ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ОЧНО–ЗАОЧНАЯ ШКОЛА

Н.В. ЛАТЫПОВА

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Ижевск 2009

УДК 512(075)
ББК 22.141я721
Л 278

Л 278 ЛАТЫПОВА Н. В. КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН: Учебно–методическое пособие для учащихся ОЗШ ГОУВПО "УдГУ". Изд. ГОУВПО "УдГУ". Ижевск. 2009. 24 с.

В данном учебно-методическом пособии вводятся основные понятия, связанные с квадратным трехчленом, рассматриваются решения квадратных уравнений и неравенств. В пособии разбираются основные методы решения квадратных уравнений с параметром. Разобранные задачи снабжены подробным решением и предложены разнообразные упражнения для самостоятельного решения, что поможет лучшему усвоению материала. Предназначена как для учащихся 9 классов средней школы, так и старших классов.

УДК 512.(075)
ББК 22.141я721

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Определение квадратного трехчлена

Определение. *Квадратным трехчленом* называется функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — некоторые числа.

Рассмотрим выделение полного квадрата путем тождественных преобразований:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Таким образом,

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \tag{1}$$

1. Выделите полный квадрат у квадратного трехчлена:

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 5x - 2.$$

Решение.

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + 5x - 2 = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 15x + 6\right) = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 2x\frac{15}{2} + 6\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x^2 - 2x\frac{15}{2} + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 6\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{225}{4} + 6\right) = -\frac{1}{3}\left(\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 - \frac{201}{4}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{67}{4}.$$

2. Выделите полный квадрат у квадратного трехчлена:

$$y = x^2 - x + 3.$$

3.(!) При каком значении параметра b выражение

$$bx^2 - (3b - 1)x + 2b - 2$$

является полным квадратом?

Определение. Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Корни квадратного трехчлена

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$, называется *квадратным.*

Найдем корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, которое равносильно, как мы показали с помощью выделения полного квадрата (см. формулу (1)), следующему уравнению

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0.$$

Так как $a \neq 0$, то

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Мы должны рассмотреть три случая:

1) $D = b^2 - 4ac > 0$, тогда

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0.$$

По формуле разности квадратов имеем

$$\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \ \text{ или } \ x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0,$$

откуда квадратное уравнение имеет два различных корня

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

2) $D=b^2-4ac=0$, тогда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Откуда уравнение имеет два совпадающих корня

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

3) $D=b^2-4ac<0$, тогда уравнение

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

не имеет вещественных корней, так как

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a^2}>0$$

всегда, то есть $x\in\emptyset$.

Рассмотрим ряд примеров.

4. Найдите корни квадратного уравнения:

$$-\frac{1}{3}x^2+5x-2=0.$$

Решение. Так как $a=-\frac{1}{3},\ b=5,\ c=-2$, то дискриминант равен $D=5^2-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-2)=\frac{67}{3}>0$. Тогда

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{\frac{67}{3}}}{-\frac{1}{3}}=\left(-5\pm\sqrt{\frac{67}{3}}\right)\cdot(-3)=15\mp\sqrt{3\cdot 67}=15\mp\sqrt{207}.$$

5. Найдите корни квадратного уравнения: $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Решение. Так как $a = 1,\ b = 6,\ c = 9$, то дискриминант равен $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$. Тогда $x_{1,2} = \frac{-6}{2} = -3$.

6. Найдите корни квадратного уравнения: $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

Решение. Так как $a = 2,\ b = 6,\ c = 7$, то дискриминант равен $D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -20 < 0$. Тогда данное уравнение не имеет вещественных корней, то есть $x \in \emptyset$.

Рассмотрим еще квадратное уравнение вида $ax^2 + 2bx + c = 0$. В этом случае удобнее пользоваться формулами четверти дискриминанта:

$$D_1 = \frac{D}{4} = b^2 - ac,\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

что во многих случаях облегчает вычисления.

7. Решите уравнение: $7x^2 + 20x - 3 = 0$.

Решение. Так как $a = 7,\ 2b = 2 \cdot 10,\ c = -3$, то воспользуемся формулой четверти дискриминанта $D_1 = 10^2 - 7 \cdot (-3) = 11^2 > 0$. Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 11}{7} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{7} \\ -3 \end{array} \right.$$

8. Решите уравнение: $3x - 2x^2 - 1 = 0$.

9. Решите уравнение: $3x^2 - 11x + 31 = 0$.

10. Решите уравнение: $4x - 4x^2 - 1 = 0$.

11. Решите уравнение: $x^2 + 32x + 255 = 0$.

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Если $D > 0$, то тогда квадратный трехчлен раскладывается на линейные множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни этого квадратного трехчлена.

Если $D = 0$, то тогда имеем разложение

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Если $D < 0$, то квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ нельзя разложить на линейные множители, используя в качестве коэффициентов этих линейных множителей вещественные числа.

12. Разложите на линейные множители квадратные трехчлены из примеров 4–7.

Решение. Так как корни найдены, то, используя приведенные выше формулы, получим

$$-\frac{1}{3}x^2 + 5x - 2 = -\frac{1}{3}\left(x - \left(15 - \sqrt{207}\right)\right)\left(x - \left(15 + \sqrt{207}\right)\right);$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2;$$

квадратный трехчлен $2x^2 + 6x + 7$ не раскладывается на линейные множители;

$$7x^2 + 20x - 3 = 7\left(x - \frac{1}{7}\right)(x + 3) = (7x - 1)(x + 3).$$

13. Разложите на линейные множители квадратные трехчлены из примеров 8–11.

Теорема Виета

Прямая теорема Виета. Если у квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

есть корни x_1 и x_2, то выполняются соотношения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Обратная теорема Виета. Если для некоторых постоянных a, b и c существуют числа x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

то эти числа являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

При решении задач, связанных с теоремой Виета, полезно использовать соотношения:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}; \tag{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2; \tag{3}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1x_2} - 2; \tag{4}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right). \tag{5}$$

14. Вычислите

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$3x^2 - 2x - 6 = 0.$$

Решение. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{3}, \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{3} = -2. \end{cases}$$

Тогда по соотношению (2)

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2/3}{-2} = -\frac{1}{3}.$$

15. Известно, что

$$x_1^2 + x_2^2 = 13,$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения

$$x^2 + ax + 6 = 0.$$

Определите $x_1 + x_2$.

Решение. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 = 6. \end{cases}$$

Из соотношения (3): $x_1^2 + x_2^2 = 13 = (-a)^2 - 2 \cdot 6$ получаем $a^2 = 25$, т.е. $a = \pm 5$. А значит, $x_1 + x_2 = \mp 5$.

16. Не решая уравнение $2x^2 - 4x + 1 = 0$, вычислите
а) сумму квадратов его корней $x_1^2 + x_2^2$,
б) сумму кубов его корней $x_1^3 + x_2^3$,
в) сумму чисел, обратных его корням $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$,
где x_1 и x_2 — корни этого уравнения.

17. Вычислите $x_1^3 + x_2^3$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения

$$x^2 - 2x - 9 = 0.$$

18. Найдите a, при которых один из корней уравнения

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

равен квадрату другого.

19. Известно, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + x + a = 0$. Определите a.

20. Найдите все значения параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 - (a - 2)x - (a + 3) = 0$ равна 9.

21. Произведение корней уравнения $4x^2 + (4a + 6)x + a^2 = 0$ равно 1. Чему равно a?

График функции квадратного трехчлена

Определение. График квадратного трехчлена

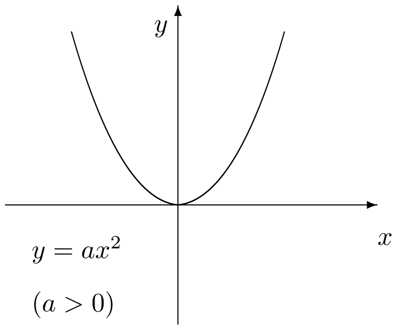
$$y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$$

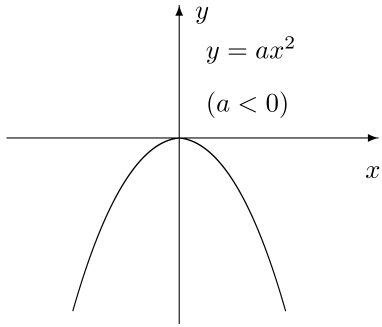
называется *параболой.*

Рассмотрим сначала *частный случай* $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

Свойства:

1. Область определения функции: $x \in \mathbb{R}$; область значений функции: при $a > 0$ $\;y \in [0, +\infty)$; при $a < 0$ $\;y \in (-\infty, 0]$.
2. Функция четна.
3. При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и возрастает на $[0, +\infty)$; при $a < 0$ возрастает на промежутке $(-\infty, 0]$ и убывает на $[0, +\infty)$.
4. Графиком функции является парабола.





В общем случае для исследования квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ требуется найти дискриминант квадратного трехчлена: $D = b^2 - 4ac$ и вершину параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\; y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

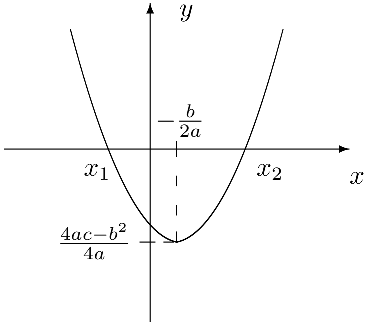
Свойства:

1. Область определения функции: $x \in \mathbb{R}$; область значений функции: при $a > 0$ $\;y \in \left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$; при $a < 0$ $\;y \in \left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$.
2. Функция общего вида.
3. При $a > 0$ функция убывает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; при $a < 0$ возрастает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.
4. Графиком функции является парабола.

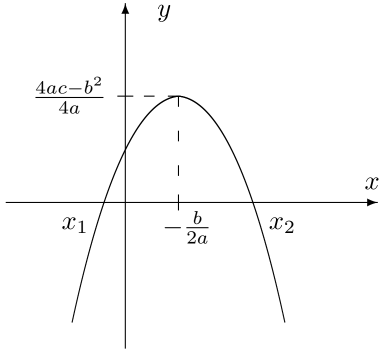
В зависимости от старшего коэффициента a и дискриминанта D возможны шесть типов эскизов графика:

$D > 0:$

$a > 0$

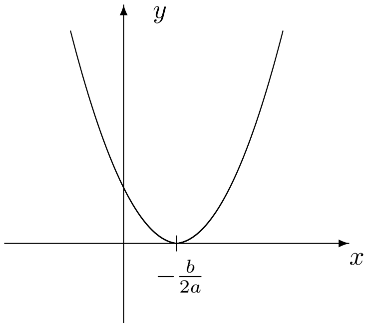


$a < 0$

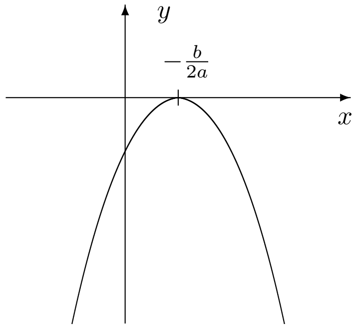


$D = 0:$

$a > 0$

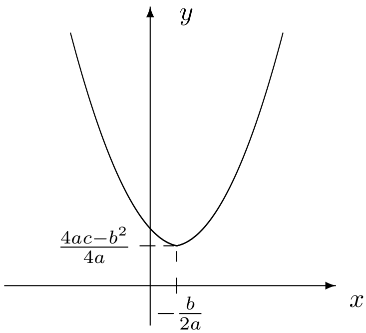


$a < 0$

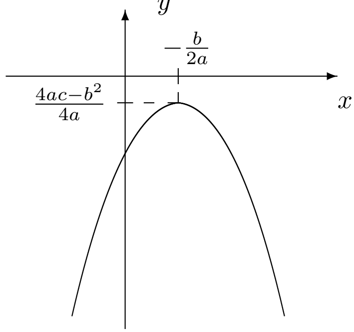


$D < 0:$

$a > 0$



$a < 0$



Решение квадратных неравенств

Схема решения квадратного неравенства:

1) найти корни квадратного трехчлена (если они есть);

2) схематически изобразить график трехчлена;

3) с помощью полученного рисунка и знака неравенства найти те значения x, при которых это неравенство выполняется.

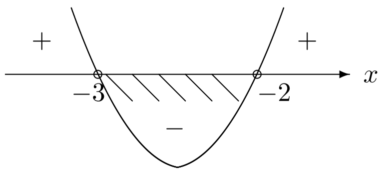
22. Решите неравенство: $x^2 + 5x + 6 < 0$.

Решение. Будем следовать приведенной схеме. 1) Корни квадратного уравнения $x^2+5x+6 = 0$ легко находятся по теореме Виета: в силу системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 \cdot x_2 = 6, \end{cases}$$

имеем $x_1 = -3,\ x_2 = -2$.

2) "Ветви" параболы направлены вверх, значит, схематический график функции $y = x^2 + 5x + 6$ имеет вид



3) Мы решаем неравенство $y = x^2 + 5x + 6 < 0$, значит, нужно взять те значения x, при которых график этой функции находится **ниже** оси OX. Эти значения на рисунке отмечены штриховкой. Так как неравенство строгое, то концы выкалываем. Таким образом, имеем $-3 < x < -2$, или $x \in (-3, -2)$.

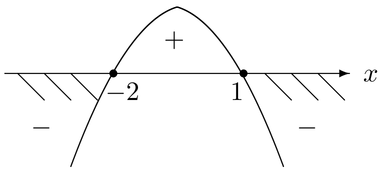
23. Решите неравенство: $2 - x^2 - x \leqslant 0$.

Решение. По схеме: 1) Корни уравнения $-x^2 - x + 2 = 0$ легко находятся по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-1}{-1} = -1, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{-1} = -2. \end{cases}$$

Имеем $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

2) "Ветви" параболы направлены вниз, значит, схематический график функции $y = -x^2 - x + 2$ имеет вид

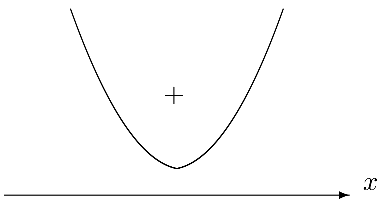


3) Мы решаем неравенство $y = -x^2 - x + 2 \leqslant 0$, значит, нужно взять те значения x, при которых график этой функции находится **не выше** оси OX. Эти значения на рисунке отмечены штриховкой. Так как неравенство нестрогое, то концы включаются. Таким образом, имеем $x \leqslant -2$ и $x \geqslant 1$, или $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

24. Решите неравенство: $x^2 + x + 2 < 0$.

Решение. 1) Квадратное уравнение $x^2 + x + 2 = 0$ имеет $D < 0$, то есть не имеет корней ($x \in \emptyset$).

2) "Ветви" параболы направлены вверх, значит, схематический график функции $y = x^2 + x + 2$ имеет вид

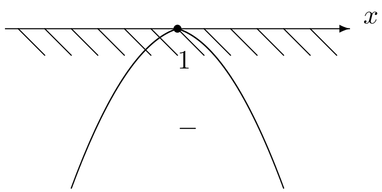


3) Мы решаем неравенство $y = x^2 + x + 2 < 0$, значит, нужно взять те значения x, при которых график этой функции находится **ниже** оси OX. Таким образом, имеем $x \in \emptyset$.

25. Решите неравенство: $2x - x^2 - 1 \leqslant 0$.

Решение. По схеме: 1) Корни уравнения $-x^2 + 2x - 1 = 0$ в силу $D = 0$ совпадают и равны $x_1 = x_2 = 1$.

2) "Ветви" параболы направлены вниз, парабола касается оси OX, значит, схематический график функции $y = -x^2 + 2x - 1$ имеет вид



3) Мы решаем неравенство $y = -x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$, значит, нужно взять те значения x, при которых график этой функции находится **не выше** оси OX. Эти значения на рисунке отмечены штриховкой. Неравенство нестрогое. Таким образом, $x \in (-\infty, +\infty)$.

26. Решите неравенство: $x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3$.

27. Решите неравенство: $x^2 - x - 6 \geqslant 0$.

28. Решите неравенство: $4 - x^2 - 4x > 0$.

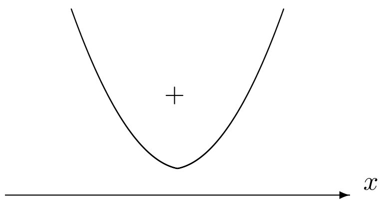
29. Решите неравенство: $9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0$.

30. При каких значениях параметра p парабола

$$y = (p-3)x^2 - 2px + 3p - 6$$

расположена выше оси Ox?

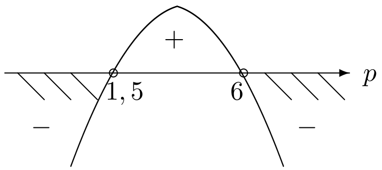
Решение. Коэффициенты соответствующего квадратного трехчлена равны: $a = p - 3$, $b = -2p$, $c = 3p - 6$. Из условия задачи следует, что $p - 3 \neq 0$. Воспользовавшись формулой четверти дискриминанта, имеем $D_1 = (-p)^2 - (p-3)(3p-6) = -2p^2 + 15p - 18$. График параболы расположен выше оси OX, если старший коэффициент больше нуля, а дискриминант соответствующего квадратного трехчлена — меньше нуля:



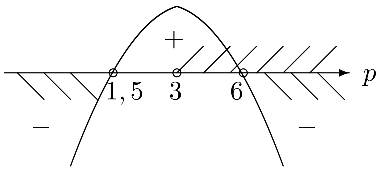
Таким образом, исходная задача сводится к решению следующей системы:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} p - 3 > 0, \\ -2p^2 + 15p - 18 < 0, \end{cases}$$

Решим второе неравенство. Для этого найдем корни квадратного трехчлена $-2p^2 + 15p - 18 = 0$, $D = 15^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 81$, $p_1 = 6$, $p_2 = \frac{3}{2} = 1,5$. "Ветви" параболы направлены вниз, значит, схематический график функции $y = -2p^2 + 15p - 18$ имеет вид



Учитывая первое условие $p > 3$, получим



Тогда решением этой системы является интервал $p > 6$ (как пересечение решения каждого неравенства).

31. Найдите a, при которых график квадратного трехчлена

$$(a + 4)x^2 - (2a + 4)x + 1$$

расположен выше оси OX.

32. Найдите c, при которых квадратный трехчлен

$$(c - 2)x^2 + 2(c - 2)x + 2$$

не пересекает ось OX.

33.(!) Найдите при каких a и b точка $(1,1)$ является вершиной параболы $y = ax^2 + bx + 8$.

Решение квадратных уравнений с параметром

Схема решения квадратных уравнений с параметром:

1. Если коэффициент при x^2 содержит параметр, то обязательно надо рассмотреть случай, когда он обращается в нуль.

2. Если дискриминант зависит от параметра, то обязательно нужно найти те значения параметра, при которых $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$.

3. В ответе должны быть указаны все значения параметра и соответствующие им решения уравнения, или указано, что решений нет.

34. Решите уравнение: $ax^2 + 2x + 1 = 0$.

Решение. При $a = 0$ получаем линейное уравнение $2x + 1 = 0$, которое имеет единственное решение $x = -\frac{1}{2}$.

При $a \neq 0$ уравнение является квадратным и его дискриминант $D = 4 - 4a$. $D < 0$ при $a > 1$ и уравнение решений не имеет. $D = 0$ при $a = 1$ и уравнение имеет два совпадающих корня $x_1 = x_2 = -1$. $D > 0$ при $a < 1, a \neq 0$ и уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{1-a}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{1-a}}{a}$.

Таким образом, получаем *ответ*: при $a \in (-\infty, 0) \cup (0,1)$: $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-a}}{a}$; при $a = 0 : x = -\frac{1}{2}$; при $a = 1 : x = -1$; при $a \in (1, +\infty)$: решений нет $(x \in \emptyset)$.

35. Решите уравнение: $(a+1)x^2 + (a^2 - 2a - 5)x + 6 - 2a = 0$.

Решение. При $a = -1$ получаем линейное уравнение $-2x + 8 = 0$, которое имеет единственное решение $x = 4$.

При $a \neq -1$ уравнение является квадратным и его дискриминант

$$D = (a^2-2a-5)^2-4(a+1)(6-2a) = a^4-4a^3+4a^2+1 = (a^2-2a-1)^2 \geqslant 0$$

при всех a. Тогда имеем корни

$$x_{1,2} = \frac{-(a^2-2a-5) \pm (a^2-2a-1)}{2(a+1)}.$$

Откуда $x_1 = \frac{2}{a+1}$, $x_2 = 3 - a$.

Ответ: при $a = -1 : x = 4$; при $a \neq -1 : x_1 = \frac{2}{a+1}$, $x_2 = 3 - a$.

Если требуется не просто решить квадратное уравнение с параметром, а чтобы решение этого уравнения удовлетворяло некоторым условиям, то будем использовать таблицу.

Словесное описание условий задачи	**Описание условий на языке математики** $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$
Квадратное уравнение имеет два корня	$D \geqslant 0$
Квадратное уравнение имеет два различных корня	$D > 0$
Корни квадратного уравнения одинаковы	$D = 0$
Корни квадратного уравнения отрицательны	$D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} < 0$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0$
Корни квадратного уравнения неположительны	$D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \leqslant 0$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \geqslant 0$
Корни квадратного уравнения неотрицательны	$D \geqslant 0$, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \geqslant 0$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \geqslant 0$

Корни квадратного уравнения положительны	$D \geqslant 0,$ $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0,$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} > 0$
Корни квадратного уравнения разных знаков: $x_1 < 0 < x_2$	$D > 0,$ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} < 0$
Один корень квадратного уравнения больше числа α, а второй меньше, чем α : $x_1 < \alpha < x_2$	$D > 0,$ $\alpha^2 + \dfrac{b}{a}\,\alpha + \dfrac{c}{a} < 0$
Оба корня квадратного уравнения меньше числа α : $x_1 < \alpha,\ x_2 < \alpha$	$D \geqslant 0,$ $2\alpha + \dfrac{b}{a} > 0,$ $\alpha^2 + \dfrac{b}{a}\,\alpha + \dfrac{c}{a} > 0$
Оба корня квадратного уравнения больше числа α : $x_1 > \alpha,\ x_2 > \alpha$	$D \geqslant 0,$ $2\alpha + \dfrac{b}{a} < 0,$ $\alpha^2 + \dfrac{b}{a}\,\alpha + \dfrac{c}{a} > 0$

36. Найдите a, при которых оба корня уравнения

$$ax^2 + 2(a+1)x + (a+3) = 0$$

меньше единицы.

Решение. Так как уравнение должно по условию иметь два корня, то оно должно быть квадратным, то есть старший коэффициент должен быть отличен от нуля: $a \neq 0$. С другой стороны, эти корни должны существовать, поэтому дискриминант должен быть неотрицателен:

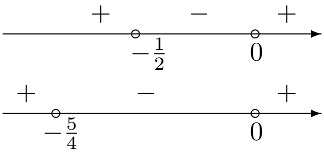
$$D_1 = \frac{D}{4} = (a+1)^2 - a(a+3) = 1 - a \geqslant 0.$$

Чтобы выполнялись условия: $x_1 < 1, x_2 < 1$, нужно, чтобы

$$2 + 2 \cdot \frac{a+1}{a} > 0,\ 1 + 2 \cdot \frac{a+1}{a} + \frac{a+3}{a} > 0.$$

Таким образом, получаем систему неравенств относительно параметра a :

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ a \leqslant 1, \\ \frac{2a+1}{a} > 0, \\ \frac{4a+5}{a} > 0. \end{cases}$$



Решая систему методом интервалов, получаем *ответ*: $a \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (0, 1]$.

Пример 37. Найдите a, при которых сумма корней уравнения

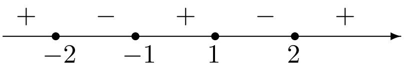
$$x^2 + 2(a^2 - 3a)x - (6a^3 - 14a^2 + 4) = 0$$

принимает наибольшее значение.

Решение. Во–первых, корни должны существовать. А значит, дискриминант должен быть неотрицателен:

$$\frac{D}{4} = (a^2 - 3a)^2 + (6a^3 - 14a^2 + 4) = a^4 - 5a^2 + 4 = (a^2 - 1)(a^2 - 4) =$$

$$= (a+2)(a+1)(a-1)(a-2) \geqslant 0.$$



Откуда $a \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

Во–вторых, по теореме Виета сумма корней равна

$$x_1 + x_2 = -2(a^2 - 3a).$$

Таким образом, требуется найти наибольшее значение функции

$$f(a) = -2(a^2 - 3a)$$

при $a \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, +\infty)$.

Заметим, что дана квадратичная функция, старший коэффициент которой отрицателен. Следовательно, наибольшего значения она достигает в вершине: $a_0 = \frac{3}{2}$. Это значение не входит в промежутки, где существуют корни квадратного уравнения, поэтому рассмотрим ближайшие точки из полученного промежутка: $a = 1$ и 2. $f(1) = f(2) = 4$.

Ответ: $a = 1,\ a = 2$.

38. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 6x + 9 = 0$ имеет одно решение.

Решение. Данное уравнение будет иметь одно решение в двух случаях:
1) Когда оно не является квадратным, то есть старший коэффициент $a = 0$. Тогда из уравнения $-6x + 9 = 0$ получаем только $x = 1,5$.
2) Когда корни квадратного уравнения совпадают, то есть дискриминант равен нулю: $D_1 = 9 - 9a = 0$. Это возможно при $a = 1$.

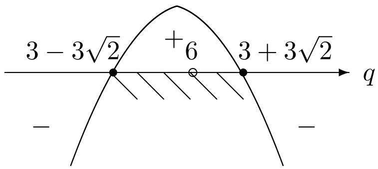
Таким образом, имеем *ответ*: $a = 1,\ a = 0$.

39. Найдите наибольшее и наименьшее среди тех целых чисел q, при которых уравнение $(q - 6)x^2 - 6x + q = 0$ имеет действительные корни.

Решение. Исследуем вначале случай, когда уравнение не является квадратным. Это будет тогда, когда старший коэффициент $q - 6 = 0$, то есть $q = 6$. В этом случае, уравнение принимает вид: $-6x + 6 = 0$, и имеет действительный корень $x = 1$.

Если $q \neq 6$, то уравнение является квадратным и имеет действительные корни, когда дискриминант неотрицателен, следовательно, $D_1 = \frac{D}{4} = 3^2 - (q - 6)q = -q^2 + 6q + 9 \geqslant 0$. Решим полученное неравенство, чтобы узнать при каких q это возможно.

Сперва найдем корни полученного квадратного неравенства. Для этого рассмотрим уравнение $-q^2 + 6q + 9 = 0$. Его дискриминант равен $D_1 = \frac{D}{4} = 3^2 - (-1) \cdot 9 = 18$; тогда $x_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$. "Ветви" параболы направлены вниз, значит, схематический график функции $y = -q^2 + 6q + 9$ имеет вид



Имеем решение неравенства $q \in \left[3 - 3\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}\right]$. А теперь выберем из этого отрезка наибольшее и наименьшее целые значения q. Вспомним, что $\sqrt{2} \approx 1,4$. Тогда $3 - 3\sqrt{2} < -1$, $3 + 3\sqrt{2} > 7$.

А значит, получаем *ответ*: наибольшее целое q равно 7, а наименьшее целое q равно -1.

40. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения

$$2x^2 + (2a + 1)x + a = 0$$

удовлетворяет условию $x < 2$.

Решение. Найдем корни данного квадратного уравнения. Дискриминант будет равен $D = (2a + 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot a = (2a - 1)^2 \geqslant 0$ при всех a. Тогда корни будут равны

$$x_1 = \frac{-(2a + 1) + (2a - 1)}{4} = -\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-(2a + 1) - (2a - 1)}{4} = -a.$$

По условию задачи требуется найти все значения параметра a, при которых ровно один корень был меньше двух. Так как один корень $x_1 = -\frac{1}{2} < 2$, то второй корень должен быть не меньше двух: $x_2 = -a \geqslant 2$, то есть $a \leqslant -2$.

Таким образом, получаем *ответ*: $a \leqslant -2$.

41.(!) Найдите a, при которых уравнение

$$x^2 - 2(a - 2)x + a^2 - 2a - 3 = 0$$

имеет два различных положительных корня.

42. Найдите наибольшее и наименьшее среди тех целых чисел p, при которых уравнение $px^2 + 6x + p + 6 = 0$ имеет действительные корни.

43.(!) Найдите a, при которых корни уравнения

$$x^2 + (a - 5)x + 3a + 1 = 0$$

удовлетворяют неравенству $x_1 < 2a < x_2$.

44.(!) Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a.

45.(!) Найдите все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$ будут меньше единицы.

46. Найдите a, при которых корни уравнения

$$x^2 - (a + 1)x + a + 4 = 0$$

отрицательны.

47. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - ax + a - 3 = 0$$

имеет одно решение.

48.(!) Найдите a, при которых все корни уравнения

$$ax^2 + 2(a + 3)x + a + 2 = 0$$

неотрицательны.

49. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых ровно один корень уравнения $2x^2+(2a-1)x+a-1 = 0$ удовлетворяет неравенству $x < 1$.

50.(!) Найдите наименьшее целое a, при котором уравнение

$$(a-1)x^2 - 2(a+1)x + a - 3 = 0$$

имеет два различных корня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 10 класс. Омск: НОУ НОК "Образование Плюс". 2003. 148 с.

2. Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 11 класс. Омск: НОУ НОК "Образование Плюс". 2003. 160 с.

3. Задачи по математике. Алгебра. / Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. М.: Наука. 1987. 432 с.

4. Нараленков М.И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра: как решать задачи: Учебно–практическое пособие. Москва: Издательство "Экзамен". 2003. 448 с.

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ: 2, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 42, 46, 47, 49.

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ: 3, 33, 41, 43, 44, 45, 48, 50 (отмечены восклицательным знаком (!)).

Оценка "5"будет ставиться за правильное решение любых 16-и задач из обязательных заданий и 3-х из заданий повышенной сложности.

Оценка "4"будет ставиться за правильное решение любых 14-и задач из обязательных заданий и 2-х из заданий повышенной сложности.

Оценка "3"будет ставиться за правильное решение любых 12-и задач из обязательных заданий и 1-го из заданий повышенной сложности.

Наталья Владимировна Латыпова

Квадратный трехчлен

Учебно–методическое пособие

Напечатано с оригинал–макета заказчика
Компьютерный набор и верстка: Н. В. Латыпова,
Подписано в печать 00.10.09. Формат 60x84 1/16.
Тираж 100 экз. Заказ № Печать офсетная.
Типография ГОУВПО "Удмуртский госуниверситет"
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.