Федеральное агентство по образованию РФ
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

В.В. Головизин

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия». Часть 3. Комплексные числа

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2009

УДК 511.147
ББК 22.151
Г 60

Рецензенты: доцент **Е.В. Новикова**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

Г60 **Головизин В.В.**
Основные задачи курса «Алгебра и геометрия». Часть 3: Комплексные числа: учеб.-метод. пособие. Ижевск, 2009. 59 с.

Третья часть учебно-методического пособия предназначена для студентов, изучающих комплексные числа в рамках любого курса высшей математики. Пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий и при подготовке индивидуальных заданий студентам.

Пособие содержит решения задач на отработку техники действий с комплексными числами. Задачи тематически разбиты на 4 главы и имеют сквозную нумерацию. Номера упражнений, помещенных в конце пособия, совпадают с номерами соответствующих задач.

УДК 511.147
ББК 22.151

Предисловие

Третья часть учебно-методического пособия посвящена комплексным числам. Это тема является традиционно трудной для студентов, и этому есть, на взгляд автора, ряд объективных причин. Во-первых, то обстоятельство, что комплексное число есть принципиально новый вид числа. Если действительные числа сопровождают человека повсюду в его обыденной жизни, то этого нельзя утверждать для комплексных чисел. От студента требуется определенный уровень даже не столько знаний, сколько способности абстрактного мышления. Во-вторых, геометрическая интерпретация комплексного числа, как точки плоскости, связана с совмещением двух принципиально различных систем координат на плоскости – прямоугольной декартовой и полярной, последняя из которых является новой для студентов. Кроме того, комплексное число изображается на плоскости с помощью вектора, поэтому от студента требуются устойчивые знания основ векторной алгебры. В-третьих, активно используется тригонометрия, которая сама по себе является «крепким орешком» для многих выпускников школ. И, наконец, принятая символика для обозначения корней из комплексных чисел остается прежней, как и для действительных чисел, а, по сути, обозначает принципиально иное, что часто вводит студентов в заблуждение. Освоить весь этот материал за короткий срок является весьма трудоемкой задачей. Помочь студенту справиться с этой задачей, получить устойчивые практические навыки при работе с комплексными числами – вот цели, которые автор ставил в этой части пособия.

СПИСОК ЗАДАЧ

Глава 20. Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи

164. Найти сумму и разность двух комплексных чисел.
165. Найти произведение двух комплексных чисел.
166. Найти частное двух комплексных чисел.
167. Найти комплексное число, сопряженное данному.

Глава 21. Комплексная плоскость и тригонометрическая форма комплексного числа

168. Построить комплексное число, заданное в алгебраической форме записи, на комплексной плоскости.
169. Построить комплексное число и сопряженное ему на комплексной плоскости.
170. Найти модуль и аргумент комплексного числа, заданного в алгебраической форме.
171. Записать тригонометрическую форму комплексного числа, заданного в алгебраической форме.
172. Найти модуль и аргумент комплексного числа, сопряженного данному.
173. Записать алгебраическую форму комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.
174. Найти произведение двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.
175. Найти частное двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.
176. Найти целую степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.
177. Найти расстояние между двумя точками на комплексной плоскости.
178. Изобразить все точки на комплексной плоскости, удаленные от данной на заданное расстояние.

179. Изобразить на комплексной плоскости все комплексные числа, имеющие постоянный заданный аргумент.
180. Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих заданным условиям.
181. Из всех комплексных чисел, удаленных от заданного комплексного числа на заданное расстояние, найти комплексное число с наименьшим модулем.

Глава 22. Корни из комплексных чисел

182. Вычислить квадратный корень из отрицательного действительного числа.
183. Решить в поле комплексных чисел квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом.
184. Вычислить квадратный корень из комплексного числа.
185. Решить квадратное уравнение с комплексными коэффициентами.
186. Найти все корни данной натуральной степени из данного комплексного числа и изобразить их на комплексной плоскости.
187. Разложить многочлен на линейные множители.

Глава 23. Корни из единицы

188. Найти все корни n-й степени из 1 и изобразить их на комплексной плоскости.
189. Записать все корни n-ой степени из 1 в виде степеней одного корня.
190. Построить таблицу умножения для всех корней n-ой степени из 1.
191. Разложить многочлен $x^n - 1$ на линейные множители.
192. Разложить многочлен на неприводимые множители над полем действительных чисел.

Глава 20. Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи

Задача 164. Найти сумму и разность двух комплексных чисел.

Решение. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

– два произвольных комплексных числа. Тогда

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \; z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Пример. Пусть $z_1 = (2+3i)$, $z_2 = -1+5i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 7$. Вычислить: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 + z_3$; г) $z_2 - z_3$; д) $z_3 + z_4$; е) $z_1 - z_4$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (2+3i) + (-1+5i) = (2-1) + i(3+5) = 1+8i$;

б) $z_1 - z_2 = (2+3i) - (-1+5i) = (2+1) + i(3-5) = 3-2i$;

в) $z_1 + z_3 = (2+3i) + (-2i) = 2+i$;

г) $z_2 - z_3 = (-1+5i) - (-2i) = -1+7i$;

д) $z_3 + z_4 = (-2i) + 7 = 7-2i$; е) $z_1 - z_4 = (2+3i) - 7 = -5+3i$.

Ответ: а) $1+8i$; б) $3-2i$; в) $2+i$; г) $-1+7i$; д) $7-2i$; е) $-5+3i$.

Задача 165. Найти произведение двух комплексных чисел.

Решение. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ – два произвольных комплексных числа. Тогда

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1),$$

где мы воспользовались равенством $i^2 = -1$.

Пример. Пусть $z_1 = 2+3i,\ z_2 = -1+5i,\ z_3 = -2i, z_4 = 7$. Вычислить: а) $z_1 z_2$; б) $z_1 z_3$; в) $z_1 z_4$; г) $z_3 z_4$; д) z_1^2;
е) $4z_1 - 3z_2^2 + (z_3 z_4)^2$.
Решение.
а) $z_1 z_2 = (2+3i)(-1+5i) = -2+10i-3i+15i^2 = -17+7i$;
б) $z_1 z_3 = (2+3i)(-2i) = -4i-6i^2 = 6-4i$;
в) $z_1 z_4 = (2+3i)7 = 14+21i$;
г) $z_3 z_4 = (-2i)7 = -14i$;
д) $z_1^2 = (2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = 4-9+12i = -5+12i$;
е) $4z_1 - 3z_2^2 + (z_3 z_4)^2 = 4(2+3i) - 3(-1+5i)^2 + (-14i)^2 =$

$$= 8+12i-3(1-10i+25i^2)+196i^2 =$$
$$= 8+12i-3(-24-10i)-196 = -116+42i.$$

Ответ: а) $-17+7i$; б) $6-4i$; в) $14+21i$; г) $-14i$;
д) $-5+12i$; е) $-116+42i$.

Задача 166. Найти частное двух комплексных чисел.

Решение. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ – два произвольных комплексных числа. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} =$$
$$= \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\cdot\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Правило деления комплексных чисел в алгебраической форме записи можно сформулировать словами:

для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое нужно числитель и знаменатель дроби умножить на комплексное число, комплексно сопряженное знаменателю дроби.

Этим достигается то, что в знаменателе дроби остается действительное число.

Пример. Пусть $z_1 = 2+2i,\ z_2 = -1+i,\ z_3 = -i,\ z_4 = -3$. Вычислить: а) $\frac{z_1}{z_2}$; б) $\frac{z_2}{z_3}$; в) $\frac{z_2}{z_4}$; г) $\frac{z_4}{z_3}$; д) $\frac{z_2^2}{z_3}$.
Решение.

а) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+2i}{-1+i} = \frac{(2+2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-2(1+i)^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{-2(2i)}{2} = -2i$;

б) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{-1+i}{-i} = \frac{(-1+i)i}{-i^2} = \frac{-i+i^2}{1} = -1-i$;

в) $\frac{z_2}{z_4} = \frac{-1+i}{-3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$; г) $\frac{z_4}{z_3} = \frac{-3}{-i} = \frac{(-3)i}{(-i)i} = \frac{-3i}{-i^2} = -3i$;

д) $\frac{z_2^2}{z_3} = \frac{(-1+i)^2}{-i} = \frac{1-2i+i^2}{-i} = \frac{-2i}{-i} = 2$.

Ответ: а) $-2i$; б) $-1-i$; в) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$; г) $-3i$; д) 2.

Задача 167. Найти комплексное число, сопряженное данному.

Решение. Пусть дано произвольное комплексное число $z = x+iy$. Тогда по определению $\bar{z} = x-iy$ есть комплексное число, комплексно сопряженное данному комплексному числу z.

Пример. Найти $\bar{z}$, если $z = (2+i)^2 - (1+2i)^3$.
Решение. $(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$,

$$(1+2i)^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot(2i) + 3\cdot 1\cdot(2i)^2 + (2i)^3 =$$
$$= 1+6i+12i^2+8i^3 = -11-2i.$$

Отсюда, $z = 3 + 4i - (-11 - 2i) = 14 + 6i$, $\overline{z} = 14 - 6i$.

Замечание. Можно использовать свойства комплексно сопряженных чисел:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Тогда этот же пример можно решить по-другому.

$$\overline{z} = \overline{(2+i)^2 - (1+2i)^3} = \overline{(2+i)^2} - \overline{(1+2i)^3} = (\overline{2+i})^2 - (\overline{1+2i})^3 =$$

$$= (2-i)^2 - (1-2i)^3 = 4 - 4i + i^2 - (1-2i)^2(1-2i) =$$

$$= 3 - 4i - (1 - 4i + 4i^2)(1-2i) = 3 - 4i - (-3-4i)(1-2i) =$$

$$= 3 - 4i + (3+4i)(1-2i) = 3 - 4i + 3 - 2i - 8i^2 = 14 - 6i.$$

Ответ: $14 - 6i$.

Глава 21. Комплексная плоскость и тригонометрическая форма комплексного числа

Задача 168. Построить комплексное число, заданное в алгебраической форме записи, на комплексной плоскости.

Решение. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится во взаимно однозначное соответствие точка на координатной плоскости Oxy с координатами (x, y), которую мы будем отождествлять с данным комплексным числом. Поэтому для решения данной задачи нужно просто отметить эту точку на координатной плоскости.

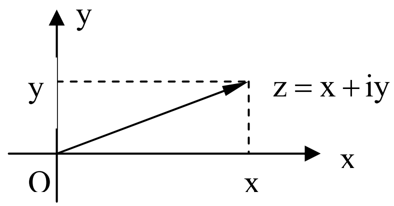

Рис. 1.

Определение. Комплексной плоскостью называется прямоугольная декартовая система координат на плоскости, каждая точка которой отождествлена с комплексным числом.

Каждой точке координатной плоскости ставится во взаимно однозначное соответствие ее радиус-вектор, координаты которого совпадают с координатами точки. Отсюда следует, что каждому комплексному числу также ставится во взаимно однозначное соответствие радиус-вектор. Поэтому комплексное число можно также изображать на комплексной плоскости радиус-вектором точки, с которой оно отождествлено. Смотрите рисунок 1.

Пример. Следующие комплексные числа изобразить на комплексной плоскости:

$$z = 1 + i, \quad z = 1 - i, \quad z = -1 + i, \quad z = -1 - i\,.$$

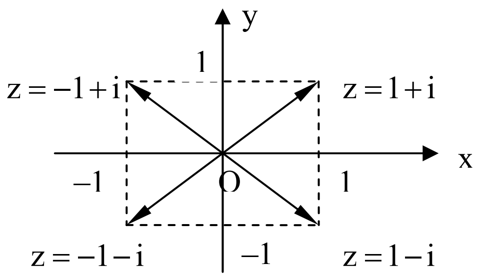

Рис. 2.

Ответ: рисунок 2.

Задача 169. Построить комплексное число и комплексно сопряженное ему на комплексной плоскости.

Решение. Из определения комплексно сопряженного числа следует, что комплексное число и комплексно сопряженное ему имеют одинаковую вещественную часть и противоположные мнимые части, поэтому соответствующие им точки на комплексной плоскости будут симметричны относительно оси абсцисс, смотрите рисунок 3.

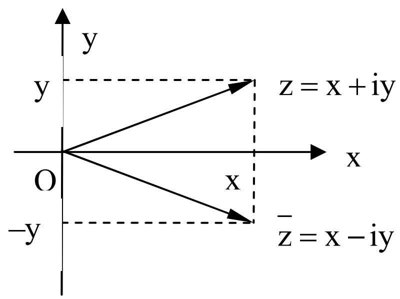

Рис. 3.

В примере предыдущей задачи (рисунок 2) на комплексной плоскости построены две пары комплексно сопряженных чисел:

$$z = 1 + i,\ z = 1 - i \quad \text{и} \quad z = -1 + i,\ z = -1 - i\,.$$

Задача 170. Найти модуль и аргумент комплексного числа, заданного в алгебраической форме.

Определение. Модулем комплексного числа называется расстояние от начала координат до точки комплексной плоскости, отождествленной с этим числом.

Определение. Аргументом комплексного числа называется угол поворота оси абсцисс вокруг начала координат против часовой стрелки до совпадения с радиус-вектором точки, отождествленной с этим комплексным числом.

Обозначение: модуль комплексного числа обозначается $|z|$, а его аргумент обозначается $\arg z$.

Замечание. Из определения следует, что $|z| \in [0; \infty)$, $\arg z \in [0; 2\pi)$. Часто полагают, что $\arg z \in (-\pi; \pi]$, считая, как в тригонометрии, отрицательным углом поворота поворот по часовой стрелке. Аргумент нуля по определению полагают равным нулю: $\arg 0 = 0$.

Введем на комплексной плоскости полярную систему координат, стандартным образом совмещенную с прямоугольной системой координат, т.е. полюс поместим в начало координат, а полярную ось совместим с положительной полуосью оси абсцисс. Тогда можно дать следующее определение модуля и аргумента комплексного числа.

Определение. Модулем комплексного числа называется полярный радиус точки комплексной плоскости, отождествленной с этим числом, а аргументом комплексного числа называется полярный угол этой точки.

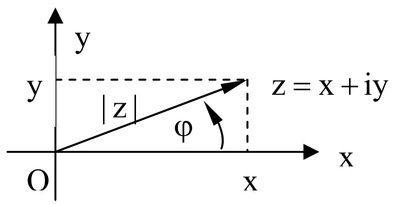

Рис. 4.

Здесь $\arg z$ обозначен буквой φ.

Таким образом, задача нахождения модуля и аргумента комплексного числа, заданного в алгебраической форме записи, сводится к задаче нахождения полярных координат точки по известным ее декартовым координатам. Эта задача была уже решена в данном пособии, смотрите часть 1, главу 4, задачу 20.

Приведем для удобства читателя основные формулы, с помощью которых можно решить данную задачу.

Пусть $z = x + iy$. Тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для вычисления аргумента комплексного числа нам необходимо знать, в какой четверти комплексной плоскости находится соответствующая точка, отождествленная с данным комплексным числом. Ниже мы полагаем, что $\arg z \in [0; 2\pi)$.

Если точка находится на одной из осей координат, то угол поворота легко определяется без всяких формул, поэтому полагаем, что и действительная часть комплексного числа и его мнимая часть отличны от нуля:

$$x = \operatorname{Re} z \neq 0 \neq \operatorname{Im} z = y.$$

1) $x > 0, y > 0$. Точка (x, y) лежит в первой четверти. Тогда, смотрите рисунок 4:

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

2) $x < 0, y < 0$. Точка (x, y) лежит в третьей четверти. Тогда

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi.$$

3) $x > 0, y < 0$. Точка (x, y) лежит в четвертой четверти. Тогда

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi.$$

4) $x < 0, y > 0$. Точка (x, y) лежит во второй четверти. Тогда

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi.$$

Пример. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел: $z = \pm 1$, $z = \pm i$, $z = \pm 1 \pm i\sqrt{3}$.

Решение. Отметим на комплексной плоскости первые 4 числа $z = \pm 1, z = \pm i$.

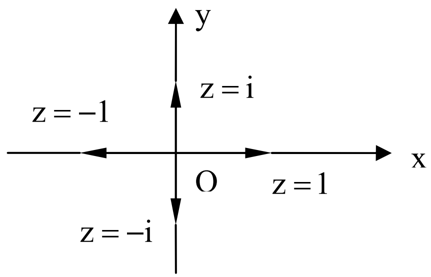

Рис. 5.

Легко видеть, что $|1| = |-1| = |i| = |-i| = 1$,

$$\arg 1 = 0,\ \arg(-1) = \pi,\ \arg i = \frac{\pi}{2},\ \arg(-i) = \frac{3\pi}{2}.$$

Отметим на комплексной плоскости числа $z=\pm 1\pm i\sqrt{3}$:

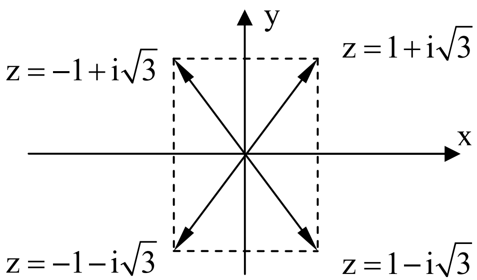

Рис. 6.

Модуль находим по формуле $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$:

$$|\pm 1\pm i\sqrt{3}|=\sqrt{(\pm 1)^2+(\pm\sqrt{3})^2}=2.$$

Находим аргументы данных комплексных чисел:

$$\arg(1+i\sqrt{3})=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$\arg(-1-i\sqrt{3})=\operatorname{arctg}\frac{(-\sqrt{3})}{(-1)}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3},$$

$$\arg(1-i\sqrt{3})=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3},$$

$$\arg(-1+i\sqrt{3})=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

Задача 171. Записать тригонометрическую форму комплексного числа, заданного в алгебраической форме.

Решение. Пусть комплексное число дано в алгебраической форме записи: $z=x+iy$. Тогда (x,y) – его декартовые координаты на комплексной плоскости. Пусть (r,φ) – полярные координаты комплексного числа z на комплексной плоскости. Тогда $r=|z|,\ \varphi=\arg z$.

Декартовые и полярные координаты связаны друг с другом соотношением:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}.$$

Отсюда получаем

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

или

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

– тригонометрическая форма записи комплексного числа, где $\varphi=\arg z$.

Таким образом, для решения данной задачи нужно найти модуль и аргумент комплексного числа, т.е. задача сводится к предыдущей задаче 170.

Пример. Записать следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

$$z=\pm 1,\ z=\pm 2i,\ z=-\sqrt{3}-3i,\ z=3-4i.$$

Решение. Как в задаче 170, находим модули и аргументы данных комплексных чисел. Запишем сразу ответ.

Ответ: $1=\cos 0+i\sin 0$, $-1=\cos\pi+i\sin\pi$,

$$2i=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}),\ -2i=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}),$$

$$-\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}),$$

$$3-4i=5(\cos\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)+i\sin\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)).$$

Задача 172. Найти модуль и аргумент комплексного числа, сопряженного данному.

Решение. Пусть дано комплексное число $z=x+iy=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $|z|$ – его модуль, $\varphi=\arg z$

– его аргумент. Пусть $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$. Так как модули комплексно сопряженных чисел равны, то задача заключается в нахождении аргумента комплексно сопряженного числа.

Заметим сразу, что если мнимая часть комплексного числа $\operatorname{Im} z = y = 0$, то есть $\arg z = 0$ или $\arg z = \pi$, то $\bar{z} = z$ и их аргументы равны.

В силу симметрии чисел $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ на комплексной плоскости относительно оси абсцисс, их радиус векторы также симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому угол поворота оси абсцисс до совпадения с радиус-вектором точки $\bar{z} = x - iy$ будет противоположен углу поворота оси абсцисс до совпадения с радиусом-вектором точки $z = x + iy$.

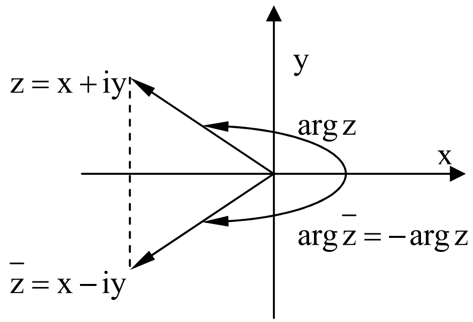

Рис. 7.

Если $\arg z \in [0; 2\pi)$ и нам нужно, чтобы $\arg \bar{z} \in [0; 2\pi)$, тогда полагаем

$$\arg \bar{z} = -\arg z + 2\pi .$$

Если $\arg z \in (-\pi; \pi)$, тогда $\arg \bar{z} = -\arg z \in (-\pi; \pi)$. Если найденный аргумент комплексно сопряженного числа получился при этом отрицательный, то, прибавив 2π, мы помещаем его на промежуток $[0; 2\pi)$.

Пример. Найдите модули и аргументы комплексных чисел, комплексно сопряженных следующим комплексным числам:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4},\ z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4},\ z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6},$$

$$z_4 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6},\ z_5 = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

Решение. Модули всех данных комплексных чисел равны 1. Аргументы первых четырех данных комплексных чисел лежат на промежутке $[0; 2\pi)$, поэтому

$$\arg \overline{z_k} = -\arg z_k + 2\pi,\ k = 1,2,3,4:\quad \arg \overline{z_1} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4},$$

$$\arg \overline{z_2} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4},\qquad \arg \overline{z_3} = -\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6},$$

$$\arg \overline{z_4} = -\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}.$$

Так как $\arg z_5 = -\frac{5\pi}{6}$, то $\arg \overline{z_5} = \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: $|z_k| = 1$, $\arg \overline{z_1} = \frac{7\pi}{4}$, $\arg \overline{z_2} = \frac{5\pi}{4}$, $\arg \overline{z_3} = \frac{5\pi}{6}$, $\arg \overline{z_4} = \frac{\pi}{6}$, $\arg \overline{z_5} = \frac{5\pi}{6}$.

Задача 173. Записать алгебраическую форму комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.

Решение. Пусть комплексное число задано в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Раскроем скобки:

$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi .$$

Получили алгебраическую форму записи данного комплексного числа. Если аргумент φ относится к табличным значениям тригонометрических углов, тогда мы можем заменить $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ на их соответствующие значения.

Пример. Найти алгебраическую форму записи следующих комплексных чисел:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4},\;\; z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$z_4 = \cos\frac{1}{6} + i\sin\frac{1}{6},\;\; z_5 = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

Ответ:

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\;\; z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\;\; z_3 = 2\cos\frac{17\pi}{16} + i2\sin\frac{17\pi}{16},$$

$$z_4 = \cos\frac{1}{6} + i\sin\frac{1}{6},\;\; z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Задача 174. Найти произведение двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Решение. Чтобы перемножить два числа в тригонометрической форме, нужно перемножить их модули, а аргументы сложить.

Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Замечания. 1) Прежде чем применить это правило, нужно убедиться, что числа даны в тригонометрической форме, т.е. аргументы, стоящие под знаком косинуса и синуса, равны и перед мнимой единицей i стоит знак плюс.

2) Число $\varphi_1+\varphi_2$ может оказаться вне промежутка $[0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$. В этом случае используем периодичность функций синуса и косинуса, чтобы аргумент полученного

произведения лежал в одном из указанных промежутков. Для этого достаточно к числу $\varphi_1+\varphi_2$ прибавить 2π или (-2π).

Пример. Найти произведение чисел и записать его в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$, $z_2 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$;

б) $z_1 = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$, $z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$.

Решение. а) $z_1 z_2 = 6\,(\cos\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)) =$

$$= 6(\cos\frac{19\pi}{6} + i\sin\frac{19\pi}{6}) = 6(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}).$$

б) Здесь число z_2 записано не в тригонометрической форме, как нужно. Выполним преобразования:

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right),\;\; -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Отсюда следует

$$z_2 = 2(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right))$$

– тригонометрическая форма комплексного числа z_2. Здесь мы воспользовались свойством нечетности синуса.

Теперь перемножаем по правилу:

$$z_1 z_2 = 6(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)) = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Ответ: а) $6(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$; б) $6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Задача 175. Найти частное двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Решение. Чтобы разделить одно комплексное число на другое, нужно модуль числителя разделить на модуль знаменателя и из аргумента числителя вычесть аргумент знаменателя. Причем, также как и при умножении, необходимо убедиться, что и числитель и знаменатель дроби записаны в тригонометрической форме.

Пример. Найти частное чисел и записать его в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}),\quad z_2 = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$;

б) $z_1 = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}),\quad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{3})$.

Решение. а) Оба числа записаны в тригонометрической форме, поэтому применяем правило деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}(\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}\right)) = \frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

б) Найдем сначала алгебраическую, а потом и тригонометрическую форму комплексного числа z_2.

$$z_2 = 2\cos\frac{\pi}{6} - i2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - i\sqrt{3} = \sqrt{6}\,(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)).$$

Теперь применяем правило деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{\sqrt{6}}\,(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\,(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}).$$

Ответ: а) $\frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$; б) $\frac{\sqrt{6}}{2}(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12})$.

Задача 176. Найти целую степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.

Решение. При решении этой задачи используется формула Муавра

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)},$$

где n – произвольное целое число. Из этой формулы следует более общая формула возведения комплексного числа в целую степень:

$$(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n\,(\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)).$$

Пример. Вычислить:

а) $(1+i\sqrt{3})^{10}$; б) $\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{2009}$; в) i^n; г) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$.

Решение. а) Находим тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Теперь вычисляем степень:

$$(1+i\sqrt{3})^{10} = \left(2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right)^{10} = 2^{10}(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}) =$$

$$= 2^{10}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^9(1+i\sqrt{3});$$

б) $$\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{2009} = \cos\frac{7\cdot 2009\pi}{12} + i\sin\frac{7\cdot 2009\pi}{12} =$$

$$= \cos(1171\frac{11}{12}\pi) + i\sin(1171\frac{11}{12}\pi) = \cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12};$$

в) Так как $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$, то разделим данное целое число n на 4:

$$n = 4m + r, \quad r = 0,1,2,3.$$

Отсюда, по свойствам степеней получаем

$$i^n = i^{4m+r} = (i^4)^m \cdot i^r = i^r,$$

и возможны 4 случая, в зависимости от остатка r:

1) $r = 0, \quad i^n = i^0 = 1$; 2) $r = 1, \quad i^n = i^1 = i$;

3) $r = 2, \quad i^n = i^2 = -1$; 4) $r = 3, \quad i^n = i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$.

Например, $-2009 = (-503)\cdot 4 + 3$, откуда $i^{-2009} = i^3 = -i$.

г) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^8 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$. Разделим показатель степени n на 8:

$$n = 8k + r, \quad r = 0,1,2,3,4,5,6,7.$$

Отсюда получаем

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^r = \cos\frac{r\pi}{4} + i\sin\frac{r\pi}{4},$$

где r – остаток от деления числа n на 8.

Ответ: а) $-2^9(1+i\sqrt{3})$; б) $\cos\dfrac{23\pi}{12} + i\sin\dfrac{23\pi}{12}$;

в) $i^n = \begin{cases} 1, & n \equiv 0 \pmod 4 \\ i, & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i, & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$;

г) $\cos\dfrac{r\pi}{4} + i\sin\dfrac{r\pi}{4}, \quad n \equiv r \pmod 8, \quad r = 0,1,2,3,4,5,6,7$.

Задача 177. Найти расстояние между двумя точками на комплексной плоскости.

Теорема. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ – два произвольных комплексных числа. Тогда расстояние между соответствующими точками, отождествленными с этими числами, равно

$$|z_1 - z_2|.$$

Доказательство. С одной стороны, расстояние на координатной плоскости между точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равно $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

С другой стороны, по формуле вычисления модуля комплексного числа, имеем:

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

откуда и следует теорема.

Теорему можно сформулировать другими словами (геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел): *модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками комплексной плоскости, отождествленными с этими числами.*

Пример. Найти стороны треугольника, образованного точками комплексной плоскости, отождествленными с комплексными числами: $z_1 = 2 + 3i, \ z_2 = -i, \ z_3 = -2$.

Решение. $|z_1 - z_2| = |2 + 4i| = 2|1 + 2i| = 2\sqrt{5}$,

$|z_1 - z_3| = |4 + 3i| = 5, \ |z_2 - z_3| = |2 - i| = 5$.

Ответ: $5, 5, 2\sqrt{5}$.

Задача 178. Изобразить все точки на комплексной плоскости, удаленные от данной точки на заданное расстояние.

Пусть дана фиксированная точка на комплексной плоскости $z_o = x_o + iy_o$ и действительное число $a > 0$. Требуется

найти геометрическое место точек этой плоскости, удовлетворяющих условиям:
а) $|z - z_o| = a$; б) $|z - z_o| < a$; в) $|z - z_o| > a$.

Решение. Решение этой задачи сразу же следует из геометрического смысла модуля разности двух комплексных чисел.
а) Это точки окружности радиуса a с центром в точке z_o.

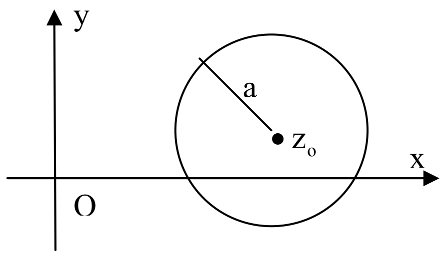

Рис. 8.

б) Это точки, находящиеся внутри круга с центром в точке z_o и радиуса a.

в) Это точки, находящиеся вне круга с центром в точке z_o и радиуса a.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $|z - i| \le 1$.
Ответ: рисунок 9.

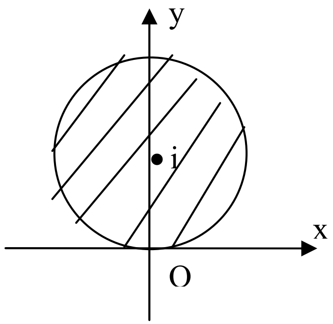

Рис. 9.

Задача 179. Изобразить на комплексной плоскости все комплексные числа, имеющие постоянный заданный аргумент.

Решение. Пусть зафиксирован угол $\varphi \in [0; 2\pi)$. Тогда множество точек комплексной плоскости, имеющих полярный угол φ, образуют луч, выходящий из начала координат под углом φ к оси абсцисс, причем начало координат в это множество не входит:

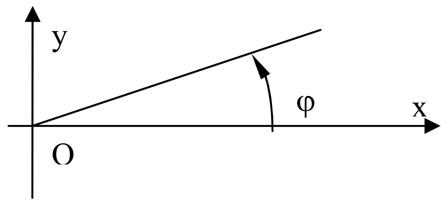

Рис. 10.

Комплексные числа, имеющие одинаковый аргумент $\arg z = \varphi$, отождествляются с точками, лежащими на этом луче.

Пример. Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, имеющих одинаковый аргумент $\arg z = \frac{4\pi}{3}$.

Ответ: рисунок 11.

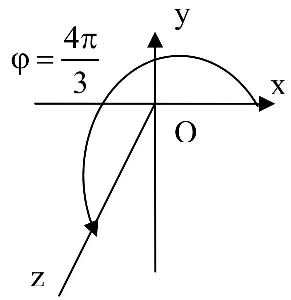

Рис. 11.

Задача 180. Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих заданным условиям.

Условия могут быть самыми различными. Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:
а) $-1 \le \operatorname{Re} z < 2$; б) $-2 < \operatorname{Im} z \le 2$; в) $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$;
г) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) \ge 1$.

Решение. а) Пусть $z = x + iy$. Тогда $\operatorname{Re} z = x$ и условие задачи можно переформулировать следующим образом. Найти геометрическое место точек на координатной плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $-1 \le x < 2$. Строим на координатной плоскости две прямые: $x = -1$ и $x = 2$:

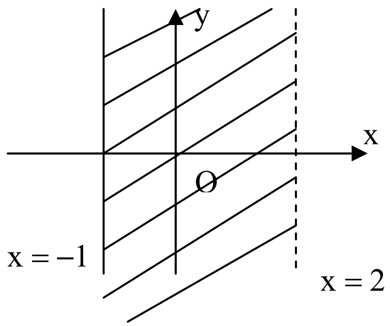

Рис. 12.

Искомое ГМТ находится в полосе между этими прямыми, причем точки прямой $x = 2$ не входят в искомое множество точек.

б) Аналогично предыдущему примеру, искомое множество точек находится на координатной плоскости Oxy в полосе между прямыми $y = -2, y = 2$, где $y = \operatorname{Im} z$, причем

точки прямой $y = -2$ не входят в это множество. Изобразить соответствующий рисунок предоставляется читателю.

в) Неравенство $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ на комплексной плоскости равносильно неравенству $y > x$ на координатной плоскости Oxy. Искомое множество точек изображено на рисунке 13.

г) Подставим в левую часть неравенства $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) \ge 1$,

$z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Получаем,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}+2z}{z\cdot\bar{z}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x - iy + 2x + i2y}{|z|^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

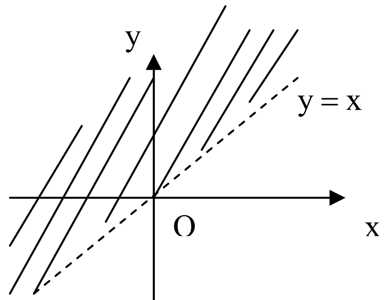

Рис. 13.

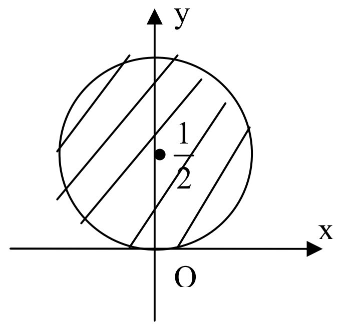

Рис. 14.

Таким образом, имеем неравенство $\frac{y}{x^2+y^2} \ge 1$. Преобразуем его. Так как по условию $z \ne 0$, то $x^2+y^2>0$, отсюда $x^2+y^2 \le y$. Переносим y в левую часть неравенства и дополняем до полного квадрата. Получаем равносильное неравенство

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}.$$

На координатной плоскости Oxy, множество точек, координаты которых удовлетворяют этому неравенству, есть множество точек круга с центром в точке с координатами $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ и с радиусом $\frac{1}{2}$ (смотрите рисунок 14).

Задача 181. Из всех комплексных чисел, удаленных от заданного комплексного числа на заданное расстояние, найти комплексное число с наименьшим модулем.

Пример. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-1-2i|=1$ найдите число с наименьшим модулем.

Решение. Точки z, удовлетворяющие уравнению, суть точки окружности радиуса 1 с центром в точке $z_o=1+2i$. Соединим центр окружности с началом координат отрезком прямой. Тогда точка пересечения этой прямой с окружностью и будет, очевидно, искомой точкой.

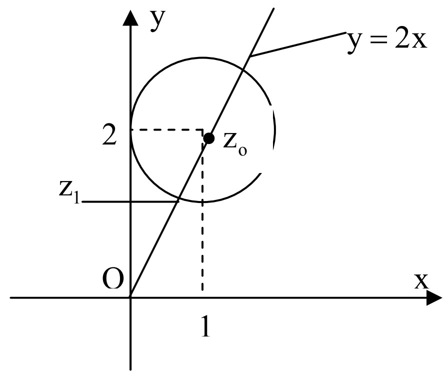

Рис. 15.

Здесь удобнее найти полярные координаты искомой точки z_1. Так как точки z_1 и z_o лежат на одном луче, то их аргументы равны:

$$\arg z_1 = \arg z_o = \operatorname{arctg} 2 = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Несложно найти модуль числа z_1:

$$|z_1| = |z_o| - 1 = \sqrt{5}-1.$$

Отсюда легко находим и тригонометрическую и алгебраическую форму записи:

$$z_1 = (\sqrt{5}-1)\left(\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+i\sin\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) =$$

$$=\frac{5-\sqrt{5}}{5}(1+2i).$$

Ответ: $\frac{5-\sqrt{5}}{5}(1+2i)$.

Глава 22. Корни из комплексных чисел

Задача 182. Вычислить квадратный корень из комплексного числа.

Определение. Корнем квадратным из комплексного числа z называется комплексное число α, такое, что $z=\alpha^2$.

Из теории комплексных чисел известно, что существует ровно 2 корня из ненулевого комплексного числа, и они противоположны друг другу.

В отличие от действительных корней здесь не существует понятия арифметического квадратного корня, ибо нельзя отдать какое-либо предпочтение одному из двух комплексных корней, поэтому оба корня обозначаются одним символом $\sqrt{z}$.

Пусть α – один из квадратных корней из комплексного числа z, тогда

$$\boxed{\sqrt{z}=\{\alpha,-\alpha\}}.$$

То есть, символ $\sqrt{z}$ обозначает здесь множество всех квадратных корней из комплексного числа z. Однако, по традиции, пишут

$$\sqrt{z}=\pm\alpha .$$

Теорема.

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})}+i(\operatorname{sgn} b)\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}\right)$$

Доказательство. Обозначим через $\alpha=x+yi$ один из двух квадратных корней из комплексного числа $z=a+bi$. Тогда $a+bi=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и мнимые части. Отсюда следуют два равенства:

$$\begin{cases} a=x^2-y^2 \\ b=2xy \end{cases} \qquad (1)$$

Наша задача свелась к решению системы (1). Возведем оба уравнения в квадрат и сложим:

$$a^2+b^2=x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2=(x^2+y^2)^2 .$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} a=x^2-y^2 \\ \sqrt{a^2+b^2}=x^2+y^2 \end{cases}.$$

Решая последнюю систему, находим:

$$x^2=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2}),\quad y^2=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2}) .$$

Отсюда

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+b^2})},\quad y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})} .$$

Нам достаточно найти только один из искомых корней, поэтому число x выбираем положительное. Тогда из второго уравнения системы (1) мы видим, что знак y совпадает со знаком числа b. С учетом этого замечания, из последних равенств получаем доказываемую формулу.

Теорема доказана.

Пример. Вычислить: а) $\sqrt{3+4i}$; б) $\sqrt{\sqrt{3}-i}$.

Решение.

а) $\sqrt{3+4i}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{3^2+4^2}}{2}}\right)=\pm(2+i)$;

б) $\sqrt{\sqrt{3}-i}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}-i\sqrt{\frac{-\sqrt{3}+2}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}-i\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}\right)=$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{4}}-i\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{4}}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

Ответ: а) $\pm(2+i)$; б) $\pm\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-i\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.

Задача 183. Вычислить квадратный корень из отрицательного действительного числа.

Решение. Пусть $a<0$ – действительное отрицательное число. Тогда, рассматривая его как комплексное число

$$a=a+0\cdot i,$$

можно говорить о квадратных корнях из такого числа. По формуле квадратных корней из комплексного числа, получаем:

$$\sqrt{a}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+0^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+0^2}}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{a+|a|}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+|a|}{2}}\right)=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{a-a}{2}}+i\sqrt{\frac{-a-a}{2}}\right)=\pm i\sqrt{-a}=\pm i\sqrt{|a|}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Пусть $a<0$. Тогда $\sqrt{a}=\pm i\sqrt{|a|}$.

Пример. Вычислить: а) $\sqrt{-3}$; б) $\sqrt{-1}$.

Ответ: а) $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$; б) $\sqrt{-1}=\pm i$.

Замечание. В поле комплексных чисел формула

$$\sqrt{z_1 z_2}=\sqrt{z_1}\cdot\sqrt{z_2}$$

верна тогда и только тогда, когда один из сомножителей является положительным действительным числом. В противном случае эта формула неверна.

Контрпример. $1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$.

Получили противоречие.

Задача 184. Решить в поле комплексных чисел квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом.

Решение. Пусть дано квадратное уравнение над полем R:

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a,b,c\in R$, $a\neq 0$, $D=b^2-4ac<0$. По теореме предыдущей задачи $\sqrt{D}=\pm i\sqrt{|D|}$, откуда по формуле корней квадратного уравнения, которая справедлива и в поле комплексных чисел, имеем:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

– комплексные корни данного квадратного уравнения.

Пример. Решить уравнение: а) $x^2+x+1=0$; б) $x^4-4=0$.
Решение. а) Находим дискриминант: $D=1-4=-3$. Подставляя в формулу корней квадратного уравнения, получаем

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

б) Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^4-4=(x^2)^2-2^2=(x^2-2)(x^2+2)=$$
$$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2).$$

Решаем квадратное уравнение $x^2+2=0$. Имеем

$$x^2=-2,\quad x_{1,2}=\pm i\sqrt{2}\,.$$

Ответ: а) $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$; б) $x_{1,2}=\pm i\sqrt{2}, x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$.

Задача 185. Решить квадратное уравнение с комплексными коэффициентами.

Решение. Пусть дано квадратное уравнение над полем комплексных чисел:

$$ax^2+bx+c=0\,,$$

где $a,b,c\in C, a\neq 0$. По формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\,,$$

где $D=b^2-4ac$ – дискриминант, причем D – комплексное число, и существует ровно два квадратных корня из этого числа, если оно не равно нулю. Так как в формуле корней квадратного уравнения перед корнем из дискриминанта уже стоит знак плюс-минус, то достаточно найти только один из двух квадратных корней из дискриминанта D (смотрите задачу 182).

Пример. Решить уравнение $(1+i)x^2-(5+3i)x+10=0$.

Решение.

$$D=(5+3i)^2-40(1+i)=25-9+30i-40-40i=-24-10i\,,$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-12-5i}=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{-12+13}{2}}-i\sqrt{\frac{12+13}{2}}\right)=1-5i\,,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{(5+3i)\pm(1-5i)}{2(1+i)}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{6-2i}{2(1+i)}=1-2i\\[2ex]\dfrac{4+8i}{2(1+i)}=3+i\end{array}\right.\,.$$

Ответ: $x_1=1-2i, x_2=3+i$.

Задача 186. Найти все корни данной натуральной степени из данного комплексного числа и изобразить их на комплексной плоскости.

Определение. Пусть n натуральное число. Комплексное число α называется корнем n-й степени из комплексного числа z, если $\alpha^n=z$.

Теорема. Существует ровно n корней n-й степени из комплексного числа z и все они могут быть найдены по формуле:

$$\alpha_k=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\qquad (1)$$

где $k=0,1,\ldots,n-1$, $\varphi=\arg z$.

Обозначение: $\sqrt{z}\doteq\{\alpha_o,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\}$.

Из формулы корней (1) мы видим, что все корни $\alpha_k, k=1,2,\ldots,n-1$ имеют одинаковый модуль $|\alpha_k|=\sqrt[n]{|z|}$. Следовательно, на комплексной плоскости все они расположены на окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt[n]{|z|}$.

Обозначим аргумент k-го корня через φ_k. Тогда из формулы (1) следует, что

$$\varphi_k=\frac{\varphi+2\pi k}{n},\quad k=0,1,\ldots,n-1\,.\qquad (2)$$

Заметим, что аргументы корней образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=\dfrac{2\pi}{n}$ и первым членом прогрессии $\varphi_o=\dfrac{\varphi}{n}$, т.е. имеет место формула

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{2\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-2.. \qquad (3)$$

Таким образом, корни расположены на окружности равномерно, через равные промежутки и разбивают окружность на n равных дуг. Другими словами, точки окружности, отождествленные с корнями, являются вершинами правильного n-угольника.

Определение. Вершины правильного n-угольника называются точками деления окружности (круга), описанной около данного многоугольника.

Другими словами, все корни n-й степени из комплексного числа на комплексной плоскости являются точками деления круга.

Отсюда вытекает способ нахождения всех корней n-й степени из комплексного числа $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1) Вычисляем $\sqrt[n]{|z|}$ и изображаем на комплексной плоскости окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

2) Находим аргумент корня с номером 0: $\arg\alpha_o = \dfrac{\varphi}{n}$ и изображаем корень α_o соответствующей точкой на этой окружности.

3) Делим окружность на n равных частей, пользуясь тем, что одна точка деления круга α_o у нас уже есть.

4) Вычисляем по формуле (2) или (3) аргументы всех остальных корней и выписываем найденные корни в тригонометрической форме записи.

Пример. Найти все корни данной натуральной степени из данного комплексного числа и изобразить их на комплексной плоскости: а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.

Решение. а) $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$, т.е. $|i| = 1$, $\varphi = \arg i = \dfrac{\pi}{2}$. Находим $\varphi_o = \dfrac{\varphi}{n} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$ и отмечаем корень $\alpha_o = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$ на окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Далее делим окружность на 3 равные части (смотрите рисунок 16) и находим:

$$\varphi_1 = \varphi_o + \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}, \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

Выписываем найденные корни:

$$\alpha_o = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \ \alpha_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

$$\alpha_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

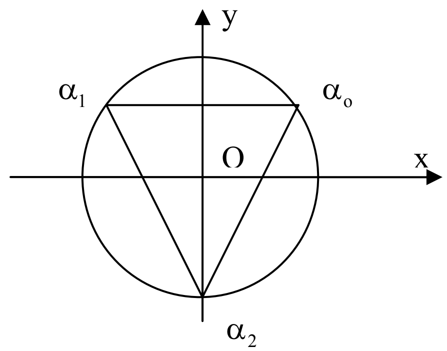

Рис. 16.

б) $-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$, $\quad |-1-i\sqrt{3}| = 2$,

$$\varphi=\arg(-1-i\sqrt{3})=\frac{4\pi}{3}, \qquad \varphi_o=\frac{\varphi}{n}=\frac{\frac{4\pi}{3}}{4}=\frac{\pi}{3},$$

$$\alpha_o=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Отмечаем корень $\alpha_o=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ на окружности радиуса 2 с центром в начале координат и делим ее на 4 равные части (смотрите рисунок 17).

Вычисляем аргументы остальных корней:

$$\varphi_1=\varphi_o+\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}, \qquad \varphi_2=\varphi_1+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi}{3}.$$

$$\varphi_3=\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{11\pi}{6}.$$

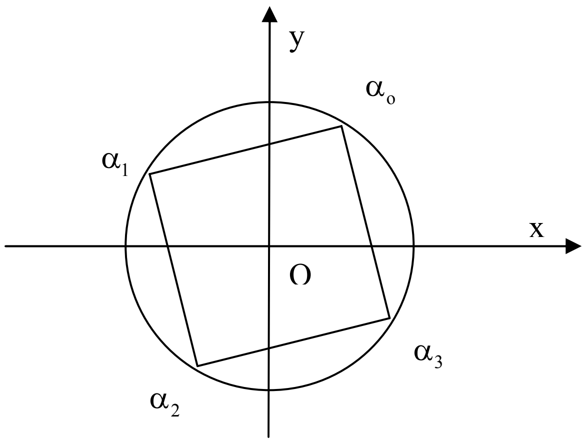

Рис. 17.

Выписываем все найденные корни:

$$\alpha_o=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3},$$

$$\alpha_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i,$$

$$\alpha_2=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-1-i\sqrt{3},$$

$$\alpha_3=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i.$$

Ответ: а) $\sqrt[3]{i}=\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},-i\right\}$;

б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}=\left\{\pm(1+i\sqrt{3}),\pm(\sqrt{3}-i)\right\}$.

Задача 187. Разложить многочлен на линейные множители.

Теорема. Любой многочлен над полем комплексных чисел имеет столько корней, какова его степень.

Приведенная здесь теорема является одной из формулировок основной теоремы алгебры. Из этой теоремы следует, что любой многочлен с действительными или комплексными коэффициентами единственным образом, с точностью до перестановки сомножителей, может быть представлен в виде:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o=a_n(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n),$$

где $a_n\neq 0$, $x_1,x_2,...,x_n$ – корни многочлена.

Случай квадратных уравнений разобран в задаче 185. Рассмотрим на примерах некоторые частные случаи многочленов более высокой степени. Полезно при этом учитывать следующую теорему.

Теорема. Пусть многочлен

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_o$$

имеет целые коэффициенты. Тогда если несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ является корнем этого многочлена, то ее числитель p является делителем свободного члена a_o, а знаменатель q является делителем старшего коэффициента a_n.

С помощью этой теоремы можно перебрать все возможные варианты таких дробей и выяснить, есть ли среди них рациональные корни многочлена.

Пример. Разложить на линейные множители многочлен:
а) $2x^3+3x^2+2x-2=0$; б) $x^4-x^3+x^2-11x+10=0$.
Решение. а) Находим рациональный корень уравнения $x_1=\dfrac{1}{2}$. Делим многочлен $f(x)=2x^3+3x^2+2x-2$ на линейный двучлен $x-\dfrac{1}{2}$:

$$2x^3+3x^2+2x-2=(x-\frac{1}{2})(2x^2+4x+4)=$$

$$=(2x-1)(x^2+2x+2).$$

Решаем квадратное уравнение $x^2+2x+2=0$ и находим его корни: $x_{2,3}=-1\pm i$. Зная все корни многочлена, пишем его разложение на линейные множители:

$$2x^3+3x^2+2x-2=2(x-\frac{1}{2})(x-(-1-i))(x-(-1+i))=$$

$$=2(x-\frac{1}{2})(x+1+i)(x+1-i).$$

б) Находим рациональные корни уравнения $x_1=1,\ x_2=2$. Делим многочлен $f(x)=x^4-x^3+x^2-11x+10$ на многочлен $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$:

$$x^4-x^3+x^2-11x+10=(x^2-3x+2)(x^2+2x+5).$$

Решаем квадратное уравнение $x^2+2x+5=0$ и находим его корни: $x_{2,3}=-1\pm 2i$. Зная все корни многочлена, пишем его разложение на линейные множители:

$$x^4-x^3+x^2-11x+10=(x-1)(x-2)(x+1+2i)(x+1-2i).$$

Ответ: а) $(2x-1)(x+1+i)(x+1-i)$;
б) $(x-1)(x-2)(x+1+2i)(x+1-2i)$.

Глава 23. Корни из единицы

Задача 188. Найти все корни n-й степени из 1 и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение. Пусть $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$. Тогда, применяя формулу корней n-й степени из комплексного числа, получаем:

$$\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_o, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}\},$$

где обозначено

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,...,n-1. \qquad (1)$$

Из этой формулы мы видим, что

$$\varphi_o = \arg\varepsilon_o = 0,\ \varphi_k = \frac{2\pi}{n}\cdot k,\ \varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{2\pi}{n},\ k = 0,1,...,n-2.$$

Таким образом, все n корней n-й степени из 1 расположены на комплексной плоскости на единичной окружности, которую можно рассматривать как тригонометрическую окружность, делят ее на n равных дуг, равных $\frac{2\pi}{n}$ радиан, причем $\varepsilon_o = 1$ – одна из n точек деления круга. Соединив все последовательные (соседние) точки ε_k, $k = 0,1,...,n-1$ отрезками прямых, мы получаем правильный n-угольник.

Пример. Найти все корни $\sqrt[n]{1}$ и изобразить их на комплексной плоскости: а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[6]{1}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{1} = \{\varepsilon_o, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0,1,2,$$

$$\varepsilon_o = \cos 0 + i\sin 0, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Корни третьей степени из 1 делят окружность на 3 равных дуги по 120^o или по $\frac{2\pi}{3}$ радиан, смотрите рисунок 18.

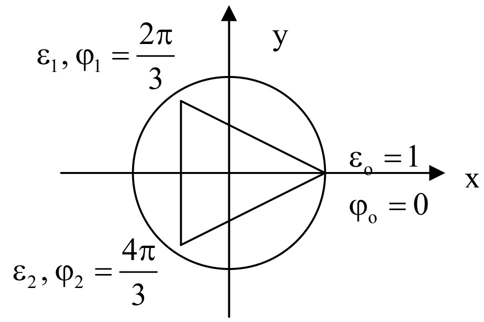

Рис. 18.

б) $\sqrt[6]{1} = \{\varepsilon_o, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$,

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6} = \cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}, \quad k = 0,1,2,3,4,5,$$

$$\varepsilon_o = \cos 0 + i\sin 0, \quad \varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

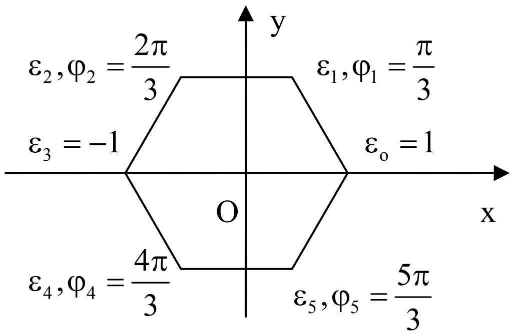

Рис. 19.

Ответ: а) $\sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, рисунок 18;

б) $\sqrt[6]{1} = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, рисунок 19.

Задача 189. Записать все корни n-ой степени из 1 в виде степеней одного корня.

Решение. В предыдущей задаче мы видели, что

$$\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_o, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}\},$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,...,n-1.$$

Обозначим

$$\varepsilon \doteq \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Тогда по формуле Муавра

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \varepsilon^k,$$

$$k = 0,1,...,n-1.$$

Следовательно, $\sqrt[n]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}\}$.

Пример. Записать все корни третьей степени из 1 в виде степеней одного корня.

Решение. $\sqrt[3]{1} = \{\varepsilon_o, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, где

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0,1,2.$$

Обозначим $\varepsilon = \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Тогда,

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \varepsilon^2.$$

Ответ: $\sqrt[3]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, где $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Определение. Корень n-й степени из 1 называется первообразным корнем n-й степени из 1, если все корни из 1 являются его степенями.

Следствие. Корень n-й степени из 1, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем n-й степени из 1.

Теорема. Корень n-й степени из 1, $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ является первообразным корнем n-й степени из 1 тогда и только тогда, когда н.о.д.$(k,n) = 1$.

Пример. Найти все первообразные корни 3-й и 6-й степени из числа 1.

Решение. а) $\sqrt[3]{1} = \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Из чисел $\{0,1,2\}$ только два числа являются взаимно простыми с числом 3. Это числа 1 и 2. Поэтому первообразными корнями 3-й степени из 1 являются только два корня: ε_1 и ε_2.

б) $\sqrt[6]{1}=\{\varepsilon_o,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5\}$. Так как из чисел $\{0,1,2,3,4,5\}$ взаимно простыми с числом 6 являются числа 1 и 5, то первообразными корнями 6-й степени из 1 являются только два корня: ε_1 и ε_5.

Ответ: а) $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, где $\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}, \quad k=1,2$;

б) $\{\varepsilon_1,\varepsilon_5\}$, где $\varepsilon_k=\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}, \quad k=1,5$.

Задача 190. Построить таблицу умножения для всех корней n-ой степени из 1.

Теорема. Все корни n-й степени из 1 образуют коммутативную группу относительно умножения.

Обозначим через $T_n=\{\varepsilon_o,\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1}\}$ – группу корней n-й степени из 1 и запишем все ее элементы в виде степеней одного первообразного корня (смотрите предыдущую задачу): $T_n=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,...,\varepsilon^{n-1}\}$.

Определение. Группа, все элементы которой являются степенями одного ее элемента, называется циклической.

Определение. Число элементов конечной группы называется ее порядком.

Из определений следует, что группа корней n-й степени из 1 является циклической группой n-го порядка.

Найдем произведение любых двух элементов этой группы. Пусть $k,m\in\{0,1,...,n-1\}$. Тогда возможны два варианта:

1) $k+m\in\{0,1,...,n-1\}$;
2) $k+m=n+r$, где $r\in\{0,1,...,n-1\}$.

Отсюда следует, что

$$\varepsilon^k\cdot\varepsilon^m=\varepsilon^{k+m}=\begin{cases}\varepsilon^{k+m}, \text{ если } k+m<n\\ \varepsilon^r, \text{ если } k+m\ge n\end{cases}.$$

Действительно, так как

$$\varepsilon^n=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

то во втором случае $\varepsilon^k\cdot\varepsilon^m=\varepsilon^{k+m}=\varepsilon^{n+r}=\varepsilon^n\cdot\varepsilon^r=\varepsilon^r$.

Доказанное нами правило умножения корней n-й степени из 1, позволяет нам построить таблицу умножения для элементов группы $T_n=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,...,\varepsilon^{n-1}\}$.

Пример. Построить таблицу умножения для группы корней 3-й степени из 1.

Решение. $T_3=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$. Здесь, $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, поэтому $\varepsilon^3=1$. Единственное произведение элементов этой группы находится по второму варианту: $\varepsilon^2\cdot\varepsilon^2=\varepsilon^4=\varepsilon^3\cdot\varepsilon=\varepsilon$.

Ответ:

$\cdot$	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

.

Задача 191. Разложить многочлен x^n-1 на линейные множители.

Решение. В силу основной теоремы алгебры многочлен x^n-1 имеет в поле комплексных чисел n корней и, как легко видеть, все они являются корнями n-й степени из 1. Следовательно,

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_{n-1}),$$

где $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1$.

Пример. Разложить на линейные множители многочлен:
а) $x^3 - 1$; б) $x^6 - 1$.

Решение. а) Находим все корни из 1 третьей и шестой степени (смотрите пример задачи 188):

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \qquad \sqrt[6]{1} = \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Ответ: а) $x^3 - 1 = (x-1)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $x^6 - 1 = (x-1)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot$

$$\cdot(x+1)\left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Заметим, что $x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1)$. Отсюда следует, что все корни многочлена $x^n + 1$ являются корнями из 1 степени 2n и одновременно они являются корнями n-й степени из –1. Более того, если

$$\sqrt[2n]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{2n-1}\},$$

то нетрудно проверить, что именно нечетные степени корня $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ степени 2n из 1 будут корнями n-й степени из –1:

$$\sqrt[n]{-1} = \{\varepsilon, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^{2n-1}\}.$$

Действительно,

$$\varepsilon^{2k-1} = \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2k-1} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n},$$

$$\left(\varepsilon^{2k-1}\right)^n = \left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)^n =$$

$$= \cos(2k-1)\pi + i\sin(2k-1)\pi = -1.$$

Так из 6 корней 6-й степени из 1: $\sqrt[6]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5\}$ следующие 3 корня будут корнями 3-й степени из –1:

$$\sqrt[3]{-1} = \{\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^5\}.$$

Заметим еще, что для любого корня n-й степени из 1:

$$\varepsilon^{-k} = \overline{\varepsilon^k} = \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Отсюда следует, что для корня 6-й степени из 1,

$$\varepsilon^5 = \varepsilon^6 \cdot \varepsilon^{-1} = \bar{\varepsilon} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: б) $x^3 + 1 = (x+1)\left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 192. Разложить многочлен на неприводимые множители над полем действительных чисел.

Определение. Пусть $f(x)$ – произвольный многочлен с коэффициентами из поля K, степень которого больше или равна 1. Многочлен $f(x)$ называется неприводимым (неразложимым) над полем K, если его невозможно разложить в произведение двух многочленов с коэффициентами из поля K, чтобы степень каждого множителя тоже была больше или равна 1. В противном случае многочлен $f(x)$ называется приводимым или разложимым над полем K.

Примеры. 1) Все многочлены первой степени являются неприводимыми над любым полем.

2) Многочлен x^2+1 является неприводимым над полем действительных чисел и приводимым над полем комплексных чисел:

$$x^2+1=(x-i)(x+i).$$

3) Любой квадратный трехчлен с действительными коэффициентами и с отрицательным дискриминантом является неприводимым над полем действительных чисел и приводимым над полем комплексных чисел.

Теорема. Над полем действительных чисел неприводимыми многочленами являются только линейные многочлены и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Над полем комплексных чисел неприводимыми многочленами являются только многочлены первой степени.

Теорема. Пусть многочлен

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_o$$

имеет действительные коэффициенты. Тогда если комплексное число $z=a+bi$ является его корнем, то комплексно сопряженное ему число $\bar{z}=a-bi$ также является корнем этого многочлена.

Доказательство. Пусть $f(z)=0$. Тогда по свойствам комплексно сопряженных чисел имеем:

$$f(\bar{z})=a_n(\bar{z})^n+a_{n-1}(\bar{z})^{n-1}+\ldots+a_o=$$
$$=\overline{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_o}=\overline{f(z)}=\bar{0}=0.$$

Теорема доказана.

Разложим многочлен

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_o$$

с действительными коэффициентами на n линейных множителей. Это возможно по основной теореме алгебры. В силу предыдущей теоремы, если α – комплексный корень многочлена $f(x)$, то комплексно сопряженное ему число $\bar{\alpha}$ также является его корнем. Поэтому в разложении многочлена $f(x)$ все его линейные множители, содержащие комплексные корни можно сгруппировать попарно. Рассмотрим одну такую пару:

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(\alpha+\bar{\alpha})x+\alpha\cdot\bar{\alpha}.$$

Заметим далее, что $\alpha+\bar{\alpha}=2\operatorname{Re}\alpha$, $\alpha\cdot\bar{\alpha}=|\alpha|^2$, откуда

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})=x^2-(2\operatorname{Re}\alpha)x+|\alpha|^2.$$

В результате мы получили квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Так как он не имеет действительных корней, то его дискриминант меньше нуля. Следовательно, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Любой многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами можно разложить на линейные множители вида $(x-a)$, где a – действительный корень многочлена $f(x)$ и квадратичные множители с отрицательным дискриминантом, т.е.

$$f(x)=a_n(x-x_1)\ldots(x-x_s)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_tx+q_t),$$

где a_n – старший коэффициент многочлена $f(x)$,

$x_1,\ldots,x_s$ – действительные корни многочлена $f(x)$,

$$(x^2+p_1x+q_1),\ \ldots,\ (x^2+p_tx+q_t)$$

– квадратичные трехчлены с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом.

Мы упростим себе задачу, и будем заниматься разложением на неприводимые множители над полем действительных чисел только многочлены вида

$$f(x) = x^n - a,\ a \in R\,.$$

Пример. Разложить многочлен на неприводимые над полем действительных чисел множители:

а) $x^3 - 8$; б) $x^6 - 64$; в) $x^4 + 16$.

Решение. а) Разложим многочлен $x^3 - 8$ по формуле разности кубов:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)\,.$$

Квадратный трехчлен неприводим над R, т.к. его дискриминант $D = 4 - 16 = -12 < 0$.

б) Разложим многочлен $x^6 - 64$ по формуле разности квадратов:

$$x^6 - 64 = (x^3 - 8)(x^3 + 8)\,.$$

Кубические двучлены $x^3 - 8$ и $x^3 + 8$ разложим по формулам разности и суммы кубов:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4),\quad x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)\,.$$

Квадратные трехчлены $x^2 + 2x + 4$ и $x^2 - 2x + 4$ имеют отрицательный дискриминант и неприводимы над R.

$$x^6 - 64 = (x-2)(x+2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)\,.$$

в) Найдем все корни 4-й степени из –16. Так как $\sqrt[4]{-16} = 4\sqrt[4]{-1}$, то достаточно найти все корни 4-й степени из –1:

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi,\quad \sqrt[4]{-1} = \{\alpha_k\},\quad k = 0,1,2,3\text{, где}$$

$$\alpha_k = \cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\,.$$

$$\alpha_o = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,,$$

$$\alpha_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\,,$$

$$\alpha_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\,,$$

$$\alpha_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,.$$

Следовательно, $\sqrt[4]{-16} = 2\sqrt[4]{-1} = \{\sqrt{2}\,(\pm 1 \pm i)\}$ и разложение многочлена $x^4 + 16$ над полем комплексных чисел имеет вид:

$$x^4 + 16 =$$

$$= (x - \sqrt{2}(1+i))(x - \sqrt{2}(1-i))(x - \sqrt{2}(-1-i))(x - \sqrt{2}(-1+i))$$

Перемножая попарно линейные множители с комплексно сопряженными корнями, получаем:

$$(x - \sqrt{2}(1+i))(x - \sqrt{2}(1-i)) = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4\,,$$

$$(x - \sqrt{2}(-1+i))(x - \sqrt{2}(-1-i)) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 4\,,$$

$$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)\,.$$

Последнее разложение можно получить еще одним способом:

$$x^4 + 16 = ((x^2)^2 + 8x^2 + 4^2) - 8x^2 = (x^2 + 4)^2 - (2\sqrt{2}x)^2 =$$

$$= (x^2 + 4 - 2\sqrt{2}x)(x^2 + 4 + 2\sqrt{2}x)\,.$$

Ответ: а) $x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$;

б) $x^6 - 64 = (x-2)(x+2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$;

в) $x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$.

УПРАЖНЕНИЯ

164. Пусть $z_1=(-3+2i),\ z_2=-2-i,\ z_3=i,\ z_4=-6$. Вычислить: а) $z_1+z_2-z_3$; б) $z_1-z_2+z_4$; в) $z_2-z_3-z_4$; г) z_3-z_4.

165. Пусть $z_1=-2+i,\ z_2=1-2i,\ z_3=-i,\ z_4=3$. Вычислить: а) z_1z_2; б) z_1z_3; в) z_1z_4; г) z_3z_4; д) z_1^2; е) $-2z_1+z_1^2+z_3^5$.

166. Пусть $z_1=1+i, z_2=-4-2i, z_3=3i, z_4=-2$. Вычислить: а) $\dfrac{z_1}{z_2}$; б) $\dfrac{z_2}{z_3}$; в) $\dfrac{z_2}{z_4}$; г) $\dfrac{z_4}{z_3}$; д) $\dfrac{z_1^3}{z_3^2}$.

167. Найти $\bar{z}$, если $z=\dfrac{(2-i)^3}{(2+i)^2}$.

168. Следующие комплексные числа изобразить на комплексной плоскости:

$$z=1+2i,\quad z=2-i,\quad z=-2+2i,\quad z=-2-i.$$

169. Постройте на комплексной плоскости комплексное число $z=-3-4i$ и комплексно сопряженное ему.

170. Найти модули и аргументы следующих комплексных чисел: $z=2,\ z=-3,\ z=2i,\ z=-2i,\ z=\pm\sqrt{3}\pm i$.

171. Запишите следующие комплексные числа в тригонометрической форме:

$$z=-\pi,\quad z=-\frac{3i}{2},\quad z=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i},\quad z=-3-4i.$$

172. Найдите модули и аргументы комплексных чисел, комплексно сопряженных следующим комплексным числам:

$$z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\quad z_2=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4},$$

$$z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}.$$

173. Найдите алгебраическую форму записи следующих комплексных чисел:

$$z_1=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\quad z_2=\cos\frac{3}{4}+i\sin\frac{3}{4},$$

$$z_3=2\left(\cos 17\pi-i\sin\frac{17\pi}{2}\right),$$

$$z_4=\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6},\quad z_5=\cos\frac{2009\pi}{3}+i\sin\frac{2009\pi}{3}.$$

174. Найти произведение чисел и записать в тригонометрической форме:

а) $z_1=3\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right),\quad z_2=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$;

б) $z_1=3\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}-i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right),\quad z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

175. Найти частное чисел и записать в тригонометрической форме:

а) $z_1=3\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right),\quad z_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

б) $z_1=3\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right),\quad z_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

176. Вычислить: а) $(\sqrt{3}+i)^{12}$; б) $\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)^{2009}$;

в) i^{1914}; г) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$.

177. Образуют ли треугольник, точки комплексной плоскости, отождествленные с комплексными числами: $z_1=3-2i,\ z_2=i,\ z_3=-2+3i$.

178. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $|z-i+1|\geq\sqrt{2}$.

179. Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, имеющих одинаковый аргумент $\arg z=\frac{11\pi}{6}$.

180. Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

а) $|\operatorname{Re} z|<2,\ |\operatorname{Im} z|<\frac{\sqrt{2}}{2},\ |z|\geq 1$; б) $\operatorname{Re}\frac{2}{\bar{z}+1}\leq 1$;

в) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}+i\right)\leq \operatorname{Im}\frac{2}{z}$.

181. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z-2+2i|=3$, найдите число с наибольшим модулем.

182. Вычислить: а) $\sqrt{5-12i}$; б) $\sqrt{-i}$; в) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$.

183. Вычислить: а) $\sqrt{-12}$; б) $\sqrt{\frac{(1-i)^2}{i}}$.

184. Решить уравнения:

а) $x^2+2x+2=0$; б) $x^4-16=0$.

185. Решить уравнение $x^4-(7+i)x^2+24+7i=0$.

186. Найти тригонометрическую форму записи всех корней данной натуральной степени из данного комплексного числа и изобразить их на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[3]{-i}$; б) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$.

187. Разложить на линейные множители многочлены:

а) $x^3-x^2+2x+4=0$; б) $x^4-5x^3+2x^2-4x+48=0$.

188. Найти все корни $\sqrt[n]{1}$ и изобразить их на комплексной плоскости:

а) $\sqrt[4]{1}$; б) $\sqrt[8]{1}$.

189. Записать все корни 4-й и 8-й степени из 1 в виде степеней одного корня.

190. Построить таблицы умножения для группы корней 4-й и 8-й степени из 1.

191. Разложить на линейные множители многочлен:

а) x^4-1; б) x^8-1; в) x^4+1.

192. Разложить многочлен на неприводимые над полем действительных чисел множители: а) x^3+4; б) x^6-32; в) x^8-1.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 432 с.
2. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М.: Просвещение, 1968. – 336 с.
3. Сборник задач по алгебре: Учеб. Пособие / Под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
5. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Головизин Вячеслав Владимирович

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».
Часть 3. Комплексные числа

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор В.В. Головизин
Верстка В.И. Родионов

Пописано в печать __.12.09. Формат $60 \times 84\ {}^{1}\!/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 2,73.
Тираж 50 экз. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел УдГУ
Типография ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4