

Федеральное агентство по образованию РФ
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

УДК 514.12
ББК 22.151
Г 60

Рецензенты: к.ф.-м.н. **М.А. Воронцов**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

В.В. Головизин

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».
Часть 2. Основные задачи аналитической геометрии
на прямую и плоскость

Учебно-методическое пособие

Головизин В.В.

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».
Г60 Часть 2: Основные задачи аналитической геометрии
на прямую и плоскость: учеб.-метод. пособие.
Ижевск, 2009. 158 с.

Вторая часть учебно-методического пособия предназначена для студентов, изучающих указанную в названии тему в рамках любого курса высшей математики. Пособие может быть полезно преподавателям при проведении практических занятий и при подготовке индивидуальных заданий студентам.

Пособие содержит решения задач, которые тематически разбиты на главы, и имеют сквозную нумерацию. Номера упражнений, помещенных в конце пособия, совпадают номерами соответствующих задач.

УДК 514.12
ББК 22.151

Ижевск 2009

© Головизин В.В., 2009

Предисловие

Вторая часть учебно-методического пособия посвящена задачам аналитической геометрии по теме «Уравнения прямой и плоскости».

Количество учебных часов, отводимых по этой теме на лекции и практические занятия, сравнительно небольшое, в то время как задач, которые студент должен уметь решать, довольно много. Чтобы убедиться в этом, достаточно взглянуть в любой задачник по аналитической геометрии. Объясняется это тем, что все задачи этой темы основаны на небольшом теоретическом материале и существует весьма небольшой список основополагающих задач, знание которых позволяет успешно решать все остальные задачи по этой теме. При этом молчаливо предполагается, что студент хорошо знает геометрию в объеме средней школы. Увы, именно с последним обстоятельством дело обстоит не так хорошо, как нам бы хотелось. Дело осложняется и тем, что для многих задач геометрии характерно отсутствие единого алгоритма решения. Одну и ту же задачу можно решить несколькими способами, значительно отличающимися друг от друга.

Автор сделал попытку собрать в одном пособии все основные методы и алгоритмы решения задач по данной тематике на примерах довольно простых, по своей сути, задач. Автор надеется, что после проработки данного пособия, студент лучше усвоит теоретический материал, получит устойчивые практические навыки и сможет приступить, уже вполне самостоятельно, к решению более сложных задач данной тематики.

СПИСОК ЗАДАЧ

Глава 16. Прямая на плоскости

88. Проверить, лежит ли данная точка на данной прямой.
89. Построить чертеж прямой на координатной плоскости, заданной общим уравнением или уравнением в отрезках.
90. Построить чертеж прямой на координатной плоскости, заданной уравнением с угловым коэффициентом, и проходящей через начало координат.
91. Определить вид уравнения прямой на плоскости.
92. Найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным направляющим вектором.
93. Найти уравнение прямой на плоскости, проходящей через две различные данные точки.
94. Найти общее уравнение прямой на плоскости и ее нормальный вектор, если известно ее каноническое уравнение.
95. Найти каноническое уравнение прямой на плоскости и ее направляющий вектор, если известно ее общее уравнение.
96. Найти каноническое уравнение прямой на плоскости, если прямая задана параметрическими уравнениями.
97. Найти параметрические уравнения прямой, зная ее каноническое уравнение.
98. Найти уравнение прямой в отрезках, зная ее общее уравнение.
99. Привести общее уравнение прямой на плоскости к нормированному виду и найти расстояние до нее от начала координат.
100. Найти расстояние от точки до прямой на плоскости.

101. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми на плоскости.
102. Найти все виды уравнений прямой, зная ее общее уравнение.
103. Найти точку пересечения двух пересекающихся прямых на плоскости.
104. Найти проекцию точки на прямую на плоскости.
105. Найти точку симметричную данной относительно данной прямой на плоскости.
106. Найти общее уравнение прямой, проходящей через данную точку и принадлежащую данному пучку прямых.
107. Найти уравнение пучка прямых, зная его центр.
108. Найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом.
109. Найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным нормальным вектором.
110. Найти уравнение прямой, на которой лежит отраженный от данной прямой луч, если известно уравнение прямой, на которой лежит падающий луч.
111. Определить взаимное расположение двух прямых на плоскости.
112. Найти угол между прямыми на плоскости.
113. Найти уравнение биссектрисы угла между прямыми на плоскости.
114. Определить взаимное расположение двух точек и прямой на плоскости.
115. Определить взаимное расположение двух точек и двух прямых на плоскости.
116. Определить взаимное расположение точки и двух параллельных прямых на плоскости.
117. Определить положение точки относительно треугольника на плоскости.

Глава 17. Плоскость

118. Проверить, лежит ли данная точка на данной плоскости.
119. Построить чертеж плоскости в ПДСК.
120. Определить вид уравнения плоскости.
121. Найти уравнение плоскости в отрезках, зная ее общее уравнение.
122. Найти уравнение связки плоскостей, зная её центр.
123. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, если известен ее нормальный вектор.
124. Определить взаимное расположение двух плоскостей.
125. Определить взаимное расположение трех плоскостей.
126. Найти уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.
127. Найти угол между двумя плоскостями.
128. Привести общее уравнение плоскости к нормированному виду, и найти расстояние до нее от начала координат.
129. Найти расстояние от точки до плоскости.
130. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями.
131. Найти уравнение биссекторной плоскости данного двугранного угла.
132. Определить взаимное расположение двух точек и плоскости.
133. Определить взаимное расположение двух точек и двух плоскостей.
134. Определить взаимное расположение точки и двух параллельных плоскостей.
135. Определить взаимное расположение точки и треугольной пирамиды.

Глава 18. Прямая в пространстве

136. Найти каноническое и параметрическое уравнение прямой.
137. Проверить, лежит ли данная точка на данной прямой.
138. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через две различные данные точки.
139. Найти параметрическое уравнение прямой, зная ее каноническое уравнение.
140. Найти каноническое уравнение прямой, зная ее параметрическое уравнение.
141. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.
142. Найти угол между прямыми.
143. Определить взаимное расположение двух прямых в пространстве.
144. Найти общую точку двух пересекающихся прямых.
145. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми в пространстве.
146. Найти уравнение биссектрисы угла между пересекающимися прямыми.

Глава 19. Прямая в пространстве и плоскость

147. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.
148. Найти каноническое уравнение прямой, заданной пересечением двух плоскостей.
149. Задать прямую пересечением двух плоскостей, зная ее каноническое уравнение.
150. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую, и параллельной другой прямой.

151. Определить взаимное расположение прямой и плоскости.
152. Найти угол между прямой и плоскостью.
153. Найти точку встречи прямой с плоскостью.
154. Найти проекцию точки на плоскость.
155. Найти точку, симметричную данной относительно плоскости.
156. Найти расстояние между параллельными прямой и плоскостью.
157. Найти уравнение пучка плоскостей с заданной осью пучка.
158. Определить взаимное расположение двух прямых в пространстве, одна из которых или обе заданы в виде пересечения двух плоскостей.
159. Найти точку пересечения двух прямых в пространстве, одна из которых или обе заданы в виде пересечения двух плоскостей.
160. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.
161. Найти проекцию точки на прямую в пространстве.
162. Найти точку, симметричную данной относительно данной прямой в пространстве.
163. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми (второй способ вывода формулы искомого расстояния.).

Глава 16. Прямая на плоскости

Задача 88. Проверить, лежит ли данная точка на данной прямой или на данной плоскости.

Решение. Пусть $M_1(x_1; y_1)$ – координаты данной точки и $L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой L . Подставляем координаты точки M_1 в уравнение прямой, т.е. подставим в уравнение прямой L вместо переменной x число x_1 – абсциссу точки M_1 , вместо переменной y – ординату y_1 точки M_1 :

$$\frac{x_1 - x_0}{m} = \frac{y_1 - y_0}{n}.$$

Если при этом получается верное числовое равенство, то точка $M_1 \in L$, в противном случае $M_1 \notin L$.

Аналогично решается задача, если уравнение прямой имеет другой вид.

Пример. Лежат ли точки $A(5; 7)$ и $B(-8; -5)$ на прямой $L: 2x - 3y + 1 = 0$?

Решение. Подставляем координаты точки A в уравнение прямой L : $2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 + 1 = -10 \neq 0$. Следовательно, точка A не лежит на данной прямой.

Подставляем в уравнение прямой координаты точки B :

$$2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-5) + 1 = -16 + 15 + 1 = 0.$$

Следовательно, точка B лежит на данной прямой.

Ответ: $A \notin L$, $B \in L$.

Задача 89. Построить чертеж прямой на координатной плоскости, заданной общим уравнением или уравнением в отрезках.

Решение. Пусть дано общее уравнение прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$. Рассмотрим возможные случаи:

1) $A = 0, B \neq 0$. В этом случае уравнение прямой принимает вид

$$By + C = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{C}{B} \equiv b.$$

Это уравнение прямой, параллельной оси Ox :

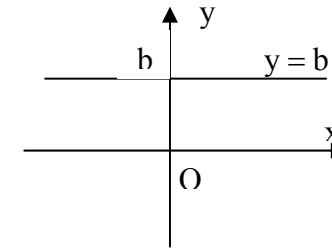


Рис. 1.

Заметим, что если в этом случае $C = 0$ и, следовательно, $b = 0$, то уравнение принимает вид $y = 0$, и прямая совпадает с осью абсцисс.

Таким образом, $y = 0$ есть уравнение оси абсцисс.

2) $A \neq 0, B = 0$. В этом случае уравнение прямой принимает вид

$$Ax + C = 0 \quad \text{или} \quad x = -\frac{C}{A} \equiv a.$$

Это уравнение прямой, параллельной оси Oy (рисунок 2).

Заметим, что если в этом случае $C = 0$ и, следовательно, $a = 0$, то уравнение принимает вид $x = 0$, и прямая будет совпадать с осью ординат.

Таким образом, $x = 0$ есть уравнение оси ординат.

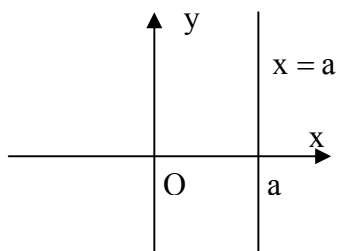


Рис. 2.

3) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$. В этом случае уравнение прямой принимает вид

$$Ax + By = 0 \quad \text{или} \quad y = -\frac{A}{B}x = kx,$$

где обозначено $k = -\frac{A}{B}$ – угловой коэффициент прямой.

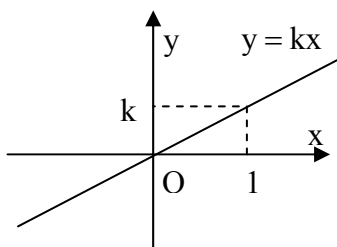


Рис. 3.

Очевидно, точка $O(0;0)$ лежит на прямой $y = kx$, т.е. прямая проходит через начало координат. Для построения прямой достаточно найти координаты еще одной точки, лежащей на этой прямой. Положим $x = 1$ в уравнении прямой $y = kx$. Тогда $y = k$. Отметим на плоскости точку с координатами $M(1; k)$, и проводим прямую через две точки M и начало координат O .

4) $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$. Перенесем свободный член C в уравнении прямой в правую часть $Ax + By = -C$ и разделим обе части уравнения на $-C$: $\frac{Ax + By}{-C} = \frac{-C}{-C}$, откуда находим $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$. Мы уже ввели обозначения: $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, откуда следует, что $-\frac{A}{C} = \frac{1}{a}$, $-\frac{B}{C} = \frac{1}{b}$, и уравнение прямой принимает вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

– уравнение прямой в отрезках.

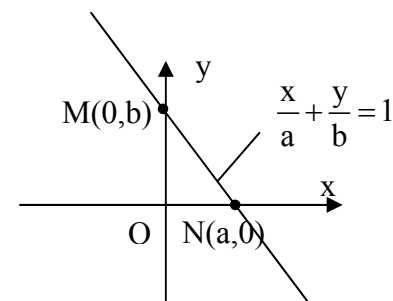


Рис. 4.

Полагая в этом уравнении $x = 0$, получаем $y = b$. Значит, точка $M(0; b)$ лежит на данной прямой.

Аналогично находим, что точка $N(a; 0)$ лежит на данной прямой. Осталось построить эти две точки на координатной плоскости. Смотрите рисунок 4.

Замечание. Прямую строят по двум точкам. Подставим в уравнение прямой $x = x_1$ и находим значение $y = y_1$. Значит, точка $M_1(x_1; y_1)$ лежит на данной прямой. Аналогично

находим на данной прямой еще одну точку $M_2(x_2; y_2)$. Отмечаем на координатной плоскости найденные точки, и проводим через них прямую.

Выбор значений переменной x не играет роли, но лучше всего выбирать $x = x_1 = 0$ и $y = y_2 = 0$, если прямая не проходит через начало координат. Тем самым мы находим точки пересечения данной прямой с осями координат.

Пример. Построить на координатной плоскости Oxy чертеж прямой, если ее уравнение имеет вид:

а) $x = -1$; б) $y = 2$; в) $3x + 2y = 0$; г) $3x - 2y + 6 = 0$.

Решение. Прямые $x = -1$ и $y = 2$ изобразим на одном чертеже.

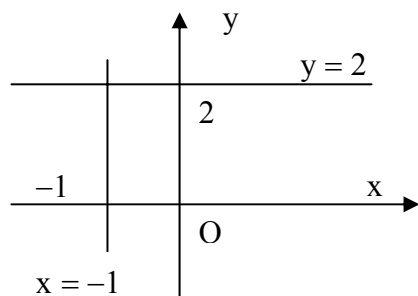


Рис. 5.

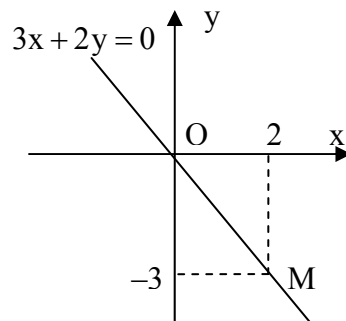


Рис. 6.

в) Построим прямую $3x + 2y = 0$. Положим в этом уравнении $x = 2$ и находим $y = -3$. Прямая проходит через точку $M(2; -3)$ и начало координат. Смотрите рисунок 6.

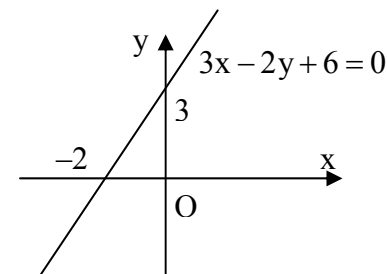


Рис. 7.

г) Построим прямую $3x - 2y + 6 = 0$. Прямая не проходит через начало координат. Положим в уравнении прямой $x = 0$. Тогда получаем: $-2y + 6 = 0$, откуда находим $y = 3$. Значит, прямая проходит через точку с координатами $(0; 3)$. Аналогично, подставляя в уравнение прямой $y = 0$, находим $x = -2$. Значит, прямая проходит через точку с координатами $(-2; 0)$. Смотрите рисунок 7.

Задача 90. Построить чертеж прямой на координатной плоскости, заданной уравнением с угловым коэффициентом, и проходящей через начало координат.

Решение. Смотрите задачу 89, случай 3, рисунок 3.

Пример. Построить прямую $y = \frac{3}{2}x$.

Решение. Прямая проходит через начало координат. Найдем на данной прямой еще одну точку. Подставим в уравнение прямой $x = 2$. Тогда $y = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$. Значит, точка $M(2; 3)$ ле-

жит на данной прямой. Отметим на координатной плоскости Оху точку М, и проведем прямую через точку М и начало координат.

Ответ: рисунок 8.

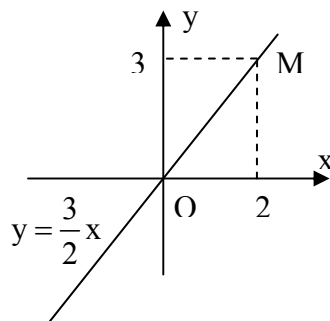


Рис. 8.

Задача 91. Определить вид уравнения прямой на плоскости.

Решение. Выпишем все виды уравнений прямой на координатной плоскости Оху.

1) Общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $(A, B) = \vec{n}$ – координаты ее нормального вектора.

2) Неполные уравнения прямых на плоскости:

$$Ax + By = 0, \quad x = a, \quad y = b.$$

3) Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент прямой, b – координата точки оси Оу, лежащая на данной прямой.

4) Уравнение прямой на плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a – координата точки оси Ох, лежащая на данной прямой, b – координата точки оси Оу, лежащая на данной прямой.

5) Каноническое уравнение прямой на плоскости:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$

где (x_0, y_0) – координаты произвольной точки лежащей на данной прямой, (m, n) – координаты направляющего вектора данной прямой.

6) Параметрические уравнения прямой на плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases},$$

где $t \in \mathbb{R}$ – параметр, (x_0, y_0) – координаты произвольной точки лежащей на данной прямой, (m, n) – координаты направляющего вектора данной прямой.

7) Нормированное уравнение прямой на плоскости:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0,$$

где $(\cos \alpha, \cos \beta)$ – координаты единичного нормального вектора прямой, $\cos \alpha, \cos \beta$ – его направляющие косинусы, α, β – его направляющие углы, $p > 0$ – расстояние от начала координат до данной прямой.

8) Нормальное уравнение прямой на плоскости:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0,$$

где $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ – координаты единичного нормального вектора прямой, φ – его полярный угол, $p > 0$ – расстояние от начала координат до данной прямой.

9) Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (x_0, y_0) и с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

При произвольных коэффициентах A и B это уравнение есть уравнение пучка прямых с центром пучка в точке с координатами (x_0, y_0) .

10) Уравнение прямой с угловым коэффициентом проходящей через точку с координатами (x_0, y_0) :

$$y = k(x - x_0) + y_0.$$

При произвольном коэффициенте k это уравнение есть уравнение пучка прямых с центром пучка в точке с координатами (x_0, y_0) .

Пример. Определить вид следующих уравнений прямых:

- 1) $x - 3y + 1 = 0$ – общее уравнение прямой;
- 2) $x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = -3$ – неполные уравнения прямых;
- 3) $y = x\sqrt{3} + 2$, $y = -x\sqrt{3}$ – уравнения прямых с угловым коэффициентом;

- 4) $x - \frac{y}{2} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где $a = 1$, $b = -2$;

- 5) $\frac{x+2}{-3} = y$ – каноническое уравнение прямой, где $(-2; 0)$ – точка лежащая на данной прямой, $(-3; 1)$ – координаты ее направляющего вектора;

- 6) $\begin{cases} x = -8t \\ y = 3 + 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ – параметрические уравнения прямой, где $(0; 3)$ – координаты точки лежащей на данной прямой, $(-8; 7)$ – координаты ее направляющего вектора;

- 7) $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - 5 = 0$ – нормированное уравнение прямой, где

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (\cos 45^\circ; \cos 135^\circ) \text{ – координаты единичного}$$

нормального вектора данной прямой, направляющие углы которого равны $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, расстояние от начала координат до прямой равно 5.

- 8) $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - 5 = 0$ – нормальное уравнение прямой, где

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (\cos \frac{7\pi}{4}; \sin \frac{7\pi}{4}) \text{ – координаты единичного нор-}$$

мального вектора данной прямой, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ – его полярный

угол, расстояние от начала координат до прямой равно 5.

- 9) $-2(x+1) + 3(y-2) = 0$ – уравнение прямой с нормальным вектором $\vec{n} = (-2; 3)$, проходящей через точку $(-1; 2)$.

- 10) $y = 2(x-5) - 5$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = 2$, проходящей через точку $(5; -5)$.

Задача 92. Найти общее уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным направляющим вектором.

Решение. Пусть прямая на координатной плоскости Oxy проходит через точку $M(a, b)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s} = (m, n)$. Тогда ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n}.$$

Рассмотрим возможные случаи.

- 1) $m = 0, n \neq 0$. Тогда направляющий вектор прямой $\vec{s} = (0, n) \parallel Oy$, и общее уравнение прямой имеет вид $x = a$.

- 2) $m \neq 0, n = 0$. Тогда направляющий вектор прямой $\vec{s} = (m, 0) \parallel Ox$, и общее уравнение прямой имеет вид $y = b$.

- 3) $m \neq 0, n \neq 0$. Умножим каноническое уравнение на произведение mn . Получаем $n(x-a) = m(y-b)$ или $nx - my + (mb - na) = 0$ – общее уравнение прямой.

Ответ: $x = a$ при $m = 0, n \neq 0$; $y = b$ при $m \neq 0, n = 0$; $nx - my + (mb - na) = 0$ при $m \neq 0, n \neq 0$.

Пример. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2)$, с направляющим вектором:

а) $\vec{s} = (0, 4)$; б) $\vec{s} = (-1, 0)$; в) $\vec{s} = (-1, 4)$.

Решение. а) $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{4} \Rightarrow x=1$; б) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} \Rightarrow y=-2$;

в) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} \Rightarrow 4x-4 = -y-2 \Rightarrow 4x+y-2=0$.

Ответ: а) $x=1$; б) $y=-2$; в) $4x+y-2=0$.

Задача 93. Найти уравнение прямой на плоскости, проходящей через две различные данные точки.

Решение. Пусть даны координаты двух различных точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, очевидно, является направляющим вектором прямой, которая проходит через эти точки. В каноническом уравнении прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$\vec{s} = (m, n)$ – координаты ее направляющего вектора, и так как $\vec{s} = \overline{M_1M_2}$, то $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$. Далее, в каноническом уравнении прямой $M_0(x_0, y_0)$ – координаты произвольной фиксированной точки данной прямой, поэтому в качестве такой точки можно взять точку M_1 или M_2 , без разницы которую.

Подставляя в каноническое уравнение прямой вместо координат точки $M_0(x_0, y_0)$ координаты точки M_1 , и вместо координат направляющего вектора $\vec{s} = (m, n)$ координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, получаем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; -5)$ и $B(-2; -3)$.

Решение. $\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-(-5)}{-3-(-5)}$. Ответ: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{2}$.

Задача 94. Найти общее уравнение прямой на плоскости и ее нормальный вектор, если известно ее каноническое уравнение.

Решение. Пусть $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ – каноническое уравне-

ние прямой L на координатной плоскости Oxy . Из этого равенства следует, что

$$n(x - x_0) = m(y - y_0) \quad \text{или} \quad nx - my - nx_0 + my_0 = 0.$$

Обозначим $A = n$, $B = -m$, $C = -nx_0 + my_0$, тогда уравнение принимает вид общего уравнения прямой:

$$Ax + By + C = 0.$$

Следствие 1. Если $\vec{s} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой L , то векторы $\vec{n} = (n, -m)$ и $\vec{n} = (-n, m)$ являются ее нормальными векторами.

Доказательство. Сразу заметим, что $\vec{n} \neq \vec{0}$, т.к. $\vec{s} \neq \vec{0}$. Далее, скалярное произведение

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = m \cdot n + n \cdot (-m) = 0,$$

отсюда следует, что $\vec{s} \perp \vec{n}$ и т.к. $\vec{s} \parallel L$, то $\vec{n} \perp L$ и $\vec{n}$ – нормальный вектор прямой L , ч.т.д. Смотрите рисунок 9.

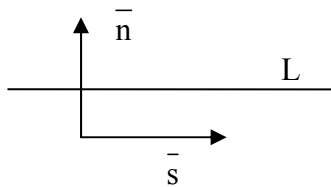


Рис. 9.

Следствие 2. Если вектор $\bar{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой L , то векторы $\bar{s} = (B, -A)$ и $\bar{s} = (-B, A)$ являются ее направляющими векторами.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Пример. Найти общее уравнение прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3}$ и ее

нормальный вектор.

Решение. $-3(x-1) = 2(y+2)$, $-3x - 2y + 3 - 4 = 0$ или $-3x - 2y - 1 = 0$.

Ответ: $3x + 2y + 1 = 0$, $\bar{n} = (3; 2)$.

Задача 95. Найти каноническое уравнение прямой на плоскости и ее направляющий вектор, если известно ее общее уравнение.

Решение. Пусть $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой L на плоскости Oxy . Для того, чтобы написать каноническое уравнение прямой, необходимо знать координаты какой-нибудь ее точки $M_0(x_0, y_0) \in L$, и ее направляющий вектор $\bar{s} = (m, n)$.

В силу следствия 2 предыдущей задачи, $\bar{s} = (B, -A)$ – направляющий вектор прямой L .

Осталось найти точку на прямой.

а) Если $C = 0$, то начало координат $O(0, 0)$ лежит на прямой, и каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-0}{B} = \frac{y-0}{-A} \quad \text{или} \quad \frac{x}{B} = \frac{y}{-A}.$$

б) Если $C \neq 0$ и $A \neq 0$, то точка $M_0(a; 0) \in L \cap Ox$, где $a = -\frac{C}{A}$, и каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-a}{B} = \frac{y}{-A}.$$

в) Если $C \neq 0$ и $B \neq 0$, то точка $M_0(0; b) \in L \cap Oy$, где $b = -\frac{C}{B}$, и каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x}{B} = \frac{y-b}{-A}.$$

Пример. Найти каноническое уравнение прямой

$L: 4x - 5y + 2 = 0$ и ее направляющий вектор.

Решение. Полагаем в уравнении прямой $y = 0$, тогда получаем $4x + 2 = 0$, откуда $x = -\frac{1}{2}$. Следовательно, точка

$M_0(-\frac{1}{2}; 0) \in L$. Далее, т.к. $\bar{n} = (4; -5)$ – нормальный вектор

прямой L , то вектор $\bar{s} = (5; 4)$ является ее направляющим вектором, и каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{5} = \frac{y}{4}.$$

Ответ: $\frac{x + \frac{1}{2}}{5} = \frac{y}{4}$, $\bar{s} = (5; 4)$.

Теорема. Если все коэффициенты общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ являются целыми числами, то на прямой есть точки с целыми координатами тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель чисел A и B является делителем числа C .

Так в примере выше, $\text{НОД}(4; -5) = 1$, поэтому на прямой есть точки с целыми координатами. Выразим переменную y из общего уравнения прямой:

$$y = \frac{2(2x+1)}{5}.$$

Подбором находим такое целое значение переменной x , при котором число $2x+1$ делится на 5 без остатка: при $x = -3$ имеем, что $2x+1 = -6+1 = -5$ делится на 5. Находим y :

$$y = \frac{2(2x+1)}{5} = \frac{2(-5)}{5} = -2.$$

Таким образом, точка с координатами $(-3; -2)$ лежит на данной прямой, и каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{4}.$$

Задача 96. Найти каноническое уравнение прямой на плоскости, если прямая задана параметрическими уравнениями.

Решение. Пусть даны параметрические уравнения прямой на плоскости Oxy

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}.$$

Из обоих уравнений выразим t :

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}.$$

Приравняв правые части обоих равенств, получаем каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Пример 1. Найти каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Выражаем t из каждого уравнения

$$t = \frac{x}{-2}, \quad t = \frac{y-3}{4},$$

откуда получаем $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4}$.

Ответ: $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2}$ или $x = \frac{y-3}{-2}$.

Пример 2. Найти каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Перепишем данные параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -2 + 0 \cdot t \\ y = 3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

и выражаем t из каждого уравнения:

$$t = \frac{x+2}{0}, \quad t = \frac{y-3}{4},$$

причем первое равенство рассматриваем как формальную запись. Приравняв правые части обоих равенств, получаем каноническое уравнение данной прямой.

Ответ: $\frac{x+2}{0} = \frac{y-3}{4}$.

Задача 97. Найти параметрические уравнения прямой, зная ее каноническое уравнение.

Решение. Пусть дано каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Обозначим $\frac{x - x_0}{m} = t$, тогда из уравнения следует, что

$$\frac{y - y_0}{n} = t. \text{ Выразим из этих равенств } x \text{ и } y: x = x_0 + mt,$$

$y = y_0 + nt$. Записывая эти равенства в виде системы, получаем параметрические уравнения данной прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пример. Записать параметрическое уравнение прямой

$$\frac{x + 3}{5} = \frac{y - 2}{-4}.$$

Решение. Обозначим $\frac{x + 3}{5} = t$, $\frac{y - 2}{-4} = t$. Выражаем отсюда

x и y и получаем ответ.

Ответ: $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 2 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Задача 98. Найти уравнение прямой в отрезках, зная ее общее уравнение.

Решение. Пусть дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, где $A \neq 0 \neq B$, $C \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $-C$:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0.$$

Обозначим $-\frac{A}{C} = \frac{1}{a}$; $-\frac{B}{C} = \frac{1}{b}$ и подставим в уравнение:

$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y - 1 = 0$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Получили уравнение прямой в отрезках.

Ответ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Пример. Найти уравнение прямой $2x - 5y + 3 = 0$ в отрезках.

Решение. Делим уравнение на -3 : $-\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}y - 1 = 0$. Так как

$$-\frac{2}{3} = \frac{1}{-\frac{3}{2}}, \text{ а } \frac{5}{3} = \frac{1}{\frac{3}{5}}, \text{ то подставляя в уравнение, получаем}$$

уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{\left(-\frac{3}{2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{3}{5}\right)} = 1.$

Ответ: $\frac{x}{\left(-\frac{3}{2}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{3}{5}\right)} = 1.$

Задача 99. Привести общее уравнение прямой на плоскости к нормированному виду, найти расстояние до нее от начала координат и полярный угол ее нормального вектора.

Решение. Пусть $L: Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой L на координатной плоскости Oxy . Тогда $\vec{n} = (A, B)$ – координаты нормального вектора прямой и нормированное уравнение имеет вид

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0 \quad \text{или} \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0,$$

где $\cos \alpha = A \cdot \mu$, $\cos \beta = B \cdot \mu$ – направляющие косинусы нормального вектора прямой, $p = |C \cdot \mu| > 0$ равно расстоянию от начала координат до прямой: $d(O; L) = p$. Здесь число

$$\mu = \pm \frac{1}{|n|} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

называется нормирующим множителем. Нормирующий множитель и свободный коэффициент C имеют противоположные знаки.

В нормированном уравнении прямой ее нормальный вектор, отложенный от начала координат, имеет направление от начала координат к прямой.

Определение. Угол поворота оси абсцисс вокруг начала координат против часовой стрелки до совпадения с нормальным вектором $\mu \cdot \bar{n} = (\mu A, \mu B)$ называется полярным углом нормального вектора прямой.

Если обозначить полярный угол через φ , то

$$\mu \cdot \bar{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Таким образом, для приведения общего уравнения прямой к нормированному виду нужно умножить уравнение на нормирующий множитель, знак которого противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 1. Найти нормированное уравнение прямой

$L: 2x - y - 5 = 0$, расстояние от начала координат до нее и полярный угол ее нормального вектора.

Решение. Выписываем нормальный вектор и находим его модуль и нормирующий множитель:

$$\bar{n} = (2, -1), \quad |\bar{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Так как свободный член в общем уравнении прямой равен $-5 < 0$, то нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Умножая данное уравнение на нормирующий множитель, получаем нормированное уравнение прямой:

$$L: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{5}{\sqrt{5}} = 0.$$

Найдем полярный угол нормального вектора

$$\mu \cdot \bar{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Т.е. $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и, следовательно, полярный

угол находится в четвертой четверти: $\varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right)$. Поэтому

$$\varphi = 2\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\pi + \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$, $d = \sqrt{5}$, $\varphi = 2\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Пример 2. Найти нормированное уравнение прямой

$L: 2x - y + 5 = 0$, расстояние от начала координат до нее и полярный угол ее нормального вектора.

Решение. Выписываем нормальный вектор и находим его модуль и нормирующий множитель:

$$\bar{n} = (2, -1), \quad |\bar{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Так как свободный член в общем уравнении прямой равен $5 > 0$, то нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Умножая данное уравнение на нормирующий множитель, получаем нормированное уравнение прямой:

$$L: -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{5}{\sqrt{5}} = 0.$$

Найдем полярный угол нормального вектора

$$\mu \cdot \bar{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Т.е. $\cos \varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и, следовательно, полярный

угол находится во второй четверти: $\varphi \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Поэтому

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $L: \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \sqrt{5} = 0$ – нормированное уравнение прямой, $d(O; L) = \sqrt{5}$ – расстояние от начала координат до плоскости, полярный угол нормального вектора

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

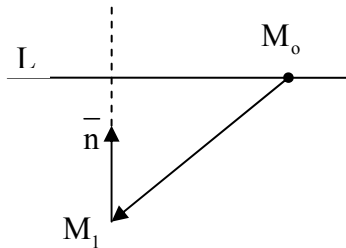


Рис. 10.

Задача 100. Найти расстояние от точки до прямой на плоскости.

Решение. Пусть даны прямая $L: Ax + By + C = 0$ и некоторая точка $M_1(x_1, y_1)$ на координатной плоскости Oxy (рисунок 10). Выберем на прямой L произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и проведем вектор $\overline{M_0M_1}$. Нетрудно видеть, что модуль проекции вектора $\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ на нормальный вектор $\bar{n} = (A, B)$ прямой L и будет искомым расстоянием от точки M_1 до прямой L :

$$\begin{aligned} d = d(M_1; L) &= |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_0M_1}| = \frac{|\bar{n} \cdot \overline{M_0M_1}|}{|\bar{n}|} = \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Подставляя координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ в уравнение прямой, получаем равенство $Ax_0 + By_0 + C = 0$, откуда находим: $C = -Ax_0 - By_0$. Окончательно получаем:

$$d(O; L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В частности, расстояние от начала координат до прямой равно

$$d(O; L) = \frac{|C|}{|\bar{n}|} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Определение. Пусть даны произвольное общее уравнение прямой $L: Ax + By + C = 0$ и произвольная точка прямой $M_1(x_1, y_1)$. Число

$$\Delta(M_1; L) \equiv Ax_1 + By_1 + C$$

называется невязкой точки M_1 относительно прямой L .

Определение. Величина

$$\delta(M_1; L) = \frac{\Delta(M_1; L)}{|\bar{n}|} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

называется отклонением точки M_1 от прямой L .

Из последнего определения следует, что расстояние от точки M_1 до прямой L равно модулю отклонения точки M_1 от прямой L :

$$d(M_1; \sigma) = |\delta(M_1; L)|.$$

Очевидно, что отклонение и невязка имеют одинаковый знак. Если привести уравнение прямой к нормальному виду: $x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$, то формула расстояния от точки до прямой принимает вид:

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta - p| = |\delta(M_1; L)|,$$

где $x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta - p = \delta(M_1; L)$ – отклонение точки M_1 от прямой L .

Ответ: $d(O; L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Пример 1. Найти расстояние от точки $A(8; 7)$ до прямой

$$L: \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1.$$

Решение. Запишем уравнение прямой L в общем виде, выпишем ее нормальный вектор и найдем его модуль:

$$6x - 3y - 18 = 0 \quad \text{или} \quad 2x - y - 6 = 0, \quad \bar{n} = (2; -1), \quad |\bar{n}| = \sqrt{5}.$$

Находим невязку точки A относительно прямой L :

$$\Delta(A; L) = 2 \cdot 8 - 7 - 6 = 3.$$

Находим отклонение точки A от прямой L :

$$\delta(A; L) = \frac{\Delta(A; L)}{|\bar{n}|} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Находим расстояние от точки A до прямой L :

$$d = |\delta(A; L)| = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{3}{\sqrt{5}}.$

Пример 2. Найти расстояние от начала координат до прямой $y = 2x - 6$.

Решение. Запишем уравнение прямой в общем виде $2x - y - 6 = 0$ и воспользуемся формулой

$$d(O; \sigma) = \frac{|C|}{|\bar{n}|} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}.$

Задача 101. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми на плоскости.

Решение. 1-й способ. Выбрать на одной прямой произвольную точку, и найти расстояние от нее до второй прямой, т.е. задача сводится к задаче 100.

2-й способ. Приведем оба уравнения параллельных прямых к нормальному виду:

$$L_1: x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 = 0, \quad L_2: x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2 = 0,$$

где $\bar{n}_1^0 = (\cos \varphi_1, \sin \varphi_1)$ и $\bar{n}_2^0 = (\cos \varphi_2, \sin \varphi_2)$ – нормальные векторы прямых L_1 и L_2 соответственно.

Возможны следующие 2 случая:

а) $\bar{n}_1^0 = \bar{n}_2^0$

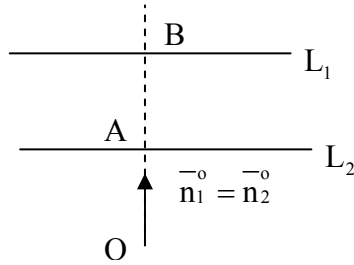


Рис. 11.

Здесь, $p_1 = OB$, $p_2 = OA$ – расстояния от начала координат до соответствующих прямых. Так как неизвестно, какая прямая ближе к началу координат, то расстояние между прямыми

$$d(L_1; L_2) = |p_1 - p_2|.$$

б) $\vec{n}_1^0 = -\vec{n}_2^0$

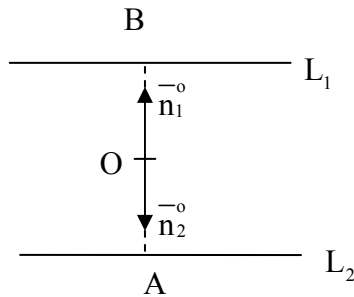


Рис. 12.

Так как нормальные векторы $\vec{n}_1^0$ и $\vec{n}_2^0$ направлены от начала координат к прямым и противоположны, то начало координат находится между прямыми.

Здесь, как и в предыдущем случае, $p_1 = OB$, $p_2 = OA$ – расстояния от начала координат до соответствующих прямых. Отсюда следует:

$$d(L_1; L_2) = p_1 + p_2.$$

Ответ: $d(L_1; L_2) = |p_1 - p_2|$, если $\vec{n}_1^0 = \vec{n}_2^0$;

$d(L_1; L_2) = p_1 + p_2$, если $\vec{n}_1^0 = -\vec{n}_2^0$.

Пример. Найти расстояние между параллельными прямыми $L_1: 3x - 4y + 10 = 0$ и $L_2: -6x + 8y + 5 = 0$.

Решение. Приводим уравнения прямых к нормированному виду:

$$\vec{n}_1 = (3; -4), \quad |\vec{n}_1| = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

$$\vec{n}_2 = (-6; 8) = -2(3; -4) = -2\vec{n}_1, \quad |\vec{n}_2| = 2|\vec{n}_1| = 10.$$

Так как свободные коэффициенты положительные, то их нормирующие множители отрицательны:

$$\mu_1 = -\frac{1}{|\vec{n}_1|} = -\frac{1}{5}, \quad \mu_2 = -\frac{1}{|\vec{n}_2|} = -\frac{1}{10}, \quad L_1: -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0,$$

$$L_2: \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0.$$

Здесь, $p_1 = 2$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $\vec{n}_1^0 = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$, $\vec{n}_2^0 = \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ и

$\vec{n}_1^0 = -\vec{n}_2^0$, поэтому начало координат находится между прямыми, и расстояние между ними

$$d(L_1; L_2) = p_1 + p_2 = 2 + \frac{1}{2} = 2,5.$$

Ответ: $d(L_1; L_2) = 2,5$.

Задача 102. Найти все виды уравнений прямой, зная ее общее уравнение.

Решение. Частично эта задача уже решалась ранее, смотрите задачи 95, 98, 99.

Пусть дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ с отличными от нуля коэффициентами.

1) $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом;

2) $\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1$ – уравнение прямой в отрезках;

3) $\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ – нормированное уравнение прямой, в котором выбирается знак, противоположный знаку C ;

4) $(A, B) = \vec{n}$ – координаты нормального вектора прямой, $(-B, A) = \vec{s}$ – координаты направляющего вектора прямой.

Из уравнения прямой в отрезках находим точку $M(-\frac{C}{A}; 0)$,

лежащую на данной прямой. Тогда $\frac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \frac{y}{A}$ – каноническое уравнение прямой;

5) $\begin{cases} x = -\frac{C}{A} - Bt \\ y = At \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ – параметрическое уравнение прямой.

Пример. Найти все виды уравнений прямой $3x - 4y - 1 = 0$.
Решение.

1) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом;

2) $\frac{x}{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{y}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 1$ – уравнение прямой в отрезках;

3) $\mu = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{5}$ – нормирующий множитель,

$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} = 0$ – нормированное уравнение прямой;

4) $\vec{n} = (3; -4)$ – нормальный вектор прямой, $\vec{s} = (4; 3)$ – направляющий вектор прямой. Точка $M(\frac{1}{3}; 0)$ лежит на дан-

ной прямой, откуда $\frac{x - \frac{1}{3}}{4} = \frac{y}{3}$ – каноническое уравнение прямой. Можно найти на прямой точку с целыми координатами. Из уравнения прямой с угловым коэффициентом находим $y = \frac{3x - 1}{4}$ и при $x = 3, y = 2$. Тогда каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x - 3}{4} = \frac{y - 2}{3}$.

5) $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$ – параметрическое уравнение прямой.

Задача 103. Найти точку пересечения двух пересекающихся прямых на плоскости.

Решение. Способ решения зависит от формы уравнений данных прямых. Рассмотрим несколько случаев.

1) Прямые заданы общими уравнениями:

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда решаем систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}.$$

Если прямые пересекаются, то данная система имеет единственное решение $(x_0; y_0)$, которое и дает координаты точки пересечения.

2) Одна прямая задана общим уравнением, вторая – параметрическим:

$$L_1: Ax + By + C = 0, \quad L_2: \begin{cases} x = a + mt \\ y = b + nt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Подставим в первое уравнение x и y из второго:

$$A(a + mt) + B(b + nt) + C = 0$$

и решим это уравнение относительно параметра t . Возможны случаи:

а) уравнение не имеет решений. Вывод: прямые параллельны;

б) уравнение имеет бесконечно много решений. Вывод: прямые совпадают;

в) уравнение имеет единственное решение $t = t_0$. Вывод: прямые пересекаются в точке с координатами

$$\begin{cases} x_0 = a + mt_0 \\ y_0 = b + nt_0 \end{cases}.$$

3) Обе прямые заданы в параметрической форме:

$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + m_1 t \\ y = y_1 + n_1 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad L_2: \begin{cases} x = x_2 + m_2 k \\ y = y_2 + n_2 k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Решаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x_2 + m_2 k = x_1 + m_1 t \\ y_2 + n_2 k = y_1 + n_1 t \end{cases}.$$

Возможны случаи:

а) система не имеет решений. Вывод: прямые параллельны;

б) система имеет бесконечно много решений. Вывод: прямые совпадают;

в) система имеет единственное решение $t = t_0, k = k_0$. Вывод: прямые пересекаются в точке с координатами

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + m_1 t_0 = x_2 + m_2 k_0 \\ y_0 = y_1 + n_1 t_0 = y_2 + n_2 k_0 \end{cases}.$$

Пример 1. Найти точку пересечения прямых

$$L_1: \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \quad L_2: 3x + y - 15 = 0.$$

Решение. Решаем систему $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$.

Ответ: (4; 3).

Пример 2. Найти точку пересечения прямых

$$L_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad L_2: 3x + y - 16 = 0.$$

Решение. Подставляем x и y из параметрических уравнений в общее уравнение:

$$3(1 + 2t) + (-2 - t) - 16 = 0, \quad 5t - 15 = 0, \quad t = 3.$$

Уравнение имеет единственное решение, прямые имеют одну общую точку: $\begin{cases} x_0 = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ y_0 = -2 - 3 = -5 \end{cases}$.

Ответ: (7; -5).

Пример 3. Найти точку пересечения прямых

$$L_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \end{cases}, \quad L_2: \begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 3 + 2k \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. В уравнениях второй прямой заменим параметр t на другую букву, например k , и решим систему:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -2 + 3k \\ -2 - t = 3 + 2k \end{cases}, \quad \begin{cases} 2t - 3k = -3 \\ t + 2k = -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2(-2k - 5) - 3k = -3 \\ t = -2k - 5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -7k = 7 \\ t = -2k - 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} k = -1 \\ t = -3 \end{cases}.$$

Система имеет единственное решение, прямые пересекаются в точке $\begin{cases} x_0 = 1 + 2(-3) = -5 \\ y_0 = -2 - (-3) = 1 \end{cases}$.

Ответ: (-5; 1).

Задача 104. Найти проекцию точки на прямую на плоскости.

Решение.

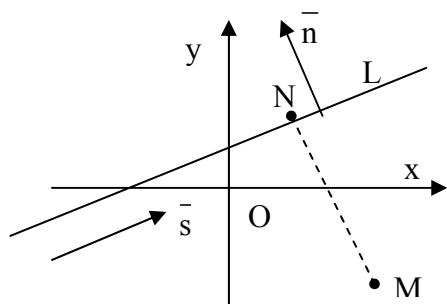


Рис. 13.

Полезно сначала проверить, не лежит ли точка M на данной прямой, т.к. в таком случае ее проекция совпадает с ней самой и искать нечего.

Пусть точка M не лежит на данной прямой. Возможны три случая.

- 1) Из уравнения прямой легко найти ее нормальный вектор.
- 2) Из уравнения прямой легко найти ее направляющий вектор.
- 3) Прямая задана уравнением с угловым коэффициентом.

Рассмотрим каждый случай по отдельности.

- 1) Пусть прямая L задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

и даны координаты точки $M(x_1, y_1)$.

Проведем через точку M прямую перпендикулярно данной прямой L и найдем их точку пересечения N , которая и будет искомой точкой. Нормальный вектор данной прямой $\vec{n} = (A, B)$ служит направляющим вектором прямой MN , поэтому удобно записать ее каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}.$$

Далее решаем систему $\begin{cases} Ax + By = -C \\ B(x - x_1) = A(y - y_1) \end{cases}$ и находим координаты точки N .

2) Пусть прямая L задана каноническим уравнением или параметрическими уравнениями:

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad \text{или} \quad L: \begin{cases} x = a + mt \\ y = b + nt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (m, n)$ служит для прямой MN нормальным вектором. Тогда (см. далее задачу 109) мы можем сразу написать уравнение прямой MN :

$$m(x - x_1) + n(y - y_1) = 0$$

и раскрывая в последнем уравнении скобки и приводя подобные члены, получаем общее уравнение прямой MN . Далее, как и выше находим координаты точки N .

3) Пусть прямая L задана уравнением с угловым коэффициентом: $L: y = kx + b$. Прямая, перпендикулярная

прямой L , будет иметь угловой коэффициент равный $-\frac{1}{k}$,

поэтому (смотрите далее задачу 108)

$$MN: y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1).$$

Далее, как и выше, находим координаты точки N .

Пример 1. Найти проекцию точки $M(1; -3)$ на прямую $2x - 5y + 4 = 0$.

Решение. Точка M не лежит на данной прямой. Пусть N – ее проекция на данную прямую. Нормальный вектор прямой $\vec{n} = (2; -5)$ есть направляющий вектор для прямой MN . Тогда $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-5}$ есть каноническое уравнение прямой MN . Находим точку пересечения N :

$$\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ -5x + 5 = 2y + 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}.$$

Решая систему, находим: $x = -\frac{13}{29}$, $y = \frac{18}{29}$.

Ответ: $\left(-\frac{13}{29}; \frac{18}{29}\right)$.

Пример 2. Найти основание высоты в треугольнике ABC, опущенной из вершины A на основание BC, если A(1; -2), B(-3; 5), C(-6; -2).

Решение. Выполним схематический рисунок треугольника ABC:

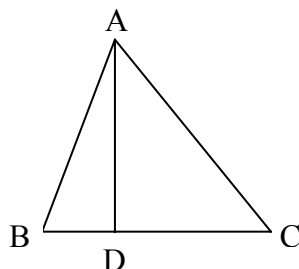


Рис. 14.

Пишем уравнение прямой BC: (смотрите задачу 93)

$$\frac{x+6}{-3+6} = \frac{y+2}{5+2}, \quad \frac{x+6}{3} = \frac{y+2}{7}.$$

Направляющий вектор $\vec{s} = \overrightarrow{CB} = (3; 7)$ прямой BC служит нормальным вектором для прямой AD. Поэтому, уравнение прямой AD имеет вид: $3(x-1) + 7(y+2) = 0$ или $3x + 7y + 11 = 0$. Для вычисления координат точки D решаем систему:

$$\begin{cases} 7(x+6) = 3(y+2) \\ 3x + 7y = -11 \end{cases}, \quad \begin{cases} 7x - 3y = -36 \\ 3x + 7y = -11 \end{cases}, \quad x = -\frac{285}{58}, \quad y = \frac{31}{58}.$$

Ответ: $\left(-\frac{285}{58}, \frac{31}{58}\right)$.

Пример 3. Найти вершину B прямоугольного треугольника OAB, если O — начало ПДСК на плоскости Oxy, гипотенуза OA лежит на оси ординат и равна 4, вершина B находится в первой четверти на прямой $y = \frac{x}{2}$.

Решение. Выполним чертеж.

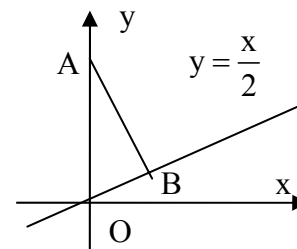


Рис. 15.

Из условий задачи следует, что точка A имеет координаты (0; 4), угловой коэффициент прямой AB равен -2, поэтому уравнение AB имеет вид:

$$y - 4 = -2x \quad \text{или} \quad y = -2x + 4.$$

Для вычисления координат точки B решаем систему:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ y = -2x + 4 \end{cases}, \quad x = \frac{8}{5}, \quad y = \frac{4}{5}.$$

Ответ: B $\left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Задача 105. Найти точку симметричную данной относительно данной прямой на плоскости.

Решение. Пусть дана прямая L и точка M . Обозначим через P точку симметричную точке M относительно прямой L , через N точку пересечения прямой L с прямой MN :

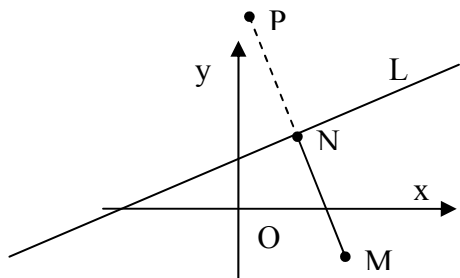


Рис. 16.

Сначала, как в предыдущей задаче, находим координаты точки N . А так как N есть середина отрезка PM , то координаты точки P можно найти из формул середины отрезка:

$$x_N = \frac{x_M + x_P}{2} \Rightarrow x_P = 2x_N - x_M, \quad y_P = 2y_N - y_M.$$

Пример. Найти точку симметричную точке $M(1; -3)$ относительно прямой $2x - y + 1 = 0$.

Решение. Точка M не лежит на данной прямой. Пусть N – ее проекция на данную прямую. Нормальный вектор прямой $\vec{n} = (2; -1)$ есть направляющий вектор для прямой MN . Тогда

где $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$ есть каноническое уравнение прямой MN .

Находим точку пересечения N :

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -x + 1 = 2y + 6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x + 2(2x + 1) = -5 \end{cases},$$

$$x = -\frac{7}{5}, \quad y = -\frac{9}{5}.$$

Итак, $N(-\frac{7}{5}, -\frac{9}{5})$. Вычисляем координаты точки P :

$$x_P = 2x_N - x_M = 2\left(-\frac{7}{5}\right) - 1 = -\frac{19}{5},$$

$$y_P = 2y_N - y_M = 2\left(-\frac{9}{5}\right) - (-3) = -\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\left(-\frac{19}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

Задача 106. Найти общее уравнение прямой, проходящей через данную точку и принадлежащую данному пучку прямых.

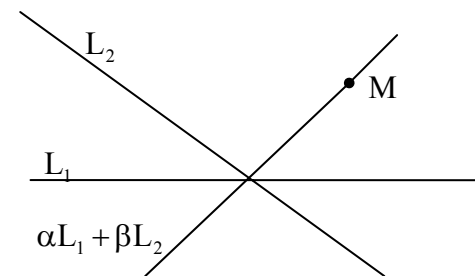


Рис. 17.

Решение. Пусть дана точка $M(x_1; y_1)$ и пучок прямых

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Выбор прямой из пучка происходит с помощью выбора коэффициентов α и β . В данном пучке есть прямая, проходящая через точку M , поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой. Воспользуемся этим для нахождения уравнения прямой, проходящей через точку M , т.е. для нахождения соответствующих коэффициентов α и β . Подставляя координаты точки M в уравнение пучка,

получаем одно уравнение с двумя неизвестными α и β . Выберем произвольным образом значение одной из неизвестных, находим из этого уравнения значение второй неизвестной. Подставляя найденные значения α и β в уравнение пучка, находим уравнение искомой прямой.

Пример. Из пучка прямых $\alpha(x - 2y + 1) + \beta(2x + 3y - 4) = 0$ выбрать прямую проходящую через точку $M(-2; -4)$.

Решение. Подставляем координаты точки M в уравнение пучка:

$$\alpha(-2 - 2(-4) + 1) + \beta(2(-2) + 3(-4) - 4) = 0, \quad 7\alpha - 20\beta = 0.$$

Положим $\alpha = 20$, тогда $\beta = 7$. Подставляем эти значения α и β в уравнение пучка:

$$20(x - 2y + 1) + 7(2x + 3y - 4) = 0.$$

Приводим подобные члены: $34x - 19y - 8 = 0$.

Ответ: $34x - 19y - 8 = 0$.

Задача 107. Найти уравнение пучка прямых, зная его центр.

Решение. Уравнение пучка прямых имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю, и прямые

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

пересекаются в точке, называемой центром пучка.

Таким образом, для написания уравнения пучка с заданным центром пучка в точке $M(x_0, y_0)$ нам потребуется уравнения двух прямых пересекающихся в этой точке. В качестве таких прямых удобно взять прямые $x - x_0 = 0$ и $y - y_0 = 0$. Тогда искомое уравнение пучка имеет вид:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0.$$

Заменив греческие буквы на латинские, получаем искомое уравнение: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Ответ: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $(A; B) \neq (0; 0)$.

Пример. Написать уравнение пучка прямых с центром пучка в точке $M(-1; 2)$.

Ответ: $A(x + 1) + B(y - 2) = 0$, $A, B \in \mathbb{R}$, $(A; B) \neq (0; 0)$.

Задача 108. Найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом.

Решение. Пусть дана точка $M(x_0, y_0)$. Требуется найти уравнение прямой $y = kx + b$, в которой известен коэффициент k , и известно, что точка M лежит на этой прямой. Подставляя координаты точки в уравнение прямой, получаем верное равенство: $y_0 = kx_0 + b$, откуда находим $b = y_0 - kx_0$. Подставляя в уравнение $y = kx + b$, получаем

$$y = kx + b = kx + y_0 - kx_0 = k(x - x_0) + y_0.$$

Ответ: $y = k(x - x_0) + y_0$.

Пример. Найти уравнение прямой проходящей через точку $M(-3; 2)$ под углом 30° к оси абсцисс.

Решение.

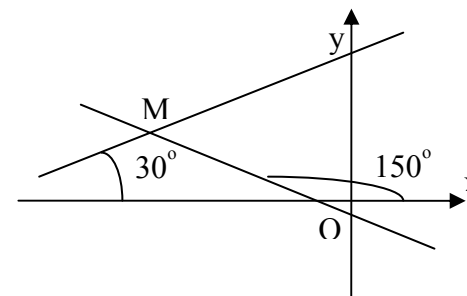


Рис. 18.

По условию задачи угол наклона одной прямой к оси абсцисс равен 30° , т.е. ее угловой коэффициент $k_1 = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, а для второй прямой ее угол наклона равен 150° , т.е. ее угловой коэффициент $k_2 = \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

Тогда искомые уравнения имеют вид:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)+2, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x+3)+2,$$

$$x\sqrt{3}-3y+(2+3\sqrt{3})=0, \quad x\sqrt{3}+3y+(3\sqrt{3}-2)=0$$

Ответ: $x\sqrt{3}-3y+(2+3\sqrt{3})=0$, $x\sqrt{3}+3y+(3\sqrt{3}-2)=0$.

Задача 109. Найти уравнение прямой с заданным нормальным вектором, проходящей через заданную точку.

Решение. Пусть известен нормальный вектор прямой $\vec{n} = (A, B)$ и точка $M(x_0, y_0)$ лежащая на этой прямой.

1-й способ. Воспользуемся уравнением пучка прямых с центром пучка в точке M :

$$\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)=0.$$

Подставляя в это уравнение $\alpha=A, \beta=B$, получаем искомое уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

2-й способ. Общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax+By+C=0,$$

где коэффициенты A и B известны и осталось найти коэффициент C . С этой целью подставим в уравнение координаты точки M . Так как точка M лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой:

$$Ax_0+By_0+C=0, \text{ откуда } C=-Ax_0-By_0.$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$Ax+By-Ax_0-By_0=0 \quad \text{или} \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

– искомое уравнение прямой.

Пример. Известно, что точка $M(1,2)$ лежит на прямой и $\vec{n} = (-1, 4)$ – ее нормальный вектор. Найти уравнение прямой.

Решение. 1-й способ. Искомое уравнение прямой имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

где A, B – координаты ее нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$, $M(x_0, y_0)$ – координаты точки, лежащей на данной прямой. Так как нормальный вектор данной прямой известен $\vec{n} = (-1, 4)$, то $A=-1, B=4$. Так как точка $M(1, 2)$ лежит на прямой, то $x_0=1, y_0=2$. Подставляем эти числовые данные в уравнение:

$$-(x-1)+4(y-2)=0.$$

Ответ: $x-4y+7=0$.

2-й способ. Общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax+By+C=0,$$

где A, B – координаты ее нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$. Так как нормальный вектор данной прямой известен $\vec{n} = (-1, 4)$, то $A=-1, B=4$, и уравнение прямой принимает вид $-x+4y+C=0$.

Так как точка $M(1, 2)$ лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е. $-1+4 \cdot 2+C=0$ или $C=-7$. Подставляя в уравнение это значение коэффициента C , получаем искомое уравнение прямой

$$-x+4y-7=0.$$

Ответ: $x-4y+7=0$.

Задача 110. Найти уравнение прямой, на которой лежит отраженный от данной прямой луч, если известно уравнение прямой, на которой лежит падающий луч.

Решение.

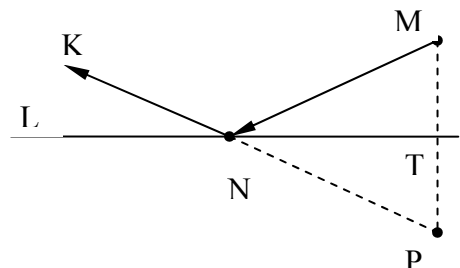


Рис. 19.

Пусть даны уравнения прямой L и прямой, на которой лежит падающий луч MN . Требуется найти уравнение прямой, на которой лежит отраженный от прямой L луч.

1) Находим точку пересечения N прямой L с прямой, на которой лежит падающий луч.

2) На прямой, на которой лежит падающий луч, находим какую-нибудь точку $M \notin L$.

3) Находим точку P , симметричную точке M относительно прямой L см. задачу 105).

4) Находим уравнение прямой PN , на которой и будет лежать отраженный луч.

Пример. Найти уравнение отраженного от прямой $L: x + 2y + 3 = 0$ луча, лежащего на прямой $2x - 3y - 8 = 0$.

Решение. 1) Находим точку N пересечения данных прямых:

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

Получаем $N(1; -2)$.

2) На прямой $2x - 3y - 8 = 0$ выбираем точку $M(4; 0)$.

3) Через точку M проводим прямую, перпендикулярную прямой $L: x + 2y + 3 = 0$. Направляющим вектором этой прямой служит нормальный вектор прямой L , и тогда ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y}{2} \quad \text{или} \quad 2x - y - 8 = 0.$$

Находим координаты точки T (рисунок 19). Решаем систему

$$\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

и получаем $T(\frac{13}{5}; -\frac{14}{5})$.

Находим из формул середины отрезка координаты точки P , симметричной точке M относительно прямой L :

$$x_T = \frac{x_M + x_P}{2} \Rightarrow x_P = 2x_T - x_M = \frac{26}{5} - 4 = \frac{6}{5},$$

$$y_P = 2y_T - y_M = -\frac{28}{5} - 0 = -\frac{28}{5}, \quad P(\frac{6}{5}; -\frac{28}{5}).$$

4) Находим искомое уравнение PN :

$$\frac{x-1}{\frac{6}{5}-1} = \frac{y+2}{-\frac{28}{5}+2}, \quad 5(x-1) = \frac{5(y+2)}{-18} \quad \text{или}$$

$$-18(x-1) = y+2.$$

Ответ: $18x + y - 16 = 0$.

Задача 111. Определить взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Теорема. Пусть

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

– общие уравнения двух прямых на координатной плоскости Оху. Тогда

- 1) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 совпадают;
- 2) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые L_1 и L_2 параллельные;
- 3) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то прямые пересекаются.

Теорема. Пусть

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

– общие уравнения двух прямых на координатной плоскости Оху. Тогда, если система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

- 1) имеет единственное решение (x_0, y_0) , то прямые пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$;
- 2) имеет бесконечно много решений, то прямые совпадают;
- 3) не имеет решений, то прямые параллельные.

Пример. Определить взаимное расположение двух прямых:

$$L_1: y = 1,5x - 3,2, \quad L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3}.$$

Решение. 1-й способ. Запишем оба уравнения в общем виде. Умножим первое уравнение на 10: $10y = 15x - 32$, откуда $L_1: 15x - 10y - 32 = 0$. Второе уравнение:

$$3(x+1) = 2(y-4) \quad \text{или} \quad L_2: 3x - 2y + 11 = 0.$$

Выписываем нормальные векторы прямых:

$$\vec{n}_1 = (15; -10), \quad \vec{n}_2 = (3; -2).$$

Так как $\frac{15}{3} = \frac{-10}{-2}$, то $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, и прямые либо параллельны, либо совпадают. Находим отношение соответствующих коэффициентов:

$$\frac{15}{3} = \frac{-10}{-2} \neq \frac{-32}{11}.$$

Ответ: Прямые параллельные.

2-й способ. Решаем систему

$$\begin{cases} y = 1,5x - 3,2 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{3} \end{cases}$$

и убеждаемся, что она не имеет решений, а это означает, что данные прямые параллельные.

Задача 112. Найти угол между прямыми на плоскости.

Решение. Пусть даны две пересекающиеся прямые на координатной плоскости Оху.

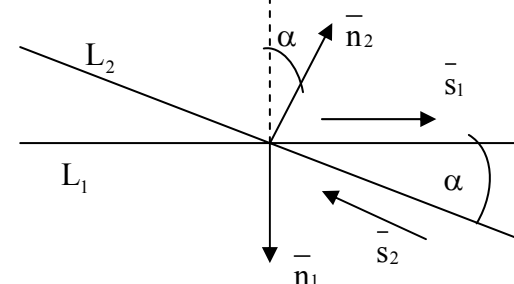


Рис. 20.

- 1) Прямые заданы общими уравнениями

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Нормальные векторы этих прямых имеют координаты:

$\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$. Тогда угол α между прямыми равен (смотрите рисунок 20):

$$\alpha = (L_1 \wedge L_2) = (\bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2) = \arccos \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} =$$

$$= \arccos \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad \text{или} \quad (L_1 \wedge L_2) = \pi - (\bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2).$$

2) Прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}.$$

Находим их направляющие векторы и угол между ними:

$$\bar{s}_1 = (m_1, n_1), \quad \bar{s}_2 = (m_2, n_2)$$

$$\alpha = (L_1 \wedge L_2) = (\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2) = \arccos \frac{|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2|}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} =$$

$$= \arccos \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}},$$

$$\text{или} \quad (L_1 \wedge L_2) = \pi - (\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2).$$

3) Прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$L_1: y = k_1 x + b_1 \quad \text{и} \quad L_2: y = k_2 x + b_2.$$

Записываем их в общем виде и находим их нормальные векторы: $L_1: k_1 x - y + b_1 = 0$, $L_2: k_2 x - y + b_2 = 0$, $\bar{n}_1 = (k_1, -1)$, $\bar{n}_2 = (k_2, -1)$. Находим, далее, из предыдущих формул

$$\alpha = \arccos \frac{k_1 k_2 + 1}{\sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{k_2^2 + 1}}.$$

Используя связь между тангенсом и косинусом, можно доказать, что если прямые не перпендикулярны, т.е. если $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = k_1 k_2 + 1 \neq 0$, то следующая формула позволяет вы-

$$\text{числить острый угол между прямыми} \quad \operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2 + 1} \right|.$$

Пример. Найти угол между прямыми

$$L_1: \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \quad L_2: 3x + y - 15 = 0.$$

Решение. Нормальные векторы прямых:

$$\bar{n}_1 = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}(3; -2), \quad \bar{n}_2 = (3; 1).$$

В качестве нормального вектора 1-й прямой удобнее взять вектор $\bar{n}_1 = (3; -2)$. Тогда

$$\alpha = (L_1 \wedge L_2) = (\bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2) = \arccos \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} =$$

$$= \arccos \frac{9 - 2}{\sqrt{10} \sqrt{13}} = \arccos \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

Запишем уравнения прямых с угловым коэффициентом:

$$L_1: y = \frac{3x}{2} - 3, \quad L_2: y = -3x + 15, \quad \text{так что} \quad k_1 = 1,5, \quad k_2 = -3.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2 + 1} \right| = \left| \frac{1,5 + 3}{-4,5 + 1} \right| = \frac{4,5}{3,5} = \frac{9}{7} \quad \text{и} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{9}{7}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = (L_1 \wedge L_2) = \arccos \frac{7}{\sqrt{130}} = \operatorname{arctg} \frac{9}{7}.$$

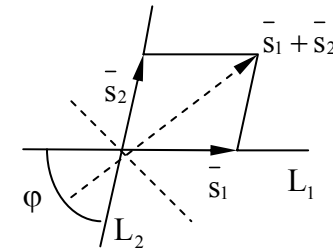


Рис. 21.

Задача 113. Найти уравнение биссектрисы угла между прямыми на плоскости.

Решение. 1-й способ. Этот способ удобно применять в случае, когда длины направляющих векторов данных прямых равны. Пусть $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно, причем $|\vec{s}_1| = |\vec{s}_2|$. Допустим, что нам нужно найти уравнение биссектрисы острого угла между данными прямыми. Обозначим этот угол через φ . Если скалярное произведение $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 > 0$, то $(\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2) = \varphi$, если $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 < 0$, то $(\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2) = \pi - \varphi$.

Взяв вместо вектора $\vec{s}_1$ противоположный ему вектор, мы добиваемся того, что $(\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2) = \varphi$ как на рисунке 21. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что угол между направляющими векторами равен острому углу между прямыми. По правилу сложения векторов сумма $\vec{s}_1 + \vec{s}_2$ лежит на диагонали параллелограмма, построенного на векторах слагаемых как на его сторонах, поэтому сумма векторов будет служить направляющим вектором биссектрисы угла между прямыми, если этот параллелограмм будет ромбом, а это будет в том случае, если $|\vec{s}_1| = |\vec{s}_2|$.

Из рассмотренного выше следует, что для нахождения уравнения биссектрисы нужно найти точку пересечения прямых и найти направляющий вектор биссектрисы.

Замечание. Если вектор $\vec{s}_1 + \vec{s}_2$ есть направляющий вектор биссектрисы одного угла между прямыми, то по свойству биссектрис смежных углов этот же вектор является нормальным вектором для биссектрисы второго угла между этими прямыми (смотрите рисунок 21).

Аналогично, вектор $\vec{s}_1 - \vec{s}_2$ является направляющим вектором для одной биссектрисы и нормальным вектором для другой.

Пример 1. Найдите уравнение биссектрисы острого угла образованного прямыми $x + 4y - 7 = 0$, $4x + y + 2 = 0$.

Решение. Находим направляющие векторы данных прямых и их скалярное произведение:

$$\vec{s}_1 = (-4; 1), \quad \vec{s}_2 = (-1; 4), \quad \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 8 > 0,$$

откуда следует, что

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 = (-5; 5) = 5(-1; 1)$$

– направляющий вектор искомой биссектрисы, $\vec{n} = (1; 1)$ – ее нормальный вектор. Точка пересечения данных прямых имеет координаты $(-1; 2)$ и уравнение биссектрисы имеет вид:

$$(x + 1) + (y - 2) = 0 \quad \text{или} \quad x + y - 1 = 0.$$

Ответ: $x + y - 1 = 0$.

2-й способ основан на следующей теореме.

Теорема. Пусть на координатной плоскости Оху даны общие уравнения двух пересекающихся прямых

$$L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

причем $A_1A_2 + B_1B_2 > 0$. Тогда следующее уравнение является уравнением биссектрисы острого угла, образованного этими прямыми:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0, \quad (1)$$

а уравнение

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0, \quad (2)$$

является уравнением биссектрисы тупого угла.

Доказательство. Используем свойство биссектрисы, как геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла (смотрите рисунок 22).

Пусть $M(x, y)$ произвольная точка плоскости. Найдем расстояние от нее до данных прямых и приравняем их:

$$d(M; L_1) = d(M; L_2).$$

По формулам задачи 100, имеем:

$$d(M; L_1) = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad d(M; L_2) = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

– уравнения биссектрис. Осталось выяснить, какое из этих уравнений будет уравнением биссектрисы острого угла.

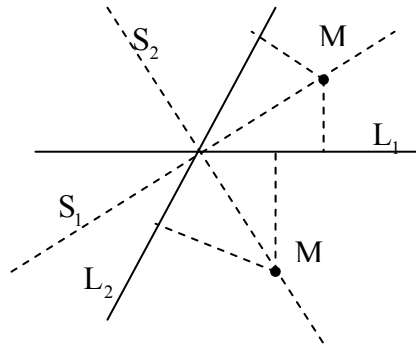


Рис. 22.

В дальнейшем нам удобнее будет пользоваться векторной формой записи общего уравнения прямой:

$$\bar{n} \cdot \bar{r} + C = 0,$$

где $\bar{n} = (A, B)$ – координаты нормального вектора прямой, $\bar{r} = (x, y)$ – координаты текущего вектора прямой.

Уравнение биссектрисы (1) в векторной форме имеет вид:

$$S_1: \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{r} + C_1}{|\bar{n}_1|} + \frac{\bar{n}_2 \cdot \bar{r} + C_2}{|\bar{n}_2|} = 0.$$

Обозначим $\bar{n}_1^0 = \frac{\bar{n}_1}{|\bar{n}_1|}$, $\bar{n}_2^0 = \frac{\bar{n}_2}{|\bar{n}_2|}$. Тогда

$$S_1: \left(\bar{n}_1^0 \cdot \bar{r} + \frac{C_1}{|\bar{n}_1|} \right) + \left(\bar{n}_2^0 \cdot \bar{r} + \frac{C_2}{|\bar{n}_2|} \right) = 0$$

$$\text{или } S_1: (\bar{n}_1^0 + \bar{n}_2^0) \cdot \bar{r} + \left(\frac{C_1}{|\bar{n}_1|} + \frac{C_2}{|\bar{n}_2|} \right) = 0,$$

где $\bar{N}_1 = \bar{n}_1^0 + \bar{n}_2^0$ – ее нормальный вектор.

Аналогично находим векторное уравнение второй биссектрисы и ее нормальный вектор:

$$S_2: \left(\bar{n}_1^0 \cdot \bar{r} + \frac{C_1}{|\bar{n}_1|} \right) - \left(\bar{n}_2^0 \cdot \bar{r} + \frac{C_2}{|\bar{n}_2|} \right) = 0, \quad \bar{N}_2 = \bar{n}_1^0 - \bar{n}_2^0.$$

Заметим, что расстояние от любой точки любой из двух данных прямых (кроме точки их пересечения) до биссектрисы острого угла меньше этого же расстояния до биссектрисы тупого угла. Используем этот факт для выбора биссектрисы острого угла.

Пусть точка $M_1(x_1; y_1) \in L_1$, тогда $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$ или в векторной форме

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{r}_1 + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad \bar{n}_1^0 \cdot \bar{r}_1 + \frac{C_1}{|\bar{n}_1|} = 0$$

Обозначим через Δ_1 – невязку точки M_1 относительно первой биссектрисы S_1 и через Δ_2 – невязку точки M_1 относительно второй биссектрисы S_2 . Тогда

$$\Delta_1 = \left(\bar{n}_1^0 \cdot \bar{r}_1 + \frac{C_1}{|\bar{n}_1|} \right) + \left(\bar{n}_2^0 \cdot \bar{r}_2 + \frac{C_2}{|\bar{n}_2|} \right) = \bar{n}_2^0 \cdot \bar{r}_2 + \frac{C_2}{|\bar{n}_2|},$$

$$\Delta_2 = \left(\vec{n}_1^0 \cdot \vec{r}_1 + \frac{C_1}{|\vec{n}_1|} \right) - \left(\vec{n}_2^0 \cdot \vec{r}_1 + \frac{C_2}{|\vec{n}_2|} \right) = - \left(\vec{n}_2^0 \cdot \vec{r}_1 + \frac{C_2}{|\vec{n}_2|} \right).$$

Расстояния от точки M_1 до биссектрис соответственно равны:

$$d_1 = \frac{|\Delta_1|}{|\vec{N}_1|}, \quad d_2 = \frac{|\Delta_2|}{|\vec{N}_2|} = \frac{|\Delta_1|}{|\vec{N}_2|}.$$

Покажем, что в условиях теоремы, $|\vec{N}_1| > |\vec{N}_2|$, откуда будет следовать, что $d_1 < d_2$, а значит, именно биссектриса S_1 является биссектрисой острого угла. Действительно,

$$\begin{aligned} |\vec{N}_1|^2 &= \vec{N}_1^2 = (\vec{n}_1^0 + \vec{n}_2^0)^2 = (\vec{n}_1^0)^2 + 2\vec{n}_1^0 \cdot \vec{n}_2^0 + (\vec{n}_2^0)^2 = \\ &= |\vec{n}_1^0|^2 + 2\vec{n}_1^0 \cdot \vec{n}_2^0 + |\vec{n}_2^0|^2 = 2 + 2\vec{n}_1^0 \cdot \vec{n}_2^0. \end{aligned}$$

Аналогично, $|\vec{N}_2|^2 = 2 - 2\vec{n}_1^0 \cdot \vec{n}_2^0$. А так как по условию теоремы скалярное произведение $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 > 0$, то $\vec{n}_1^0 \cdot \vec{n}_2^0 > 0$ и $|\vec{N}_1| > |\vec{N}_2|$, ч.т.д. Теорема доказана.

Пример 2. Найти точку пересечения с осью абсцисс биссектрисы тупого угла треугольника, отсекаемого прямыми:

$$y = x, \quad y = \frac{x}{3}, \quad \frac{x}{20} + \frac{y}{5} = 1.$$

Решение. Находим координаты вершин треугольника:

$$O(0;0), \quad A(4;4), \quad B\left(\frac{60}{7}; \frac{20}{3}\right).$$

Определяем, при какой вершине находится тупой угол:

$$\overrightarrow{OA} = (4;4), \quad \overrightarrow{AB} = \left(\frac{32}{7}; -\frac{8}{7}\right); \quad \overrightarrow{OB} = \left(\frac{60}{7}; \frac{20}{7}\right).$$

Здесь тупой угол при вершине А, т.к. скалярное произведение $\frac{1}{4}\overrightarrow{AO} \cdot \frac{8}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{7}(-1; -1)(4; -1) = -\frac{6}{7} < 0$.

Уравнения сторон этого угла запишем в виде:

$$OA: -x + y = 0, \quad AB: x + 4y - 20 = 0,$$

чтобы скалярное произведение их нормальных векторов было положительным: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (-1; 1) \cdot (1; 4) = 3 > 0$. Применяя теорему, получаем, что уравнение

$$\frac{-x + y}{\sqrt{2}} - \frac{x + 4y - 20}{\sqrt{17}} = 0$$

есть искомое уравнение биссектрисы.

Находим точку пересечения биссектрисы с осью Ох. Подставляем в уравнение биссектрисы $y = 0$ и находим

$$x = \frac{4}{3}(\sqrt{34} - 2).$$

Ответ: $x = \frac{4}{3}(\sqrt{34} - 2)$.

Задача 114. Определить взаимное расположение двух точек и прямой на плоскости.

Решение. Пусть даны координаты двух точек и уравнение прямой:

$$M_1(x_1; y_1), \quad M_2(x_2; y_2), \quad L: Ax + By + C = 0.$$

Каждая прямая на плоскости делит эту плоскость на две полуплоскости. Если ни одна из точек не лежит на данной прямой, то возможны два случая:

- 1) обе точки лежат в одной полуплоскости;
- 2) точки лежат в разных полуплоскостях.

Теорема. Пусть

$\Delta_1 = \Delta(M_1; L) = Ax_1 + By_1 + C$, $\Delta_2 = \Delta(M_2; L) = Ax_2 + By_2 + C$ – невязки данных точек относительно данной прямой. Тогда

- 1) если $\Delta_1 \cdot \Delta_2 > 0$, то обе точки лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой;

2) если $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$, то обе точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой (по разные стороны от прямой).

Доказательство. Очевидно, что данные точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой тогда и только тогда, когда прямая пересекает отрезок M_1M_2 в некоторой внутренней точке M_3 этого отрезка, не совпадающей ни с точкой M_1 , ни с точкой M_2 , так как они не лежат на данной прямой.

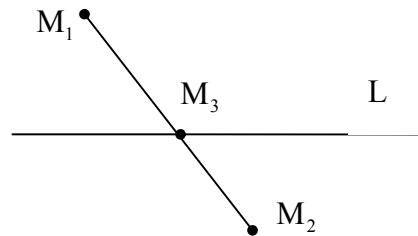


Рис. 23.

Мы докажем, что прямая L пересекает отрезок M_1M_2 тогда и только тогда, когда невязки этих точек Δ_1 и Δ_2 имеют разные знаки, т.е. когда $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$. Отсюда сразу же будет следовать, что точки M_1 и M_2 лежат в одной полуплоскости тогда и только тогда, когда $\Delta_1 \cdot \Delta_2 > 0$.

Пусть $M_3(x_3; y_3)$ – произвольная внутренняя точка отрезка M_1M_2 и пусть $\lambda = \lambda_{M_1M_2}^{M_3}$ – отношение, в котором точка M_3 делит отрезок M_1M_2 . Отсюда следует, что $\lambda > 0$ и

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Найдем невязку точки M_3 относительно прямой L :

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= Ax_3 + By_3 + C = A \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = \\ &= \frac{1}{1 + \lambda} (A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(1 + \lambda)) = \\ &= \frac{(Ax_1 + By_1 + C) + \lambda(Ax_2 + By_2 + C)}{1 + \lambda} = \frac{1}{1 + \lambda} (\Delta_1 + \lambda \Delta_2) \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали формулу:

$$\Delta_3 = \frac{1}{1 + \lambda} (\Delta_1 + \lambda \Delta_2).$$

а) Пусть прямая L пересекает отрезок M_1M_2 в точке M_3 (смотрите рисунок 23). Тогда точка $M_3 \in L$ и ее невязка равна нулю: $\Delta_3 = \frac{1}{1 + \lambda} (\Delta_1 + \lambda \Delta_2) = 0$. Отсюда следует, что $\Delta_1 + \lambda \Delta_2 = 0$ или $\lambda = -\frac{\Delta_1}{\Delta_2}$. Так как точка M_3 делит отрезок M_1M_2 внутренним образом, то $\lambda > 0$, откуда следует

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} < 0 \quad \text{или} \quad \Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0.$$

б) Обратно, пусть $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$, тогда обозначим через $\lambda \square -\frac{\Delta_1}{\Delta_2} > 0$ и найдем на отрезке M_1M_2 точку M_3 , которая делит его в отношении $\lambda_{M_1M_2}^{M_3} = \lambda$. Но тогда ее невязка $\Delta_3 = \frac{1}{1 + \lambda} (\Delta_1 + \lambda \Delta_2) = 0$, откуда следует, что точка $M_3 \in L$, т.е. прямая L пересекает отрезок M_1M_2 , ч.т.д.

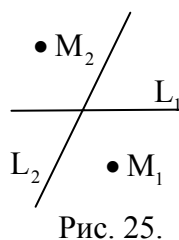
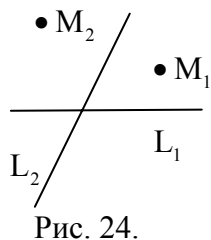
Пример. Выяснить взаимное расположение точек $M_1(-5; 11)$, $M_2(8; 3)$, $M_3(2; -13)$ и прямой $6x - y + 13 = 0$.

Решение. Находим невязки точек относительно данной прямой: $\Delta_1 = 6(-5) - 11 + 13 = -28$, $\Delta_2 = 6 \cdot 8 - 3 + 13 = 58$, $\Delta_3 = 6 \cdot 2 + 13 + 13 = 38$.

Ответ: точки M_2 и M_3 находятся в одной полуплоскости, точка M_1 – в другой.

Задача 115. Определить взаимное расположение двух точек и двух прямых на плоскости.

Решение. 1) Сначала рассмотрим случай, когда прямые пересекаются. Возможны два варианта, представленные ниже на рисунках.



Обозначим через Δ_{nm} невязку точки M_n , $n = 1, 2$ относительно прямой L_m , $m = 1, 2$. Тогда в силу теоремы предыдущей задачи:

1) в случае рисунка 24 имеем $\Delta_{11}\Delta_{21} > 0$ – точки M_1 и M_2 находятся в одной полуплоскости относительно прямой L_1 ; $\Delta_{12}\Delta_{22} < 0$ – точки M_1 и M_2 находятся в разных полуплоскостях относительно прямой L_2 и

$$\Delta_{11}\Delta_{21}\Delta_{12}\Delta_{22} < 0;$$

2) в случае рисунка 25 имеем $\Delta_{11}\Delta_{21} < 0$ – точки M_1 и M_2 находятся в разных полуплоскостях относительно прямой

L_1 ; $\Delta_{12}\Delta_{22} < 0$ – точки M_1 и M_2 находятся в разных полуплоскостях относительно прямой L_2 и

$$\Delta_{11}\Delta_{21}\Delta_{12}\Delta_{22} > 0.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. 1) Если все невязки Δ_{nm} , $n, m = 1, 2$, имеют одинаковый знак, то обе точки M_1 и M_2 находятся в одном из четырех углов, образованных двумя пересекающимися прямыми.

2) Если имеются невязки разных знаков, но их произведение положительно

$$\Delta_{11}\Delta_{21}\Delta_{12}\Delta_{22} > 0,$$

то точки M_1 и M_2 находятся в вертикальных углах.

3) Если имеются невязки разных знаков, но их произведение отрицательно

$$\Delta_{11}\Delta_{21}\Delta_{12}\Delta_{22} < 0,$$

то точки M_1 и M_2 находятся в смежных углах.

Пример. Определить взаимное расположение точек $A(9; 1)$, $B(5; 3)$, $C(5; 5)$, $D(-5; -5)$, $E(2; -6)$ относительно прямых $x - 3y - 9 = 0$, $3x - y - 11 = 0$.

Решение. Находим невязки данных точек относительно данных прямых:

$$\Delta_{A1} = 9 - 3 - 9 = -3, \quad \Delta_{A2} = 27 - 1 - 11 = 15,$$

$$\Delta_{B1} = 5 - 9 - 9 = -13, \quad \Delta_{B2} = 15 - 3 - 11 = 1,$$

$$\Delta_{C1} = 5 - 15 - 9 = -19, \quad \Delta_{C2} = 15 - 5 - 11 = -1,$$

$$\Delta_{D1} = -5 + 15 - 9 = 1, \quad \Delta_{D2} = -15 + 5 - 11 = -21,$$

$$\Delta_{E1} = 2 + 18 - 9 = 11, \quad \Delta_{E2} = 6 + 6 - 11 = 1,$$

Невязки точек A и B имеют одинаковые знаки, следовательно, они находятся в одном углу.

Невязки точек А и С относительно второй прямой имеют противоположные знаки, и произведение их невязок отрицательно, следовательно, они находятся в смежных углах. Аналогично точки А и Е находятся в смежных углах. Но знаки невязок точек С и Е различны, значит, точка Е находится в другом смежном углу по отношению к точке А, т.е. точки С и Е находятся в вертикальных углах.

Аналогично определяем, что точки А и D расположены в вертикальных углах.

Анализируя расположение точек, выясняем, что точки А и В расположены в одном углу, а остальные точки расположены по одной в каждом из трех оставшихся углов. Ответ: рисунок 26.

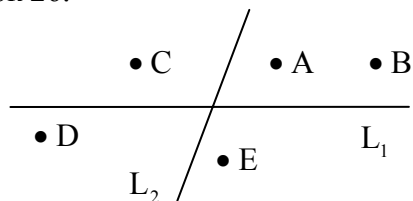


Рис. 26.

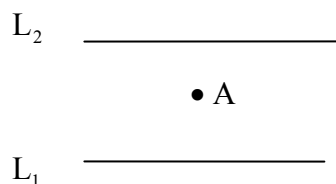


Рис. 27.

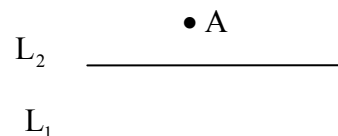


Рис. 28.

Задача 116. Определить взаимное расположение точки и двух параллельных прямых на плоскости.

Решение. Возможны два варианта расположения точки, не лежащей на данных параллельных прямых:

1) точка находится между прямыми;

2) точка находится вне той части плоскости, которая расположена между прямыми.

Теорема. Пусть дана точка А и две параллельные прямые L_1, L_2 . Пусть M_1, M_2 – произвольные точки, лежащие на прямых L_1, L_2 соответственно. Тогда точка А лежит между данными прямыми тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{A1}\Delta_{A2} > 0,$$

где Δ_{A1}, Δ_{A2} – невязки точки А относительно данных прямых, Δ_{12} – невязка точки M_1 относительно прямой L_2 , Δ_{21} – невязка точки M_2 относительно прямой L_1 .

Доказательство. 1) Пусть точка А лежит между прямыми. Тогда точки А и M_2 лежат в одной полуплоскости относительно первой прямой, т.е. их невязки относительно первой прямой имеют одинаковые знаки и их произведение $\Delta_{21}\Delta_{A1} > 0$. Аналогично рассуждая получаем, что

$$\Delta_{12}\Delta_{A2} > 0 \text{ и } \Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{A1}\Delta_{A2} > 0.$$

2) Пусть точка А лежит не между прямыми, например, как на рисунке 28. Тогда относительно первой прямой невязки точек А и M_2 имеют одинаковый знак и $\Delta_{21}\Delta_{A1} > 0$, а относительно второй прямой невязки точек А и M_1 имеют разные знаки и $\Delta_{12}\Delta_{A2} < 0$. Отсюда, $\Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{A1}\Delta_{A2} < 0$.

Теорема доказана.

Пример. Определить положение точки $A(-1;7)$ относительно прямых $x + y - 9 = 0, 2x + 2y - 11 = 0$.

Решение. Данные прямые параллельные. Найдем на каждой прямой по одной произвольной точке. Проверяем, что $M_1(1;8) \in L_1, M_2(1,5; 4) \in L_2$. Находим невязки

$$\Delta_{12} = 7, \Delta_{21} = -3,5, \Delta_{A1} = -3, \Delta_{A2} = 1, \Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{A1}\Delta_{A2} > 0.$$

Ответ: точка А находится между данными прямыми.

Задача 117. Определить положение точки относительно треугольника на плоскости.

Решение. Пусть дана точка $M(x_0, y_0)$ и треугольник ABC с известными координатами его вершин:

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3).$$

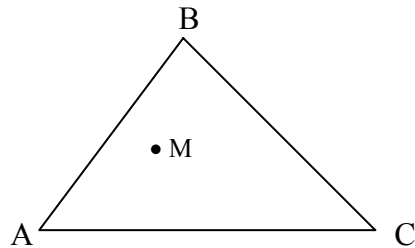


Рис. 29.

Обозначим через $\Delta_{AB}, \Delta_{BC}, \Delta_{AC}$, – невязки точки М относительно сторон АВ, ВС и АС соответственно, $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ – невязки вершин треугольника относительно противоположных сторон.

Нетрудно доказать теорему, которая в наших обозначениях выглядит следующим образом и доказательство которой предоставляется читателю.

Теорема. Точка М находится внутри треугольника ABC тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства:

$$\Delta_A \Delta_{BC} > 0, \Delta_B \Delta_{AC} > 0, \Delta_C \Delta_{AB} > 0.$$

Пример. Лежит ли точка $M(2; 2)$ внутри треугольника OAB, если O – начало координат, $A(4; 2)$, $B(2; 4)$?

Решение. Найдем уравнение сторон треугольника:

$$OA: x - 2y = 0, \quad OB: 2x - y = 0, \quad AB: x + y - 6 = 0.$$

Находим невязки точки М относительно сторон ОА, ОВ и АВ соответственно:

$$\Delta_{OA} = 2 - 4 = -2 < 0, \quad \Delta_{OB} = 4 - 2 = 2 > 0,$$

$$\Delta_{AB} = 2 + 2 - 6 = -2 < 0.$$

Находим невязки вершин треугольника относительно противоположных сторон:

$$\Delta_O = 0 + 0 - 6 = -6 < 0, \quad \Delta_A = 8 - 2 = 6 > 0,$$

$$\Delta_B = 2 - 8 = -6 < 0.$$

Находим произведение невязок:

$$\Delta_{AB} \Delta_O = (-2)(-6) > 0, \quad \Delta_{OB} \Delta_A = 2 \cdot 6 > 0,$$

$$\Delta_{OA} \Delta_B = (-2)(-6) > 0$$

Ответ: да.

Глава 17. Плоскость

Задача 118. Проверить, лежит ли данная точка на данной плоскости.

Решение. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – координаты данной точки, $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости σ . Подставляем координаты точки M_1 в уравнение плоскости, т.е. подставим в уравнение плоскости σ вместо переменной x число x_1 – абсциссу точки M_1 , вместо переменной y – ординату y_1 точки M_1 , вместо переменной z – аппликату z_1 точки M_1 :

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Если при этом получается верное числовое равенство, то точка $M_1 \in \sigma$, в противном случае, $M_1 \notin \sigma$.

Пример. Лежат ли точки $A(5; -5; -1)$ и $B(-8; -5; 2)$ на плоскости $2x + y - 5 = 0$?

Решение. Подставляем координаты точки A в уравнение плоскости σ : $2 \cdot 5 + (-5) - 5 = 0$. Следовательно, точка A лежит на данной плоскости. Подставляем в уравнение плоскости координаты точки B :

$$2 \cdot (-8) + (-5) - 5 = -16 - 10 = -26 \neq 0.$$

Следовательно, точка B не лежит на плоскости σ .

Ответ: $A \in \sigma$; $B \notin \sigma$.

Задача 119. Построить чертеж плоскости в ПДСК.

Решение. Возможны несколько случаев.

1) В общем уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

все его коэффициенты не равны нулю. Тогда его можно записать в виде уравнения в отрезках (смотрите задачу 121):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Находим точки пересечения плоскости с осями координат:

$A(a, 0, 0)$ – точка пересечения плоскости с осью Ox ;

$B(0, b, 0)$ – точка пересечения плоскости с осью Oy ;

$C(0, 0, c)$ – точка пересечения плоскости с осью Oz .

Строим найденные точки на координатных осях ПДСК $Oxyz$ и соединяем их отрезками прямых:

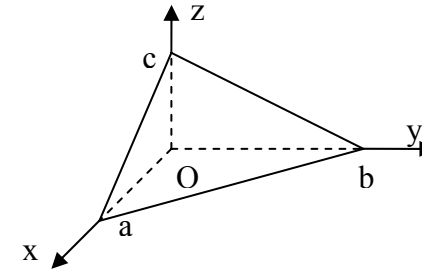


Рис. 30.

Еще из школьного курса геометрии нам известно, что линия пересечения двух плоскостей является прямой линией. Здесь, на рисунке 30, отрезок прямой ab есть отрезок прямой, по которой пересекается данная плоскость и координатная плоскость Oxy . Аналогично, отрезки ac и bc есть отрезки прямых пересечения данной плоскости с координатными плоскостями Oxz и Oyz .

2) Пусть в общем уравнении плоскости

$$Ax + By + Cz = 0,$$

$$D = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0.$$

Если все оставшиеся коэффициенты имеют одинаковый знак, то плоскость "не видно" из первого октанта, т.к. ни одна точка с положительными координатами не лежит на данной плоскости. Построение такой плоскости довольно затруднительно, и мы не будем этим здесь заниматься.

Если среди коэффициентов A , B и C есть числа различных знаков, то умножая при необходимости на -1 мы можем добиться того, что один из коэффициентов будет положительным, а два другие – отрицательными. В этом случае легко построить ту часть плоскости, которая будет находиться в первом октанте. Для этого найдем уравнения прямых, по которым данная плоскость пересекается с координатными плоскостями, и отметим на них две точки, лежащие в первом октанте. Соединяя найденные точки и начало координат отрезками прямых, мы получим часть плоскости, находящейся в первом октанте.

Пример. Построить в системе координат $Oxyz$ плоскость $2x - y - 4z = 0$.

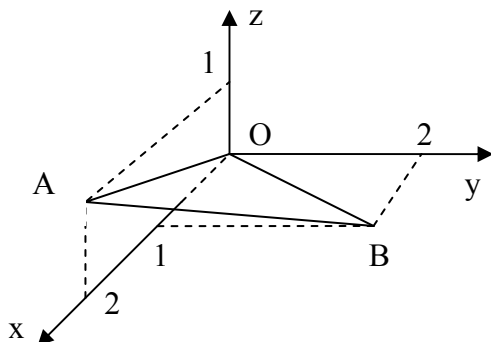


Рис. 31.

Решение. Полагая $y = 0$, находим прямую пересечения данной плоскости с координатной плоскостью Oxz : $x = 2z$. Полагая $z = 0$, находим прямую пересечения данной плоскости с координатной плоскостью Oxy : $y = 2x$.

На обеих прямых есть точки с неотрицательными координатами. На первой прямой берем точку $A(2; 0; 1)$, на вто-

рой – $B(1; 2; 0)$ и соединяем точки A , B и O отрезками прямых. Заметим, что при $x = 0$ на прямой $-y - 4z = 0$ нет точек с положительными координатами y и z .

Ответ: плоскость треугольника OAB на рисунке 31 представляет часть данной плоскости.

3) Пусть один из коэффициентов A , B , C равен нулю. Здесь возможны два случая: а) $D = 0$ и б) $D \neq 0$. Рассмотрим оба случая по отдельности.

3а) Пусть $D = 0$ и один из коэффициентов A , B , C равен нулю. Пусть для определенности $C = 0$. Тогда уравнение принимает вид:

$$Ax + By = 0, \text{ где } A \neq 0 \neq B.$$

Это уравнение прямой на координатной плоскости Oxy , проходящей через начало координат. Отсюда следует, что плоскость проходит через эту прямую и ось Oz , т.к. любая точка оси аппликат Oz удовлетворяет этому уравнению.

Пример. Построить в системе координат $Oxyz$ плоскость $2x - y = 0$.

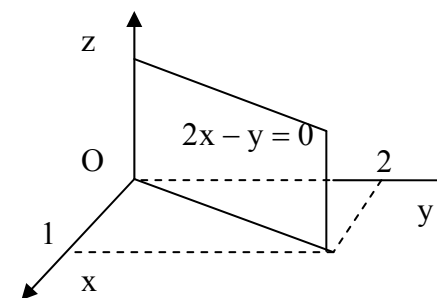


Рис. 32.

Решение. На координатной плоскости Oxy прямая $y = 2x$ проходит через начало координат и точку $(1; 2)$. Проводим

через эти точки прямую и изображаем искомую плоскость в виде параллелограмма, одной из сторон которого является прямая $y = 2x$, а другой – ось Oz .

Ответ: рисунок 32.

3б) Пусть $D \neq 0$ и один из коэффициентов A, B, C равен нулю.

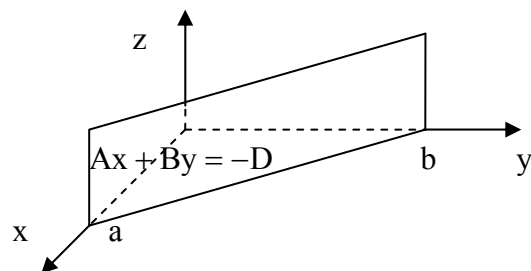


Рис. 33.

Пусть для определенности $C = 0$. Тогда уравнение принимает вид: $Ax + By = -D$, где $A \neq 0 \neq B$. Это уравнение на координатной плоскости Oxy есть уравнение прямой. Запишем ее уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Плоскость проходит через эту прямую параллельно оси Oz , смотрите рисунок 33.

Аналогично строятся плоскости уравнения которых имеют вид $Ax + Cz = -D$ или $By + Cz = -D$.

4) Пусть два из коэффициентов A, B, C равны нулю. Уравнение плоскости принимает вид:

$$Ax = -D \text{ или } By = -D \text{ или } Cz = -D.$$

Если $D = 0$, то получающиеся уравнения:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

суть уравнения координатных плоскостей Oyz , Oxz и Oxy соответственно.

Если $D \neq 0$, то разделив первое уравнение на A , второе на B и третье на C , получаем:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

– уравнения плоскостей параллельных координатным плоскостям Oyz , Oxz , Oxy соответственно.

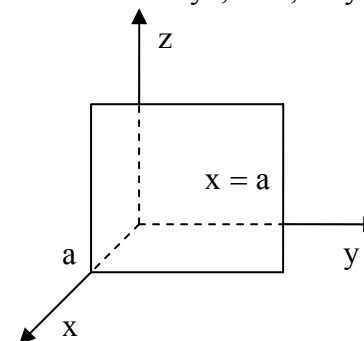


Рис. 34.

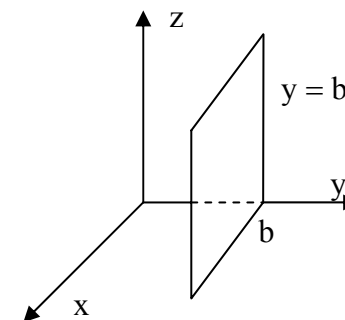


Рис. 35.

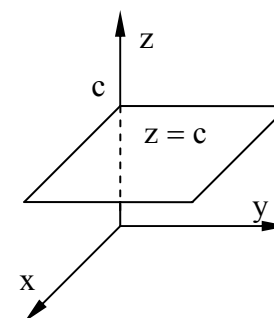


Рис. 36.

Задача 120. Определить вид уравнения плоскости.

Решение. Перечислим все виды уравнений плоскости:

1) общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

2) уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1;$$

3) неполные уравнения плоскости

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

– уравнения координатных плоскостей Oyz, Oxz и Oxy соответственно;

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

– уравнения плоскостей параллельных координатным плоскостям Oyz, Oxz и Oxy соответственно;

$$Ax + By = 0, \quad By + Cz = 0, \quad Ax + Cz = 0$$

– уравнения плоскостей, содержащих координатные оси Oz, Ox и Oy соответственно;

$$Ax + By = D, \quad By + Cz = D, \quad Ax + Cz = D$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$$

– уравнения плоскостей, параллельных координатным осям Oz, Ox и Oy соответственно;

$$Ax + By + Cz = 0$$

– уравнение плоскости, проходящей через начало координат;

4) нормированное (нормальное) уравнение плоскости:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Заметим, что нормированное уравнение плоскости, как и неполные уравнения, является частным случаем общего уравнения плоскости;

5) уравнение плоскости, проходящее через заданную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ с заданным нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

6) уравнение связки плоскостей с центром связки в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}$

7) векторное уравнение плоскости:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор текущей точки плоскости, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор фиксированной точки плоскости, $\vec{n}$ – ее нормальный вектор.

Задача 121. Найти уравнение плоскости в отрезках, зная ее общее уравнение.

Решение. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости, где $D \neq 0$. Перенесем свободный член D уравнения в правую часть и разделим уравнение на $-D$:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1.$$

Обозначим

$$\frac{A}{-D} = \frac{1}{a}, \quad \frac{B}{-D} = \frac{1}{b}, \quad \frac{C}{-D} = \frac{1}{c}.$$

Тогда уравнение плоскости примет вид уравнения в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Пример. Уравнение плоскости $2x - 3y + 2z + 6 = 0$ записать в виде уравнения в отрезках.

Решение. Переносим свободный член 6 в правую часть уравнения и делим уравнение на -6 : $\frac{2x}{-6} - \frac{3y}{-6} + \frac{2z}{-6} = 1$, или

$$\text{после сокращения: } -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1.$$

Задача 122. Найти уравнение связки плоскостей, зная её центр.

Решение. Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ – центр связки плоскостей. Для написания уравнения связки нам нужно знать три уравнения плоскости, проходящих через центр связки. В качестве таких плоскостей удобно взять плоскости проходящие через центр M и параллельные координатным плоскостям:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \quad \text{или} \quad x - x_0 = 0, \quad y - y_0 = 0, \quad z - z_0 = 0.$$

Тогда искомое уравнение связки плоскостей имеет вид:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

Заменяя здесь греческие буквы на привычные латинские, получаем ответ задачи.

$$\text{Ответ: } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Пример. Написать уравнение связки плоскостей с центром связки в точке $M(-1; 2; -3)$.

$$\text{Ответ: } A(x + 1) + B(y - 2) + C(z + 3) = 0, \quad \text{где } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Задача 123. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, если известен ее нормальный вектор.

Решение. Общее уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C – координаты ее нормального вектора. По условию задачи координаты нормального вектора плоскости известны. Осталось найти коэффициент D . С этой целью подставим в уравнение координаты точки M_0 . Так как точка $M(x_0, y_0, z_0)$ лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

$$\text{откуда } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Подставляя найденное значение D в общее уравнение плоскости, получаем: $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$ или $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – искомое уравнение плоскости.

$$\text{Ответ: } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Пример. Известно, что точка $M(1, 2, -3)$ лежит на плоскости и $\vec{n} = (-1, 4, 2)$ – ее нормальный вектор. Найти уравнение плоскости.

Решение. 1-й способ. Искомое уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где A, B, C – координаты ее нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$, $M(x_0, y_0, z_0)$ – координаты точки, лежащей на данной плоскости. Так как нормальный вектор данной плоскости известен:

$$\vec{n} = (-1, 4, 2), \quad \text{то } A = -1, \quad B = 4, \quad C = 2,$$

а точка $M(1, 2, -3)$ лежит на плоскости, т.е.

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 2, \quad z_0 = -3,$$

то, подставляя эти числовые данные в уравнение, получаем:

$$-(x - 1) + 4(y - 2) + 2(z + 3) = 0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены:

$$-x + 4y + 2z - 1 = 0.$$

$$\text{Ответ: } x - 4y - 2z + 1 = 0.$$

2-й способ. Общее уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C – координаты ее нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$. Так как нормальный вектор данной плоскости известен $\vec{n} = (-1, 4, 2)$, то $A = -1, B = 4, C = 2$ и уравнение плоскости принимает вид

$$-x + 4y + 2z + D = 0.$$

Так как точка $M(1, 2, -3)$ лежит на плоскости, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т.е.

$$-1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + D = 0 \quad \text{или} \quad D = -1.$$

Подставляя в уравнение это значение коэффициента D , получаем искомое уравнение плоскости $-x + 4y + 2z - 1 = 0$.

Можно умножить это уравнение на -1 .

Ответ: $x - 4y - 2z + 1 = 0$.

Задача 124. Определить взаимное расположение двух плоскостей.

Решение. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

– общие уравнения двух плоскостей. Тогда:

1) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают;

2) если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны;

3) если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то плоскости пересекаются

и уравнения $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ являются уравне-

ниями прямой пересечения данных плоскостей.

Замечание. Удобнее сначала выписать нормальные векторы данных плоскостей

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

и выяснить коллинеарные они или нет. Если $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, то

плоскости пересекаются, в противном случае они либо совпадают, либо параллельные.

Пример. Определить взаимное расположение плоскостей

$$\alpha: x - 2z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: 2x + y + 3z - 5 = 0.$$

Решение. Выписываем нормальные векторы данных плоскостей $\vec{n}_1 = (1, 0, -2)$, $\vec{n}_2 = (2, 1, 3)$. Их координаты не пропорциональны, нормальные векторы не коллинеарны, и плоскости пересекаются.

Ответ: плоскости пересекаются.

Задача 125. Определить взаимное расположение трех плоскостей.

Решение. Пусть даны уравнения трех плоскостей:

$$\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\sigma_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

Рассмотрим все варианты возможного их взаимного расположения в пространстве.

1) Все три плоскости пересекаются в одной точке, т.е. принадлежат одной связке плоскостей. Ясно, что это возможно лишь тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ образуют некомпланарную тройку векторов, т.е. их смешанное произведение не равно нулю: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 \neq 0$. В этом случае система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \quad (1)$$

имеет единственное решение (x_0, y_0, z_0) , которое дает координаты точки пересечения плоскостей, и которое можно найти по формулам Крамера.

2) Три плоскости пересекаются по трем параллельным прямым. Можно сказать, что плоскости высекают треугольную "трубу". В сечении, перпендикулярном линиям пересечения плоскостей мы увидим треугольник.

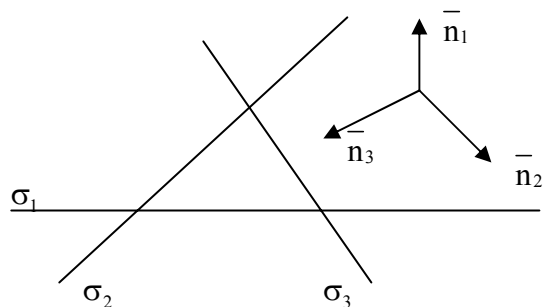


Рис. 37.

Ясно, что в этом случае нормальные векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ образуют компланарную тройку векторов, среди которых нет ни одной пары коллинеарных векторов. Кроме того, эти плоскости не имеют ни одной общей точки, следовательно, система (1) не имеет решений (система несовместная).

3)

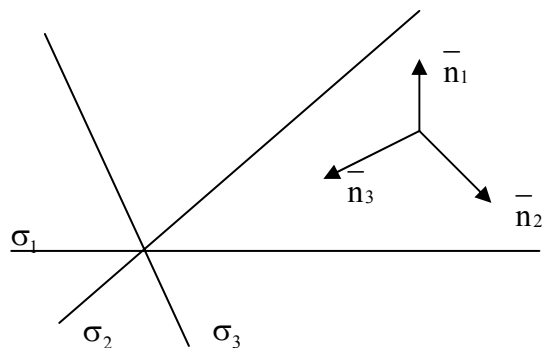


Рис. 38.

Три плоскости пересекаются по одной прямой, т.е. принадлежат одному пучку плоскостей. В этом случае нормальные векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ также, как в предыдущем случае, образуют компланарную тройку векторов, среди которых нет ни одной пары коллинеарных векторов. Однако эти плоскости имеют бесконечно много общих точек лежащих на их линии пересечения, т.е. система (1) имеет бесконечно много решений (система неопределенная).

Можно воспользоваться уравнением пучка плоскостей:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Так как третья плоскость принадлежит этому пучку, то следующая система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = A_3 \\ B_1\alpha + B_2\beta = B_3 \\ C_1\alpha + C_2\beta = C_3 \\ D_1\alpha + D_2\beta = D_3 \end{cases} \quad (2)$$

4) Есть одна пара параллельных плоскостей, не параллельных третьей плоскости, например, как на рисунке 39. В данном случае, $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \nparallel \vec{n}_3$, и система (1) несовместная.

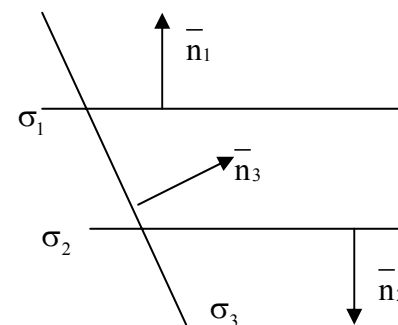


Рис. 39.

5) Все три плоскости параллельные. В этом случае $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$, и система (1) несовместная. Впрочем, здесь удобнее использовать критерий параллельности плоскостей (см. теорему задачи 124).

6) Две плоскости из трех совпадают. Тогда дальнейшее исследование сводится к задаче 124 взаимного расположения двух плоскостей.

7) Все плоскости совпадают. Исследовать далее нечего. Подытожим наше исследование в ответе.

Ответ:

1) если $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 \neq 0$, то плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой суть решение системы (1);

2) если $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0$ и $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3 \parallel \vec{n}_1$, и система (2) не имеет решения, то плоскости пересекаются по трем параллельным прямым;

3) если $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0$ и $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3 \parallel \vec{n}_1$, и система (2) имеет единственное решение, то плоскости пересекаются по одной прямой;

4) если $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0$ и среди нормальных векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ есть коллинеарные, то используем критерий параллельности плоскостей и определяем, какой из оставшихся случаев имеет место быть.

Пример 1. Определить взаимное расположение плоскостей $x + y + z + 1 = 0$, $2x - 2y + 3z - 2 = 0$, $3x - y + 4z - 1 = 0$.

Решение. Убеждаемся в том, что среди данных плоскостей нет параллельных. Далее, определяем, компланарна ли тройка нормальных векторов данных плоскостей:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как смешанное произведение нормальных векторов равно нулю, то векторы лежат в одной плоскости и может быть два случая: либо плоскости лежат в одном пучке плоскостей, т.е. пересекаются по одной прямой, либо они пересекаются по трем параллельным прямым. Для выяснения решаем систему (2):

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha - 2\beta = -1 \\ \alpha + 3\beta = 4 \\ \alpha - 2\beta = -1 \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $\alpha = 1, \beta = 1$.

Ответ: плоскости пересекаются по одной прямой.

Пример 2. Определить взаимное расположение трех плоскостей:

$\alpha : x + 2y + z - 1 = 0$, $\beta : 2x + y - z + 1 = 0$, $\gamma : 4x - y - 5z = 0$.

Решение. Выписываем нормальные векторы плоскостей:

$$\vec{n}_1 = (1; 2; 1), \quad \vec{n}_2 = (2; 1; -1), \quad \vec{n}_3 = (4; -1; -5).$$

Мы видим, что среди них нет коллинеарных. Решаем систему

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ 4x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения выражаем $z = 1 - x - 2y$ и подставляем во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} z = 1 - x - 2y \\ 2x + y - (1 - x - 2y) = -1 \\ 4x - y - 5(1 - x - 2y) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = 1 - x - 2y \\ x + y = 0 \\ 9(x + y) = 5 \end{cases}$$

Из последних двух уравнений следует, что система не имеет решений.

Так как среди плоскостей нет параллельных и совпадающих, то все три плоскости попарно пересекаются по прямым и не имеют общих точек, принадлежащих всем трем плоскостям, то есть пересекаются по трем параллельным прямым. Случай "треугольной трубы".

Задача 126. Найти уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Решение. Пусть даны координаты трех точек:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3).$$

Найдем уравнение плоскости проходящей через эти точки. Как мы видели в задаче 122, для составления общего уравнения плоскости достаточно знать координаты ее нормального вектора $\vec{n}$ и координаты любой точки, лежащей на данной плоскости.

В качестве нормального вектора плоскости можно взять векторное произведение вектора $\overline{M_1M_2}$ на вектор $\overline{M_1M_3}$, а в качестве точки, лежащей на плоскости можно взять любую из данных, например $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

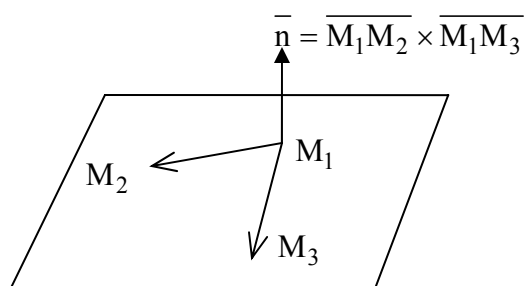


Рис. 39.

Получаем $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, где $\vec{n} = (A, B, C) = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$.

Искомое уравнение плоскости можно получить и в другом виде. Уравнение плоскости в векторной форме имеет вид $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = 0$, откуда $(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}) = 0$ или

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 1, 2)$, $M_2(2, -2, 1)$ и $M_3(-2, -1, 3)$.

Решение. Вычисляем координаты векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$: $\overline{M_1M_2} = (3; -3; -1)$, $\overline{M_1M_3} = (-1; -2; 1)$. Находим нормальный вектор плоскости:

$$\vec{n} = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -5\vec{i} - 2\vec{j} - 9\vec{k}.$$

Искомое уравнение имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Подставляем числовые данные

$$-5(x + 1) - 2(y - 1) - 9(z - 2) = 0.$$

Умножаем на -1 , раскрываем скобки, приводим подобные и получаем ответ.

Ответ: $5x + 2y + 9z - 15 = 0$.

Задача 127. Найти угол между двумя плоскостями.

Решение. Из геометрии нам известно, что двугранный угол между двумя плоскостями измеряется линейным уг-

лом α . Нетрудно видеть, что линейный угол α , измеряющий двугранный угол между двумя плоскостями равен углу $\beta = (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2)$ между нормальными векторами этих плоскостей или равен $\pi - \beta$.

Здесь используется признак равенства углов со взаимно перпендикулярными сторонами:

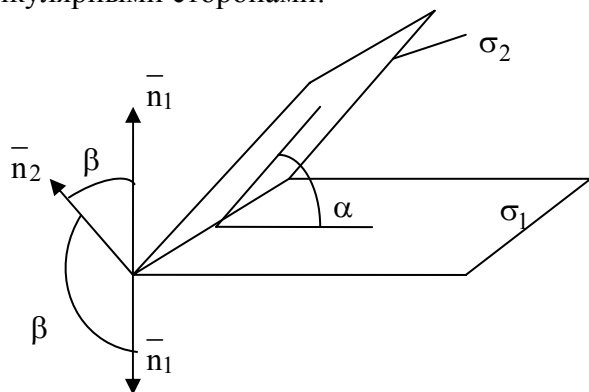


Рис. 40.

$$\alpha = (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) \quad \text{или} \quad \alpha = \pi - (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2).$$

Таким образом, задача вычисления угла между плоскостями сводится к задаче вычисления угла между векторами.

Пример. Найти острый угол между плоскостями

$$\sigma_1: x - 2z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2: 2x + y + 3z - 5 = 0.$$

Решение. Выписываем нормальные векторы данных плоскостей $\vec{n}_1 = (1, 0, -2)$, $\vec{n}_2 = (2, 1, 3)$. Тогда

$$(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \arccos \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \arccos \left(-\frac{4}{\sqrt{70}} \right).$$

Ответ: $\alpha = \pi - (\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \arccos \frac{4}{\sqrt{70}}.$

Задача 128. Привести общее уравнение плоскости к нормированному виду и найти расстояние до нее от начала координат.

Решение. Пусть дано общее уравнение плоскости

$$\sigma: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Выпишем нормальный вектор и найдем его модуль:

$$\vec{n} = (A, B, C), \quad |\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Обозначим через

$$\mu = \pm \frac{1}{|\vec{n}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где берем знак плюс, если $D \leq 0$ и знак минус в противном случае. Число μ , вычисленное по этой формуле, называется нормирующим множителем данной плоскости.

Умножая общее уравнение плоскости на его нормирующий множитель получаем нормированное уравнение плоскости:

$$\sigma: \mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0.$$

Действительно, выбор знака нормирующего множителя обеспечивает отрицательный знак свободного члена в нормированном уравнении:

$$\mu D = \frac{D}{\pm |\vec{n}|} = -p \leq 0,$$

где число $p \geq 0$ равно расстоянию от начала координат до данной плоскости, т.е. $d(O; \sigma) = p$.

Обозначим через $\vec{n}^0$ орт вектора $\vec{n}$. Тогда

$$\vec{n}^0 = \mu \vec{n} = (\mu A; \mu B; \mu C) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

откуда получаем нормированное уравнение данной плоскости: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$.

Пример. Найти нормированное уравнение плоскости

$$\sigma: 2x - y + 2z + 5 = 0$$

и расстояние от начала координат до нее.

Решение. Приводим уравнение плоскости к нормированному виду. Так как свободный член $D = 5 > 0$, то знак нормирующего множителя выбираем отрицательный:

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\sigma: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} = 0$, $d(O; \sigma) = \frac{5}{3}$.

Задача 129. Найти расстояние от точки до плоскости.

Решение. Пусть дана плоскость

$$\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$$

и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Выберем произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на данной плоскости. Заметим, что если $D = 0$, то начало координат лежит на плоскости и его можно взять в качестве точки M_0 . Если же $D \neq 0$, то в качестве такой точки можно взять точку пересечения плоскости с одной из координатных осей. Так как плоскость не может быть параллельной всем трем координатным осям, то хотя бы одна координатная ось пересекает данную плоскость.

Пусть, например, $M_0(a, 0, 0)$ – точка пересечения плоскости с координатной осью Ox . Здесь $a = -\frac{D}{A}$, если $A \neq 0$. Итак, пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \sigma$ тем или иным способом выбрана, тогда расстояние $d = d(M_1; \sigma)$ от заданной точки M_1 до заданной плоскости σ равно модулю проекции вектора $\overline{M_0M_1}$ на нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости σ . Смотрите рисунок 41.

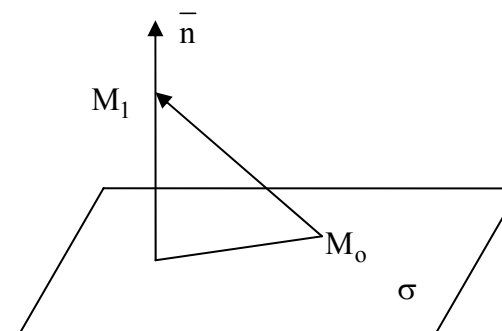


Рис. 41.

$$\begin{aligned} d = d(M_1; \sigma) &= |\text{пр}_{\vec{n}} \overline{M_0M_1}| = \frac{|\vec{n} \cdot \overline{M_0M_1}|}{|\vec{n}|} = \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

Так как $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то эту формулу можно записать в виде

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В частности, расстояние от начала координат до плоскости равно

$$d(O; \sigma) = \frac{|D|}{|\vec{n}|} = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Определение. Пусть дано произвольное общее уравнение плоскости $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$ и произвольная точка пространства $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Число

$$\Delta(M_1; \sigma) \equiv Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

называется невязкой точки M_1 относительно плоскости σ .

С помощью введенного понятия невязки формула расстояния от точки до плоскости может быть записана в виде:

$$d(M_1; \sigma) = \frac{|\Delta(M_1; \sigma)|}{|\bar{n}|}.$$

Определение. Величина

$$\delta(M_1; \sigma) = \frac{\Delta(M_1; \sigma)}{|\bar{n}|} = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

называется отклонением точки M_1 от плоскости σ .

Из последнего определения следует, что расстояние от точки M_1 до плоскости σ равно модулю отклонения точки M_1 от плоскости σ :

$$d(M_1; \sigma) = |\delta(M_1; \sigma)|.$$

Из определений следует, что отклонение и невязка имеют одинаковый знак.

Замечание. Формулы расстояния от точки до плоскости и отклонения точки от плоскости можно записать в другом виде. Приведем данное уравнение плоскости к нормальному виду:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

где $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \bar{n}^0 = \mu \bar{n} = (\mu A, \mu B, \mu C)$, $-p = \mu D$, μ – нормирующий множитель. Теперь, формула расстояния от точки до плоскости принимает вид:

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|,$$

где $x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p = \delta(M_1; \sigma)$ – отклонение точки M_1 от плоскости σ .

Пример 1. Найти расстояние от точки $M(1; -2; 3)$ до плоскости $x - 3y + 5z - 12 = 0$.

Решение. Находим невязку точки M относительно данной плоскости:

$$\Delta(M; \sigma) = 1 - 3(-2) + 5 \cdot 3 - 12 = 10.$$

Находим нормальный вектор плоскости и его модуль:

$$\bar{n} = (1; -3; 5), \quad |\bar{n}| = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}.$$

Находим отклонение точки M от плоскости:

$$\delta(M; \sigma) = \frac{\Delta(M; \sigma)}{|\bar{n}|} = \frac{10}{\sqrt{35}}.$$

Находим расстояние от точки M до плоскости

$$d(M; \sigma) = |\delta(M; \sigma)| = \frac{10}{\sqrt{35}}.$$

Ответ: $\frac{10}{\sqrt{35}}$.

Пример 2. Найти расстояние от начала координат до плоскости $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

Решение. Находим невязку точки $O(0; 0; 0)$ относительно данной плоскости: $\Delta(O; \sigma) = 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 = -6$. Выписываем нормальный вектор плоскости и находим его модуль: $\bar{n} = (1; -2; 2)$, $|\bar{n}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Находим отклонение начала координат от плоскости

$$\delta(O; \sigma) = \frac{\Delta(O; \sigma)}{|\bar{n}|} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Находим расстояние от начала координат до плоскости:

$$d(O; \sigma) = |\delta(O; \sigma)| = |-2| = 2.$$

Заметим, что можно было сразу воспользоваться формулой

$$d = \frac{|\Delta|}{|\bar{n}|} = \frac{|\Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-6|}{3} = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 130. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями.

Решение. 1-й способ. Найти на одной плоскости произвольную точку и найти расстояние от нее до второй плоскости, т.е. свести эту задачу к задаче 127.

2-й способ. Приведем оба уравнения параллельных плоскостей к нормированному виду. Заметим, что в нормированном уравнении плоскости его нормальный вектор $\vec{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ имеет однозначно выбранное направление – от начала координат к плоскости. Поэтому возможны 2 случая: либо нормальные векторы обеих плоскостей равны, либо противоположны:

$$\sigma_1: x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p_1 = 0,$$

$$\sigma_2: \pm(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) - p_2 = 0.$$

а) $\vec{n}_1^0 = \vec{n}_2^0$. На следующем рисунке схематически изображены две параллельные плоскости σ_1 и σ_2 и их единичные нормальные векторы, отложенные от начала координат O . Здесь, $p_1 = OB$, $p_2 = OA$ – расстояния от начала координат до соответствующих плоскостей. Так как неизвестно, какая плоскость ближе к началу координат, то расстояние между плоскостями

$$d(\sigma_1; \sigma_2) = |OB - OA| = |p_1 - p_2|.$$

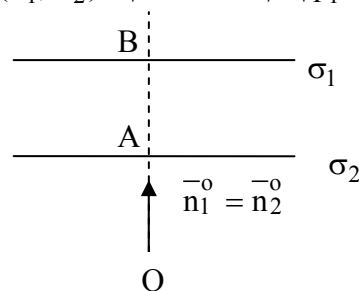


Рис. 42.

$$\text{б) } \vec{n}_1^0 = -\vec{n}_2^0.$$

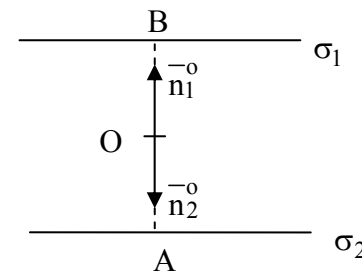


Рис. 43.

Так как нормальные векторы $\vec{n}_1^0$ и $\vec{n}_2^0$ направлены от начала координат к плоскостям и противоположны, то начало координат находится между плоскостями (рисунок 43). Здесь, как и в предыдущем случае, $p_1 = OB$, $p_2 = OA$ – расстояния от начала координат до соответствующих плоскостей. Отсюда следует, что расстояние между плоскостями $d(\sigma_1; \sigma_2) = OB + OA = p_1 + p_2$.

Пример. Найти расстояние между плоскостями

$$\alpha: 4x - y + z - 12 = 0, \quad \beta: 4x - y + z - 3 = 0.$$

Решение. Так как коэффициенты при переменных x , y , z равны, а свободные члены нет, то это означает, что плоскости параллельные. Приводим уравнения к нормированному виду. Нормирующий множитель обеих плоскостей будет один и тот же:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}},$$

$$\alpha: \frac{4}{3\sqrt{2}}x - \frac{1}{3\sqrt{2}}y + \frac{1}{3\sqrt{2}}z - \frac{12}{3\sqrt{2}} = 0,$$

$$\beta: \frac{4}{3\sqrt{2}}x - \frac{1}{3\sqrt{2}}y + \frac{1}{3\sqrt{2}}z - \frac{3}{3\sqrt{2}} = 0.$$

Отсюда находим $p_1 = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, и так как $\vec{n}_1^0 = \vec{n}_2^0$, то имеет место случай, изображенный на рисунке 42, и расстояние $d(\alpha; \beta) = |p_1 - p_2| = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Ответ: $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Задача 131. Найти уравнение биссекторной плоскости, данного двугранного угла.

Решение. Пусть дан некоторый двугранный угол и требуется найти уравнение плоскости, частью которой является биссекторная плоскость этого угла.

Пусть даны уравнения граней двугранного угла:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Две плоскости образуют 4 двугранных угла. Биссекторная плоскость однозначно определена тем свойством, что каждая точка двугранного угла равноудалена от его граней. Используем это свойство для получения уравнения биссекторной плоскости. В задаче 129 была получена формула расстояния от точки до плоскости.

Пусть точка $M(x, y, z)$ — произвольная точка биссекторной плоскости. Тогда ее расстояние до данных плоскостей одинаковое, и приравнявая эти расстояния, получаем:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

или

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \pm \frac{|\vec{n}_1|}{|\vec{n}_2|} (A_2x + B_2y + C_2z + D_2).$$

Мы получаем два уравнения двух биссекторных плоскостей. Осталось выяснить, какое из этих уравнений является искомым. Грань двугранного угла является лишь частью плоскости, поэтому точки грани не только удовлетворяют ее уравнению, но удовлетворяют некоторому дополнительному условию, которое и определяет, какой частью плоскости является грань. Мы полагаем, что можем на каждой грани найти по одной произвольной точке.

Пусть M_1, M_2 две произвольные точки граней нашего двугранного угла. Нужная нам биссекторная плоскость та, относительно которой невязки точек M_1, M_2 имеют разные знаки, смотрите рисунок 44, на котором плоскости схематически изображены прямыми, а ребро двугранного угла схематически изображено точкой A . Здесь искомой биссекторной плоскостью двугранного угла M_1AM_2 является плоскость s_1 .

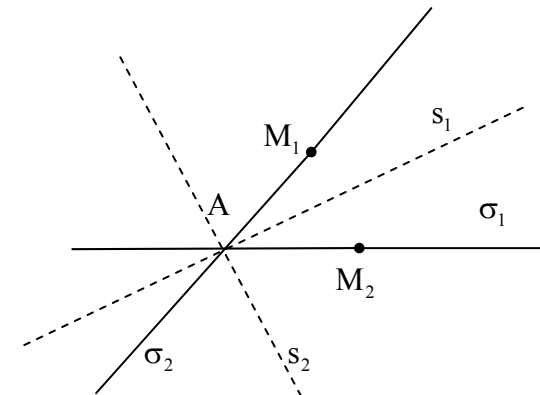


Рис. 44.

Если же мы решаем задачу о нахождении биссекторной плоскости острого двугранного угла, то заметим, что расстояние от любой точки любой из двух плоскостей (кроме

точки А) до биссекторной плоскости острого угла меньше чем до биссекторной плоскости тупого угла.

Пример 1. Дана треугольная пирамида ABCD, $A(1; -1; -1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(3; 3; -5)$, $D(7; -4; -3)$. Найти уравнение биссекторной плоскости двугранного угла пирамиды при ребре AD. Решение. Находим уравнения граней ABD и ACD (см. задачу 126):

$$2x + 14y - 15z - 3 = 0, \quad 2x + 2y + 3z + 3 = 0.$$

Находим уравнения биссекторных плоскостей:

$$\frac{2x + 14y - 15z - 3}{\sqrt{4 + 196 + 225}} = \pm \frac{2x + 2y + 3z + 3}{\sqrt{4 + 4 + 9}}$$

или $4x - 2y + 15z + 9 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

Замечание. Нормальные векторы найденных биссекторных плоскостей должны быть ортогональны. Используйте это в качестве промежуточной проверки ваших вычислений.

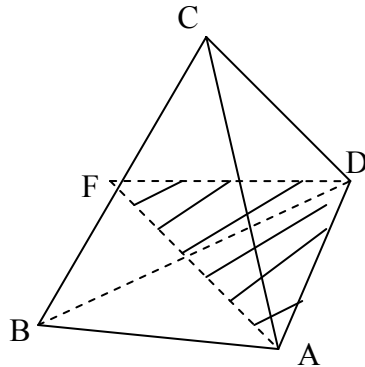


Рис. 45.

Точки В и С лежат на гранях двугранного угла при ребре AD. Находим невязки этих точек относительно полученных биссекторных плоскостей:

$$\Delta_{B1} = 30, \quad \Delta_{C1} = -60, \quad \Delta_{B2} = 5, \quad \Delta_{C2} = 10.$$

Противоположные знаки невязки точек В и С имеют относительно плоскости $4x - 2y + 15z + 9 = 0$, следовательно, она и есть искомая.

Ответ: $4x - 2y + 15z + 9 = 0$.

При решении этой задачи можно использовать следующую теорему, аналогичную теореме задачи 113, и которая доказывается абсолютно аналогично.

Теорема. Пусть даны общие уравнения двух пересекающихся плоскостей:

$\sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, причем $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0$. Тогда следующее уравнение является уравнением биссекторной плоскости острого угла, образованного этими плоскостями:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} + \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0, \quad (1)$$

а уравнение

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} - \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0 \quad (2)$$

является уравнением биссекторной плоскости тупого угла.

Пример 2. Найти биссекторную плоскость острого двугранного угла образованного плоскостями:

$$2x + 14y - 15z - 3 = 0, \quad 2x + 2y + 3z + 3 = 0.$$

Решение. Чтобы скалярное произведение нормальных векторов данных плоскостей было положительным перепишем уравнения плоскостей в виде:

$$-2x - 14y + 15z + 3 = 0, \quad 2x + 2y + 3z + 3 = 0.$$

Теперь, согласно теореме уравнение

$$\frac{-2x - 14y + 15z + 3}{\sqrt{4 + 196 + 225}} + \frac{2x + 2y + 3z + 3}{\sqrt{4 + 4 + 9}} = 0$$

есть уравнение биссекторной плоскости острого угла. После очевидных преобразований получаем

$$4x - 2y + 15z + 9 = 0.$$

Ответ: $4x - 2y + 15z + 9 = 0$.

Замечание. Решение примера 2 не заменяет собой решение примера 1, так как нам неизвестно является ли двугранный угол при основании пирамиды с ребром AD острым или тупым. Однако, объединив оба решения, мы находим, что этот двугранный угол является острым.

Задача 132. Определить взаимное расположение двух точек и плоскости.

Решение. Задача решается аналогично задаче 114.

Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и плоскость $\sigma: Ax + By + Cz + D = 0$. Любая плоскость делит пространство на два полупространства. Если ни одна из точек не лежит на данной плоскости, то возможны два случая:

- 1) обе точки лежат в одном полупространстве (по одну сторону от плоскости);
- 2) точки лежат в разных полупространствах (по разные стороны от плоскости).

Теорема. Пусть $\Delta_1 = \Delta(M_1; \sigma) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $\Delta_2 = \Delta(M_2; \sigma) = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ — невязки данных точек относительно данной плоскости. Тогда

1) если $\Delta_1 \cdot \Delta_2 > 0$, то обе точки лежат в одном полупространстве относительно данной плоскости (по одну сторону от плоскости);

2) если $\Delta_1 \cdot \Delta_2 < 0$, то обе точки лежат в разных полупространствах относительно данной плоскости (по разные стороны от плоскости).

Доказательство один к одному повторяет доказательство аналогичной теоремы задачи 114.

Пример. Пересекает ли плоскость $x + 5y + 3z - 4 = 0$ отрезок прямой M_1M_2 , если $M_1(-3; 9; 1)$ и $M_2(2; -1; 3)$?

Решение. Находим невязки точек относительно данной плоскости:

$$\Delta_1 = -3 + 5 \cdot 9 + 3 - 4 = 41, \quad \Delta_2 = 2 + 5(-1) + 3 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Ответ: нет.

Задача 133. Определить взаимное расположение двух точек и двух плоскостей.

Решение. Пусть даны две точки M_1 и M_2 , и две плоскости σ_1 и σ_2 . Задача решается аналогично задаче 115.

Обозначим через Δ_{nm} невязку точки M_n , $n = 1, 2$ относительно плоскости σ_m , $m = 1, 2$.

Теорема. 1) Если все невязки Δ_{nm} , $n, m = 1, 2$ имеют одинаковый знак, то обе точки M_1 и M_2 находятся в одном из четырех углов, образованных двумя пересекающимися плоскостями.

2) Если имеются невязки разных знаков, но их произведение положительно $\Delta_{11}\Delta_{21}\Delta_{12}\Delta_{22} > 0$, то точки M_1 и M_2 находятся в вертикальных углах.

3) Если имеются невязки разных знаков, но их произведение отрицательно $\Delta_{11}\Delta_{21}\Delta_{12}\Delta_{22} < 0$, то точки M_1 и M_2 находятся в смежных углах.

Доказательство один к одному повторяет доказательство аналогичной теоремы задачи 115.

Пример. Определить взаимное расположение точек $A(-1; 2; -3)$, $B(7; -2; 1)$ и плоскостей $x + 2y - 3z + 1 = 0$, $3x + 2y - z - 5 = 0$.

Решение. Находим невязки данных точек относительно данных плоскостей: $\Delta_{A1} = 13$; $\Delta_{B1} = 1$; $\Delta_{A2} = -1$; $\Delta_{B2} = 11$; Есть невязки разных знаков и $\Delta_{A1}\Delta_{B1}\Delta_{A2}\Delta_{B2} < 0$.

Ответ: точки A и B находятся в смежных углах.

Задача 134. Определить взаимное расположение точки и двух параллельных плоскостей.

Решение. Пусть даны две параллельные плоскости σ_1 и σ_2 и точка A . Если точка A не лежит ни в одной из этих плоскостей, то либо она лежит между ними, либо вне их обеих, снаружи относительно пространства между плоскостями. Смотрите рисунок 46, где схематически изображены оба варианта расположения точки A .

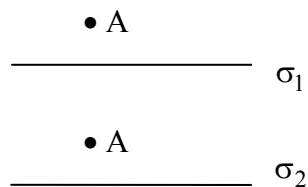


Рис. 46.

На каждой плоскости возьмем по одной точке, соответственно M_1 и M_2 . Найдем невязки точки A относительно обеих плоскостей: Δ_{A1} и Δ_{A2} соответственно. Найдем невязки точек M_1 и M_2 относительно плоскостей σ_2 и σ_1 соответственно: Δ_{12} и Δ_{21} . Справедлива следующая теорема (см. задачу 116).

Теорема. Пусть даны две параллельные плоскости σ_1 и σ_2 соответственно с точками M_1 и M_2 лежащими на них и точка A . Пусть Δ_{12} и Δ_{21} – невязки точки M_1 относительно плоскости σ_2 и точки M_2 относительно плоскости σ_1 . Пусть далее, Δ_{A1} и Δ_{A2} – невязки точки A относительно данных плоскостей. Тогда, точка A лежит между плоскостями тогда и только тогда, когда $\Delta_{A1}\Delta_{A2}\Delta_{12}\Delta_{21} > 0$.

Следствие. В обозначениях теоремы, точка A лежит вне пространства между плоскостями тогда и только тогда, когда $\Delta_{A1}\Delta_{A2}\Delta_{12}\Delta_{21} < 0$.

Пример. Определите взаимное расположение точки $A(-4; 3; 0)$, начала координат и двух параллельных плоскостей:

$$7x - y - 2z + 3 = 0 \text{ и } 7x + 2y - 2z - 13 = 0.$$

Решение. На первой плоскости возьмем точку $M_1(0; 3; 0)$, на второй – точку $M_2(1; 0; -3)$ и найдем невязки:

$$\Delta_{A1} = -28 - 3 + 3 < 0, \quad \Delta_{A2} = -28 + 6 - 13 < 0, \\ \Delta_{12} = 6 - 13 < 0, \quad \Delta_{21} = 7 + 6 + 3 > 0.$$

Отсюда, $\Delta_{A1}\Delta_{A2}\Delta_{12}\Delta_{21} < 0$, и точка A находится вне пространства между плоскостями.

Находим невязки начала координат относительно данных плоскостей:

$$\Delta_{O1} = 3 > 0, \quad \Delta_{O2} = -13 < 0,$$

откуда $\Delta_{O1}\Delta_{O2}\Delta_{12}\Delta_{21} > 0$, и начало координат лежит между данных плоскостей. Начало координат и точка A находятся по разные стороны от первой плоскости, так как их невязки относительно нее имеют разные знаки.

Ответ: А находится вне пространства между плоскостями и отделена от начала координат первой плоскостью. Начало координат находится между плоскостями.

Задача 135. Определить взаимное расположение точки и треугольной пирамиды.

Решение. Пусть дана точка А и треугольная пирамида $M_1M_2M_3M_4$. Обозначим через $\Delta_i, i=1,2,3,4$ – невязку вершины пирамиды M_i относительно противоположной грани и через $\Delta_{Ai}, i=1,2,3,4$ – невязку точки А относительно грани, не содержащей точки M_i . В этих обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема. Точка А является внутренней точкой пирамиды $M_1M_2M_3M_4$ тогда и только тогда, когда попарные произведения $\Delta_i\Delta_{Ai} > 0, i=1,2,3,4$.

Пример. Определить взаимное расположение в пространстве пирамиды ABCD и начала координат, если

$$A(1; -1; -1), B(2; 1; 1), C(3; 3; -5), D(7; -4; -3).$$

Решение. Находим уравнения граней пирамиды, невязки вершин относительно противоположных граней и невязки начала координат относительно граней:

$$ABC : 2x - y - 3 = 0, \quad ABD : 2x + 14y - 15z - 3 = 0,$$

$$ACD : 2x + 2y + 3z + 3 = 0, \quad BCD : 38x + 26y + 15z - 120 = 0,$$

$$\Delta_A = -123, \quad \Delta_B = 12, \quad \Delta_C = 90, \quad \Delta_D = 15,$$

$$\Delta_{OABC} = -3, \quad \Delta_{OABD} = -3, \quad \Delta_{OACD} = 3, \quad \Delta_{OBCD} = -120.$$

Ответ: так как произведение $\Delta_C\Delta_{OABD} < 0$, то начало координат не является внутренней точкой пирамиды.

Глава 18. Прямая в пространстве

Задача 136. Найти каноническое и параметрическое уравнение прямой.

Решение. Каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты точки лежащей на данной прямой, (m, n, p) – координаты ее направляющего вектора.

Определение. Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, т.е. либо лежащий на данной прямой, либо лежащий на прямой параллельной данной.

Обозначение. Направляющий вектор прямой мы будем обозначать так: $\vec{s} = (m, n, p)$.

Таким образом, для того чтобы написать каноническое уравнение прямой нам необходимо знать координаты какой-нибудь ее точки (безразлично какой именно) и координаты ее направляющего вектора.

Аналогично обстоит дело с параметрическим уравнением.

Пример 1. Написать каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 5; 7)$, если ее направляющий вектор имеет координаты $\vec{s} = (6, -2, 11)$.

Ответ: $\frac{x+1}{6} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{11}$ – каноническое уравнение,

$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = 5 - 2t \\ z = 7 + 11t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{– параметрическое уравнение.}$$

Замечание. Если одна или две координаты направляющего вектора будут равны нулю, то в знаменателе канонического уравнения прямой будут стоять нули. Это означает, что выражение в числителе такой дроби тоже должно быть равно нулю. Это хорошо видно из параметрического уравнения такой прямой.

Пример 2. Написать каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 5; 0)$, если ее направляющий вектор имеет координаты $\vec{s} = (0, -2, 11)$.

Ответ: $\frac{x+1}{0} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{11}$ – каноническое уравнение,

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 11t \end{cases} \text{ – параметрическое уравнение.}$$

Задача 137. Проверить, лежит ли данная точка на данной прямой.

Решение. Если точка лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой, т.е. если вместо переменных x , y и z подставить соответствующие координаты данной точки, то мы должны получить верное равенство (или равенства).

Пример. Какие из следующих точек принадлежат прямой $\frac{x+1}{0} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{11}$: $A(2; -4; 4)$, $B(-1; 10; -3)$, $C(-1; 1; 22)$?

Решение. Подставляем в уравнение прямой координаты точки A :

$$\frac{2+1}{0} = \frac{-4-5}{-2} = \frac{4}{11}.$$

Мы видим, что первое же равенство не верное, т.к. $(-2)3 \neq 0 \cdot (-9)$. Вывод: точка A не лежит на данной прямой.

Подставляем в уравнение прямой координаты точки B :

$$\frac{(-1)+1}{0} = \frac{10-5}{-2} = \frac{-3}{11}.$$

Мы видим, что первое равенство верное, т.к. $(-2) \cdot 0 = 0 \cdot 5$. Однако второе равенство неверное: $5 \cdot 11 \neq (-2)(-3)$. Вывод: точка B не принадлежит данной прямой.

Подставляем в уравнение прямой координаты точки C :

$$\frac{-1+1}{0} = \frac{1-5}{-2} = \frac{22}{11}.$$

Мы видим, что оба равенства верные, т.к. $(-2) \cdot 0 = 0 \cdot (-4)$

и $\frac{-4}{-2} = \frac{22}{11}$ или $(-4) \cdot 11 = (-2) \cdot 22$.

Ответ: точка C .

Аналогично, и даже еще проще, осуществляется проверка, если прямая задана параметрическим уравнением.

Задача 138. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через две различные данные точки.

Решение. Пусть даны координаты двух различных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

очевидно, является направляющим вектором прямой, которая проходит через эти точки. В каноническом уравнении прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

$\vec{s} = (m, n, p)$ – координаты ее направляющего вектора, и так как $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$, то $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$.

Далее, в каноническом уравнении прямой, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – координаты произвольной фиксированной точки данной прямой, поэтому в качестве такой точки можно взять точку M_1 или M_2 , без разницы которую.

Подставляя в канонические уравнения прямой вместо координат точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ координаты точки M_1 и вместо координат направляющего вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ координаты вектора $\overline{M_1M_2}$, получаем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; -2; 7)$ и $B(-2; -3; 1)$.

Решение. $\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+2}{-3+2} = \frac{z-7}{1-7}$. Сокращаем на (-1) .

Ответ: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-7}{6}$.

Задача 139. Найти параметрическое уравнение прямой, зная ее каноническое уравнение.

Решение. Пусть дано каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Обозначим $\frac{x - x_0}{m} = t$, тогда из канонического уравнения

прямой следует, что $\frac{y - y_0}{n} = t, \frac{z - z_0}{p} = t$. Выразим из этих

равенств x, y и z : $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$. За-

писывая эти равенства в виде системы, получаем параметрическое уравнение данной прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Пример. Записать параметрическое уравнение прямой

$$\frac{x+3}{5} = y-2 = \frac{z-1}{0}.$$

Решение. Обозначим $\frac{x+3}{5} = y-2 = \frac{z-1}{0} = t$. Выражаем переменные x, y и z через t :

$$\frac{x+3}{5} = t, \quad y-2 = t, \quad \frac{z-1}{0} = t, \quad \begin{cases} x = -3+5t \\ y = 2+t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -3+5t \\ y = 2+t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 \end{cases}$

Задача 140. Найти каноническое уравнение прямой, зная ее параметрическое уравнение.

Решение. Пусть дано параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Выразим из этих равенств параметр t :

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Приравнивая друг другу правые части этих равенств, получаем каноническое уравнение данной прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Пример. Найти каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Решение. Перепишем параметрическое уравнение в виде

$$\begin{cases} x = -5 + 0 \cdot t \\ y = 0 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ откуда } t = \frac{x+5}{0}, \quad t = \frac{y-0}{-2}, \quad t = \frac{z-1}{3}. \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Ответ: $\frac{x+5}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}.$

Задача 141. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой.

Решение. Пусть дана точка $M(x_1, y_1, z_1)$ и каноническое уравнение прямой $L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$

Нам нужно найти уравнение прямой L_1 , которая параллельна прямой L и проходит через точку M .

Для написания канонического уравнения прямой L_1 нам нужно найти ее направляющий вектор $\vec{s}_1$. Так как $L_1 \parallel L$, то направляющий вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ прямой L может служить направляющим вектором и для искомой прямой L_1 , т.е. $\vec{s}_1 = \vec{s} = (m, n, p).$

Таким образом, у нас есть точка $M \in L_1$ и направляющий вектор прямой $L_1: \vec{s}_1 = (m, n, p)$. Нам осталось написать каноническое уравнение прямой L_1 :

$$L_1: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Пример. Найти уравнение прямой проходящей через точку $M(-3; 3; 2)$ параллельно прямой $\frac{x+1}{-2} = y = \frac{z-5}{3}.$

Решение. Направляющий вектор данной прямой $\vec{s} = (-2, 1, 3)$ служит направляющим вектором искомой прямой.

Ответ: $\frac{x+3}{-2} = y - 3 = \frac{z-2}{3}.$

Задача 142. Найти угол между прямыми.

Решение. Пусть даны канонические уравнения двух прямых:

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Из канонических уравнений данных прямых находим их направляющие векторы $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Тогда искомый угол равен либо углу между их направляющими векторами

$$\begin{aligned} \alpha = (L_1 \wedge L_2) &= (\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2) = \arccos \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \\ &= \arccos \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}, \end{aligned}$$

или $(L_1 \wedge L_2) = \pi - (\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2).$

Пример. Найти угол между прямыми

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}, \quad L_2: \frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}.$$

Решение. Выписываем направляющие векторы данных прямых: $\vec{s}_1 = (2, 2, -1)$, $\vec{s}_2 = (4, 1, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha = (L_1 \wedge L_2) = (\vec{s}_1 \wedge \vec{s}_2) &= \arccos \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \\ &= \arccos \frac{8+2-1}{3 \cdot \sqrt{18}} = \arccos \frac{9}{9\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: 45° .

Задача 143. Определить взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Решение. Мы ограничимся здесь случаем, когда прямые заданы каноническим или параметрическим уравнениями. Случай, когда одна или обе прямые заданы пересечением плоскостей рассматривается в следующей главе.

Пусть даны канонические уравнения двух прямых в пространстве:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2},$$

причем точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – различные.

Две прямые в пространстве могут совпадать, быть параллельными, пересекаться в одной точке или быть скрещивающимися.

1-й способ.

1) Если $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, т.е. если $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, то прямые либо

совпадают: $L_1 = L_2$, либо параллельны: $L_1 \parallel L_2$. Определить, какой из этих двух случаев имеет место быть, очень просто.

Если точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$ лежит и на прямой L_2 , т.е. ее координаты удовлетворяет уравнениям прямой

$$L_2: \frac{x_1-x_2}{m_2} = \frac{y_1-y_2}{n_2} = \frac{z_1-z_2}{p_2},$$

то прямые совпадают. В противном случае прямые параллельны.

2) Если $\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$, то прямые либо скрещиваются, либо пересекаются. Если прямые пересекаются, то обе они лежат в одной плоскости и, следовательно, векторы $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overline{M_1M_2}$ компланарны, в противном случае, т.е. когда прямые скрещиваются, векторы $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overline{M_1M_2}$ не компланарны. На следующем рисунке изображен случай двух прямых пересекающихся в точке М.

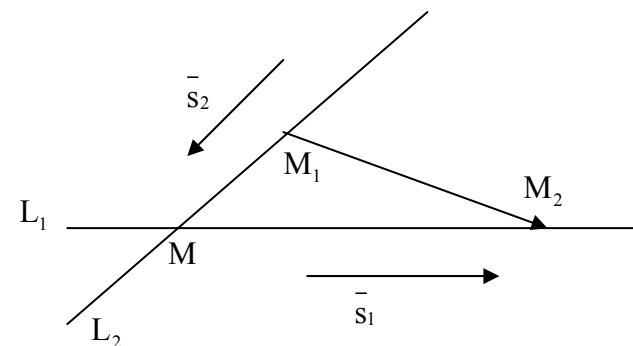


Рис. 47.

Используя смешанное произведение векторов, получаем:

а) прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $(\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2) \& (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = 0)$;

б) прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} \neq 0$.

Ответ:

1) прямые совпадают $L_1 = L_2 \Leftrightarrow (\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2) \& (M_1 \in L_2)$, т.е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{и} \quad \frac{x_1 - x_2}{m_2} = \frac{y_1 - y_2}{n_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$

2) прямые параллельны $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow (\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2) \& (M_1 \notin L_2)$, т.е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

и не выполняется хотя бы одно из равенств

$$\frac{x_1 - x_2}{m_2} = \frac{y_1 - y_2}{n_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$

3) прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $(\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2) \& (\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1 M_2} = 0)$, т.е. хотя бы одно из

равенств $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ не выполняется и

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

4) прямые скрещиваются $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1 M_2} \neq 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

2-й способ. Запишем уравнения обеих прямых в параметрической форме:

$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + m_1 t \\ y = y_1 + n_1 t \\ z = z_1 + p_1 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = x_2 + m_2 k \\ y = y_2 + n_2 k \\ z = z_2 + p_2 k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Если $M(x, y, z)$ – их общая точка, то при некоторых значениях k и t верны равенства:

$$\begin{cases} x_1 + m_1 t = x_2 + m_2 k \\ y_1 + n_1 t = y_2 + n_2 k \\ z_1 + p_1 t = z_2 + p_2 k \end{cases}. \quad (3)$$

Очевидно, что:

1) если система уравнений (3) имеет единственное решение (t, k) , то прямые пересекаются в одной точке;

2) если система уравнений (3) не имеет решений, то прямые скрещиваются и тогда выполняется неравенство (2) или, в противном случае, прямые параллельны и тогда верны равенства $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

3) если система уравнений (3) имеет более одного решения, то прямые совпадают.

Пример 1. Определить взаимное расположение прямых:

$$L_1: x - 1 = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 2}{3} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x}{-2} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z + 2}{-1}.$$

Решение. Выписываем направляющие векторы данных прямых: $\bar{s}_1 = (1; -1; 3)$, $\bar{s}_2 = (-2; 2; -1)$. Так как их координаты не пропорциональны, то векторы не коллинеарны и, следовательно, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

1-й способ. Точка $M_1(1; -1; 2) \in L_1$, $M_2(0; 3; -2) \in L_2$, $\overline{M_1 M_2} = (-1; 4; -4)$. Находим смешанное произведение

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1 M_2} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -15.$$

Здесь 1-ю строку умножили на 2 и прибавили ко второй и первую строку прибавили к третьей.

Так как $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1 M_2} \neq 0$, то прямые скрещиваются.

Ответ: прямые скрещивающиеся.

Пример 2. Определить взаимное расположение прямых:

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Решение. Выписываем направляющие векторы данных прямых: $\vec{s}_1 = (2; -2; 1)$, $\vec{s}_2 = (-2; 2; -1) = -\vec{s}_1$, т.е. прямые либо параллельные, либо совпадают. Точка $M_1(1; -1; 2) \in L_1$. Если прямые совпадают, то координаты точки M_1 будут удовлетворять уравнениям прямой L_2 :

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{-1-3}{2} \neq \frac{2+2}{-1}.$$

В данном случае это не так.

Ответ: прямые параллельные.

Задача 144. Найти общую точку двух пересекающихся прямых.

Решение. Пусть даны канонические уравнения двух прямых в пространстве:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Запишем уравнения обеих прямых в параметрической форме и рассмотрим систему (3) предыдущей задачи. Если прямые пересекаются, то система (3) должна иметь единственное решение (k, t) . Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой L_1 (или k в параметрические уравнения прямой L_2), получаем координаты искомой точки.

Пример. Найти точку пересечения прямых, если они пересекаются:

$$L_1: x+4 = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-2}{3} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Решение. Запишем параметрические уравнения данных прямых:

$$L_1: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 7 - t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = -2k \\ y = 3 + 2k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = -1 - k \end{cases}.$$

Так как их направляющие вектора $\vec{s}_1 = (1; -1; 3)$, $\vec{s}_2 = (-2; 2; -1)$ не коллинеарные, то прямые либо скрещивающиеся, либо пересекающиеся. Решаем систему

$$\begin{cases} -4 + t = -2k \\ 7 - t = 3 + 2k \\ 2 + 3t = -1 - k \end{cases}.$$

Выражаем t из первого уравнения и подставляем во второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} t = 4 - 2k \\ 7 - (4 - 2k) = 3 + 2k \\ 2 + 3(4 - 2k) = -1 - k \end{cases}.$$

Вычисляем k :

$$\begin{cases} t = 4 - 2k \\ 0 = 0 \\ k = 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t = -2 \\ k = 3 \end{cases}$$

– система имеет единственное решение, следовательно, прямые пересекаются.

Подставляем найденные значения t и k в параметрические уравнения прямых и находим координаты общей точки.

Ответ: $(-6; 9; -4)$.

Задача 145. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми.

Решение. Пусть уравнения параллельных прямых даны в канонической форме:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p},$$

где $\vec{s} = (m, n, p)$ – их общий направляющий вектор, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$ – точки на этих прямых.

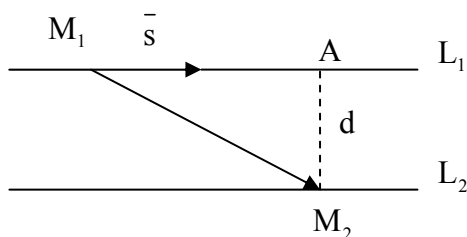


Рис. 48.

Треугольник AM_1M_2 прямоугольный, и

$$d(L_1; L_2) = |\overline{M_1M_2}| \cdot \sin(\vec{s} \wedge \overline{M_1M_2}).$$

Так как $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$, то направление вектора $\vec{s}$ не играет роли, лишь бы он был коллинеарный данным параллельным прямым. Далее, находим:

$$\cos(\vec{s} \wedge \overline{M_1M_2}) = \frac{\vec{s} \cdot \overline{M_1M_2}}{|\vec{s}| \cdot |\overline{M_1M_2}|},$$

$$d(L_1; L_2) = |\overline{M_1M_2}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\vec{s} \wedge \overline{M_1M_2})}.$$

Замечание. Можно решать прямоугольный треугольник AM_1M_2 иначе:

$$AM_1 = |\text{пр}_{\vec{s}} \overline{M_1M_2}| = \left| \frac{\vec{s} \cdot \overline{M_1M_2}}{|\vec{s}|} \right|,$$

$$d(L_1; L_2) = AM_2 = \sqrt{(\overline{M_1M_2})^2 - (AM_1)^2}.$$

Пример. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$L_1: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}, \quad L_2: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}.$$

Решение. Выписываем направляющие векторы прямых:

$$\vec{s}_1 = (3; -2; 2), \quad \vec{s}_2 = (-3; 2; -2) = -\vec{s}_1.$$

Отсюда следует, что прямые либо совпадают, либо параллельные. Пусть $\vec{s} = (3; -2; 2)$ – их общий направляющий вектор. Из канонических уравнений прямых находим, что точки $M_1(0; 1; -1) \in L_1$, $M_2(2; 0; 0) \in L_2$. Находим координаты вектора $\overline{M_1M_2} = (2; -1; 1)$. Видим, что $\overline{M_1M_2} \parallel \vec{s}_1$, т.е. данные прямые не совпадают, а являются параллельными. Далее находим:

$$AM_1 = |\text{пр}_{\vec{s}} \overline{M_1M_2}| = \frac{|\vec{s} \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\vec{s}|} = \frac{10}{\sqrt{17}},$$

$$(\overline{M_1M_2})^2 = |\overline{M_1M_2}|^2 = 6,$$

$$d = AM_2 = \sqrt{(\overline{M_1M_2})^2 - (AM_1)^2} = \sqrt{6 - \frac{100}{17}} = \sqrt{\frac{2}{17}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{17}}$.

Замечание. Искомое расстояние d равно расстоянию от точки M_1 до прямой L_2 (смотрите рисунок 48). Так что, решив задачу нахождения расстояния между параллельными

ми прямыми, мы одновременно решаем задачу нахождения расстояния от точки до прямой в пространстве.

Задача 146. Найти уравнение биссектрисы угла между пересекающимися прямыми.

Решение. Пусть в пространстве даны две пересекающиеся в точке М прямые с направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Если их скалярное произведение положительно, то вектор $\vec{s}_1^0 + \vec{s}_2^0$ является направляющим вектором биссектрисы острого угла между прямыми, а вектор $\vec{s}_1^0 - \vec{s}_2^0$ будет направляющим вектором биссектрисы тупого угла.

Пример. Найти биссектрисы углов между двумя пересекающимися прямыми:

$$x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}, \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{7}.$$

Решение. Точка М(1;1;1) является точкой пересечения прямых, $\vec{s}_1 = (1;2;-2)$, $\vec{s}_2 = (4;-4;7)$ – их направляющие векторы. Так как $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 4 - 8 - 14 = -18 < 0$, то вектор

$$\vec{s}_1^0 - \vec{s}_2^0 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{4}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right) = \frac{1}{9}(-1; 10; -13)$$

является направляющим вектором биссектрисы острого угла, а вектор

$$\vec{s}_1^0 + \vec{s}_2^0 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{9}; -\frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right) = \frac{1}{9}(7; 2; 1)$$

– направляющий вектор биссектрисы тупого угла.

Ответ: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-1}{-13}$, $\frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$ – уравнения биссектрис соответственно острого и тупого углов.

Глава 19. Прямая в пространстве и плоскость

Задача 147. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми.

Теорема. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

можно вычислить по формуле:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1 M_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

где $|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1 M_2}|$ – модуль смешанного произведения направляющих векторов $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ и вектора $\overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|$ – модуль векторного произведения направляющих векторов.

Доказательство.

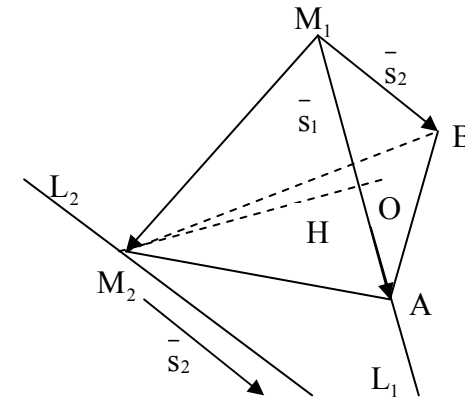


Рис. 49.

Векторы $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overline{M_1M_2}$ некомпланарные, (см. задачу 143), в частности $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$. Здесь

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1, \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2.$$

Отложим все три вектора $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overline{M_1M_2}$ от одной точки M_1 . Здесь $\overline{M_1A} = \vec{s}_1, \overline{M_1B} = \vec{s}_2$. Из рисунка 49 ясно, что прямая L_2 параллельна грани M_1AB , т.к. прямая L_2 по построению параллельна ребру M_1B треугольной пирамиды M_1M_2AB (если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то она параллельна этой плоскости.). Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми $d(L_1, L_2)$ равно расстоянию от прямой L_2 до грани M_1AB , а это расстояние, в свою очередь, равно высоте $H = M_2O$ пирамиды M_1M_2AB , опущенной из вершины M_2 на грань M_1AB :

$$H = \frac{3V_{M_1M_2AB}}{S_{M_1AB}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot |\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{\frac{1}{2} |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

Теорема доказана.

Пример. Установить, что прямые $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$ и $L_2: x = y = z + 1$ скрещивающиеся, и найти расстояние между ними.

Решение. $M_1(1; -1; 0), \quad M_2(0; 0; -1), \quad \overline{M_1M_2} = (-1; 1; -1),$
 $\vec{s}_1 = (2; -1; 0), \quad \vec{s}_2 = (1; 1; 1), \quad \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = -4,$ т.е. данные прямые скрещивающиеся. Находим расстояние между ними: $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad |\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \sqrt{14},$

$$d = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{14}}{7}.$

Задача 148. Найти каноническое уравнение прямой, заданной пересечением двух плоскостей.

Решение. Пусть прямая задана пересечением двух плоскостей $L = \alpha \cap \beta$:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Пусть $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы данных плоскостей. Так как прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой прямой лежащей в этой плоскости, то оба нормальных вектора перпендикулярны прямой пересечения L , и их векторное произведение будет вектором, коллинеарным этой прямой. Поэтому, в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

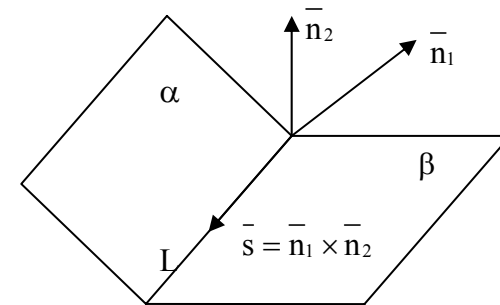


Рис. 50.

Таким образом, вычисляя векторное произведение нормальных векторов плоскости (неважно в каком порядке),

мы находим направляющий вектор прямой L:

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (m, n, p).$$

Далее, найдем какое-нибудь решение (x_0, y_0, z_0) системы (1). Т.к. любое решение системы (1) есть координаты точки, лежащей на обеих плоскостях, то тем самым мы находим точку на прямой L. Теперь осталось написать канонические уравнения прямой L:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Пример. Найти канонические уравнения прямой

$$L: \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Исключим из уравнения одно из переменных. Умножим, например, первое уравнение на 2 и сложим оба уравнения. Получаем $4x + 3y - 1 = 0$. Положим в этом уравнении $y = 3$. Получаем $x = -2$. Подставляя найденные значения x и y в первое уравнение, находим $z = 5$.

Таким образом, точка с координатами $(-2; 3; 5)$ лежит на данной прямой, т.е. $x_0 = -2, y_0 = 3, z_0 = 5$. Найдем ее направляющий вектор. Выписываем нормальные векторы данных плоскостей и вычисляем их векторное произведение:

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -1), \quad \vec{n}_2 = (2, -1, 2), \quad \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (3; -4; -5).$$

Таким образом, $\vec{s} = (3, -4, -5)$, т.е. $m = 3, n = -4, p = -5$ и, подставляя эти числа в канонические уравнения, получаем

$$\text{Ответ: } \frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{-4} = \frac{z - 5}{-5}.$$

Задача 149. Задать прямую пересечением двух плоскостей, зная ее каноническое уравнение.

Решение. Пусть дано каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Перепишем это уравнение в виде равносильной ему системы:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases}.$$

Оба уравнения этой системы есть плоскости. Первая плоскость параллельна оси Oz (или содержит ее, если $x_0 = y_0 = 0$), а вторая – оси Ox (или содержит ее, если $z_0 = y_0 = 0$). Тем самым задача решена.

Пример. Задать прямую $\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{-4} = \frac{z - 5}{-5}$ пересечением двух плоскостей.

Решение. Записываем каноническое уравнение прямой в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{x + 2}{3} = \frac{y - 3}{-4} \\ \frac{y - 3}{-4} = \frac{z - 5}{-5} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -4(x + 2) = 3(y - 3) \\ 5(y - 3) = 4(z - 5) \end{cases}, \begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 5y - 4z + 5 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ 5y - 4z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Задача 150. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельной другой прямой.

Решение. Пусть даны две прямые

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

Так как одна прямая, например L_1 , будет лежать в плоскости, а вторая параллельна ей, то оба направляющих вектора данных прямых коллинеарны этой плоскости и, следовательно, перпендикулярны ее нормальному вектору. Поэтому нормальным вектором плоскости может служить векторное произведение направляющих векторов: $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$, где $\vec{s}_1 = (m_1, n_1; p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2; p_2)$.

Если плоскость проводится через прямую L_1 , то любая ее точка принадлежит этой плоскости, в том числе и точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Таким образом, у нас есть все для написания общего уравнения плоскости (см. задачу 123):

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

где $(A, B, C) = \vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ – координаты нормального вектора.

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{0}$ параллельно прямой $L_2: x = y = z + 1$.

Решение. Находим нормальный вектор плоскости:

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

В качестве нормального вектора плоскости возьмем противоположный вектор: $\vec{n} = (A, B, C) = (1; 2; -3)$. В качестве точки, лежащей на плоскости возьмем точку $M_1(1, -1, 0)$ принадлежащую прямой L_1 . Выписываем уравнение плоскости проходящей через точку $M_1(1, -1, 0)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C) = (1; 2; -3)$:

$$(x - 1) + 2(y + 1) - 3(z - 0) = 0.$$

Ответ: $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Задача 151. Определить взаимное расположение прямой и плоскости.

Теорема. Пусть плоскость α задана общим уравнением

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая L задана каноническим уравнением

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

или параметрическим уравнением

$$L: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

в которых $\vec{n} = (A, B, C)$ – координаты нормального вектора плоскости α , $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – координаты произвольной фиксированной точки прямой L , $\vec{s} = (m, n, p)$ – координаты направляющего вектора прямой L . Тогда:

1) если $\vec{n} \cdot \vec{s} = Am + Bn + Cp \neq 0$, то прямая L пересекает плоскость α в точке, координаты которой (x, y, z) можно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt; \end{cases} \quad (1)$$

2) если $\vec{n} \cdot \vec{s} = Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит на плоскости;

3) если $\vec{n} \cdot \vec{s} = Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

Пример 1. Определить взаимное расположение прямой $L: x + 4 = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-2}{3}$ и плоскости $\sigma: 2x - 2y + z + 5 = 0$.

Решение. Выписываем направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости:

$$\vec{s} = (1; -1; 3), \quad \vec{n} = (2; -2; 1).$$

Вычисляем их скалярное произведение

$$\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 + 2 + 3 = 7 \neq 0,$$

следовательно, $\vec{s} \not\perp \vec{n}$, и прямая пересекает плоскость.

Пример 2. Определить взаимное расположение прямой $L: x + 4 = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-2}{3}$ и плоскости $\sigma: 2x + 2y - 1 = 0$.

Решение. Выписываем направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости:

$$\vec{s} = (1; -1; 3), \quad \vec{n} = (2; 2; 0).$$

Вычисляем их скалярное произведение $\vec{s} \cdot \vec{n} = 2 - 2 = 0$, следовательно, или прямая параллельна плоскости или прямая лежит на плоскости. Если прямая лежит на плоскости, то точка $M_0(-4; 7; 2) \in L$ удовлетворяет уравнению плоскости:

$$2 \cdot (-4) + 2 \cdot 7 - 1 = 5 \neq 0.$$

В данном случае координаты точки $M_0(-4; 7; 2) \in L$ не удовлетворяют уравнению плоскости, поэтому прямая L не лежит на плоскости. Остается последний случай – прямая параллельна плоскости.

Ответ: прямая и плоскость параллельны.

Замечание. Если прямая задана в виде пересечения двух плоскостей:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases},$$

то можно найти ее канонические уравнения и решать задачу как выше. Но можно поступить иначе.

Пусть плоскость α задана общим уравнением

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$\text{Решим систему } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$

Если система имеет единственное решение, то это решение дает координаты точки встречи прямой с плоскостью.

Если система не имеет решений, то прямая и плоскость параллельны.

Если система имеет бесконечно много решений, то прямая лежит на плоскости.

Пример 3. Определить взаимное расположение прямой

$$L: \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases} \text{ и плоскости } \sigma: x - y + 2z + 2 = 0.$$

$$\text{Решение. Решим систему } \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 2 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}.$$

К третьему уравнению прибавим первое. Получаем

$$\begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 2 = 0 \\ 3x + 3z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x + y + 1 - x + 1 = 0 \\ 5x + y + 4(1 - x) - 2 = 0 \\ z = -1 - x \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} x + y = -2 \\ x + y = -2 \\ z = -1 - x \end{cases}. \text{ Система имеет бесконечно много реше-}$$

ний $(x, -2 - x, -1 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: прямая лежит на плоскости.

Задача 152. Найти угол между прямой и плоскостью.

Решение. Пусть плоскость α задана общим уравнением

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая L задана каноническим уравнением

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $\bar{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости α ,

$\bar{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой L .

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

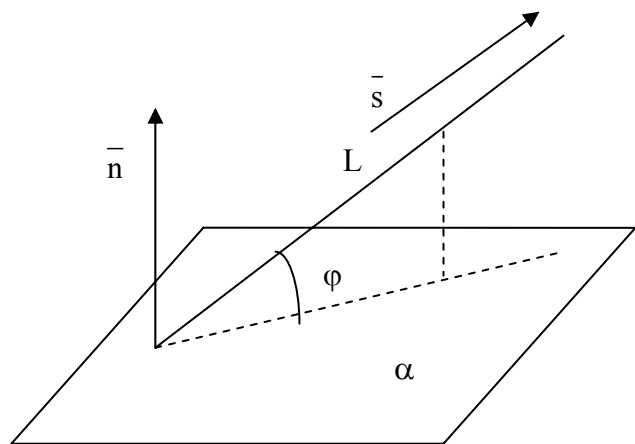


Рис. 51.

Обозначим угол между направляющим вектором прямой $\bar{s}$ и нормальным вектором $\bar{n}$ плоскости α через $(\bar{n} \wedge \bar{s})$. Тогда, если угол $(\bar{n} \wedge \bar{s})$ острый, т.е. скалярное произведение $\bar{s} \cdot \bar{n} > 0$, то $\varphi = \frac{\pi}{2} - (\bar{n} \wedge \bar{s})$; если же угол $(\bar{n} \wedge \bar{s})$ тупой, т.е.

скалярное произведение $\bar{s} \cdot \bar{n} < 0$, то $\varphi = (\bar{n} \wedge \bar{s}) - \frac{\pi}{2}$. То есть,

$$\text{в любом случае } \varphi = \left| \frac{\pi}{2} - (\bar{n} \wedge \bar{s}) \right|.$$

Пример. Найти угол между прямой $L: x + 4 = \frac{y - 7}{-1} = \frac{z - 2}{3}$

и плоскостью $\sigma: 2x - 2y + z + 6 = 0$.

Решение. Вычисляем угол между нормальным вектором $\bar{n} = (2; -2; 1)$ плоскости и направляющим вектором прямой $\bar{s} = (1; -1; 3)$:

$$(\bar{n} \wedge \bar{s}) = \arccos \frac{\bar{n} \cdot \bar{s}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|} = \arccos \frac{7}{3\sqrt{11}}.$$

Искомый угол между прямой и плоскостью равен

$$(L \wedge \sigma) = \frac{\pi}{2} - (\bar{n} \wedge \bar{s}) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{7}{3\sqrt{11}} = \arcsin \frac{7}{3\sqrt{11}}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{7}{3\sqrt{11}}$.

Задача 153. Найти точку встречи прямой с плоскостью.

Решение. Решение задачи вытекает из теоремы, сформулированной в предыдущей задаче.

Пусть плоскость α задана общим уравнением

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая L задана параметрическими уравнениями

$$L: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

Подставляем x , y и z из параметрических уравнений в уравнение плоскости:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0.$$

Решаем это уравнение относительно t . Если прямая пересекается с плоскостью, то данное уравнение имеет единственное решение.

Подставляем найденное значение t в параметрические уравнения и вычисляем координаты искомой точки.

Пример 1. Найти точку встречи прямой

$$L: x + 4 = \frac{y - 7}{-1} = \frac{z - 2}{3}$$

с плоскостью $\sigma: 2x - 2y + z + 6 = 0$.

Решение. Запишем параметрические уравнения данной прямой:

$$L: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 7 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Подставляем $x = t - 4$, $y = 7 - t$, $z = 2 + 3t$ в уравнение плоскости: $2(t - 4) - 2(7 - t) + 2 + 3t + 6 = 0$.

Решаем это уравнение и находим $t = -2$. Подставляем это значение t в параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -4 - 2 = -6 \\ y = 7 + 2 = 9 \\ z = 2 + 3 \cdot (-2) = -4 \end{cases}.$$

Ответ: $(-6; 9; -4)$.

Пример 2. Убедиться, что прямая

$$L: \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$$

пересекает плоскость $\sigma: 2x - 2y + z + 5 = 0$, и найти координаты точки пересечения.

Решение. Решим систему

$$\begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 2 = 0 \\ 2x + 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

Из третьего уравнения вычтем первое. Получаем $y = -4$.

Подставляем y в первое и второе уравнения: $\begin{cases} 2x + z = 3 \\ 5x + 4z = 6 \end{cases}$.

Отсюда, $\begin{cases} z = 3 - 2x \\ 5x + 4(3 - 2x) = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} z = 3 - 2x \\ -3x = -6 \end{cases}$, или $\begin{cases} x = 2 \\ z = -1 \end{cases}$.

Ответ: $(2; -4; -1)$.

Задача 154. Найти проекцию точки на плоскость.

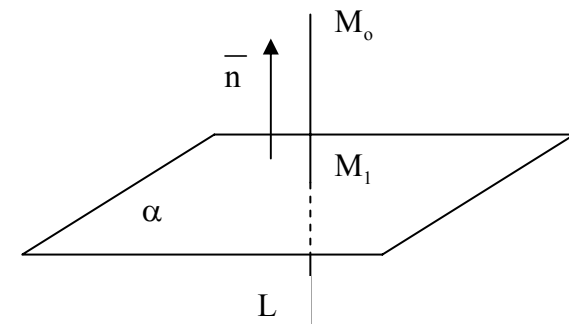


Рис. 52.

Решение. Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Проведем через точку M_0 прямую L перпендикулярно данной плоскости α и найдем их точку встречи $M_1(x_1, y_1, z_1) = L \cap \alpha$. Точка M_1 будет искомой проекцией точки M_0 на плоскость α .

Из построения следует, что нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости α является в то же время направляющим вектором прямой L . Пишем параметрическое уравнение прямой L :

$$L: \begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Осталось, как в предыдущей задаче, найти точку встречи M_1 прямой L с плоскостью α , т.е. решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \\ z = z_0 + Ct \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Попутно мы решили задачу: через данную точку провести прямую перпендикулярно данной плоскости.

Пример. Найти проекцию точки $P(1; 2; -3)$ на плоскость $x + y - z + 6 = 0$.

Решение. Составляем и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \\ x + y - z + 6 = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Подставляем x, y, z из первых трех уравнений в четвертое:

$$1 + t + 2 + t + 3 + t + 6 = 0, \quad t = -4, \quad x = -3, \quad y = -2, \quad z = 1.$$

Ответ: $(-3; -2; 1)$.

Задача 155. Найти точку симметричную данной относительно плоскости.

Решение. Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Сначала, как в предыдущей задаче, находим проекцию $M_1(x_1, y_1, z_1)$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость α . Искомая точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ является концом отрезка M_0M_2 , для которого точка M_1 является его серединой. Ситуация схематически изображена на следующем рисунке:

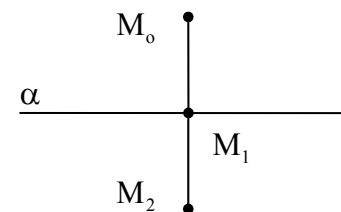


Рис. 53.

Для вычисления координат точки M_2 используем формулы середины отрезка.

Пример. Найти точку симметричную точке $P(1; 2; -3)$ относительно плоскости $x + y - z + 6 = 0$.

Решение. Проекцию точки P на данную плоскость мы уже нашли (см. пример предыдущей задачи). Обозначим эту точку через $S(-3; -2; 1)$. Пусть $Q(x, y, z)$ – искомая точка. Тогда в векторной форме:

$$\vec{r}_S = \frac{\vec{r}_P + \vec{r}_Q}{2} \quad \text{или} \quad \vec{r}_Q = 2 \cdot \vec{r}_S - \vec{r}_P,$$

где $\vec{r}_P, \vec{r}_S, \vec{r}_Q$ – радиус-векторы точек P, S, Q:

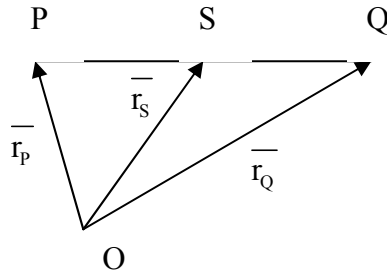


Рис. 54.

Координаты точки Q удобнее вычислять, записывая их не в строчку, а в столбец:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{r}_S - \vec{r}_P = 2 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(-7; -6; 5)$

Задача 156. Найти расстояние между параллельными прямой и плоскостью.

Решение. Пусть прямая L параллельна плоскости α .

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \alpha: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тогда расстояние между ними равно расстоянию от точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ до плоскости α :

$$d(L, \alpha) = d(M_0, \alpha).$$

Таким образом, данная задача сводится к задаче 129. Однако можно решать эту задачу и задачу 129 по-другому.

Найдем, как в задаче 154, проекцию $M_1(x_1, y_1, z_1)$ точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ на плоскость α и тогда

$$d(L, \alpha) = M_0M_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}.$$

Пример. Убедиться, что прямая $L: x+4 = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-2}{3}$ параллельна плоскости $\sigma: x+y+1=0$, и найти расстояние между ними.

Решение. Вычисляем скалярное произведение направляющего вектора данной прямой и нормального вектора данной плоскости:

$$\vec{s} = (1, -1, 3), \quad \vec{n} = (1, 1, 0) \quad \text{и} \quad \vec{s} \cdot \vec{n} = 1 - 1 = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то $\vec{s} \perp \vec{n}$ и, следовательно, либо прямая лежит на плоскости, либо она параллельна ей. Так как $M_0(-4; 7; 2) \notin \sigma$, то имеет место второй случай, т.е. $L \parallel \sigma$.

Искомое расстояние можно найти двумя способами.

1-й способ. Через точку $M_0(-4, 7, 2) \in L$ проводим прямую

$$L_1 \perp \sigma: \quad L_1: \frac{x+4}{1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-2}{0},$$

где $\vec{s}_1 = \vec{n} = (1, 1, 0) \parallel L_1$ – направляющий вектор L_1 . Находим параметрические уравнения L_1 и подставляем их в уравнение плоскости:

$$L_1: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 7 + t \\ z = 2 \end{cases}, \quad -4 + t + 7 + t + 1 = 0, \text{ откуда } t = -2 \text{ и}$$

$$\begin{cases} x = -4 - 2 = -6 \\ y = 7 - 2 = 5 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{– координаты точки } M_1 = L_1 \cap \sigma.$$

Теперь, расстояние d от прямой L до плоскости σ равно длине отрезка M_0M_1 :

$$d = M_0M_1 = \sqrt{(-6+4)^2 + (5-7)^2 + (2-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

2-й способ. Искомое расстояние d можно найти по формуле расстояния от точки до плоскости:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot (-4) + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Задача 157. Найти уравнение пучка плоскостей с заданной осью пучка.

Решение. Пусть ось пучка задана каноническим уравнением:

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Запишем каноническое уравнение данной прямой в виде равносильной системы:

$$L: \begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \\ \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \end{cases}.$$

Каждое уравнение этой системы есть уравнение плоскости:

$$L: \begin{cases} nx - my + (my_0 - nx_0) = 0 \\ py - nz + (nz_0 - py_0) = 0 \end{cases}.$$

Ясно, что последняя система равносильна каноническим уравнениям, следовательно, мы имеем две плоскости из искомого пучка плоскостей, причем эти плоскости пересекаются по данной прямой, т.е. любое решение последней системы есть координаты точки, лежащей на прямой L , и,

обратно, координаты любой точки, лежащей на прямой L , удовлетворяют обоим уравнения системы. В соответствии с теорией, уравнение искомого пучка плоскостей имеет вид:

$$\alpha(nx - my + my_0 - nx_0) + \beta(py - nz + nz_0 - py_0) = 0.$$

Пример. Найти уравнение пучка плоскостей с осью пучка

$$L: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{2}.$$

Решение. Запишем канонические уравнения данной прямой в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{6} \\ \frac{y+1}{6} = \frac{z+3}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 6x + 3y - 9 = 0 \\ 2y - 6z - 16 = 0 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ y - 3z - 8 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\alpha(2x + y - 3) + \beta(y - 3z - 8) = 0$.

Задача 158. Определить взаимное расположение двух прямых в пространстве, одна из которых или обе заданы в виде пересечения двух плоскостей.

Решение. 1) Пусть одна прямая задана в канонической форме, другая в виде пересечения двух плоскостей:

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad L_2: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Запишем уравнения прямой L_1 в параметрической форме и решим систему:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \\ z = z_1 + pt \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \quad (1)$$

Исключаем переменные x, y, z , подставляя их из первых трех уравнений системы в четвертое и пятое уравнения:

$$\begin{cases} A_1(x_1 + mt) + B_1(y_1 + nt) + C_1(z_1 + pt) + D_1 = 0 \\ A_2(x_1 + mt) + B_2(y_1 + nt) + C_2(z_1 + pt) + D_2 = 0 \end{cases}$$

и решаем каждое уравнение этой системы:

$$\begin{cases} a_1 t = b_1 \\ a_2 t = b_2 \end{cases} \quad (2)$$

Если эта система имеет единственное решение $t = t_0$, то, подставляя его в первые три уравнения системы (1), находим точку пересечения данных прямых.

Если каждое уравнение системы (2) верно при любых значениях параметра t , т.е. $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, то прямые совпадают.

Если каждое уравнение системы (2) не имеет решений, т.е. $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 \neq 0 \neq b_2$, то прямые параллельные.

Во всех остальных случаях прямые скрещивающиеся.

Пример 1. Определить взаимное расположение двух прямых:

$$L_1: x + 4 = \frac{y - 7}{-1} = \frac{z - 2}{3} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Запишем параметрические уравнения прямой L_1 и подставим их в уравнения прямой L_2 :

$$L_1: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 7 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, \quad L_2: \begin{cases} t - 4 + 3(7 - t) - (2 + 3t) = 0 \\ 2(t - 4) - (7 - t) + 2 + 3t - 4 = 0 \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $\begin{cases} t = 3 \\ 6t = 17 \end{cases}$. Отсюда следует, что прямые не пересекаются, так как система не

имеет решений, не параллельные, ибо в противном случае каждое уравнение системы не имело бы решений, а следовательно, прямые скрещивающиеся.

Ответ: прямые скрещивающиеся.

2) Пусть теперь обе прямые заданы в виде пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

Решим систему из четырех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Если система имеет единственное решение, то прямые пересекаются в точке, координаты которой являются решением системы.

Если система допускает бесконечное множество решений, то прямые совпадают.

Если система не имеет решений, то прямые скрещивающиеся или параллельные. Найдем каноническое уравнение одной из прямых. Тогда вопрос решается как в предыдущем случае.

Пример 2. Определить взаимное расположение двух прямых:

$$L_1: \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Решение. Решаем систему

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 4 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Из последних уравнений находим $y = -x$, $z = 1 - x$. Подставляем в первые два уравнения:

$$\begin{cases} 2x - x + 1 - x - 1 = 0 \\ 5x - x + 4(1 - x) - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} y = -x \\ z = 1 - x \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Положим в этих равенствах $x = t \in \mathbb{R}$, тогда получаем:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е. мы получаем параметрическое уравнение двух совпадающих данных прямых.

Ответ: прямые совпадают, их каноническое уравнение имеет вид: $x = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Задача 159. Найти точку пересечения двух прямых в пространстве, одна из которых или обе заданы в виде пересечения двух плоскостей.

Решение. Решение этой задачи ясно из предыдущей. Либо одну из прямых записываем в параметрической форме и решаем систему (1) из предыдущей задачи, либо решаем систему (2) из той же предыдущей задачи.

Пример 1. Убедиться, что данные прямые пересекаются, и найти их точку пересечения:

$$L_1: x + 4 = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-2}{3} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x - y + z - 5 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Запишем параметрические уравнения прямой L_1

$$L_1: \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 7 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases},$$

и подставим их в уравнения прямой L_2 :

$$\begin{cases} t - 4 + 3(7 - t) - (2 + 3t) = 0 \\ 2(t - 4) - (7 - t) + 2 + 3t - 5 = 0 \end{cases}.$$

Решаем последнюю систему, получаем

$$\begin{cases} t = 3 \\ 6t = 18 \end{cases} \quad \text{или} \quad t = 3$$

– единственное решение системы. Подставляя в параметрические уравнения прямой L_1 , находим координаты искомой точки.

Ответ: $(-1; 4; 11)$.

Пример 2. Убедиться, что данные прямые пересекаются и найти их точку пересечения:

$$L_1: \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Решение. Решаем систему

$$\begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ 5x + y + 4z - 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Из последних уравнений находим $y = x$, $z = 1 - x$. Подставляем в первые два уравнения:

$$\begin{cases} 2x + x + 1 - x + 1 = 0 \\ 5x + x + 4(1 - x) - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad x = -1, y = -1, z = 2.$$

Ответ: $(-1; -1; 2)$.

Задача 160. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Решение. Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямая

$$L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ – точка на прямой L , и $\vec{s} = (m, n, p)$ – ее направляющий вектор.

1-й способ. Через данную точку проводим прямую параллельную данной (см. задачу 141), и находим расстояние между параллельными прямыми (см. задачу 145).

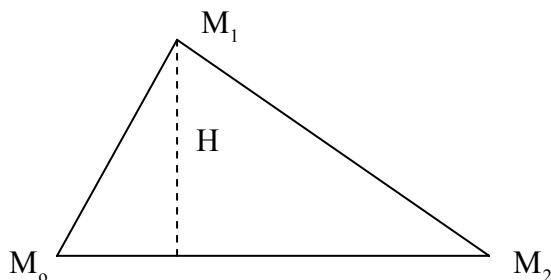


Рис. 55.

2-й способ. Находим на прямой L еще одну точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$, отличную от M_0 , и рассматриваем треугольник $M_0M_1M_2$. Искомое расстояние равно высоте треугольника, опущенной из вершины M_1 . Так как координаты вершин треугольника известны, то задача решается ме-

тодами векторной алгебры. Находим площадь треугольника (см. задачу 69), длину стороны M_0M_1 (см. задачу 1), и

$$\text{вычисляем высоту } H = \frac{2S_{\Delta}}{M_0M_2}.$$

3-й способ. Через точку M_1 проведем плоскость $\alpha \perp L$:

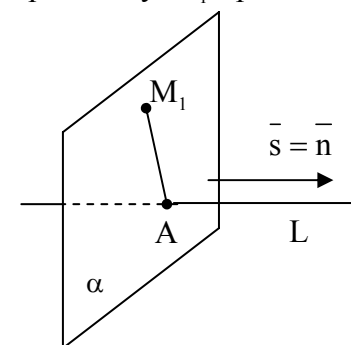


Рис. 56.

Найдем общее уравнение плоскости α . Его нормальным вектором может служить вектор $\vec{s} = (m, n, p)$, и точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \alpha$. Тогда

$$\alpha: m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0$$

– уравнение плоскости α .

Пусть A – точка встречи прямой L с плоскостью α (см. задачу 152). Тогда искомое расстояние

$$d(M_1; L) = AM_1 = \sqrt{(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 + (z_1 - z_A)^2}.$$

Осталось найти координаты точки встречи A прямой L с плоскостью α . (См. задачу 152.)

Замечание. Найдя координаты точки A , мы попутно решаем задачу нахождения проекции данной точки M_1 на данную прямую L .

Пример. Найти расстояние от точки $M_1(0; 1; -1)$ до прямой

$$L: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}.$$

Решение. Уравнение плоскости $\alpha \perp L$ и проходящей через точку $M_1(0; 1; -1)$ имеет вид:

$$\alpha: 3x - 2(y-1) + 2(z+1) = 0 \quad \text{или} \quad \alpha: 3x - 2y + 2z + 4 = 0.$$

Запишем уравнения прямой в параметрической форме и подставим их в уравнение плоскости α :

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha: 3(2 + 3t) - 2(-2t) + 2(2t) + 4 = 0.$$

Решаем последнее уравнение и находим $t = -\frac{10}{17}$. Подстав-

ляем в параметрические уравнения прямой L и находим координаты точки встречи прямой L с плоскостью α :

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{30}{17} = \frac{4}{17} \\ y = \frac{20}{17} \\ z = -\frac{20}{17} \end{cases} \quad \text{или} \quad A\left(\frac{4}{17}; \frac{20}{17}; -\frac{20}{17}\right).$$

Искомое расстояние

$$\begin{aligned} d(M_1; L) &= AM_1 = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{17}\right)^2 + \left(1 - \frac{20}{17}\right)^2 + \left(-1 + \frac{20}{17}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{16}{17^2} + \frac{9}{17^2} + \frac{9}{17^2}} = \sqrt{\frac{34}{17^2}} = \sqrt{\frac{2}{17}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{17}}.$

Задача 161. Найти проекцию точки на прямую.

Решение. Вытекает из 3-го способа решения предыдущей задачи. На рисунке 56 точка A является проекцией точки M_1 на прямую L . Смотрите также пример в предыдущей задаче.

Задача 162. Найти точку симметричную данной относительно данной прямой в пространстве.

Решение. В обозначениях задачи 160 (смотрите рисунок 56) точка A является проекцией точки M_1 на прямую L . Если обозначить через B искомую точку, симметричную точке M_1 относительно прямой L , то точка A является серединой отрезка M_1B . Для вычисления координат точки B воспользуемся формулами координат середины отрезка (смотрите задачу 4).

Задача 163. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми. (Второй способ вывода формулы искомого расстояния.)

Решение. Пусть

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

— две скрещивающиеся прямые и, следовательно, (смотрите задачу 143) векторы $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overline{M_1M_2}$ не компланарные, в частности, $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$, где $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ — направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно,

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1, \quad M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2.$$

Построим плоскость α , содержащую прямую L_2 и параллельную прямой L_1 (смотрите задачу 150):

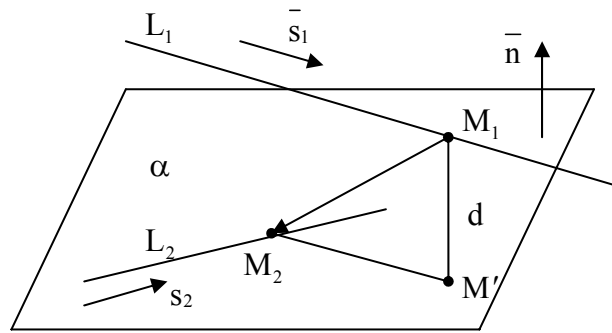


Рис. 57.

Из построения следует, что вектор $(\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \perp \alpha$, и поэтому в качестве нормального вектора плоскости α можно взять вектор $\bar{n} = \bar{s}_1 \times \bar{s}_2$.

Пусть M' – проекция точки M_1 на плоскость α . Так как точка $M_2 \in L_2$, то искомое расстояние

$$d = d(L_1; L_2) = M_1M' = |\text{пр}_{\overline{M'M_1}} \overline{M_1M_2}|.$$

А так как оба вектора $\overline{M'M_1}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны плоскости α , то они коллинеарны, и проекции вектора $\overline{M_1M_2}$ на вектор $\overline{M'M_1}$ и на нормальный вектор $\bar{n}$ равны по модулю. Отсюда получаем, что

$$d = |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1M_2}| = \frac{|\bar{n} \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\bar{n}|} = \frac{|(\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\bar{n}|}$$

или

$$d = \frac{|\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|},$$

где $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}$ – смешанное произведение векторов.

УПРАЖНЕНИЯ

88. Проходит ли прямая $3x - 7y - 2 = 0$ через точку $A(17; 7)$?

89. Построить на координатной плоскости Оху чертеж прямой, если ее уравнение имеет вид:

а) $x = 2$; б) $y = -2$; в) $2x + 3y = 0$; г) $3x + 4y - 12 = 0$.

90. Построить на координатной плоскости Оху чертеж прямой, заданной уравнением с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{2}{3}x.$$

91. Определить вид следующих уравнений прямых:

а) $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2}$; б) $x - y + 1 = 0$; в) $\frac{x}{2} + \frac{y}{9} = 1$;

г) $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; д) $y = 0$; е) $y = -x - 1$; ё) $x = 1$;

ж) $\frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y - \sqrt{5} = 0$; з) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y - 1 = 0$; и) $y = 3x$;

й) $x + 3y = 0$; к) $-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} - \sqrt{15} = 0$;

л) $4(x-1) - 5(y+2) = 0$; м) $y+1 = -2(x+3)$.

Дополнительное задание:

1) В нормированных уравнениях найдите направляющие углы нормального вектора, его полярный угол и расстояние до начала координат.

2) В общих уравнениях прямых найдите координаты нормального вектора;

3) В канонических и параметрических уравнениях найдите координаты направляющего вектора.

4) В уравнениях с угловым коэффициентом найдите угол наклона прямой к оси абсцисс.

5) В уравнениях в отрезках найдите точки пересечения с осями координат.

6) На каждой прямой найдите точку с целыми координатами, если такая имеется.

92. Найти общее уравнение прямой проходящей через точку $A(-3; -1)$ с направляющим вектором:

а) $\vec{s} = \vec{i}$; б) $\vec{s} = \vec{j}$; в) $\vec{s} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

93. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; -7)$ и $B(-9; 11)$.

94. Найдите направляющий и нормальный вектор прямой $\frac{x-13}{5} = \frac{-y+1}{3}$ и напишите ее общее уравнение.

95. Найдите направляющий вектор прямой $3x - 7y - 2 = 0$ и ее каноническое уравнение. Найдите на прямой точку с целыми координатами.

96. Найдите каноническое уравнение прямой:

а) $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + 7t \end{cases}$; б) $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 + 7t \end{cases}$

97. Найдите параметрические уравнения прямой

а) $\frac{x-13}{5} = \frac{-y+1}{3}$; б) $y = x$.

98. Найдите уравнение прямой $6x + 5y - 9 = 0$ в отрезках и координаты точек пересечения прямой с осями координат.

99. Найдите нормированное уравнение прямой $3x - 7y + 29 = 0$ и расстояние до нее от начала координат. Найдите полярный угол ее нормального вектора.

100. Найдите расстояние от точки $A(23; 13)$ до прямой $y = -2x - 11$.

101. Найдите расстояние между параллельными прямыми $x - y - 1 = 0$ и $2x - 2y + 29 = 0$.

102. Найдите все виды уравнений прямой $3x - 7y + 29 = 0$.

103. Докажите, что прямые $2x - 7y - 2 = 0$ и $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + 7t \end{cases}$

пересекаются и найдите координаты их точки пересечения.

104. Диагональ ромба лежит на прямой $y = \frac{x}{2}$, одна из его вершин имеет координаты $(6; -2)$. Найдите точку пересечения диагоналей ромба.

105. Найти точку симметричную точке $M(-3; 1)$ относительно прямой $2x + y - 1 = 0$.

106. Из пучка прямых $\alpha(2x - y + 2) + \beta(3x + y + 1) = 0$ выбрать прямую проходящую через точку $M(3; -1)$.

107. Написать уравнение пучка прямых с центром пучка в точке $M(3; -2)$.

108. Найти уравнение прямой проходящей через точку $M(-3; 2)$ под углом 30° к оси ординат.

109. Найти уравнение прямой проходящей через точку $M(-3; 4)$ параллельно прямой $x - 2y + 1 = 0$.

110. Найти уравнение отраженного от прямой $L: 2x - 3y - 8 = 0$ луча, лежащего на прямой $x + 2y + 3 = 0$.

111. Определите взаимное расположение прямых

$$3x - 7y - 2 = 0 \text{ и } \frac{x-13}{5} = \frac{y-1}{-3}.$$

112. Найдите угол между прямыми $y = 3x + 21$ и $y = -2x - 11$.

113. Найти уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми:

а) $x - 3y - 9 = 0$, $3x - y - 11 = 0$; б) $y = x$, $y = \frac{x}{3}$.

114. Пересекает ли прямая $13x - 12y + 11 = 0$ отрезок AB , если: а) $A(-9; -7)$, $B(7; -9)$; б) $A(-9; -7)$, $B(-5; -3)$?

115. Определить взаимное расположение точек $A\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$ и $B\left(-\frac{13}{3}; \frac{19}{7}\right)$ относительно прямых $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ и $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$.

116. Определите расположение точки $A\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$ относительно прямых $x - y - 1 = 0$ и $2x - 2y + 29 = 0$.

117. Лежит ли начало координат внутри треугольника с вершинами в точках с координатами:

$$(-8; -4), \left(13; \frac{20}{3}\right), \left(13; \frac{13}{2}\right)?$$

118. Лежит ли точка $A(17; 7; -1)$ на плоскости $3x - 7y - 2z + 5 = 0$?

119. Построить в системе координат $Oxyz$ плоскости:
а) $2x + y + 2z - 2 = 0$; б) $2x - y + 2z = 0$; в) $y - 2z = 0$;
г) $y - 2z = 2$; д) $y = 2$.

120. Определите вид уравнения плоскости и ее расположение в ПДСК $Oxyz$:

а) $2x + y + 2z - 2 = 0$; б) $2x - y + 2z = 0$; в) $y - 2z = 0$;
г) $2x - y = 0$; д) $x - z = 0$; е) $y - 2z = 2$; ё) $2x - y = 2$;
ж) $x - z = 2$; з) $y = 2$; и) $x = 4$; й) $z = 1$;
к) $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$; л) $\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} - 1 = 0$.

121. Для плоскости $x + 3y - 4z + 9 = 0$ найдите ее уравнение в отрезках и точки ее пересечения с координатными осями.

122. Напишите уравнение связки плоскостей с центром связки в точке $M(-3; 1; 12)$.

123. Найдите уравнение плоскости проходящей через точку $M(-1; 13; 52)$, если ее нормальный вектор имеет координаты $\vec{n} = (-1; 4; -1)$.

124. Определите взаимное расположение плоскостей:

а) $3x - 2y - 6z - 11 = 0$, $2x - 3y - 6z - 11 = 0$;
б) $3x - 2y - 4z - 11 = 0$, $6x - 4y - 8z - 11 = 0$.
в) $3x - 2y - 4z - 12 = 0$, $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} - \frac{z}{3} = 1$.

125. Определите взаимное расположение плоскостей:

а) $3x - 2y - 6z - 11 = 0$, $2x - 3y - 6z - 11 = 0$,
 $6x - 3y - 2z - 11 = 0$;
б) $3x - 2y - 6z - 11 = 0$, $2x - 3y - 6z - 11 = 0$,
 $x - 4y - 6z - 11 = 0$.
в) $3x - 2y - 6z - 11 = 0$, $2x - 3y - 6z - 11 = 0$,
 $10x - 5y + 6z - 11 = 0$.
г) $x + y + z - 1 = 0$, $2x - y + 3z - 2 = 0$, $3x - y + 4z + 1 = 0$.

126. Найдите уравнение плоскости, проходящую через точки $A(1; -2; 4)$, $B(-2; 1; -4)$, $C(4; 1; 2)$.

127. Найдите острый угол между плоскостями $x - y + z - 1 = 0$ и $2x - 3y - 6z + 5 = 0$.

128. Найдите нормированное уравнение плоскости $3x - 4y + 5z - 10 = 0$ и расстояние до нее от начала координат.

129. Найдите расстояние от точки $A(23; 12; 9)$ до плоскости $x - y + z - 10 = 0$.

130. Найдите расстояние между параллельными плоскостями $x - y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + 2z - 31 = 0$.

131. Дана треугольная пирамида $ABCD$, $A(1; -1; -1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(3; 3; -5)$, $D(7; -4; -3)$. Найти уравнение биссекторной плоскости двугранного угла пирамиды при ребре AD .

132. Пересекает ли плоскость $3x - 2y - 6z - 11 = 0$ отрезок AB , если:

а) $A(9; -7; 3)$, $B(7; -2; 5)$; б) $A(9; -7; 3)$, $B(6; -3; 2)$?

133. Определите взаимное расположение начала координат и точки $M(7; -7; -3)$ относительно плоскостей $x - y + z - 1 = 0$ и $2x - 3y - 6z + 5 = 0$.

134. Определите взаимное расположение начала координат и точки $M(7; -7; -3)$ относительно плоскостей $x - y + z - 1 = 0$ и $x - y + z + 12 = 0$.

135. Дана треугольная пирамида $ABCD$, $A(1; -1; -1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(3; 3; -5)$, $D(7; -4; -3)$. Определите, является ли точка $M(2; 2; -2)$ внутренней точкой пирамиды $ABCD$?

136. Написать каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -4; 0)$, если ее направляющий вектор имеет координаты $\vec{s} = (3, -2, 0)$.

137. Какие из следующих точек принадлежат прямой

$$\begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = 5 \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}: \quad A(3; 0; 1), B(-3; 5; 0), C(4; 5; 2)?$$

138. Напишите канонические уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника с вершинами

$$A(-1; 2; -1), B(3; -2; 1), C(0; 0; 5).$$

139. Найдите параметрическое уравнение прямой

$$\frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-2}{2}.$$

140. Найдите каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = 5 \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

141. Найдите уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой

$$\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

142. Найдите угол между прямыми:

а) $\frac{x+13}{0} = \frac{y+1}{3} = -\frac{z}{2}$ и $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 5 \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R};$

б) $\begin{cases} 2x + 3y + z - 21 = 0 \\ x + 2y - 3z + 12 = 0 \end{cases}$ и $\frac{x-13}{5} = \frac{y+1}{3} = -z.$

143. Определите взаимное расположение прямых

$$\frac{x+13}{4} = \frac{y+1}{3} = -\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-2}{2}.$$

144. Докажите, что прямые

$$\frac{x+13}{4} = \frac{y+1}{3} = -\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-2}{2}$$

пересекаются и найдите координаты их точки пересечения.

145. Найдите расстояние между прямыми

$$\frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{2} = -y-1 = \frac{z+2}{2}.$$

146. Найдите уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми: $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z+1}{17}$, $\frac{x}{-6} = \frac{y-1}{10} = \frac{z+1}{15}$.

147. Найдите расстояние между прямыми

$$\frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-2}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{2} = -y-1 = \frac{z+2}{2}.$$

148. Найдите каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 21 = 0 \\ x + 2y - 3z + 12 = 0 \end{cases}.$$

149. Задайте прямую $\frac{x+3}{2} = -y-1 = \frac{z+2}{2}$ пересечением плоскостей.

150. Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ параллельно прямой

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}.$$

151. Определите взаимное расположение прямой $\frac{x-7}{2} = -\frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ и плоскости $3x-2y-6z-11=0$.

152. Докажите, что прямая $\frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-2}{2}$ пересекает плоскость $3x-2y+6z-11=0$ и найдите координаты точки их пересечения.

153. Найдите угол между прямой $\frac{x-3}{2} = -y+1 = \frac{z-2}{2}$ и плоскостью $3x-2y+6z-11=0$.

154. Найти проекцию точки $P(-2; -7; 1)$ на плоскость $3x-2y+4z+14=0$.

155. Найти точку симметричную точке $P(-2; -7; 1)$ относительно плоскости $3x-2y+4z+14=0$.

156. Докажите, что прямая $\frac{x-3}{2} = -\frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$ параллельна плоскости $3x-2y-6z-11=0$ и найдите расстояние между ними.

157. Найдите уравнение пучка плоскостей с осью пучка

$$\frac{x+3}{2} = y-1 = \frac{z+2}{2}.$$

158. Определите взаимное расположение прямых:

а) $\frac{x+13}{4} = \frac{y+1}{3} = -\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 2x+3y+z-21=0 \\ x+2y-3z+12=0 \end{cases};$

б) $\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+3y+z-21=0 \\ x+2y-3z+12=0 \end{cases}.$

159. Докажите, что прямые пересекаются и найдите координаты их точки пересечения:

а) $\frac{x+13}{4} = -\frac{y+1}{3} = -\frac{z+2}{3}$ и $\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases};$

б) $\begin{cases} 3x+4y+43=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases}.$

160. Найдите расстояние от точки $A(3; 1; 2)$ до прямой $\frac{x+3}{2} = -y-1 = \frac{z+2}{2}$.

161. Найдите проекцию точки $A(3; 1; 2)$ на прямую $\frac{x+3}{2} = -y-1 = \frac{z+2}{2}$.

162. Найдите точку симметричную точке $A(3; 1; 2)$ относительно прямой $\frac{x+3}{2} = -y-1 = \frac{z+2}{2}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1985. – 320 с.
3. Волков В.А. Аналитическая геометрия и векторная алгебра. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – 192 с.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972. – 272 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2002. – 240 с.
6. Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В. Геометрия: учебник для вузов. – СПб.: издательство Лань, 2003. – 416 с.
7. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Минск.: Вышэйшая школа, 1968. – 504 с.
8. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – 288 с.
9. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Физматгиз, 1960. – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Список задач	4
Глава 16. Прямая на плоскости	9
Глава 17. Плоскость	69
Глава 18. Прямая в пространстве	104
Глава 19. Прямая в пространстве и плоскость	120
Упражнения	148
Список рекомендуемой литературы	157

Головизин Вячеслав Владимирович

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».
Часть 2. Основные задачи аналитической
геометрии на прямую и плоскость

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор В.В.Головизин
Верстка В.И. Родионов

Пописано в печать __.12.09. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. __. Уч.-изд. л. __.
Тираж 50 экз. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел УдГУ
Типография ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4