно ли равенство $-\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AB}=\overline{0}$?

25. Пусть в треугольнике ABC, AD и BK – медианы. С помощью рисунка покажите, что $\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{2}{3}\overline{AD}+\frac{1}{3}\overline{BK}$. Постройте вектор $\frac{3}{2}\overline{AC}-2\overline{AD}$ и докажите, что он равен вектору $\overline{BK}$.

26. Построить и вычислить на координатной плоскости Oxy проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси и на ось L, если известно, что $|\overline{a}|=4$, $(\overline{a}\wedge Ox)=(\overline{a}\wedge Oy)=\frac{5\pi}{6}$, $(L\wedge Ox)=\frac{3\pi}{4}$, $(L\wedge Oy)=\frac{\pi}{4}$.

27. Найти проекцию вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{a}-\overline{b}$, если $(\overline{a}\wedge\overline{b})=\frac{\pi}{3}$ и $|\overline{a}|=|\overline{b}|=2$.

28. Известно, проекции двух ненулевых векторов друг на друга равны. Равны ли их модули?

29. Найти угол между векторами, если $\overline{a}\cdot\overline{b}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $|\overline{a}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $|\overline{b}|=2$.

30. Найдите длину стороны BC треугольника ABC, если $AB=1$, $AC=2$ и $\angle A=120^{\circ}$, без использования теоремы косинусов. (Указание. $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$ и $BC=\sqrt{\overline{BC}^2}$ )

31. Определить ориентацию следующих троек векторов: а) $\{\overline{i},\overline{k},\overline{j}\}$; б) $\{\overline{k},\overline{i},\overline{j}\}$, в) $\{\overline{i}+\overline{j},-\overline{k},\overline{i}-\overline{j}\}$.



32. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 1, высота призмы равна $\sqrt{3}$. Выполните чертеж и:

а) постройте векторное произведение $\overline{AC}\times\overline{AC_1}$ и найдите $\sin(\overline{AC}\wedge\overline{AC_1})$;

б) постройте векторное произведение вектора $\overline{AC}\times\overline{AC_1}$ на вектор $\overline{AC}$ и найдите его модуль.

33. В равнобочной трапеции боковая сторона равна верхнему основанию, а нижнее основание в два раза больше верхнего. Найдите тупой угол между диагоналями трапеции.

Указание. Сначала найдите угол при нижнем основании и длину диагонали. Для решения задачи используйте векторное произведение векторов, совпадающих с диагоналями, которое нужно вычислить двумя способами и приравнять результаты.

34. В основании четырехугольной пирамиды SABCD лежит параллелограмм ABCD со сторонами $AB=a$, $AD=b$ и углом $\angle A=120^{\circ}$. Боковое ребро $AS=c$, $\angle SAB=75^{\circ}$, $\angle SAD=60^{\circ}$, SO – высота пирамиды, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Найти угол между боковыми гранями SAB и SCD.

35. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $|\overline{AB}|=1$, $|\overline{AD}|=2$, $|\overline{AA_1}|=3$. Вычислить смешанное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{B_1D}$.

36. Найдите модуль, орт, направляющий косинус и ориентацию вектора $\overline{a}$ на оси Ox, если его декартовая координата $a_x=\sqrt{3}$. Запишите данный вектор в координатной форме.

37. Пусть $A\left(2a-\frac{1}{3}\right)$ и $B\left(\frac{a+2}{4}-1\right)$ – точки на координатной оси Ox. Найдите координаты точек A, B и декартову координату вектора $\overline{AB}$, если известно, что $|\overline{AB}|=3$ и вектор $\overline{AB}$ правоориентирован на оси Ox.

38. На координатной оси даны точки $A(-3)$, $B\left(-\frac{11}{13}\right)$, $C\left(\frac{70}{11}\right)$. Найти координату вектора $\frac{5}{12}\overline{AB}-\frac{3}{5}\overline{BC}+\frac{13}{25}\overline{CA}$, его модуль и направляющий косинус. Определите его ориентацию на данной координатной оси.

39. В прямоугольном равнобедренном треугольнике найти угол между медианами, проведенными из острых углов.

40. В прямоугольном треугольнике его катеты равны 1. Найдите длину биссектрисы его острого угла и косинусы углов между биссектрисой и катетами.

41. Пусть стороны треугольника ABC лежат на оси ординат и на прямых $y=x+1$ и $y=2x-1$. Найдите координаты вершин этого треугольника. Докажите, что находя суммы $\overline{AB}+\overline{AC}$, $\overline{BA}+\overline{BC}$ и $\overline{CA}+\overline{CB}$ мы получаем соответственно вектор $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ и $\overline{CD}$, где D четвертая вершина параллелограмма ABCD. Найдите координаты вершины D в каждом случае. Выполните чертеж в системе координат Oxy.

42. Найдите полярный угол вектора:

а) $\bar{a}=(\sqrt{3};1)$; б) $\bar{a}=(-\sqrt{3};1)$; в) $\bar{a}=(-\sqrt{3};-1)$; г) $\bar{a}=(\sqrt{3};-1)$. Постройте для каждого случая чертеж, отложив вектор от начала координат. В каждом случае выразите полярный угол через арккосинус, арксинус и арктангенс.



43. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка N делит сторону основания AB в отношении 1 : 3. Найдите с помощью векторной алгебры косинус угла наклона отрезка SN к плоскости основания, если сторона основания равна высоте пирамиды и равна 1.

Указание: введите ПДСК Oxyz так, что начало координат O – центр основания, оси Ox и Oy параллельны сторонам основания, а высота лежит на оси Oz.

44. В правильном тетраэдре найти угол между ребром и апофемой, не лежащей вместе с данным ребром на одной грани.

45. Пусть $\bar{a}=\left(-\frac{1}{3};1;\frac{3}{4}\right)$, $\bar{b}=\left(-\frac{7}{5};-\frac{13}{2};\frac{9}{7}\right)$, $\bar{c}=\left(-\frac{19}{3};\frac{17}{8};-\frac{23}{11}\right)$. Найти координаты вектора:

а) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$; б) $\frac{1}{2}\bar{c}-\frac{2}{3}\bar{a}+\frac{3}{4}\bar{b}$.

46. В параллелограмме OABC, где O – начало координат, известны координаты вершин: $A\left(-\frac{11}{21};\frac{9}{13};53\right)$ и $B\left(\frac{1}{19};-\frac{7}{36};-\frac{63}{17}\right)$. Найти координаты четвертой вершины параллелограмма.

47. Проверить, лежат ли точки A(–2; 4; –7), B(3; –11; 23) и C(0, –2, 5) на одной прямой? Указание. Проверьте коллинеарность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

48. В ромбе ABCD угол A равен $60^{o}$, K – точка пересечения диагонали AC с высотой, опущенной из вершины D на сторону BC, O – центр тяжести треугольника ABD. Разложите вектор $\overline{AC}$ по базису $\{\overline{OK}\}$.

49. Пусть O – центр тяжести равнобедренного треугольника ABC, $AB = BC = 1$, угол при основании равен $30^o$. Постройте разложение вектора $\overline{OA}$ по базису $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$ и найдите его координаты в этом базисе.

50. Пусть ABCD – правильный тетраэдр, DO – высота тетраэдра, опущенная из вершины D на плоскость грани ABC. Разложите вектор $\overline{OD}$ по базису $\{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$.

51. Пусть $\overline{a} = -3\overline{e}$, $\overline{b} = 7\overline{e}$, $\overline{c} = -5\overline{e}$. Представить вектор $\overline{b}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{c}$, т.е. найти такие числа x и y, для которых выполняется равенство $x\overline{a} + y\overline{c} = \overline{b}$.

52. Пусть $\overline{a} = -2\overline{e}_1 + 9\overline{e}_2$, $\overline{b} = 3\overline{e}_1 - 14\overline{e}_2$, $\overline{c} = -5\overline{e}_1 - 19\overline{e}_2$. Представьте вектор $\overline{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. найдите такие числа x и y, для которых выполняется равенство $x\overline{a} + y\overline{b} = \overline{c}$.

53. Пусть $\overline{a} = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{b} = \overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{c} = -\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3$. Представьте вектор $\overline{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, т.е. найдите такие числа x, y, z, для которых выполняется равенство $x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c} = \overline{d}$.

54. Пусть $A\left(-\frac{47}{16}\right), B\left(-\frac{53}{18}\right)$ – точки на координатной оси Ox и точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = -\frac{7}{3}$. Найдите координату вектора $\overline{OC}$ относительно базиса:

а) $\{\overline{i}\}$; б) $\{-\overline{i}\}$.

55. В треугольнике ABC известен угол A и стороны $AB = c, AC = b$. Найдите длины медиан $m_C$ и $m_B$, проведенные из вершины C и B соответственно.



56. В основании треугольной пирамиды ABCD лежит прямоугольный треугольник ABC, $CA = CB = CD = a$, ребро CD перпендикулярно плоскости основания. Найдите длину перпендикуляра, опущенного из вершины C на плоскость грани ABD.

57. На координатной плоскости Oxy даны вершины треугольника: A(–1; 9), B(7; –3), C(–4; –5). Найти скалярные квадраты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

58. На координатной плоскости Oxy даны вершины треугольника: A(–1; 9), B(7; –3), C(–4; –5). Найти векторное произведение векторов $\overline{BA} \times \overline{BC}$.

59. В координатном пространстве Oxyz даны вершины треугольной пирамиды:

A(0; 1; 1), B(1; 0; 1), C(1; 2; 0), D(1; –1; –1).

Вычислить смешанное произведение $\overline{BA} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BD}$.

60. Найти модуль, орт и направляющие косинусы вектора $\overline{a} = 2\overline{i} - 11\overline{j} + 10\overline{k}$.

61. Даны вершины треугольника: A(1; –1; 3), B(–1; 1; 4), C(7; –7; 10). Найти внутренний угол при вершине A.

62. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра перпендикулярны.

Указание: введите ПДСК и найдите координаты вершин пирамиды. Сторону основания обозначьте через a, боковое ребро – через b.

63. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 1, двугранный угол при основании равен $60^o$. Найдите проекцию бокового ребра на противоположное ему боковое ребро.

64. Рассмотрим задачу о горе, на которую Сизиф, согласно греческому мифу, затаскивал свой камень. Допустим, что он тащил камень массой m по склону горы длиной a метров. Вычислите работу, которую он при этом произво-

дил, если угол наклона склона горы к уровню горизонта равен $\alpha$.

65. Найти синус угла между векторами

$$\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}, \quad \overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j}.$$

66. Определите, лежат ли точки A(–1; 2; 4), B(2; –2; –3), C(–4; 6; –5) на одной прямой. Указание: проверьте коллинеарность векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

67. Найдите вектор коллинеарный высоте пирамиды, опущенной из вершины S на основание ABC, если:

A(1; 1; 1), B(–1; 2; –4), C(3; –4; –2), D(0; 0; 7).

68. Найдите двугранный угол между боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно стороне основания.

69. Найти площадь треугольника, с вершинами:

A(0; –1; 2), B(–1; 0; –4), C(–3; 6; 0).

70. Пусть к началу координат приложена сила $\overline{F} = (3; -5; -4)$. Найдите величину ее момента относительно точки с координатами (1; 1; 1).

71. Пусть правильная четырехугольная пирамида, со стороной основания 1,5 м и боковым ребром 3 м, вращается вокруг своей высоты, опущенной из ее вершины на основание, с угловой скоростью $5/\pi$ радиан в секунду. Найдите линейную скорость центра тяжести ее боковой грани.

72. Лежат ли следующие точки на одной плоскости:

A(–9, –1; 4), B(–6; –4; 1), C(–5; –2; 2), D(5; 3; 2)?

73. Определить ориентацию векторов: $\{\overline{a}, \overline{j}, \overline{c}\times\overline{a}\}$, где $\overline{a} = (1; -3; -2)$, $\overline{c} = (3; 2; -1)$, $\overline{j}$ – орт оси Oy.

74. Вычислить объем треугольной пирамиды ABCD, если A(1, –1; 4), B(–6; –1; 1), C(–1; –2; 2), D(7; –1; 2).

75. Вычислить высоту треугольной пирамиды ABCD, опущенную из вершины A, если A(1, –1; 4), B(–6; –1; 1), C(–1; –2; 2), D(7; –1; 2).



76. Пусть на координатной оси Ox даны координаты трех точек: A(–9), B(–2) и C(17). Найдите разложение вектора $\overline{AC}$ по базису $\{\overline{OB}\}$.

77. Пусть ABCD равнобочная трапеция, $AB = CD = 2$, $\angle A = 60^{\circ}$, $BC = 5$, точка O – середина основания AD, точка M – центр тяжести треугольника OCD. Найти координаты вектора $\overline{AB}$ относительно базиса $\{\overline{BM}, \overline{AM}\}$.

78. Найдите координаты вектора $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ относительно базиса $\{\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}, \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}, \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}\}$.

79. Найти модуль вектора $\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{2}{3}\overline{e}$ и его направляющий косинус, если $\overline{a} = (-3)\cdot\overline{e}$, где $|\overline{e}| = \sqrt{3}$.

80. В параллелограмме ABCD, $\angle A = 60^{\circ}$, $AB = 2$, $AD = 3$. Найдите острый угол между диагоналями.

81. Найдите угол между апофемами боковых граней правильного тетраэдра.

**Замечание**

В данное пособие не вошла глава 15Б «Скалярное произведение векторов в произвольном базисе», которая существует только в электронном варианте и предназначена для заинтересованных студентов и содержит обсуждение 6 задач с 81-й по 86-ю. Не вошли в данное пособие и соответствующие упражнения. В то же время, автор не хотел бы нарушать нумерацию задач. По этой причине вторая часть пособия начинается с 87-й задачи.

Тем не менее, на этой странице читатель может ознакомиться со списком пропущенных задач и упражнений.

## Глава 15Б. Скалярное произведение векторов в произвольном базисе

82. Найти скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно произвольного или нормированного базиса на прямой.

83. Вычислить модуль, орт и направляющий косинус вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного или нормированного базиса на прямой. Вычислить угол между векторами.

84. Найти скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно произвольного или ортонормированного базиса на плоскости.

85. Вычислить модуль, орт и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного или ортонормированного базиса на плоскости. Вычислить угол между векторами.

86. Найти скалярное произведение векторов, заданных в координатной форме относительно произвольного или ортонормированного базиса пространства.



87. Вычислить модуль, орт и направляющие косинусы вектора, заданного в координатной форме относительно произвольного или ортонормированного базиса пространства. Вычислить угол между векторами.

### Упражнения к главе 15Б

82. На координатной оси Ox даны точки A(19), B(–13), C(–10). Найти скалярное произведение $\overline{AC}\cdot\overline{BC}$.

83. Пусть $|\overline{e}_1| = 4$. Найти модуль, орт и направляющий косинус вектора $\overline{a} = -7\overline{e}_1$. Найти угол между вектором $\overline{a}$ и вектором $\overline{b} = -13\overline{e}_1$.

84. Пусть
$|\overline{e}_1| = 1$, $|\overline{e}_2| = 2$, $(\overline{e}_1 \wedge \overline{e}_2) = 120^o$, $\overline{x} = 4\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$, $\overline{y} = \overline{e}_1 - 6\overline{e}_2$.
Вычислить скалярное произведение $\overline{x}\cdot\overline{y}$.

85. Пусть
$|\overline{e}_1| = 1$, $|\overline{e}_2| = 2$, $(\overline{e}_1 \wedge \overline{e}_2) = 120^o$, $\overline{x} = 4\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$, $\overline{y} = \overline{e}_1 - 6\overline{e}_2$.
Вычислить угол между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$.

86. Пусть $|\overline{e}_1| = 1$, $|\overline{e}_2| = 2$, $|\overline{e}_3| = 3$ $(\overline{e}_1 \wedge \overline{e}_2) = 120^o$, $\overline{e}_1 \perp \overline{e}_3$, $\overline{e}_2 \perp \overline{e}_3$, $\overline{x} = 3\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + 6\overline{e}_3$ и $\overline{y} = -\overline{e}_1 - 2\overline{e}_2 + 7\overline{e}_3$. Вычислить скалярное произведение $\overline{x}\cdot\overline{y}$.

87. Пусть $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ произвольный базис, $|\overline{e}_1| = 2$, $|\overline{e}_2| = 3$, $|\overline{e}_3| = 1$, $(\overline{e}_1 \wedge \overline{e}_2) = (\overline{e}_1 \wedge \overline{e}_3) = 120^o$, $(\overline{e}_2 \wedge \overline{e}_3) = 60^o$ и даны два вектора: $\overline{x} = -\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 4\overline{e}_3$ и $\overline{y} = 7\overline{e}_1 - 6\overline{e}_2 + 6\overline{e}_3$. Вычислить модуль, орт, направляющие углы вектора $\overline{x}$ и угол $(\overline{x} \wedge \overline{y})$.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
3. Волков В.А. Аналитическая геометрия и векторная алгебра. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – 192 с.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972. – 272 с.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2002. – 240 с.
6. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. Геометрия: учебник для вузов. – СПб.: издательство Лань, 2003. – 416 с.
7. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Минск.: Вышэйшая школа, 1968. – 504 с.
8. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Минск.: ТетраСистемс, 2001. – 288 с.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1960. – 256 с.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Головизин Вячеслав Владимирович

**Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».**
**Часть I. Основные задачи векторной алгебры**

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор В.В. Головизин
Верстка В.И. Родионов

Пописано в печать __.12.09. Формат $60 \times 84 \; {}^{1}\!/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,1. Уч.-изд. л.7,0.
Тираж 50 экз. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел УдГУ
Типография ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4