

Федеральное агентство по образованию РФ
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

В.В. Головизин

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».
Часть 5. Арифметическое векторное пространство
и преобразования систем координат

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2009

УДК 512.64
ББК 22.151
Г 60

Рецензенты: **Т.М. Банникова**
к.ф.-м.н. **В.И. Родионов**

Головизин В.В.

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».
Г60 Часть 5: Арифметическое векторное пространство и
преобразования систем координат: учеб.-метод. по-
сobie. Ижевск, 2009. 92 с.

Пятая часть учебно-методического пособия предназна-
чена для студентов, изучающих линейную алгебру как в
рамках отдельного курса, так и любого другого курса выс-
шей математики. Пособие может быть полезно преподава-
телям при проведении практических занятий и при подго-
товке индивидуальных заданий студентам.

Пособие содержит решения задач, которые тематически
разбиты на 2 главы, и имеют сквозную нумерацию. Номера
упражнений, помещенных в конце пособия, совпадают но-
мерами соответствующих задач.

УДК 512.64
ББК 22.151

© Головизин В.В., 2009

Предисловие

В пятой части учебно-методического пособия собраны задачи, связанные с основными понятиями линейного (векторного) пространства, такими как линейная зависимость и независимость, базис, линейная оболочка системы векторов, матрица перехода от одного базиса к другому. Отдельная глава посвящена преобразованиям систем координат. Задачи, которые решаются в этой главе, служат примерами применения теории линейных пространств в обычных евклидовых точечно-векторных пространствах размерности два или три. Эти примеры должны, по замыслу автора, послужить базой при изучении в дальнейшем евклидовых пространств произвольных размерностей.

СПИСОК ЗАДАЧ

Глава 27. Арифметическое пространство столбцов

227. Определить, линейно зависима или независима система из двух столбцов.
228. Определить, линейно зависима или независима данная система столбцов.
229. Определить, линейно зависима или независима система из n столбцов высоты n .
230. Разложить данный столбец по данному базису.
231. Найти нетривиальное представление нуля линейно зависимой системой столбцов.
232. В данной линейно зависимой системе столбцов найти вектор, линейно выражающийся через остальные векторы этой системы и найти это выражение.
233. Найти ранг системы столбцов и максимальную линейно независимую подсистему.
234. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов.
235. Разложить каждый столбец системы векторов по базису линейной оболочки данной системы векторов.
236. Найти размерность и базис суммы подпространств.
237. Найти размерность и базис пересечения двух подпространств.
238. Найти базисы подпространств, содержащие базис их пересечения.
239. Дополнить линейно независимую систему столбцов до базиса пространства столбцов данной высоты.

Глава 28. Матрица перехода и преобразования системы координат на плоскости и в пространстве

240. Найти матрицу перехода от одного базиса к другому.
241. Найти координаты вектора в новом базисе, если известны его координаты в старом базисе и матрица перехода.
242. Найти формулы преобразования координат при повороте ПДСК на плоскости на некоторый угол.
243. Найти формулы преобразования координат при параллельном переносе ПДСК.
244. Найти формулы преобразования координат при параллельном переносе ПДСК на плоскости и последующего поворота на некоторый угол.
245. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК на плоскости относительно оси абсцисс.
246. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК в пространстве относительно начала координат.
247. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК на плоскости относительно прямой, проходящей через начало координат.
248. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК относительно одной из координатных плоскостей.
249. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК относительно плоскости, проходящей через одну из координатных осей.
250. Приведение кривой 2-го порядка к каноническому виду.

Глава 27. Арифметическое пространство столбцов

Определение. Пусть V – произвольное непустое множество, элементы которого мы будем называть векторами, K – поле, элементы которого мы будем называть скалярами. Пусть на множестве V определена внутренняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем обозначать знаком $+$ и называть сложением векторов. Пусть также на множестве V определена внешняя бинарная алгебраическая операция, которую мы будем называть умножением вектора на скаляр и обозначать знаком умножения.

Пусть, другими словами, определены два отображения:

$$V \times V \rightarrow V, \quad \forall x, y \in V, \quad (x, y) \rightarrow x + y \in V;$$

$$K \times V \rightarrow V, \quad \forall \lambda \in K, \forall x \in V, \quad (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x \in V.$$

Множество V вместе с этими двумя алгебраическими операциями называется векторным пространством над полем K , если выполняются следующие аксиомы.

1. Сложение ассоциативно, т.е.

$$\forall x, y, z \in V, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

2. Существует нулевой вектор, т.е.

$$\exists 0 \in V: \quad \forall x \in V, \quad x + 0 = 0 + x = x.$$

3. Для любого вектора существует противоположный ему:

$$\forall x \in V, \quad \exists y \in V: \quad x + y = y + x = 0.$$

Вектор y , противоположный вектору x , обычно обозначается $-x$, так что

$$\forall x \in V, \quad \exists (-x) \in V: \quad x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

4. Сложение коммутативно, т.е. $\forall x, y \in V, \quad x + y = y + x$.

5. Умножение вектора на скаляр подчиняется закону ассоциативности, т.е.

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in V, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$$

где произведение $\alpha\beta$ есть произведение скаляров, определенное в поле K .

6. $\forall x \in V, 1 \cdot x = x$, где 1 – единица поля K .

7. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения векторов:

$$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

8. Умножение вектора на скаляр дистрибутивно относительно сложения скаляров:

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$$

Определение. Векторное пространство V над полем вещественных чисел R называется вещественным векторным пространством.

Теорема. (Простейшие свойства векторных пространств.)

1). $\forall \lambda \in K, \forall x \in V, \lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ или $x = 0$.

2). $\forall x \in V, (-1)x = -x$, где $-1 \in K$.

Арифметическое векторное пространство столбцов.

Пусть n – произвольное натуральное число. Обозначим через K^n множество всех столбцов высоты n над полем K . Множество K^n является векторным пространством над полем K относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на скаляр, и называется арифметическим векторным пространством столбцов высоты n над полем K .

В частности, если вместо произвольного поля K взять поле действительных чисел R , то векторное пространство R^n называется вещественным арифметическим векторным пространством столбцов высоты n .

Аналогично, векторным пространством является и множество строк длины n над полем K . Оно обозначается также через K^n и называется арифметическим векторным пространством строк длины n над полем K .

Системы векторов векторного пространства.

Определение. Системой векторов векторного пространства называют любое конечное непустое множество векторов этого пространства.

Обозначение: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Определение. Выражение

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ – скаляры поля K , $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ – векторы векторного пространства V , называется линейной комбинацией векторов системы $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то такую линейную комбинацию называют тривиальной, в противном случае – нетривиальной.

Пример. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ система из трех векторов векторного пространства V . Тогда

$$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

– тривиальная линейная комбинация данной системы векторов;

$$-e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

– нетривиальная линейная комбинация данной системы векторов, т.к. первый коэффициент этой комбинации

$$\alpha_1 = -1 \neq 0.$$

Определение. Если какой-либо вектор x векторного пространства V может быть представлен в виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

то говорят, что вектор x линейно выражается через векторы системы $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. В этом случае говорят также, что система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно представляет вектор x .

Замечание. В этом и предыдущем определении слово «линейно» часто пропускают и говорят, что система представляет вектор или вектор выражается через векторы системы и т.п.

Пример. Пусть $\left\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ – система из двух столбцов арифметического вещественного векторного пространства столбцов высоты 2. Тогда столбец $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}$ ли-

нейно выражается через столбцы системы или данная система столбцов линейно представляет столбец x . Действительно,

$$x = 2e_1 - 3e_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ -4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов векторного пространства.

Так как произведение нулевого скаляра на любой вектор есть нулевой вектор и сумма нулевых векторов равна нулевому вектору, то для любой системы векторов выполняется равенство

$$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n = 0.$$

Отсюда следует, что нулевой вектор линейно выражается через векторы любой системы векторов или, говоря иначе, любая система векторов линейно представляет нулевой вектор.

Пример. Пусть $\left\{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. В этом случае нуле-

вой столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно линейно выразить через столбцы системы не одним способом:

$$0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \cdot e_1 + \alpha \cdot e_2 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы различать эти способы линейного представления нулевого вектора вводят следующее определение.

Определение. Если выполняется равенство

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$$

и при этом все коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то говорят, что система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ представляет нулевой вектор тривиально. Если же в этом равенстве хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не равен нулю, тогда говорят, что система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ представляет нулевой вектор нетривиально.

Из последнего примера мы видим, что существуют системы векторов, которые могут представлять нулевой вектор нетривиально. Из следующего примера мы увидим, что существуют системы векторов, которые не могут представлять нулевой вектор нетривиально.

Пример. Пусть $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ – система двух столбцов из векторного пространства R^2 . Рассмотрим равенство:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta \in R$ неизвестные пока коэффициенты. Используя правила умножения столбца на скаляр (число) и сложения столбцов, получаем равенство: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Из определения равенства матриц следует, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Таким образом, данная система не может представлять нулевой столбец нетривиально.

Из приведенных примеров следует, что существует два вида систем векторов. Одни системы представляют нулевой вектор нетривиально, а другие нет. Отметим еще раз, что любая система векторов представляет нулевой вектор тривиально.

Определение. Система векторов векторного пространства, которая представляет нулевой вектор **ТОЛЬКО** тривиально, называется линейно независимой.

Определение. Система векторов векторного пространства, которая представляет нулевой вектор нетривиально, называется линейно зависимой.

Это определение можно дать в более развернутом виде.

Определение. Система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ векторного пространства V называется линейно зависимой, если найдется такой ненулевой набор скаляров поля K

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0),$$

что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$.

Замечание. Любая система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ может представлять нулевой вектор тривиально:

$$0 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n.$$

Но этого недостаточно, чтобы выяснить линейно зависимость или же линейно независимость данной системы векторов. Из определения следует, что линейно независимая система векторов не может представлять нулевой вектор нетривиально, а только тривиально. Поэтому для того, чтобы убедиться в линейной независимости данной системы векторов, нужно рассмотреть представление нуля произвольной линейной комбинацией этой системы векторов:

$$0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Если это равенство невозможно при условии, чтобы хотя бы один коэффициент этой линейной комбинации был ненулевой, тогда эта система является по определению линейно независимой.

Так в предыдущих примерах система столбцов

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

является линейно независимой, а система столбцов

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

является линейно зависимой.

Аналогично доказывается линейная независимость системы столбцов

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

из пространства K^n , где K – произвольное поле, n – произвольное натуральное число.

Следующие теоремы дают несколько критериев линейной зависимости и соответственно линейной независимости систем векторов.

Теорема. (Необходимое и достаточное условие линейной зависимости системы векторов.) Система векторов векторного пространства является линейно зависимой тогда и только тогда, когда один из векторов системы линейно выражается через другие векторы этой системы.

Следствие. 1. Система векторов векторного пространства является линейно независимой тогда и только тогда, когда ни один из векторов системы линейно не выражается через другие векторы этой системы.

2. Система векторов, содержащая нулевой вектор или два равных вектора, является линейно зависимой.

Теорема. (О линейной зависимости системы из одного вектора.) Система, состоящая из одного вектора, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Следствие. Система, состоящая из одного вектора, является линейно независимой тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.

Базис векторного пространства.

Определение. Базисом векторного пространства V над полем K называется упорядоченная система векторов пространства V представляющая единственным способом любой его вектор.

Другими словами, упорядоченная система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ векторного пространства V над полем K называется его базисом, если для любого вектора $x \in V$ существует единственный упорядоченный набор скаляров $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ поля K , такой, что верно равенство

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Определение. Выражение

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$$

называется разложением вектора x по базису $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, а упорядоченный набор скаляров $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ называется координатами вектора x относительно базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Определение. Размерностью векторного пространства V называется число векторов в его базисе и обозначается $\dim V$.

Определение. Система векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ векторного пространства V над полем K называется порождающей системой, если она представляет любой его вектор, т.е.

$$\forall x \in V, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K: x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m.$$

Заметим, что в отличие от базиса от порождающей системы не требуется единственность представления вектора данной системой векторов.

Теорема. Для того чтобы система векторов векторного пространства была базисом, необходимо и достаточно, чтобы она была порождающей и линейно независимой.

Пример. Система столбцов $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ является базисом

арифметического пространства K^2 столбцов высоты 2 над

любым полем K . Этот базис называется каноническим или естественным базисом. Для любого столбца $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ высоты 2 имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Единственность такого разложения очевидна. Отсюда следует, что $\dim K^2 = 2$. Аналогичный естественный базис существует для пространства столбцов любой конечной высоты n и $\dim K^n = n$. Аналогичные базисы имеются и в пространствах строк длины n .

Заметим, что именно поэтому элементы столбцов и строк называются координатами.

Векторные подпространства.

Определение. Любое подмножество $W \subset V$ векторного пространства V над полем K , которое само является векторным пространством над полем K относительно тех же самых операций сложения векторов и умножения вектора на скаляр, называется векторным подпространством пространства V .

Теорема. Подмножество $W \subset V$ векторного пространства V над полем K является векторным подпространством векторного пространства V тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

- 1) $\forall x, y \in W : x + y \in W$; 2) $\forall x \in W, \forall \lambda \in K : \lambda x \in W$.

Первое условие называется замкнутостью подмножества W относительно сложения векторов, второе – замкнутостью подмножества W относительно умножения вектора на скаляр.

Теорема. Пусть $L \subset V$ – подпространство пространства V . Тогда, 1) $\dim L \leq \dim V$; 2) если $\dim L = \dim V$, то $L = V$.

Определение. Суммой подпространств M и L векторного пространства V называется множество

$$M + L \doteq \{x + y \mid x \in M, y \in L\}.$$

Определение. Пересечением подпространств M и L векторного пространства V называется их пересечение как множеств.

Теорема. (О размерности суммы и пересечения подпространств.) Сумма $M + L$ и пересечение $M \cap L$ подпространств M и L векторного пространства V являются подпространствами векторного пространства V , причем $\dim(M + L) = \dim M + \dim L - \dim(M \cap L)$.

Подсистемы системы векторов векторного пространства.

Определение. Любое подмножество данной системы векторов называется ее подсистемой.

Определение. Подсистема данной системы векторов называется максимальной линейно независимой, если она линейно независима, но перестает быть таковой при добавлении к ней любого вектора из данной системы векторов.

Например, пусть $\{e_1, \dots, e_m\}$ подсистема системы $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$. Если подсистема $\{e_1, \dots, e_m\}$ линейно независима, а подсистема $\{e_1, \dots, e_m, e_j\}$ линейно зависима для любых $j = 1, 2, \dots, n$, то по определению подсистема $\{e_1, \dots, e_m\}$ является максимальной линейно независимой подсистемой данной системы векторов.

Определение. Число векторов в максимальной линейно независимой подсистеме данной системы векторов называется рангом данной системы векторов.

Обозначение: $\text{rang}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Линейная оболочка системы векторов.

Определение. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – система векторов векторного пространства V над полем K . Множество всех линейных комбинаций векторов данной системы называется линейной оболочкой натянутой на векторы данной системы и обозначается:

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle \doteq \{ \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K \}.$$

Теорема. Линейная оболочка системы векторов векторного пространства V является его подпространством.

Теорема. (О размерности линейной оболочки.) Максимальная линейно независимая подсистема системы векторов является базисом линейной оболочки натянутой на данную систему векторов и ее размерность равна рангу данной системы векторов:

$$\dim \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \text{rang}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

Линейная оболочка системы столбцов.

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен рангу системы ее столбцов и равен рангу системы ее строк.

Следствие. Размерность линейной оболочки системы столбцов равна рангу матрицы, столбцами которой являются столбцы данной системы.

Следствие. Базис линейной оболочки системы столбцов образуют те столбцы, на которых можно построить базисный минор матрицы, столбцами которой являются столбцы данной системы.

Задача 227. Определить, линейно зависима или независима система из двух столбцов.

Определение. Два ненулевых столбца

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

одинаковой высоты над одним и тем же полем K называются пропорциональными, если существует скаляр $\lambda \in K$ такой, что $y_1 = \lambda x_1, y_2 = \lambda x_2, \dots, y_n = \lambda x_n$, или, в матричной форме, $Y = \lambda X$.

Теорема. Система из двух столбцов линейно зависима тогда и только тогда, когда они являются пропорциональными.

Пример. Определить, линейно зависима или нет система:

$$\text{а) } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}; \quad \text{б) } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 21 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. а) Столбцы не пропорциональные. Действительно, $\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{2}{-4}$.

б) Столбцы пропорциональные: $\frac{-14}{2} = \frac{21}{-3} = \frac{-7}{1} = -7$,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}(-7) = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ 21 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) система столбцов линейно независимая;
б) система столбцов линейно зависимая.

Замечание. Если элементы столбцов называть координатами, то теорему можно сформулировать так: два столбца линейно зависимы тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

Задача 228. Определить, линейно зависима или независима данная система столбцов.

Решение. Пусть дана система столбцов $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ из пространства столбцов K^m . Составим произвольную линейную комбинацию столбцов данной системы и приравняем ее нулевому столбцу высоты m :

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_m u_m = 0.$$

Получили векторную форму записи однородной системы линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$. Вопрос заключается в следующем: имеет ли данная система нетривиальное решение? Если да, то данная система столбцов представляет нулевой столбец нетривиально и, следовательно, является линейно зависимой. Если нет, то – линейно независимой.

Ответ на этот вопрос можно получить двумя способами.

1-й способ. Решаем полученную систему, находим неизвестные и делаем вывод о линейной зависимости или независимости данной системы.

Пример. Определить, линейно зависима или независима система столбцов:

$$\text{а) } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \text{б) } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. а) Составляем линейную комбинацию системы столбцов:

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

или $x_1 = x_2 = x_3$.

Можно положить, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ и мы имеем нетривиальное решение системы. Подставляя это решение в линейную комбинацию, мы получаем нетривиальную линейную комбинацию столбцов системы равную нулевому столбцу:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

отсюда следует, что данная система столбцов является линейно зависимой.

$$\text{б) } x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x_1 и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ -x_3 = -3x_3 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и других решений нет.

Вывод: данная система столбцов линейно независима.

Ответ: а) линейно зависима; б) линейно независима.

Замечание. При решении примера в обоих случаях получалась квадратная система и можно решать этот пример методом задачи 229.

2-й способ. Однако, в общем случае, удобнее пользоваться следующим критерием.

Критерий линейной зависимости (независимости) системы столбцов.

Теорема. Система векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда $\text{rang}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = m$.

Справедливость этой теоремы сразу же следует из определения ранга системы векторов.

Для случая системы столбцов удобнее пользоваться следствием, вытекающим из теоремы о ранге матрицы.

Следствие. Для того чтобы система столбцов была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из данных столбцов, был равен числу этих столбцов.

Пример. Определить, линейно зависима или независима система столбцов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. Рассмотрим матрицу, столбцами которой являются столбцы данной системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

и найдем ее ранг. Не обязательно пользоваться методом Гаусса приведения матрицы к ступенчатому виду. Прибавим 3-й столбец к первому:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим минор 3-го порядка, расположенный в первых 3-х строках матрицы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Вывод: $\text{rang } A = 3$, следовательно столбцы матрицы A образуют линейно независимую систему.

Ответ: линейно независимая.

Задача 229. Определить, линейно зависима или независима система из n столбцов высоты n .

Решение задачи вытекает из следующей теоремы и ее следствия.

Теорема. Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда система его столбцов (строк) линейно зависима.

Следствие. Определитель не равен нулю тогда и только тогда, когда система его столбцов (строк) линейно независима.

Пример. Определить, линейно зависима или независима система столбцов:

$$\text{а) } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \text{б) } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. а) Составим определитель, столбцами которого являются столбцы данной системы:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем определитель. Прибавим 1-й столбец к 3-му и разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вывод: система столбцов линейно зависима.

б) Решаем аналогично:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

следовательно, система столбцов линейно независима.

Ответ: а) линейно зависима; б) линейно независима.

Задача 230. Разложить данный столбец по данному базису.

Решение. Пусть дан какой-нибудь базис $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ пространства столбцов K^n над полем K и какой-нибудь столбец B . Напишем разложение столбца B по данному базису с неопределенными пока коэффициентами:

$$B = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n.$$

Мы имеем векторную запись системы из n линейных уравнений с n неизвестными и с матрицей коэффициентов

$$A = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

столбцами которой являются столбцы базиса.

В матричной форме эта система имеет вид $AX = B$. Так как базис является линейно независимой системой, то есть столбцы матрицы являются линейно независимыми, то определитель матрицы A отличен от нуля. Следовательно, данная система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера или методом Гаусса. Это решение, т.е. упорядоченный набор значений неизвестных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и будет искомыми координатами столбца B относительно данного базиса.

Пример. Разложить столбец $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ по базису

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. Пишем разложение вектора В по данному базису:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если расписать это равенство по координатам, то получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_2 + x_3 = 9 \end{cases}.$$

Решим эту систему методом Гаусса. Выписываем расширенную матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду. Прибавим 1-ю строку ко 2-й, а затем, полученную 2-ю строку прибавим к 3-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right).$$

Прибавим 3-ю строку к 1-й:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right).$$

По полученной матрице пишем соответствующую систему

линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 11 \end{cases}.$$

Возвращаемся к разложению столбца В по базису и подставляем найденные значения коэффициентов разложения x_1, x_2, x_3 .

Ответ:
$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 231. Найти нетривиальное представление нуля линейно зависимой системой столбцов.

Решение. Решаем задачу 1-м из двух способов, рассмотренных в задаче 228.

Составляем линейную комбинацию столбцов данной системы с неизвестными коэффициентами и приравниваем ее к нулю. Так как система столбцов линейно зависимая, то существует нетривиальное представление нуля, а значит соответствующая система уравнений имеет нетривиальное решение. Решаем полученную систему уравнений и находим любое нетривиальное ее решение. См. пример задачи 228. См. также следующий пример.

Пример. Найти нетривиальное представление нуля для системы столбцов

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. Составляем линейную комбинацию столбцов данной системы с неизвестными коэффициентами и приравниваем ее к нулю:

$$x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Прибавим ко 2-му уравнению первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 12x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}.$$

Переносим переменную x_3 в правую часть уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -5x_3 \\ 3x_2 = -2x_3 \end{cases}.$$

Полагаем $x_3 = 3$ и находим $x_2 = -2$, $x_1 = 9$. Подставляем найденные коэффициенты в линейную комбинацию системы столбцов.

$$\text{Ответ: } 9 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 232. В данной линейно зависимой системе столбцов найти вектор, линейно выражающийся через остальные векторы этой системы и найти это выражение.

Решение. Сначала, как в предыдущей задаче, находим нетривиальную линейную комбинацию столбцов данной системы $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$: $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_m u_m = 0$. Здесь $c_1, c_2, \dots, c_m$ — конкретные скаляры, среди которых есть неравные нулю. Пусть, например, $c_m \neq 0$. Тогда столбец u_m линейно выражается через оставшиеся:

$$u_m = -\frac{c_1}{c_m} u_1 - \frac{c_2}{c_m} u_2 - \dots - \frac{c_{m-1}}{c_m} u_{m-1}.$$

Пример. Один из столбцов системы линейно выразить через другие:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. Составляем линейную комбинацию данных столбцов и приравниваем ее к нулю:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Записываем систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

и решаем ее, например, методом Гаусса.

Выписываем матрицу системы и приводим ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Первую строку прибавляем ко 2-й, а к 3-й строке прибавляем 1-ю, умноженную на (-2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

По последней матрице записываем систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_4 = 4$, тогда $x_3 = 3$, $x_2 = -1$, $x_1 = -2$. Получаем нетривиальное представление нуля данной системой столбцов:

$$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства легко выразить 2-й столбец.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Задача 233. Найти ранг системы столбцов и максимальную линейно независимую подсистему.

Решение. Ранг системы столбцов равен рангу матрицы, столбцами которой служат столбцы данной системы:

$$\text{rang}\{A_1, A_2, \dots, A_m\} = \text{rang}(A_1, A_2, \dots, A_m).$$

Приводим матрицу $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк и находим базисный минор. Столбцы матрицы A на которых построен найденный базисный минор и будут искомой максимальной линейно независимой подсистемой данной системы столбцов, а их количество есть искомый ранг системы столбцов.

Пример. Найти ранг и максимальную линейно независимую подсистему системы столбцов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Решение. Выписываем матрицу, столбцами которой являются столбцы данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ко второй строке прибавляем первую, умноженную на 2, и к третьей строке прибавляем 1-ю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы и дальше работать с целыми числами, умножим 3-ю строку на (-2) и прибавим ко 2-й:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножим 2-ю строку на (-2) и прибавим к 3-й:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписываем базисный минор полученной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

Следовательно ранг ступенчатой матрицы равен 3 и равен рангу эквивалентной ей матрицы A , т.е. $\text{rang } A = 3$.

Базисный минор построен на 1-м, 2-м и 4-м столбцах и т.к. при приведении матрицы A к ступенчатому виду мы не переставляли столбцы, то базисный минор матрицы A также построен на этих же столбцах. Следовательно, эти столбцы образуют искомую максимальную линейно независимую подсистему.

Ответ: 1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

– максимальная линейно независимая подсистема;

$$2) \operatorname{rang} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = 3.$$

Задача 234. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов.

Решение. Это просто другая формулировка предыдущей задачи. Пусть дана система столбцов $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, на которую натянута линейная оболочка:

$$L = \langle A_1, A_2, \dots, A_m \rangle.$$

Размерность L совпадает с рангом этой системы:

$$\dim L = \operatorname{rang} \{A_1, A_2, \dots, A_m\}.$$

Базисом L может служить максимальная линейно независимая подсистема данной системы векторов.

Так, в примере предыдущей задачи,

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

– линейная оболочка натянутая на столбцы системы,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

– максимальная линейно независимая подсистема является базисом L , $\dim L = 3$.

Задача 235. Разложить каждый столбец системы векторов по базису линейной оболочки данной системы векторов.

Решение. Пусть дана система столбцов $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ высоты n и $L = \langle A_1, A_2, \dots, A_m \rangle$ – линейная оболочка, натянутая на столбцы этой системы.

Пишем ее линейное представление нуля:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m = 0.$$

Составляем матрицу $A = (A_1, A_2, \dots, A_m)$ и решаем систему уравнений $AX = 0$ с m неизвестными. Приводим матрицу A к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, находим ее базисный минор и общее решение системы $AX = 0$. Пусть для простоты записи, базисный минор r -го порядка построен на первых r столбцах. Тогда, переменные $x_1, x_2, \dots, x_r$ будут зависимыми переменными, а переменные $x_{r+1}, \dots, x_m$ будут свободными. Решая систему, мы полагаем $x_{r+1} = c_1, \dots, x_m = c_{m-r}$, $c_1, \dots, c_{m-r} \in \mathbb{R}$, и, тогда,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{m-r} \end{pmatrix} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_{m-r} X_{m-r},$$

а линейное представление данной системой столбцов нулевого столбца имеет вид:

$$x_1 A_1 + \dots + x_r A_r + c_1 A_{r+1} + \dots + c_{m-r} A_m = 0.$$

Так как по нашему предположению, базисный минор построен на первых r столбцах, то базисом линейной оболочки L будут первые r столбцов:

$$\{A_1, A_2, \dots, A_r\}.$$

Полагая поочередно, $\forall j = 1, \dots, m-r$, $c_j = 1$ и $\forall k \neq j, c_k = 0$, мы находим частное решение $X = X_j$, откуда получаем:

$$x_1 A_1 + \dots + x_r A_r + A_{r+j} = 0,$$

$$A_{r+j} = -x_1 A_1 - \dots - x_r A_r$$

– требуемое разложение столбца A_{r+j} по базису линейной оболочки L . Разложение базисных векторов $A_i, i=1, \dots, r$ по базису L очевидно.

Пример. Разложить каждый столбец системы

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

по базису линейной оболочки, натянутой на столбцы этой системы.

Решение. Записываем линейную комбинацию столбцов этой системы и приравниваем ее к нулевому столбцу такой же высоты:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это векторная запись системы трех линейных уравнений с пятью неизвестными. Найдем ее общее решение.

Обозначим для удобства записи столбцы данной системы буквами: $A_1, A_2, \dots, A_5$.

1) Выписываем матрицу $A = (A_1, A_2, \dots, A_5)$ системы и приводим ее к ступенчатому виду. Это было сделано в задаче 232:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пишем систему линейных уравнений с полученной ступенчатой матрицей ее коэффициентов:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Ранг матрицы равен 3, в качестве базисного минора удобнее взять минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

построенный на 1-м, 2-м и 5-м столбцах. Значит, $\{A_1, A_2, A_5\}$ – базис линейной оболочки, натянутой на столбцы системы. Объявляем переменные x_1, x_2, x_5 зависимыми переменными, x_3, x_4 свободными. Переносим свободные переменные в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_5 = x_3 + 3x_4 \\ x_2 + x_5 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 8x_4 \end{cases}$$

Чтобы остаться в области целых чисел, полагаем: $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Подставляем в систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_5 = \alpha + 3\beta \\ x_2 + x_5 = -\alpha - 2\beta \\ x_5 = 8\beta \end{cases}$$

Находим зависимые переменные:

$$x_2 = -8\beta - \alpha - 2\beta = -\alpha - 10\beta,$$

$$x_1 = -2(-\alpha - 10\beta) - 4(8\beta) + \alpha + 3\beta = 3\alpha - 9\beta.$$

Записываем общее решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} 3\alpha - 9\beta \\ -\alpha - 10\beta \\ \alpha \\ \beta \\ 8\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Пусть, $\alpha = 1, \beta = 0$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем найденные значения переменных в линейную комбинацию столбцов: $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 + x_5 A_5 = 0$.

Получаем, $3A_1 - A_2 + A_3 = 0$, $A_3 = -3A_1 + A_2 + 0 \cdot A_5$ – разложение 3-го столбца по базису линейной оболочки. Подставляем в общее решение $\alpha = 0, \beta = 1$. Находим:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

откуда $-9A_1 - 10A_2 + A_4 + 8A_5 = 0$. Получаем разложение 4-го столбца по базису линейной оболочки: $A_4 = 9A_1 + 10A_2 - 8A_5$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} A_1 = A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_5, & A_2 = 0 \cdot A_1 + A_2 + 0 \cdot A_5, \\ A_3 = -3A_1 + A_2 + 0 \cdot A_5, & A_4 = 9A_1 + 10A_2 - 8A_5, \\ & A_5 = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + A_5 \end{cases}$$

Задача 236. Найти размерность и базис суммы подпространств.

Теорема. Пусть подпространства заданы в виде линейных оболочек, натянутых на системы столбцов:

$$M = \langle A_1, A_2, \dots, A_m \rangle, \quad L = \langle B_1, B_2, \dots, B_p \rangle$$

Тогда $M + L = \langle A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_p \rangle$.

Таким образом, что данная задача сводится к задаче 234.

Пример. Найти размерность подпространств и их суммы:

$M = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, $L = \langle B_1, B_2 \rangle$, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -18 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Заметим сразу же, что, так как столбцы имеют высоту 3, то они являются векторами пространства R^3 . А так как $\dim R^3 = 3$ и M, L и $M + L$ – подпространства пространства R^3 , то их размерность не больше 3.

Так как столбцы B_1 и B_2 не пропорциональные, то они линейно независимые и, следовательно, образуют базис подпространства L и $\dim L = 2$.

Найдем базис и размерность подпространств M и $M + L = \langle A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 \rangle$. Сделаем это одновременно.

Составим матрицу из данных столбцов, причем выписываем их в том порядке, в котором они заданы и отделяем столбцы подпространств M и L друг от друга вертикальной чертой:

$$(M | L) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 12 & -1 & 7 & -8 & 1 \\ 7 & -5 & -18 & -11 & -4 \\ -3 & 2 & 7 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Приводим эту матрицу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк. Умножим 3-ю строку на 2 и прибавим ко 2-й и умножим 3-ю строку на 4 и прибавим к 1-й:

$$(M|L) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 7 & 35 & 16 & 9 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 7 & 6 & 2 \end{array} \right).$$

Прибавим к 3-й строке 2-ю умноженную на 3 и затем переставим первую и вторую строки:

$$(M|L) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 7 & 35 & 16 & 9 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 9 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 35 & 16 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & 9 & 2 \end{array} \right).$$

Дальше можно не считать, так как определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 35 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

то его столбцы линейно зависимы, а значит и система столбцов $\{A_1, A_2, A_3\}$ линейно зависима. Но первые два столбца непропорциональные, поэтому они образуют базис подпространства M .

Определитель 3-го порядка, построенный на 1-м, 2-м и 5-м столбцах отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому система $\{A_1, A_2, B_2\}$ является линейно независимой и образует базис пространства $M+L$ и $\dim(M+L) = 3$.

Ответ: $\dim L = 2$, $\{B_1, B_2\}$ – базис L , $\dim M = 2$, $\{A_1, A_2\}$ – базис M , $\dim(M+L) = 3$, $\{A_1, A_2, B_2\}$ – базис $M+L$.

Замечание к примеру. Так как $M+L \subset R^3$ и $\dim(M+L) = 3$, т.е. $\dim(M+L) = \dim R^3$, то $M+L = R^3$.

Задача 237. Найти размерность и базис пересечения двух подпространств.

Теорема. (Принадлежит автору.) Пусть $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ и $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ – базисы подпространств M и L пространства K^n соответственно, $\dim(M+L) = s$, $\dim M \cap L = t = m + p - s$. Пусть

$$F = (X_1, \dots, X_t)$$

– матрица, столбцами которой являются столбцы фундаментальной системы решений $\{X_1, \dots, X_t\}$ однородной системы линейных уравнений

$$(A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_p)X = 0.$$

Тогда, базисом подпространства $M \cap L$ могут служить столбцы матрицы $(C_1, \dots, C_t)$:

$$(C_1, \dots, C_t) = (A_1, \dots, A_m) \bar{F} \quad \text{или} \quad (C_1, \dots, C_t) = (B_1, \dots, B_p) \bar{\bar{F}},$$

где $\bar{F}$ – матрица, состоящая из первых m строк матрицы F , $\bar{\bar{F}}$ – матрица, состоящая из последних p строк матрицы F ,

Доказательство. Любое векторное пространство (подпространство) есть, по определению базиса, линейная оболочка своих базисных векторов. Поэтому

$$M = \langle A_1, A_2, \dots, A_m \rangle, \quad L = \langle B_1, B_2, \dots, B_p \rangle.$$

По определению суммы подпространств

$$M+L = \langle A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_p \rangle.$$

По теореме о размерности суммы и пересечения подпространств, $\dim(M+L) = \dim M + \dim L - \dim M \cap L$, откуда

$$t = \dim M \cap L = \dim M + \dim L - \dim(M+L) = m + p - s.$$

Пусть, столбец $C \in M \cap L$, тогда его можно разложить как по базису M , так и по базису L и приравнять эти разложения:

$$C = x_1 A_1 + \dots + x_m A_m, \quad C = y_1 B_1 + \dots + y_p B_p,$$

$$x_1 A_1 + \dots + x_m A_m = y_1 B_1 + \dots + y_p B_p.$$

Отсюда: $x_1 A_1 + \dots + x_m A_m - y_1 B_1 - \dots - y_p B_p = 0$ – векторная запись однородной системы линейных уравнений. Для удобства обозначим: $x_{m+1} = -y_1, \dots, x_{m+p} = -y_p$. Тогда

$$C = -x_{m+1} B_1 - \dots - x_{m+p} B_p = -(B_1, \dots, B_p) \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{m+p} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В новых обозначениях имеем:

$$x_1 A_1 + \dots + x_m A_m + x_{m+1} B_1 + \dots + x_{m+p} B_p = 0$$

или в матричной форме:

$$(A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_p) X = 0. \quad (2)$$

Ранг матрицы этой системы равен рангу системы ее столбцов, которая, в свою очередь, равна размерности суммы подпространств:

$$\text{rang}\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_p\} = \dim(M + L) = s,$$

следовательно, размерность ее пространства решений равна $(m+p) - s = \dim M \cap L = t$ (число неизвестных системы минус ранг ее матрицы).

Пусть $\{X_1, \dots, X_t\}$ – фундаментальная система решений данной однородной системы линейных уравнений (2).

Обозначим через $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t\}$ – систему укороченных столбцов высоты m , полученных из фундаментальной системы решений $\{X_1, \dots, X_t\}$ отбрасыванием координат с номерами $m+1, \dots, m+p$, а через $\{\bar{\bar{X}}_1, \dots, \bar{\bar{X}}_t\}$ – систему укороченных столбцов высоты p , полученных из фундамен-

тальной системы решений $\{X_1, \dots, X_t\}$ отбрасыванием первых m координат.

Таким образом, любой столбец $X_j, j=1, 2, \dots, t$ составлен из двух столбцов $\bar{X}_j$ и $\bar{\bar{X}}_j$ высоты m и p соответственно:

$$X_j = \begin{pmatrix} \bar{X}_j \\ \bar{\bar{X}}_j \end{pmatrix}.$$

Матрица $\bar{F} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t)$ получается из первых m строк матрицы $F = (X_1, \dots, X_t)$, а матрица $\bar{\bar{F}} = (\bar{\bar{X}}_1, \dots, \bar{\bar{X}}_t)$ – из последующих p строк матрицы $F = (X_1, \dots, X_t)$.

Докажем, что система столбцов матрицы $\bar{\bar{X}}$ будет линейно независимой. Действительно, общее решение системы (2) имеет вид: $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_t X_t$,

и столбец $X_j, j=1, 2, \dots, t$, имеет вид: $X_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{sj} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, где 1 сто-

ит в строке с номером $s+j$. Поэтому базисный минор матрицы $F = (X_1, \dots, X_t)$ имеет порядок t и равен определителю единичной матрицы t -го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix},$$

и находится он в последних t строках матрицы F . Матрица из укороченных столбцов $\bar{F} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t)$ содержит эту единичную матрицу, т.к. $m \leq s$. Следовательно, $\text{rang } \bar{F} = t$ и система ее столбцов линейно независима, ч.т.д.

Подставляя столбцы $\bar{X}_j$ матрицы $\bar{X} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t)$ в равенство (1) находим t столбцов $C_j, j=1, 2, \dots, t$, каждый из которых принадлежит пересечению $M \cap L$:

$$C_j = -(B_1, \dots, B_p) \bar{X}_j, \quad j=1, 2, \dots, t. \quad (3)$$

Удобнее работать в матричной форме:

$$(C_1, C_2, \dots, C_t) = -(B_1, \dots, B_p)(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t) = -B\bar{F},$$

где $B = (B_1, \dots, B_p)$. Легко видеть, что

$$(C_1, C_2, \dots, C_t) = (A_1, \dots, A_m)(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t) = A\bar{F},$$

где $A = (A_1, \dots, A_m)$.

Полученная система столбцов $\{C_1, \dots, C_t\}$ будет линейно независимой. Действительно, допустим противное. Пусть

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_t C_t = 0,$$

где не все коэффициенты равны нулю: $(\lambda_1, \dots, \lambda_t) \neq (0, \dots, 0)$, то из равенства (3) сразу же следует равенство

$$0 = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_t C_t = -B(\lambda_1 \bar{X}_1 + \dots + \lambda_t \bar{X}_t),$$

где столбец $D = \lambda_1 \bar{X}_1 + \dots + \lambda_t \bar{X}_t \neq 0$ в силу линейной независимости системы $\{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_t\}$.

С другой стороны, $\text{rang } B = \text{rang } \{B_1, \dots, B_p\} = p$ и поэтому система линейных уравнений $BX = 0$ имеет единственное нулевое решение, откуда следует, что столбец $D = 0$. Полученное противоречие доказывает, что система столбцов $\{C_1, \dots, C_t\}$ является линейно независимой системой столбцов пространства $M \cap L$, размерность которого равна t . Отсюда следует, что система $\{C_1, \dots, C_t\}$ является базисом пересечения. Ясно, что система $\{-C_1, \dots, -C_t\}$ также является базисом пересечения, ч.т.д.

Пример. Найти размерность и базис линейных оболочек

$$M = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle, \quad L = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle,$$

их суммы $M + L$ и пересечения $M \cap L$, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем матрицу $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ и элементарными преобразованиями строк приводим ее к ступенчатому виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Последовательно выполним следующие преобразования. Ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 2, к 3-й строке прибавим 1-ю, из 4-й строки вычтем 1-ю и разделим все элементы 3-й строки на 2. Короче это можно описать так:

$$S_2 := S_2 + 2S_1, \quad S_3 := S_3 + S_1, \quad S_4 := S_4 - S_1, \quad S_3 := \frac{1}{2}S_3.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right),$$

$$S_4 := S_4 + 5S_3, \quad S_3 := S_3 - S_2, \quad S_3 \leftrightarrow S_4:$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right).$$

Из полученных результатов делаем вывод:

$$\text{rang}(A_1, A_2, A_3) = 3, \quad \text{rang}(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3) = 4,$$

т.е. $\{A_1, A_2, A_3\}$ – базис подпространства M , $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$

– базис подпространства $M + L$,

$$\dim M = 3, \quad \dim(M + L) = 4.$$

Отдельно вычисляем ранг матрицы $B = (B_1, B_2, B_3)$:

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right).$$

Здесь выполнены преобразования:

$$S_1 \leftrightarrow S_2, \quad S_2 := S_2 + 2S_1, \quad S_4 := S_4 + 4S_1.$$

Далее, последовательно выполняем преобразования

$$S_2 := -\frac{1}{3}S_2, \quad S_3 := S_3 - S_2, \quad S_4 := S_4 + S_2:$$

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Вывод: $\text{rang}(B_1, B_2, B_3) = \dim L = 3$, $\{B_1, B_2, B_3\}$ – базис L ,

$$\dim M \cap L = \dim M + \dim L - \dim(M + L) = 3 + 3 - 4 = 2.$$

Возвращаемся к ступенчатой форме матрицы $(A|B)$ и находим соответствующую систему уравнений, перенося свободные переменные x_5 и x_6 в правые части уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 2x_4 = 3x_5 + x_6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 6x_5 + 3x_6 \\ 4x_3 + 7x_4 = 3x_5 - 3x_6 \\ -2x_4 = -5x_5 - 3x_6 \end{cases}.$$

Обозначим $x_5 = 8\alpha$, $x_6 = 8\beta$ и находим оставшиеся неизвестные:

$$x_4 = \frac{5}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_6 = 20\alpha + 12\beta,$$

$$x_3 = -\frac{7}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_6 = -\frac{7}{4}(20\alpha + 12\beta) + 6\alpha - 6\beta = -29\alpha - 27\beta,$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= -x_3 - 3x_4 + 6x_5 + 3x_6 = \\
&= 29\alpha + 27\beta - 60\alpha - 36\beta + 48\alpha + 24\beta = 17\alpha + 15\beta, \\
x_1 &= -x_3 - 2x_4 + 3x_5 + x_6 = \\
&= 29\alpha + 27\beta - 40\alpha - 24\beta + 24\alpha + 8\beta = 13\alpha + 11\beta
\end{aligned}$$

Выписываем общее решение:

$$X = \begin{pmatrix} 13\alpha + 11\beta \\ 17\alpha + 15\beta \\ -29\alpha - 27\beta \\ 20\alpha + 12\beta \\ 8\alpha \\ 8\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ -29 \\ 20 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ -27 \\ 12 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу F , столбцами которой являются столбцы фундаментальной системы решений:

$$F = (X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 17 & 15 \\ -29 & -27 \\ 20 & 12 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу $\bar{F}$, полученную из матрицы F отбрасыванием последних 3-х строк:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 17 & 15 \\ -29 & -27 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицу $\bar{\bar{F}}$, полученную из матрицы F отбрасыванием первых 3-х строк:

$$\bar{\bar{F}} = \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу, столбцами которой будет базис пересечения:

$$\begin{aligned}
(C_1, C_2) &= (B_1, B_2, B_3) \bar{\bar{F}} = \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ -20 & -20 \\ 8 & 8 \\ 72 & 64 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -5 \\ 2 & 2 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в качестве базиса пересечения можно взять систему из двух столбцов:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Можно выполнить проверку, вычислив эти столбцы по другой формуле:

$$\begin{aligned}
(C_1, C_2) &= (A_1, A_2, A_3) \bar{\bar{F}} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 17 & 15 \\ -29 & -27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -16 \\ 20 & 20 \\ -8 & -8 \\ -72 & -64 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -5 & -5 \\ 2 & 2 \\ 18 & 16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ответ: $\{A_1, A_2, A_3\}$ – базис M , $\dim M = 3$, $\{B_1, B_2, B_3\}$ – базис L , $\dim L = 3$, $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$ – базис $M + L$,

$$\dim(M+L)=4, \quad \{C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}\}$$

– базис $M \cap L$, $\dim M \cap L = 2$.

Задача 238. Найти базисы подпространств, содержащие базис их пересечения.

Решение. Пусть $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, $\{B_1, B_2, \dots, B_p\}$ и $\{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ – базисы подпространств M , L и $M \cap L$ пространства K^n соответственно. Так как $M \cap L \subset M$ и $M \cap L \subset L$, то

$$\dim M \cap L = t \leq \dim M = m, \quad \dim M \cap L = t \leq \dim L = p$$

и базис $M \cap L$ можно дополнить до базисов M и L , если $t < m$ или $t < p$.

Так как $C_1, C_2, \dots, C_t \in M \cap L$, то $C_1, C_2, \dots, C_t \in M$, $C_1, C_2, \dots, C_t \in L$ и $M = \langle A_1, \dots, A_m \rangle = \langle C_1, \dots, C_t, A_1, \dots, A_m \rangle$,

$$L = \langle B_1, \dots, B_p \rangle = \langle C_1, \dots, C_t, B_1, \dots, B_p \rangle.$$

С другой стороны, $\dim M = \text{rang}\{C_1, \dots, C_t, A_1, \dots, A_m\} = m$, поэтому ранг матрицы $(C|A) = (C_1, \dots, C_t, A_1, \dots, A_m)$ тоже равен m . Так как столбцы $C_1, C_2, \dots, C_t$ линейно независимы, то можно найти базисный минор матрицы $(C|A)$, построенный на первых t столбцах и еще каких-нибудь $(m-t)$ столбцах матрицы A . Выписав из системы $\{C_1, \dots, C_t, A_1, \dots, A_m\}$ столбцы с этими номерами, мы получим искомым базис подпространства M .

Аналогично, находим базисный минор матрицы $(C_1, \dots, C_t, B_1, \dots, B_p)$, записываем номера его столбцов и,

выписывая из системы $\{C_1, \dots, C_t, B_1, \dots, B_p\}$ столбцы с этими номерами, получаем искомым базис подпространства L .

Пример. Найти базисы подпространств

$$M = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle, \quad L = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle,$$

содержащие базис их пересечения, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Базис пересечения был найден в примере предыдущей задачи:

$$\{C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}\}.$$

Выписываем матрицу

$$(C|A) = (C_1, C_2, A_1, A_2, A_3) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 18 & 16 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

и находим ее базисный минор с помощью элементарных преобразований строк. Выполним преобразование

$$S_1 := S_1 + S_2 :$$

$$(C|A) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 18 & 16 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right).$$

Далее $S_2 := S_2 + (-5)S_1$, $S_3 := S_3 + 2S_1$, $S_4 := S_4 + 18S_1$:

$$(C|A) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -17 & 13 & 0 \end{array} \right).$$

Переставим 2-ю и 4-ю строки:

$$(C|A) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -17 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array} \right).$$

Далее $S_4 := S_4 + S_3$:

$$(C|A) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -17 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Базисный минор имеет порядок 3 и стоит в левом верхнем углу. Базисные столбцы имеют номера: 1, 2 и 3. Следовательно, базис линейной оболочки

$$M = \langle C_1, C_2, A_1, A_2, A_3 \rangle$$

образуют столбцы системы $\{C_1, C_2, A_1, A_2, A_3\}$ с этими номерами: $\{C_1, C_2, A_1\}$.

Аналогично находим базис линейной оболочки

$$L = \langle C_1, C_2, B_1, B_2, B_3 \rangle.$$

Выписываем матрицу

$$(C|B) = (C_1, C_2, B_1, B_2, B_3) = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 4 & 2 & -3 & -1 \\ -5 & -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 18 & 16 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

и находим ее базисный минор с помощью элементарных преобразований строк. Выполним преобразование

$$S_1 := S_1 + S_2 :$$

$$(C|B) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ -5 & -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 18 & 16 & 4 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Далее $S_2 := S_2 + (-5)S_1$, $S_3 := S_3 + 2S_1$, $S_4 := S_4 + 18S_1$:

$$(C|B) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 22 & -55 & -34 \end{array} \right).$$

Переставим 2-ю и 4-ю строки:

$$(C|B) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 22 & -55 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & 15 & 9 \end{array} \right).$$

Далее $S_4 := S_4 + 3S_3$:

$$(C|B) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 22 & -55 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Базисный минор стоит на первых трех столбцах, следовательно, система столбцов $\{C_1, C_2, B_1\}$ является базисом L .

Замечание. Как видно из примера, элементарные преобразования повторяются, поэтому можно работать сразу с матрицей $(C|A|B)$. И только тогда, когда матрица C приведена к трапециевидному виду, вычислять базисные миноры матриц $(C|A)$ и $(C|B)$ по отдельности.

Ответ: $\{C_1, C_2, A_1\}$ – базис M , $\{C_1, C_2, B_1\}$ – базис L , где

$$\{C_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 16 \end{pmatrix}\} \text{ – базис } M \cap L.$$

Задача 239. Дополнить линейно независимую систему столбцов до базиса пространства столбцов данной высоты.

Решение. Пусть $\{A_1, \dots, A_m\}$ – линейно независимая система столбцов арифметического пространства столбцов K^n , где $m < n$, и $\{e_1, \dots, e_n\}$ – канонический базис арифметического пространства K^n .

Решение точно такое же, как в предыдущей задаче. Выписываем матрицу

$$(A|E) = (A_1, \dots, A_m | e_1, \dots, e_n)$$

и приводим ее к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк, выделяем базисный минор, содержа-

щий первые m столбцов, и записываем номера остальных его $(n - m)$ столбцов.

Из системы столбцов $\{A_1, \dots, A_m | e_1, \dots, e_n\}$ выписываем n столбцов, номера которых совпадают с номерами базисного минора. Выписанная система n столбцов дает иско-мый базис арифметического пространства.

Пример. Дополнить до базиса систему столбцов $\{A_1, A_2\}$, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выписываем матрицу

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Выполним преобразования

$$S_2 := S_2 + 2S_1, \quad S_5 := S_5 - S_1, \quad S_2 \leftrightarrow S_3:$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Далее $S_4 := S_4 + (-3)S_2$, $S_5 := S_5 + S_2$:

Далее $S_3 \leftrightarrow S_5$:

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Далее $S_5 := S_5 + 2S_3$, $S_4 \leftrightarrow S_5$:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Базисный минор стоит на первых 5 столбцах. Выписываем первые 5 столбцов из системы $\{A_1, A_2, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ и получаем искомый базис.

Ответ: $\{A_1, A_2, e_1, e_2, e_3\}$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть V векторное пространство над полем K , $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ – два его базиса. Разложим векторы второго базиса по первому:

[illegible]

Определение. Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ к базису $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Равенства (1) могут быть записаны в матричной форме:

$$\boxed{(u_1, u_2, \dots, u_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)C}. \quad (1)$$

Для избежание путаницы матрицу перехода иногда обозначают со стрелкой, указывающей от какого базиса к какому совершается переход:

$$C = C_{e \rightarrow u}.$$

В частности, если пространство векторов есть арифметическое пространство столбцов высоты n , то базис, т.е. упоря-

доченный набор из n столбцов высоты n можно записать в виде матрицы:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = U, \quad (e_1, e_2, \dots, e_n) = E.$$

И равенство (1) принимает вид:

$$U = E \cdot C_{e \rightarrow u}. \quad (2)$$

Обычно, буквой e с индексами обозначается естественный (канонический) базис арифметического пространства:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\},$$

где

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где 1 стоит в j -й строке, а остальные координаты равны 0. В этом случае,

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

– единичная матрица n -го порядка, и подставляя в (2), получаем:

$$U = E \cdot C_{e \rightarrow u} = C_{e \rightarrow u}.$$

Теорема. Столбцы нового базиса образуют матрицу перехода к этому базису от естественного базиса арифметического пространства.

В общем же случае, матрица перехода находится из матричного равенства (2):

$$C_{e \rightarrow u} = E^{-1}U. \quad (3)$$

Заметим, что матрица перехода C является решением матричного уравнения $EX = U$, которое можно решить методом Гаусса.

Теорема. Пусть X_e – столбец координат вектора x относительно старого базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, X_u – столбец координат вектора x относительно нового базиса $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ и $C = C_{e \rightarrow u}$ – матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда

$$X_e = C_{e \rightarrow u} X_u.$$

Известно, что любая матрица перехода является невырожденной, т.е. обратимой. Поэтому из теоремы следует, что

$$X_u = C^{-1} X_e.$$

Если известны координаты вектора в старом базисе и матрица перехода C , то координаты вектора в новом базисе есть решение системы линейных уравнений

$$CX = X_e,$$

которую можно решить либо с помощью формул Крамера (матрица перехода является невырожденной), либо методом Гаусса.

Можно использовать свойство матрицы перехода:

$$C_{e \rightarrow u}^{-1} = C_{u \rightarrow e}$$

$$\text{и, тогда, } X_u = C_{e \rightarrow u}^{-1} X_e = C_{u \rightarrow e} X_e.$$

Линейное преобразование переменных.

Назовем координаты произвольного (текущего) вектора переменными. Координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ вектора x относи-

$$X_e = \bigcap_{e \rightarrow u} X_u$$

в скалярной форме имеет вид:

Система равенств (4) называется линейным преобразованием переменных, а матрица коэффициентов этого преобразования называется матрицей преобразования переменных. Если матрица преобразования невырожденная, то и само преобразование называется невырожденным. С такими преобразованиями мы столкнемся при изучении билинейных и квадратичных форм.

Пусть в пространстве точек дана обычная, прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Пусть $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ обычный ортонормированный базис, причем базисные векторы являются ортами осей координат.

Обратно, любой вектор можно отложить от начала координат и при этом его координаты не изменяются. Поэтому, любой вектор можно рассматривать как радиус-вектор точки. Это позволяет отождествить точку пространства с ее

В дальнейшем, при изучении евклидовых пространств мы увидим, что существуют точечно-векторные пространства любых измерений, а не только одно-, двух- или трехмерные. Все выше сказанное справедливо не только в прямоугольных системах координат, но и в произвольных (косугольных) декартовых системах координат.

Пусть в произвольном точечно-векторном пространстве фиксирована некоторая система координат, орты осей координат образуют базис соответствующего пространства векторов. Переход к другому базису приводит к изменению и системы координат. Поэтому переход к другому базису мы будем называть преобразованием системы координат.

При этом мы полагаем, что начало координат остается прежним. При изменении базиса меняются координаты векторов, а значит и точек. С этой точки зрения система (4) называется формулами преобразования координат.

В этой главе мы ограничимся рассмотрением только прямоугольных декартовых систем координат размерности не выше трех, которые для краткости будем обозначать аббревиатурой ПДСК. Кроме того, мы ограничимся только такими преобразованиями ПДСК, которые происходят в результате поворота осей координат вокруг начала координат или симметрии относительно прямой или плоскости, проходящих через начало координат.

Пусть система координат Охуз подверглась преобразованию, при котором ортонормированный базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ пе-

переходит в ортонормированный базис $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$. Разложим векторы нового базиса по старому:

$$\begin{cases} \bar{i}' = c_{11}\bar{i} + c_{21}\bar{j} + c_{31}\bar{k} \\ \bar{j}' = c_{12}\bar{i} + c_{22}\bar{j} + c_{32}\bar{k} \\ \bar{k}' = c_{13}\bar{i} + c_{23}\bar{j} + c_{33}\bar{k} \end{cases}$$

Тогда матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

а координаты (x, y, z) произвольного вектора относительно старого базиса (координаты точки в старой системе координат $Oxyz$) связаны с координатами (x', y', z') этого же вектора относительно нового базиса (координатами этой же точки в новой системе координат $Ox'y'z'$) соотношениями, формулами преобразования координат:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' \end{cases} \quad (5)$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

где матрица перехода C называется также матрицей преобразования координат.

При преобразованиях системы координат на плоскости имеют место аналогичные формулы. Их можно получить, если мы отбросим одну из трех координат.

Замечание. При преобразованиях симметрии, ПДСК может изменить свою ориентацию. Смотри, например, задачи 245, 247 или 248. Определитель матрицы преобразования (5) будет в этом случае отрицательным.

Задача 240. Найти матрицу перехода от одного базиса к другому.

Решение. Теория была рассмотрена выше, поэтому перейдем сразу к примерам.

Пример 1. Проверить, образует ли система столбцов $\{u_1, \dots, u_n\}$ базис арифметического пространства R^n и найти матрицу перехода к этому базису от канонического базиса, если $n = 3$ и

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем матрицу

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Если $\det U \neq 0$, то система столбцов $\{u_1, u_2, u_3\}$ линейно независима и тогда она образует базис арифметического пространства столбцов высоты 3, а матрица U будет искомым матрицей перехода.

Вычисляем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & -2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Умножим 1-й столбец на (-5) и прибавим ко второму:

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & -2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 45 \neq 0.$$

Ответ: $C_{e \rightarrow u} = U = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -2 \\ -1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$

Пример 2. Найдите матрицу перехода от базиса $\{a_1, a_2, a_3\}$ к базису $\{b_1, b_2, b_3\}$, если

$$a_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению матрицы перехода $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3) C_{a \rightarrow b}$.

Обозначим, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$. Тогда,

$$B = A \cdot C_{a \rightarrow b}.$$

Искомая матрица перехода есть решение матричного уравнения $AX = B$, которое можно решать методом Гаусса. Выписываем матрицу

$$(A | B) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

и с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу перед чертой к единичной. Тогда после черты будет стоять искомое решение.

К 3-й строке прибавим удвоенную первую и переставим 1-ю и 2-ю строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Из 3-й строки вычтем 1-ю, а ко 2-й прибавим 1-ю, умноженную на 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Ко 2-й строке прибавим 3-ю, умноженную на (-3) , и переставим их:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 & 15 \end{array} \right).$$

Умножим 1-ю и 2-ю строки на 5 и ко 2-й строке прибавим 3-ю, и из 1-й строки вычтем 3-ю:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 & 15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 3 & 15 \end{array} \right).$$

Осталось разделить 1-ю и 3-ю строки на 5, а 2-ю на (-5) .

Ответ: $C_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} -1 & 2/5 & -1 \\ 0 & -3/5 & -1 \\ 2 & 3/5 & 3 \end{pmatrix}.$

Проверка. Умножив матрицу A на найденную матрицу C мы должны получить матрицу B :

$$A \underset{a \rightarrow b}{C} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 10 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \\ -5 & 15 & -10 \end{pmatrix},$$

последняя матрица равна матрице B .

Задача 241. Найти координаты вектора в новом базисе, если известны его координаты в старом базисе и матрица перехода.

Пример. Пусть $x = 2e_1 - e_2 + 4e_3$ – разложение по базису вектора x . Найдите разложение этого вектора по базису:

$$u_1 = -e_1 + e_2 - 2e_3, \quad u_2 = 3e_1 - e_3, \quad u_3 = e_2 + 5e_3.$$

Решение. Запишем данные в матричной форме:

$$X_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underset{e \rightarrow u}{C} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X_u = C^{-1}X_e$, и для вычисления координат вектора x в новом базисе требуется найти матрицу обратную матрице перехода. Обратную матрицу можно найти с помощью взаимной матрицы или методом Гаусса.

Можно решить систему уравнений $CX = X_e$ с известной матрицей коэффициентов и известным столбцом свободных членов. Решением этой системы будет искомым столбец координат X_u вектора x относительно нового базиса. Чаще всего, это наиболее простой способ решения данной задачи.

Систему можно решить по формулам Крамера (определитель системы отличен от нуля, так как матрица перехода

является невырожденной).

Покажем здесь еще один способ решения данной задачи. Воспользуемся свойством матрицы перехода:

$$\underset{e \rightarrow u}{C}^{-1} = \underset{u \rightarrow e}{C}.$$

Выразим векторы старого базиса через новые. Дано:

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 + e_2 - 2e_3 \\ u_2 = 3e_1 + 0 \cdot e_2 - e_3 \\ u_3 = 0 \cdot e_1 + e_2 + 5e_3 \end{cases}$$

Отсюда,

$$\begin{cases} u_2 = 3e_1 - e_3 \\ 5u_2 + u_3 = 15e_1 + e_2, \quad (5u_2 + u_3) - (u_1 - 2u_2) = 22e_1, \\ u_1 - 2u_2 = -7e_1 + e_2 \end{cases}$$

или $e_1 = \frac{1}{22}(-u_1 + 7u_2 + u_3)$. Далее,

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{22}(-u_1 + 7u_2 + u_3) \\ e_2 = (u_1 - 2u_2) + \frac{7}{22}(-u_1 + 7u_2 + u_3), \\ e_3 = \frac{3}{22}(-u_1 + 7u_2 + u_3) - u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{1}{22}u_1 + \frac{7}{22}u_2 + \frac{1}{22}u_3 \\ e_2 = \frac{15}{22}u_1 + \frac{5}{22}u_2 + \frac{7}{22}u_3 \\ e_3 = -\frac{3}{22}u_1 - \frac{1}{22}u_2 + \frac{3}{22}u_3 \end{cases}.$$

Отсюда,

$$C_{u \rightarrow e} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -1 & 15 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Можно выполнить проверку: $C_{e \rightarrow u} \cdot C_{u \rightarrow e} = E$ и убедиться в правильности вычислений. Вычисляем X_u :

$$X_u = C_{u \rightarrow e} X_e = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 & 15 & -3 \\ 7 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = -\frac{25}{22}u_1 + \frac{5}{22}u_2 + \frac{7}{22}u_3$.

Задача 242. Найти формулы преобразования координат при повороте ПДСК на плоскости вокруг начала координат.

Решение. Пусть $\alpha \in [0; 2\pi)$ – угол поворота осей координат ПДСК Oxy вокруг начала координат против часовой стрелки, $\bar{i}, \bar{j}$ – орты координатных осей. Система векторов $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ образует ортонормированный базис пространства векторов плоскости.

Пусть $Ox'y'$ – новая система координат на этой же плоскости, которая получается поворотом старой на угол α , $\bar{i}', \bar{j}'$ – орты новых координатных осей. Тогда система векторов $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ также образует ортонормированный базис пространства векторов этой же плоскости.

Матрицу перехода от старого базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ к новому базису $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ обозначим через P_α и будем ее называть матрицей поворота. По определению матрицы перехода, нам

нужно найти координаты новых базисных векторов $\bar{i}', \bar{j}'$ относительно старого базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$:

$$\begin{cases} \bar{i}' = c_{11}\bar{i} + c_{21}\bar{j} \\ \bar{j}' = c_{12}\bar{i} + c_{22}\bar{j} \end{cases}, \quad P_\alpha = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Все базисные векторы, и старые и новые, имеют длину равную 1, поэтому их концы лежат на тригонометрической окружности (мы полагаем, что их начало находится в начале координат), смотрите рисунок 1. Отсюда легко находим проекции $\bar{i}', \bar{j}'$ на старые координатные оси:

$$\begin{aligned} \text{пр}_x \bar{i}' &= |\bar{i}'| \cos \alpha = \cos \alpha, & \text{пр}_y \bar{i}' &= |\bar{i}'| \sin \alpha = \sin \alpha, \\ \text{пр}_x \bar{j}' &= |\bar{j}'| \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha, & \text{пр}_y \bar{j}' &= |\bar{j}'| \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha \end{aligned}$$

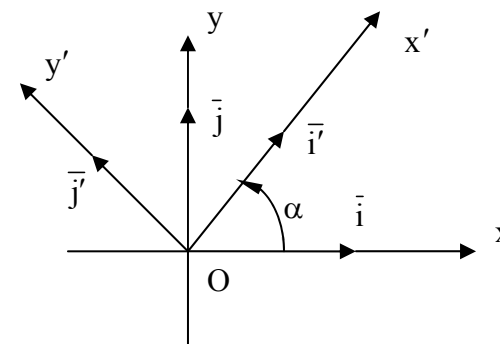


Рис. 1.

Известно, что координаты вектора относительно базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ совпадают с его проекциями на оси Ox и Oy . Отсюда,

$$\begin{aligned} \bar{i}' &= (\cos \alpha) \cdot \bar{i} + (\sin \alpha) \cdot \bar{j}, \\ \bar{j}' &= \left(\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot \bar{i} + \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot \bar{j} = (-\sin \alpha) \cdot \bar{i} + (\cos \alpha) \cdot \bar{j}. \end{aligned}$$

Выписывая найденные координаты по столбцам, получаем матрицу перехода:

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Известно, (см. задачу 241) что координаты одного и того же вектора относительно двух различных базисов связаны соотношением:

$$X_a = C_{a \rightarrow b} X_b.$$

Применительно к нашему случаю имеем:

$$X = P_\alpha X',$$

где обозначено: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – координаты произвольного век-

тора $\bar{x}$ относительно старого базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ – координаты этого же вектора $\bar{x}$ относительно нового базиса $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$. Это соотношение можно записать покомпонентно.

Умножая матрицу поворота P_α на столбец $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, получаем $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{pmatrix}$. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

Последние два равенства называются формулами преобразования координат с матрицей преобразования P_α .

Замечание. Пусть $F(x, y) = 0$ – уравнение какой-нибудь линии на плоскости в ПДСК. Этому уравнению удовлетворяют те и только те точки, координаты которых удовлетво-

ряют этому уравнению. После преобразования системы координат, линия на плоскости будет по-прежнему состоять из тех же точек, что и до преобразования, но координаты их изменятся по формулам (1) и, чтобы найти уравнение линии в новой системе координат, нужно в старое уравнение линии подставить вместо x и y их выражения из формул (1):

$$F(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) = 0.$$

Полученное уравнение будет уравнением линии в новой системе координат $Ox'y'$.

Пример. В ПДСК Oxy дано уравнение кривой $xy - k = 0$. Найти уравнение данной кривой в системе координат $Ox'y'$, полученной поворотом старой системы координат на угол 45° против часовой стрелки вокруг начала координат.

Решение. Так как $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то формулы преобразования координат будут иметь вид:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}.$$

Подставляя в уравнение кривой, получаем:

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) - k = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1.$$

Последнее уравнение показывает, что кривая является равнобочной гиперболой с полуосями $a = b = \sqrt{2|k|}$. Какая из осей является действительной, а какая – мнимой, зависит от знака числа k .

Ответ: $\frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1$.

Задача 243. Найти формулы преобразования координат при параллельном переносе ПДСК.

Решение. Пусть $Oxyz$ – старая система координат (до параллельного переноса), $O'x'y'z'$ – новая система координат (после параллельного переноса). Пусть M – произвольная точка, $M(x, y, z)$ – координаты точки M в старой системе координат, $M(x', y', z')$ – координаты точки M в новой системе координат. Пусть $O'(a, b, c)$ – координаты начала новой системы координат в старой системе координат. Так как координаты точки совпадают с координатами ее радиус-вектора, то

$$\overrightarrow{OM} = (x, y, z), \quad \overrightarrow{O'M} = (x', y', z'), \quad \overrightarrow{OO'} = (a, b, c).$$

На следующем рисунке выполнен параллельный перенос ПДСК на плоскости на вектор $\overrightarrow{OO'}$:

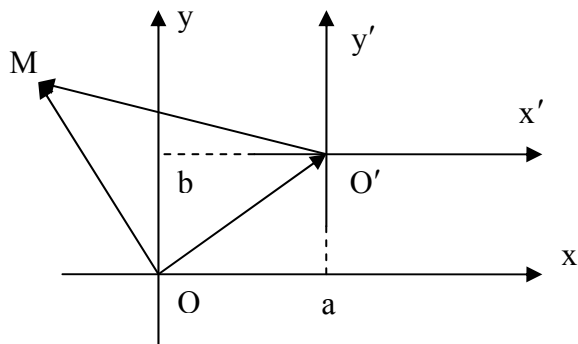


Рис. 2.

Из равенства $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ получаем формулы преобразования координат при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{OO'} = (a, b, c)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \\ z = c + z' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \\ z' = z - c \end{cases}$$

Пример. В ПДСК Oxy дано уравнение кривой 2-го порядка: $x^2 + 2y^2 - 12x + 4y - 12 = 0$. Найти каноническое уравнение кривой и определить ее вид. Найти каноническую для этой кривой систему координат и выписать формулы их преобразования.

Решение. Сгруппируем и выделим полные квадраты:

$$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 + 2y + 1) - 38 - 12 = 0,$$

$$(x - 6)^2 + 2(y + 1)^2 = 50, \quad \frac{(x - 6)^2}{50} + \frac{(y + 1)^2}{25} = 1.$$

Выполним замену переменных: $\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y + 1 \end{cases}$. Тогда уравнение кривой примет вид:

$$\frac{x'^2}{50} + \frac{y'^2}{25} = 1.$$

Ответ: $\frac{x'^2}{50} + \frac{y'^2}{25} = 1$ – каноническое уравнение эллипса,

$$\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y + 1 \end{cases} \quad \text{– формулы преобразования координат, параллельного переноса системы координат на вектор } \overrightarrow{OO'} = (6; -1).$$

Задача 244. Найти формулы преобразования координат при параллельном переносе ПДСК на плоскости и последующего поворота на некоторый угол.

Решение. Пусть Oxy , $Ox'y'$ и $O'x''y''$ – три ПДСК, причем система $Ox'y'$ получена из системы Oxy поворотом осей координат вокруг точки O на некоторый угол, а сис-

тема $O'x''y''$ получена из системы $Ox'y'$ параллельным переносом осей координат на вектор $\overline{OO'} = (a, b)$, причем мы полагаем, что координаты (a, b) вектора $\overline{OO'}$ даны в системе координат Oxy .

С геометрической точки зрения понятно, что мы получим ту же самую систему координат $O'x''y''$, если сначала выполним параллельный перенос на вектор $\overline{OO'} = (a, b)$ с последующим поворотом на тот же угол. Убедимся в этом, выполнив оба варианта.

Выполним сначала параллельный перенос системы Oxy на вектор $\overline{OO'} = (a, b)$:

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

Далее выполняем поворот на угол α :

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha \\ y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} x = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha + a \\ y = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha + b \end{cases}$$

Выполним теперь оба преобразования в обратном порядке.

Здесь нам будет удобнее пользоваться матричной формой записи формул преобразования координат. Сначала

делаем поворот системы координат Oxy : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_\alpha \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, где

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ — матрица поворота.}$$

Прежде, чем сделать параллельный перенос системы координат $Ox'y'$ нужно найти в этой системе координат новые

координаты (a', b') точки O' : $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P_\alpha \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. Легко проверить, что матрица

$$P_\alpha^{-1} = P_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

откуда находим $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = P_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Теперь выполняем параллельный перенос системы $Ox'y'$ на вектор $\overline{OO'} = (a', b')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + P_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Подставив в предыдущие формулы преобразования (поворота), получим формулы преобразования системы Oxy (поворота и параллельного переноса):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_\alpha \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P_\alpha \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + P_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = P_\alpha \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Расписывая эти равенства в скалярной форме, получаем те же самые формулы преобразования координат, что и в первом варианте.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha + a \\ y = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha + b \end{cases}$$

Пример. В системе координат Oxy дана точка $M(2;1)$ и точка $O'(-2;1)$. Найти координаты точки M в новой системе координат $O'x'y'$, которая получается из старой параллельным переносом на вектор $\overline{OO'}$ с последующим поворотом вокруг точки O' против часовой стрелки на угол $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$.

Решение. Выпишем формулы указанного преобразования системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{\alpha} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

откуда находим:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P_{\alpha}^{-1} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

Имеем, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Подставляя в эту

формулу старые координаты точки М: $x = 2$, $y = 1$, получаем ее новые координаты $(x'; y')$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $M\left(\frac{12}{5}; -\frac{16}{5}\right)$.

Задача 245. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК на плоскости относительно оси абсцисс.

Решение. При таком преобразовании, ось Ох остается на месте и, соответственно, ее новый орт совпадает со старым: $\bar{i}' = \bar{i}$, а положительное направление оси Оу меняется на противоположное, т.е. ее новый орт противоположен старому: $\bar{j}' = -\bar{j}$.

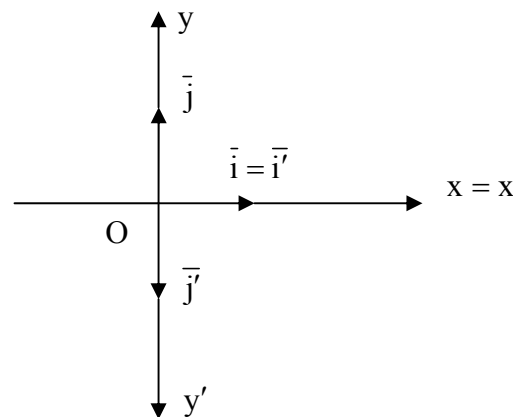


Рис. 3.

Следовательно, матрица перехода от базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ к новому

базису $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$ имеет вид: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а формулы этого

преобразования координат: $\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Например, $M(1; 2)$ – координаты точки М в старой системе координат Оху, то $M(1; -2)$ – координаты точки М в новой системе координат Ох'у'.

Задача 246. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК в пространстве относительно начала координат.

Решение. Каждый из базисных векторов переходит в противоположный ему вектор, поэтому

$$\begin{cases} \bar{i}' = -\bar{i} \\ \bar{j}' = -\bar{j} \\ \bar{k}' = -\bar{k} \end{cases}.$$

Матрица перехода противоположна единичной:

$$C = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат:

$$X = CX' = -EX' = -X' \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \\ z = -z' \end{cases}$$

Задача 247. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК на плоскости относительно прямой, проходящей через начало координат.

Решение. Пусть дана прямая, проходящая через начало координат на координатной плоскости Oxy : $y = kx$. Тогда, $k = \operatorname{tg} \alpha$, где $\alpha = \operatorname{arctg} k$ – угол наклона прямой к оси абсцисс. При симметрии относительно этой прямой, ортонормированный базис $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ переходит в ортонормированный базис $\{\bar{i}', \bar{j}'\}$. Найдем координаты нового базиса относительно старого. Воспользуемся следующим рисунком.

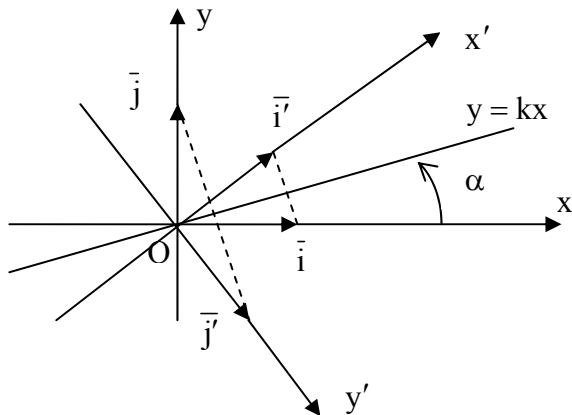


Рис. 4.

Из геометрических соображений ясно, что угол между векторами $(\bar{i}, \bar{i}') = 2\alpha$, откуда находим координаты вектора $\bar{i}'$:

$$\bar{i}' = (\cos 2\alpha) \bar{i} + (\sin 2\alpha) \bar{j}.$$

Учитывая, что $\bar{j}' \perp \bar{i}'$, сразу же находим, что

$$\bar{j}' = (\sin 2\alpha) \bar{i} - (\cos 2\alpha) \bar{j}.$$

Матрица перехода (она же матрица преобразования) имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{и формулы преобразования}$$

$$\text{координат: } \begin{cases} x = x' \cos 2\alpha + y' \sin 2\alpha \\ y = x' \sin 2\alpha - y' \cos 2\alpha \end{cases}.$$

Замечание. Нетрудно видеть, что данное преобразование можно получить, если сначала выполнить преобразование поворота на угол 2α против часовой стрелки, а затем выполнить преобразование симметрии относительно новой оси абсцисс Ox' . При последовательном выполнении преобразований их матрицы перемножаются, поэтому, умножив матрицу поворота на угол 2α на матрицу симметрии относительно оси абсцисс, получаем матрицу симметрии относительно данной прямой:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример. Выписать формулы преобразования координат при симметрии координатной плоскости Oxy относительно прямой $y = -x\sqrt{3}$.

Решение. Угол наклона данной прямой к оси абсцисс равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}, \quad 2\alpha = \frac{4\pi}{3},$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -\frac{1}{2}(x' + y'\sqrt{3}) \\ y = -\frac{1}{2}(x'\sqrt{3} - y') \end{cases}.$$

Задача 248. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК относительно одной из координатных плоскостей.

Решение. Пусть в координатном пространстве $Oxyz$ выполняется преобразование – симметрия относительно плоскости Oxy . Тогда базисные векторы $\bar{i}, \bar{j}$ остаются на месте, т.е. $\bar{i}' = \bar{i}, \bar{j}' = \bar{j}$, а базисный вектор $\bar{k}$ переходит в противоположный ему $\bar{k}' = -\bar{k}$. Матрица перехода от базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ к базису $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ и будет матрицей преобразования координат:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = -z' \end{cases}.$$

Задача 249. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК относительно плоскости, проходящей через одну из координатных осей.

Решение. Пусть плоскость σ содержит ось Oz и проходит через точку с координатами $(a, b, 0)$, где $a \neq 0 \neq b$. При симметрии относительно плоскости σ базисный вектор $\bar{k}$

остается неподвижным, а базисные векторы $\bar{i}, \bar{j}$ симметрично отражаются на плоскости Oxy относительно прямой $y = \frac{b}{a}x$. Пусть α – угол наклона прямой $y = \frac{b}{a}x$ к оси Ox .

Тогда можно воспользоваться результатами задачи 247:

$$\bar{i}' = (\cos 2\alpha) \bar{i} + (\sin 2\alpha) \bar{j}, \quad \bar{j}' = (\sin 2\alpha) \bar{i} - (\cos 2\alpha) \bar{j}.$$

$$\text{Матрица перехода имеет вид: } C = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = x' \cos 2\alpha + y' \sin 2\alpha \\ y = x' \sin 2\alpha - y' \cos 2\alpha \\ z = z' \end{cases}.$$

Задача 250. Приведение кривой 2-го порядка к каноническому виду.

Решение. Пусть на координатной плоскости Oxy дана кривая второго порядка

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где коэффициенты a, b и c одновременно не равны нулю. Перейдем к новой системе координат $Ox'y'$ с помощью поворота осей координат вокруг начала координат на угол α против часовой стрелки.

Обозначим через X столбец координат произвольной точки M плоскости в старой системе координат, через $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ – столбец координат этой же точки M в новой

системе координат, $P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол α .

Тогда в матричной форме формулы преобразования координат имеют вид: $X = P_{\alpha} X'$.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad L = (d, e).$$

Тогда уравнение кривой можно записать в матричной форме: $X^t A X + L X + f = 0$.

Подставим в уравнение кривой формулы преобразования координат. Эту подстановку удобнее и нагляднее осуществлять в матричной форме. Получаем:

$$(P_{\alpha} X')^t A (P_{\alpha} X') + L (P_{\alpha} X') + f = 0,$$

$$(X')^t P_{\alpha}^t A P_{\alpha} X' + (L P_{\alpha}) X' + f = 0.$$

Обозначим

$$A' = P_{\alpha}^t A P_{\alpha} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}, \quad L' = L P_{\alpha} = (d', e').$$

То, что матрица A' оказывается симметрической, легко проверяется.

Теперь, в новой системе координат $Ox'y'$ уравнение кривой имеет вид

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

Выберем угол поворота α так, чтобы $b' = 0$. Выполняя умножение матриц $P_{\alpha}^t A P_{\alpha}$, легко находим:

$$b' = \frac{1}{2}(c - a) \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha.$$

Уравнение

$$\frac{1}{2}(c - a) \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha = 0$$

назовем уравнением угла поворота.

Рассмотрим 2 случая.

1) $a = c$. Тогда $b' = 0$, если $\cos 2\alpha = 0$, т.е. угол поворота α можно выбрать равным 45° .

2) $a \neq c$, тогда $\cos 2\alpha \neq 0$ и уравнение $b' = 0$ можно разделить на $\cos 2\alpha$. Получаем:

$$\frac{1}{2}(c - a) \tan 2\alpha + b = 0 \quad \text{или} \quad \tan 2\alpha = \frac{2b}{a - c}.$$

Осуществив поворот на выбранный угол α , мы получаем уравнение кривой, не содержащее произведение $x'y'$:

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0.$$

Далее, если оба коэффициента a', c' не равны нулю, то выделяем полные квадраты и приводим уравнение кривой к виду:

$$a'(x' - m)^2 + c'(y' - n)^2 + f' = 0$$

и выполняем преобразование параллельного переноса системы координат $Ox'y'$ на вектор (m, n) . Получаем каноническую для данной кривой систему координат $O'x''y''$. Формулы параллельного переноса:

$$X' = X'' + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Если коэффициент $f' \neq 0$, то в этом случае мы получаем каноническое уравнение кривой вида:

$$\frac{x''^2}{\frac{f'}{a'}} + \frac{y''^2}{\frac{f'}{c'}} = 1.$$

Кривая оказывается либо эллипсом, либо гиперболой, либо мнимым эллипсом.

Если коэффициент $f' = 0$, то в этом случае мы получаем каноническое уравнение кривой вида:

$$a'(x' - m)^2 + c'(y' - n)^2 = 0,$$

т.е. либо точку, если $a'c' > 0$, либо, в противном случае, пару пересекающихся в начале координат прямых.

Рассмотрим случай, когда один из коэффициентов a', c' равен нулю. Пусть, например, $a' = 0$. Уравнение кривой имеет вид:

$$c'y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0.$$

Выделяем полный квадрат и группируем слагаемые следующим образом:

$$c'(y' - n)^2 + d'(x' - m) = 0.$$

После выполнения параллельного переноса системы координат $Ox'y'$ на вектор (m, n) , получаем каноническое уравнение кривой уже в системе координат $O'x''y''$:

$$c'y''^2 + d'x'' = 0 \quad \text{или} \quad y''^2 = 2px''.$$

Если здесь коэффициент $p < 0$, то можно выполнить преобразование симметрии системы координат $O'x''y''$ относительно оси $O'y''$, при котором абсцисса меняет знак на противоположный, и мы получим каноническое уравнение параболы.

Замечание. Полную классификацию кривых 2-го порядка смотри в приложении к этой части методического пособия.

Пример. Используя преобразования системы координат, приведите к каноническому виду уравнение кривой

$$41x^2 + 34y^2 - 24xy + 110x - 20y + 25 = 0.$$

Определите вид кривой и выпишите формулы преобразования координат, приводящие данную кривую к каноническому виду.

Решение. Выписываем уравнение угла поворота:

$$\frac{1}{2}(c - a)\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha = 0,$$

где $a = 41$, $c = 34$, $b = -12$. Подставляя эти числа в уравнение, получаем:

$$-\frac{7}{2}\sin 2\alpha - 12\cos 2\alpha = 0, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}.$$

Полагаем, что $2\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Вычисляем

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = -\frac{7}{25},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Матрица поворота на угол α :

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Формулы преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}, \quad L = (110; -20).$$

Уравнение кривой в матричной форме:

$$X^t A X + L X + 25 = 0.$$

Подставляем формулы преобразования координат:

$$X'^t P_\alpha^t A P_\alpha X' + L P_\alpha X' + 25 = 0.$$

Вычисляем:

$$A' = P_\alpha^t A P_\alpha = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix},$$

$$L' = L P_\alpha = \frac{1}{5} (110; -20) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (50; -100).$$

После поворота старой системы координат на угол $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$, получили систему координат $Ox'y'$ в которой уравнение кривой имеет вид:

$$X'^2 A'X' + L'X' + 25 = 0$$

или

$$25x'^2 + 50y'^2 + 50x' - 100y' + 25 = 0.$$

Сокращаем на 25:

$$x'^2 + 2y'^2 + 2x' - 4y' + 1 = 0$$

Выделяем полные квадраты:

$$x'^2 + 2x' = (x' + 1)^2 - 1, \quad 2y'^2 - 4y' = 2(y' - 1)^2 - 2,$$

откуда получаем:

$$(x' + 1)^2 + 2(y' - 1)^2 = 2$$

или

$$\frac{(x' + 1)^2}{2} + (y' - 1)^2 = 1.$$

Выполним параллельный перенос системы координат $Ox'y'$ на вектор $(-1; 1)$, т.е. положим:

$$\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' - 1 \end{cases}.$$

Получаем каноническое уравнение кривой в системе координат $O'x''y''$:

$$\frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1.$$

Найдем формулы преобразования координат, приводящие данную кривую к каноническому виду. Сначала мы выполнили поворот, а затем параллельный перенос:

$$X = P_{\alpha} X' = P_{\alpha} \left(X'' + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Расписав по координатам, получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(3x'' - 4y'' - 7) \\ y = \frac{1}{5}(4x'' + 3y'' - 1) \end{cases}.$$

Ответ: 1) канонический вид: $\frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1$ – эллипс;

2) формулы преобразования координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}(3x'' - 4y'' - 7) \\ y = \frac{1}{5}(4x'' + 3y'' - 1) \end{cases}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

227. Определить, линейно зависима или независима система из двух столбцов: а) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$; б) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$.

228. Определить, линейно зависима или независима данная система столбцов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

229. Определить, линейно зависима или независима система столбцов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

230. Разложить столбец B по базису $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, если:

$$\text{а) } B = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } B = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix}, (A_1, A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

231. Найти нетривиальное представление нуля линейно зависимой системой столбцов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

232. В данной линейно зависимой системе столбцов найти вектор, линейно выражающийся через остальные векторы этой системы и найти это выражение:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

233. Найти ранг системы столбцов и максимальную линейно независимую подсистему:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

234. Найти размерность и базис линейной оболочки системы столбцов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

235. Разложить каждый столбец системы векторов по базису линейной оболочки данной системы векторов.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

236. Найти размерность и базис подпространств $M = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, $L = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ и их суммы, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

237. Найти размерность и базис пересечения подпространств $M = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, $L = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

238. В условиях предыдущей задачи 237, найти базисы подпространств, содержащие базис их пересечения.

239. Дополнить до базиса арифметического пространства систему столбцов $\{A_1, A_2, A_3\}$, если

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

240. Найдите матрицу перехода от базиса $\{a_1, a_2, a_3\}$ к базису $\{b_1, b_2, b_3\}$, если

$$a_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

241. Докажите, что система столбцов $\{f_1, \dots, f_4\}$ образует базис пространства R^4 . Найдите координаты вектора $x = 7f_1 + 14f_2 - f_3 + 2f_4$ относительно базиса, в котором заданы своими координатами базисные векторы:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

242. В ПДСК Оху дано уравнение кривой $x^2 - y^2 - a^2 = 0$. Выпишите формулы преобразования координат при повороте системы координат Оху на угол 45° по часовой

стрелке вокруг начала координат. Найдите уравнение данной кривой в полученной после поворота новой системе координат $Ox'y'$.

243. В ПДСК $Oxyz$ дано уравнение поверхности 2-го порядка: $x^2 + y^2 + 25z^2 + 6x - 4y - 12 = 0$. Найти каноническое уравнение поверхности и определить ее вид. Найти каноническую для этой поверхности систему координат и выписать формулы их преобразования.

244. В системе координат Oxy дана точка $M(-4; 3)$ и точка $O'(6; -1)$. Найти координаты точки M в новой системе координат $O'x'y'$, которая получается из старой параллельным переносом на вектор $\overline{OO'}$ с последующим поворотом вокруг точки O' против часовой стрелки на угол

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

245. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК в пространстве относительно оси ординат. Найдите координаты точки $A(1; -4; 3)$ в новой системе координат.

246. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК на плоскости относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

247. Найти формулы преобразования координат при симметрии ПДСК на плоскости относительно биссектрисы 2-го и 4-го координатных углов.

248. Найти формулы преобразования координат вектора при симметрии ПДСК в пространстве относительно координатной плоскости Oxz .

249. Найти формулы преобразования координат вектора при симметрии ПДСК в пространстве относительно плоскости, проходящей через координатную ось Ox и точку $M(0; 1; 1)$.

250. Используя преобразования системы координат, приведите к каноническому виду уравнение кривой $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$. Определите вид кривой и выпишите формулы преобразования координат, приводящие данную кривую к каноническому виду. Постройте чертеж кривой в первоначальной системе координат.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Классификация кривых второго порядка.

1. Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3. Парабола: $y^2 = 2px$.

4. Две пересекающиеся прямые: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

5. Две параллельные прямые: $x^2 = a^2$.

6. Две совпадающие прямые: $x^2 = 0$.

7. Мнимый эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.

8. Две мнимые пересекающиеся прямые: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$.

9. Две мнимые параллельные прямые: $x^2 = -a^2$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1985. – 392 с.
3. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – 288 с.
4. Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. – М.: Высшая школа, 1985. – 120 с.
5. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
6. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия в 2-х частях. Часть 2. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – 269 с.
7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1978. – 384 с.
8. Сборник задач по алгебре: Учеб. пособие/Под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
9. Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Минск: Вышэйшая школа, 1968. – 504 с.
10. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
11. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1988. – 288 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Список задач	4
Глава 27. Арифметическое пространство столбцов	6
Глава 28. Матрица перехода и преобразования системы координат на плоскости и в пространстве	54
Упражнения	85
Приложение	90
Список рекомендуемой литературы	91

Головизин Вячеслав Владимирович

Основные задачи курса «Алгебра и геометрия».
Часть 5. Арифметическое векторное пространство
и преобразования систем координат

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор В.В. Головизин
Верстка В.И. Родионов

Пописано в печать __.12.09. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. __. Уч.-изд. л. __.
Тираж 50 экз. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел УдГУ
Типография ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4