

Федеральное агентство по образованию РФ
ГОУВПО «Удмуртский государственный университет»
Факультет информационных технологий
и вычислительной техники

Е.В. Новикова, А.Г. Родионова, Н.В. Родионова

Начала математического анализа

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2009

УДК 517.9
ББК 22.161
Н 60

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ
Рецензент: к.ф.-м.н. **А.Г. Ицков**

Новикова Е.В., Родионова А.Г., Родионова Н.В.
Н60 Начала математического анализа: учеб.-метод. пособие. Ижевск, 2009. 80 с.

Учебно-методическое пособие содержит задания для практических занятий по математическому анализу. Оно состоит из восьми глав, каждая из которых снабжена кратким обзором заявленной темы. В помощь студенту разобраны примеры. Нумерация заданий сквозная.

Пособие рассчитано на студентов, изучающих курс математического анализа. Оно может быть рекомендовано преподавателям для проведения практических занятий и для подготовки индивидуальных заданий студентам. Его можно использовать в качестве типового расчета. Пособие может быть полезно учителям математики и информатики профильных классов.

УДК 517.9
ББК 22.161

© Новикова Е.В., 2009
© Родионова А.Г., 2009
© Родионова Н.В., 2009

Предисловие

Математический анализ – одна из основных и наиболее сложных математических дисциплин.

Для изучения математического анализа требуются знания из различных областей математики: теории множеств, логики и дискретной математики. В учебниках по математическому анализу предполагается, что студенты или уже знают определенные темы, или параллельно им даются необходимые знания. Стоит отметить, что в рамках учебной нагрузки нет возможности детально рассматривать те сопутствующие области математики, которые требуются для изучения математического анализа. Но, в соответствии с новыми стандартами образовательных программ, значительная часть времени у студентов должна быть направлена на самоподготовку. Поэтому возникает необходимость выпуска пособия, включающего те разделы математики, которые недостаточно освещены в литературе, и которые необходимы для хорошего усвоения материала по математическому анализу.

Данное математическое пособие позволит в какой-то степени разрешить существующую проблему.

Пособие разбито на главы. В каждой главе кратко изложен материал по заявленной теме, разобраны примеры. В конце каждой главы приведены задания. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной подготовки студентов. Нумерация глав и заданий сквозная.

В заключение отметим, что пособие может быть полезно преподавателям, студентам ВУЗов, а также учителям математики, ведущим занятия в профильных классах.

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Математическое понятие множества элементов принимается в качестве первоначального.

Немецкий математик Г. Кантор в 1872 г. определил множество как «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Множество задается правилом или признаком, с помощью которого можно определить принадлежность элемента множеству.

Как правило, множества обозначаются заглавными буквами латинского, греческого и других алфавитов, а элементы множества – малыми буквами. Запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A (или a входит в A ; принадлежит A); если a не является элементом множества A , то пишут $a \notin A$.

$A = \{ a \mid P(a) \} = \{ a : P(a) \}$ – множество элементов a , удовлетворяющих свойству P .

Приведем обозначения для часто употребляемых множеств: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – множество натуральных, целых, рациональных, действительных (вещественных), комплексных чисел соответственно.

Определение 1. Если каждый элемент множества B принадлежит множеству A , то множество B называется подмножеством множества A и записывается следующим образом: $B \subset A$ (или $A \supset B$).

Замечание. Очевидно, $A \subset A$.

Определение 2. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$.

Замечание. Очевидно, $\emptyset \subset A$.

Определение 3. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что A равно B и пишут $A = B$.

Замечание. Запись $A \neq B$ означает, что A не равно B (множества A и B не совпадают).

Определение 4. Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B \doteq \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Замечание. $\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$ – объединение семейства множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$.

Определение 5. Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B \doteq \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Замечание. $\bigcap_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$ – пересечение семейства множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$.

Определение 6. Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B \doteq \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Определение 7. Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B \doteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Определение 8. U – универсальное множество (универсум), т.е. множество, которое определяется некоторым свойством. Если $A \subset U$, то $\bar{A} \doteq U \setminus A$ – дополнение A .

Пусть X некоторое множество, а $P(X)$ – система всех подмножеств множества X .

Определение 9. Непустое семейство $\Omega \subset P(X)$, замкнутое относительно операций объединения, пересечения и разности множеств, называется кольцом множеств.

Определение 10. Множество $E \in \Omega$ называется единицей семейства Ω , если для любого $A \in \Omega$: $A \cap E = A$.

Определение 11. Кольцо множеств, содержащее в качестве своего элемента единицу, называется алгеброй множеств.

Определение 12. Семейство множеств Ω называется полукольцом, если оно содержит пустое множество, и если для любого множества $A \in \Omega$ и любого $A_1 \subset A$ существуют такие множества $A_2, \dots, A_n \in \Omega$, что $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, причем $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Приведем без доказательства законы булевой алгебры множеств.

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (законы коммутативности)
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (законы ассоциативности).
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (законы дистрибутивности).
4. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (законы де Моргана).
5. $\bar{\bar{A}} = A$ (закон дополнения дополнения).
6. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$ (законы идемпотентности).
7. $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$.
8. $A \cup \bar{A} = U$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
9. $A \cup U = U$; $A \cap U = A$.
10. $\bar{\emptyset} = U$; $\bar{U} = \emptyset$.

Пример 1. Доказать равенства (законы поглощения)

$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$

Решение. Используя законы булевой алгебры множеств, имеем:

$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B).$$

Теперь докажем, что

$$A \cap (A \cup B) = A. \quad (1)$$

Для этого докажем два включения

$$A \cap (A \cup B) \subset A \quad \text{и} \quad A \cap (A \cup B) \supset A.$$

Если $x \in A \cap (A \cup B)$, то $x \in A$ и $x \in A \cup B$, следовательно,

$$A \cap (A \cup B) \subset A. \quad (2)$$

Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$, поэтому $x \in A \cap (A \cup B)$, т. е.

$$A \subset A \cap (A \cup B). \quad (3)$$

Из включений (2) и (3) следует равенство (1).

Пример 2. Используя законы булевой алгебры множеств, упростить выражение

$$A \cup (B \cap \overline{A \cap B}). \quad (4)$$

Решение. Используя законы де Моргана, имеем
 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, тогда по дистрибутивному закону

$$B \cap (\overline{A \cap B}) = (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}).$$

Так как $B \cap \overline{B} = \emptyset$, то

$$B \cap (\overline{A \cap B}) = (B \cap \overline{A}) \cup \emptyset = B \cap \overline{A}.$$

Таким образом, $A \cup (B \cap \overline{A \cap B}) = A \cup (B \cap \overline{A})$. Используя дистрибутивный закон, имеем

$$A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}). \quad (5)$$

Так как $A \cup \overline{A} = U$, то равенство (5) примет вид

$$(A \cup B) \cap U = A \cup B.$$

Таким образом, выражение (4) равно $A \cup B$.

ЗАДАНИЕ 1

Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, если заданы множества A и B .

1. $A = [1; 2; 5]$, $B = [0; 1]$.
2. $A = [3; 5; 6)$, $B = (2; 5)$.
3. $A = (6; 7)$, $B = (4; 8)$.
4. $A = (-4; 5)$, $B = [-5; -1]$.

$$5. A = (4; 5; 9], B = [5; 6; 5].$$

$$6. A = \{x: x-4 < 0\}, B = \left\{x: \frac{x+3}{x-2} \geq 0\right\}.$$

$$7. A = \{x: x^2 - 9 < 0\}, B = \{x: x(x-4)(x+2) > 0\}.$$

$$8. A = \{x: x^2 + 6 \geq 0\}, B = \left\{x: \frac{(x-3)(x+4)}{x} \leq 0\right\}.$$

$$9. A = \{x: 2^x < 4\}, B = \left\{x: \frac{x^2(x-1)}{x+1} > 0\right\}.$$

$$10. A = \{x: 5^{x^2-25} < 1\}, B = \left\{x: \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} < 2\right\}.$$

$$11. A = \left\{x: 3^{x^2-4x} > \frac{1}{27}\right\}, B = \{x: x^2(2x-1)(x^3+7x-8) < 0\}.$$

$$12. A = \left\{x: \left(\frac{1}{7}\right)^{-2x-1} < \frac{1}{49}\right\}, B = \{x: x^3 + 5x - 6 \leq 0\}.$$

$$13. A = \{x: 2^{x^2+6x+5} < 1\}, B = \{x: \log_3(3-4x) > 2\}.$$

$$14. A = \{x: \log_3(x+3) > 2\}, B = \{x: 3^{x^2+3} > 81\}.$$

$$15. A = \left\{x: \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq 3\right\}, B = \left\{x: \frac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x-4)^3} < 0\right\}.$$

$$16. A = \{x: \sqrt{x+1} \geq 2x\}, B = \left\{x: \frac{(x-2)(x-3)}{x^2} < 0\right\}.$$

$$17. A = \{x: \sqrt{x+7} < x\}, B = \left\{x: 2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4\right\}.$$

$$18. A = \{x: \sqrt{x} < x-2\}, B = \{x: (x-7)(3-x) < 0\}.$$

19. $A = \{x: \sqrt{x^2 - 5} \geq 4x\}$, $B = \{x: \log_5(x^2 + 4x) < 1\}$.
20. $A = \{x: |2x+1| \geq 1\}$, $B = \left\{x: \frac{x^2 + 7x - 8}{(x-4)(x+1)} < 0\right\}$.
21. $A = \{x: x(x^2 + 1) > 0\}$, $B = \left\{x: \left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2 \geq 0\right\}$.
22. $A = \{x: (x+2)(x+3)(x-3)^2 \geq 0\}$, $B = \{x: 2|x+1| \geq x-1\}$.
23. $A = \left\{x: \frac{(x-5)(2-x)(x-6)^4(2x-6)^3}{x^2(x-4)} > 0\right\}$,
 $B = \{x: x^2 - 4|x| < 12\}$.
24. $A = \{x: |x+2| + 4 \geq 2x\}$, $B = \left\{x: \frac{x^2 + x + 1}{(x-3)^3} < 0\right\}$.
25. $A = \{x: |x| + |x-2| \leq 0\}$, $B = \left\{x: 7^{\frac{x-4}{x+5}} < 1\right\}$.

ЗАДАНИЕ 2

Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна следующие множества, считая, что $A \cap B \neq \emptyset$.

1. $A \cup \overline{B}$.
2. $\overline{A \cup B}$.
3. $\overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cup \overline{B}}$.
5. $\overline{A \cap B}$.
6. $\overline{\overline{A \cup B}}$.

7. $\overline{A \cap B} \cap \overline{B}$.
8. $\overline{\overline{A \cup B}}$.
9. $A \cup \overline{A \cup \overline{B}}$.
10. $A \Delta B$.
11. $(A \cup \overline{B}) \cap B$.
12. $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$.
13. $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$.

Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна следующие множества, исходя из того, что все три множества A , B и C пересекаются.

14. $A \cup (B \cap C)$.
15. $B \cap (\overline{C} \cup A)$.
16. $(A \cup B) \cup C$.
17. $\overline{A \cup B \cup C}$.
18. $A \cup (\overline{B} \cup \overline{C})$.
19. $\overline{\overline{A \cap B} \cup C}$.
20. $\overline{\overline{A \cap B} \cup \overline{C}}$.
21. $\overline{\overline{B \cup C} \cap A}$.
22. $B \setminus (A \cup C)$.
23. $(A \Delta B) \cap C$.
24. $\overline{A \cup C} \setminus B$.
25. $B \setminus \overline{A \cup C}$.

ГЛАВА II

БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Определение 1. Два элемента a и b называют упорядоченной парой, если указывается, какой из этих элементов первый, какой второй, и пишут (a, b) . При этом $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$, в частности, $(a, b) = (b, a)$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

Аналогичным образом определяется упорядоченная система, состоящая из n элементов $a_1, \dots, a_n : (a_1, \dots, a_n)$.

Определение 2. Пусть A и B – множества произвольной природы. Через $A \times B \doteq \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$ обозначим прямое или декартово произведение множеств A и B .

Замечание. Выражение $(a_1, \dots, a_n)$ часто называют упорядоченной n -кой или кортежем.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, n} \}$$

– прямое (декартово) произведение множеств $A_i, i = \overline{1, n}$.

Замечание. Если $A_i = A$ для всех $i = \overline{1, n}$, то

$$A^n \doteq \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}$$

– декартова (прямая) степень множества A .

Замечание. Если $B = A$, то $A \times A = A^2$ – декартов квадрат.

Определение 3. Подмножество $\rho \subseteq A \times B$ называется бинарным отношением на A и B (соответствием между множествами A и B).

Замечание 1. Вместо записи $(x, y) \in \rho$ часто используют обозначение $x \rho y$.

Замечание 2. Если $A = B$, то $\rho \subseteq A \times A = A^2$ называется бинарным отношением на A .

Определение 4. Отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

- рефлексивным, если $(x, x) \in \rho$ для всех $x \in A$;
- симметричным, если из того, что $(x, y) \in \rho$, следует, что $(y, x) \in \rho$ для всех $x, y \in A$;
- антисимметричным, если из того, что $(x, y) \in \rho$, $(y, x) \in \rho$, следует, что $y = x$;
- транзитивным, если из того, что $(x, y) \in \rho$, $(y, z) \in \rho$, следует, что $(x, z) \in \rho$ для всех $x, y, z \in A$.

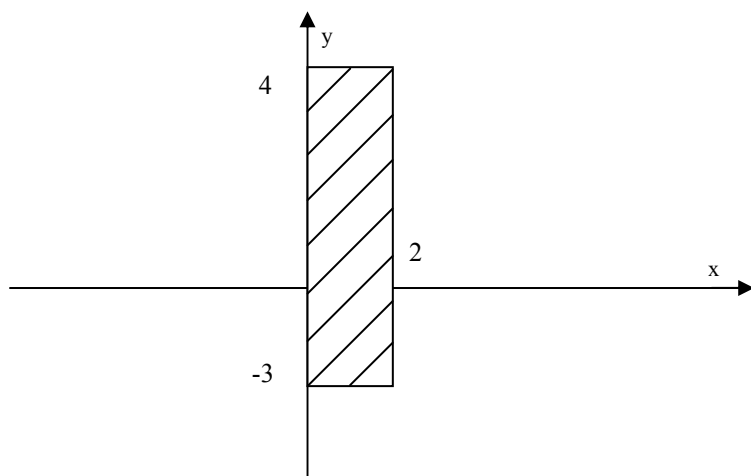
Определение 5. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение ρ называется отношением эквивалентности на множестве A и часто обозначается символом $\sim$. В этом случае $[x] \doteq \{ y \mid y \sim x \}$ – класс эквивалентности; $A / \sim \doteq \{ [x] \mid x \in A \}$ – фактор-множество множества A по отношению эквивалентности $\sim$.

Определение 6. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение ρ на множестве A называется отношением (нестрогого) частичного порядка на A и обозначается часто символом $\leq$. При этом элемент $a \in A$ – наибольший (наименьший) элемент, если $x \leq a$ (соответственно $x \geq a$) для всех $x \in A$.

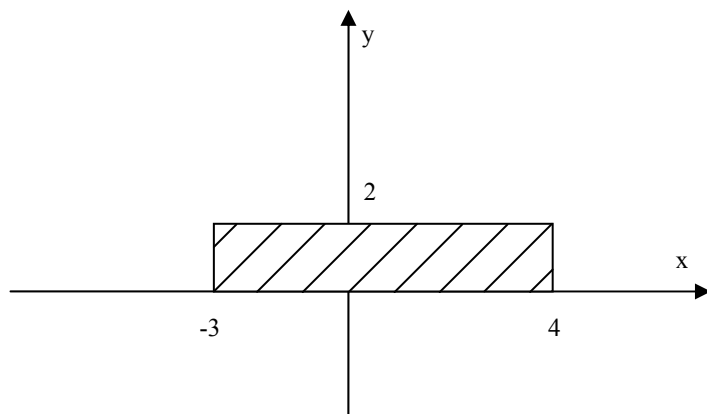
Пример 1. Пусть $A = [0, 2]$, $B = [-3, 4]$ – отрезки действительной прямой $\mathbb{R}$. Изобразить $A \times B$ и $B \times A$ на плоскости.

Решение. Имеем $A \times B = \{ (x, y) \mid x \in [0, 2], y \in [-3, 4] \}$.

На плоскости это множество изображено в виде прямоугольника:



$B \times A = \{ (x, y) \mid x \in [-3, 4], y \in [0, 2] \}$ – прямоугольник:



Легко видеть, что $A \times B \neq B \times A$.

Пример 2. Пусть $A = \{-7, 8, 9\}$, $B = \{-4, 6, 9\}$. Перечислить элементы бинарного отношения между элементами множеств A и B : полагаем $(x, y) \in \rho$ в том и только в том случае, если $x + y \vdots 5$.

Решение. Перечислим все элементы прямого произведения $A \times B$:

$$A \times B = \{ (-7; -4), (-7; 6), (-7; 9), (8; -4), (8; 6), (8; 9), (9; -4), (9; 6), (9; 9) \}.$$

Легко видеть, что число элементов $A \times B$ равно 9. Среди них только два элемента удовлетворяют условию $x + y \vdots 5$, а именно, $(9, -4)$, $(9, 6)$. Таким образом, $\rho = \{ (9, -4), (9, 6) \}$.

ЗАДАНИЕ 3

Найти бинарное отношение $\rho \subseteq A \times B$ при заданных A и B .

1. $A = \{1, 4, 3\}$, $B = \{-5, 6, 7\}$, $(x, y) \in \rho$, если $x > y$.
2. $A = \{1, 4, 3\}$, $B = \{-5, 6, 7\}$, $(x, y) \in \rho$, если $x^2 + y^2 \vdots 2$.
3. $A = [-2, 4]$, $B = [0, 3]$, $(x, y) \in \rho$, если $x \leq y$.
4. $A = [-2, 4]$, $B = [0, 4]$, $(x, y) \in \rho$, если $-2 \leq x < 0$; $0 \leq y \leq 1$. Изобразить $A \times B$ и ρ .
5. $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = [-1, 1]$. Изобразить $A \times B$.
6. $A = \{0, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$, $(x, y) \in \rho$, если $x \vdots y$.
7. $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, $B = [0, 1]$. Изобразить $A \times B$.
8. $A = [-1, 14]$, $B = [0, 1]$, $(x, y) \in \rho$, если $y \geq x^2$. Изобразить $A \times B$ и ρ .
9. $A = [-1, 1]$, $B = [0, 1]$, $(x, y) \in \rho$, если $y \leq |x|$. Изобразить $A \times B$ и ρ .
10. $A = (-\infty, +\infty)$, $B = [0, \pi/2]$, $(x, y) \in \rho$, если $y \leq \arctg x$. Изобразить $A \times B$ и ρ .

Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности на соответствующем множестве?

11. На множестве прямых на плоскости введено отношение параллельности.
12. На множестве прямых на плоскости введено отношение перпендикулярности.
13. На множестве вещественных чисел введено отношение равенства.
14. На множестве вещественных чисел введено отношение $\leq$.
15. На множестве вещественных чисел введено отношение $>$.
16. На множестве векторов введено отношение равенства.
17. На множестве матриц введено отношение равенства размерностей матриц.
18. На множествах введено отношение равенства множеств.
19. На множествах введено отношение «быть подмножеством», т. е. одно множество содержится в другом.
20. На множестве треугольников на плоскости введено отношение равенства площадей треугольников.
21. На множестве треугольников на плоскости введено отношение подобия треугольников.
22. На множестве людей введено отношение «не близкое родство».
23. На множестве людей введено отношение равенства возраста.

Построить бинарное отношение, обладающее следующими свойствами.

24. Рефлексивное, симметричное, не транзитивное.
25. Симметричное, транзитивное, не рефлексивное.

ГЛАВА III

ОТОБРАЖЕНИЕ. ФУНКЦИЯ

Определение 1. Однозначным отображением множества X в множество Y , или функцией, определенной на X со значениями в Y , называется правило (закон) f , которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие определенный (единственный) элемент $f(x) \in Y$.

Элемент $x \in X$ называется независимой переменной или аргументом функции f , элемент $f(x)$ называется значением функции f или образом элемента x ; элемент $x \in X$, в свою очередь, называется прообразом элемента $f(x) \in Y$.

Имеют место следующие обозначения:

$$f: X \rightarrow Y; \quad X \xrightarrow{f} Y; \quad y = f(x), \quad x \in X.$$

Определение 2. Пусть $A \subset X$, тогда множество $f(A) \doteq \{y = f(x) \mid x \in A\}$ – это образ множества A .

Определение 3. Пусть $B \subset Y$, тогда множество $f^{-1}(B) \doteq \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ – это прообраз множества B .

Упражнение. Пусть $A, B \subset X$. Покажите, что имеют место следующие соотношения:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B);$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Определение 4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется:
– инъективным (инъекцией или взаимно однозначным отображением), если образы различных элементов различны, т.е. для всех $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in X$): $f(x_1) \neq f(x_2)$;

– сюръективным (сюръекцией, или отображением множества X на множество Y), если $f(X) = Y$, или для любого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет хотя бы одно решение;

– биективным (или биекцией, или взаимно однозначным соответствием, или взаимно однозначным отображением множества X на множество Y), если оно инъективно и сюръективно, т.е. для любого $y \in Y$ уравнение $f(x) = y$ имеет ровно одно решение.

Определение 5. Пусть $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, f(X) \subset Y$. Тогда отображение g каждому элементу $f(x) \in f(X) \subset Y$ ставит в соответствие элемент $g(f(x)) \in Z$, т.е. каждому $x \in X$ поставлено в соответствие значение $g(f(x)) \in Z$. Таким образом, имеем новую функцию

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

которая называется композицией (суперпозицией) отображений f и g , или сложным отображением.

Сказанное можно представить следующей схемой:

$$\underbrace{X \rightarrow Y \rightarrow Z}_{g(f(x))}.$$

Определение 6. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – биекция. Тогда каждому $y \in Y$ соответствует единственный образ $x \doteq f^{-1}(y)$ такой, что $f(x) = y$. Имеем отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$, которое называется обратным отображением f , или обратной функцией функции f .

Замечание. Очевидно, что f – функция, обратная функции f^{-1} , поэтому f и f^{-1} называются взаимно обратными функциями. Для f и f^{-1} справедливы следующие соотношения:

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ для всех } y \in Y;$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ для всех } x \in X.$$

Упражнение. Пусть $A, B \subset Y$. Покажите, что имеют место следующие равенства:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B);$$

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B);$$

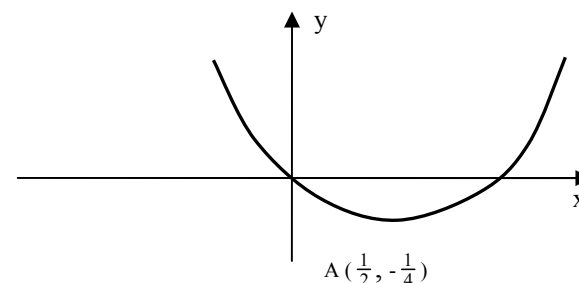
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Определение 7. Отображение (функция) $f: X \rightarrow Y$ называется продолжением отображения (функции) $g: X_1 \rightarrow Y$, а g – сужением f , если $X_1 \subset X$ и $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X_1$.

Пример 1. Найти биективное сужение функции

$$f(x) = x^2 - x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Решение. Данная функция не является инъективной, т. к. при $x_1 = 0$ и при $x_2 = 1$ ($x_1 \neq x_2$) имеем: $f(0) = f(1) = 0$. Нарисуем график этой функции:



Вершина параболы $A(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$. Функция убывает на промежутке $(-\infty; \frac{1}{2})$ и возрастает на промежутке $(\frac{1}{2}; +\infty)$. В ка-

честве инъективного сужения можно взять функцию, определенную на любом из этих промежутков. А какие еще промежутки можно взять в качестве инъективных сужений? Сколько их?

Возьмем промежуток $(-\infty; \frac{1}{2})$, т. е. $f : (-\infty; \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда $f((-\infty; \frac{1}{2})) = (-\frac{1}{4}, +\infty) \neq \mathbb{R}$, следовательно, f не является сюръективным отображением. Например, если взять $y = -2$, то уравнение $x^2 - x = -2$ не имеет решения.

Таким образом, $f : (-\infty; \frac{1}{2}) \rightarrow (-\frac{1}{4}, +\infty)$ инъективно и сюръективно, а, следовательно, биективно.

ЗАДАНИЕ 4

Найти область определения следующих функций.

1. $y = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$.
2. $y = \frac{1}{2x^2 + 3x + 1}$.
3. $y = \frac{x-3}{(x^2-4)(x^2+4)}$.
4. $y = \frac{2x-6}{(x^2-5x+4)(3x-1)}$.
5. $y = \frac{(x-2)(x+5)}{(x^3+7x-8)(2x-8)}$.
6. $y = \log_{x-3}(x+5)$.

7. $y = \log_2 \left(\frac{x+5}{2x-1} \right)$.
8. $y = \log_4 \left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-9} \right)$.
9. $y = \log_{\frac{x-2}{x+5}}(3x-9)$.
10. $y = \log_{2x+1}(6x+1)$.
11. $y = \sqrt{x-4}$.
12. $y = \sqrt{x^2-6x+5}$.
13. $y = \sqrt{x^3+10x-11}$.
14. $y = \frac{\sqrt{2x^2+3x+1}}{9x^2-1}$.
15. $y = \sqrt{\frac{(2x-1)(x-4)}{x^2-9}}$.
16. $y = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{5-10x} - \frac{1}{16}}$.
17. $y = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$.
18. $y = x - \sqrt[3]{x^2} + 6$.
19. $y = \arcsin \left(\frac{1}{2} + x^2 \right)$.
20. $y = \frac{\arccos(6x+7)}{(x^2+1)^3}$.
21. $y = \operatorname{arctg}(x^2+6x+12)$.

$$22. y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+4}}{6-x^2}.$$

$$23. y = \sqrt[10]{1-0,1^{6x+18}}.$$

$$24. y = \frac{\sqrt{\log_2 2x-1}}{x^2-x^3}.$$

$$25. y = \frac{\sqrt[7]{(x^2-4)(x+3)}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}}}.$$

ЗАДАНИЕ 5

Найти множество значений следующих функций.

$$1. y = 3 \sin 4x.$$

$$2. y = \frac{1}{5} \cos x.$$

$$3. y = \operatorname{tg} x.$$

$$4. y = 3 \sin x + 4.$$

$$5. y = \cos(4x-1) + 3.5.$$

$$6. y = 3,5 \cos x + 3.$$

$$7. y = \frac{1}{2} \sin \frac{x^2+6x}{3x} - 1.$$

$$8. y = 3 \sin 5x + 4 \cos 5x.$$

$$9. y = \cos \left(\frac{x^2+3x}{2} \right) - \sin \left(\frac{x^2+3x}{2} \right).$$

$$10. y = x^2 + 6x - 7.$$

$$11. y = -x^2 - 7x - 6.$$

$$12. y = |x^2 - 4x + 3|.$$

$$13. y = \frac{1}{3} |2x^2 + 3x + 1|.$$

$$14. y = 2^{x-1}.$$

$$15. y = 3^{x+6} - 7.$$

$$16. y = \left(\frac{1}{4} \right)^{2x+1} + 1,5.$$

$$17. y = \log_2 x.$$

$$18. y = 1,5 + \log_{2,5} x.$$

$$19. y = \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2+1}{2} \right).$$

$$20. y = \sqrt{x+1}.$$

21. Найти наименьшее значение функции:

$$g(x) = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{27} - x^2 \right).$$

22. Найдите множество значений функции $y = \sin 2x$, если

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi \right].$$

23. Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = \sqrt{49-x^2}$ на отрезке $[-2\sqrt{10}; 2\sqrt{6}]$.

$$24. y = \log_{0,1} \left(\frac{300}{1+\lg(100+x^2)} \right).$$

$$25. y = \frac{9}{\pi} \arccos \left(\frac{3\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4\sqrt{2}} \right).$$

ЗАДАНИЕ 6

Найти биективное сужение функций ($D(f)$ – область определения функции $f(x)$).

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3, x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = |x^2 - 2x - 3|, x \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sin 3x + \cos 3x, x \in \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \ln(x^2 - 2x), x \in D(f)$.
5. $f(x) = |\ln(x^2 - 2x)|, x \in D(f)$.
6. $f(x) = x^3 - x^2, x \in \mathbb{R}$.
7. $f(x) = |x| + |x + 2|, x \in \mathbb{R}$.
8. $f(x) = \frac{x+2}{x+3}, x \in D(f)$.
9. $f(x) = \left| \frac{x+2}{x+3} \right|, x \in D(f)$.
10. $f(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$.
11. $f(x) = e^{x^2-x}, x \in \mathbb{R}$.
12. $f(x) = x^2 - 2|x| - 3, x \in \mathbb{R}$.
13. $f(x) = |x^2 - 2|x| - 3|, x \in \mathbb{R}$.
14. $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$.
15. $f(x) = |\sin x|, x \in \mathbb{R}$.
16. $f(x) = \sin |x|, x \in \mathbb{R}$.

Укажите, какая из функций инъективна, сюръективна или биективна, если $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$.

17. $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$.

18. $f(x) = |x|$.

19. $f(x) = \frac{x^2 + x}{2}$.

20. $f(x) = -x^2 + 1$.

21. $f(x) = 3^{x-1}$.

22. $f(x) = \frac{|x| + 1}{2}$.

23. Пусть $f(x) = \cos x$. Найти $f\left([0, \frac{\pi}{6}]\right)$.

24. Пусть $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Найти $f([-3, 5])$.

25. Пусть $f(x) = 2^{x^2}$. Найти $f([-3, 17])$.

ГЛАВА IV

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Определение 1. Множества A и B называются эквивалентными ($A \sim B$) (равномощными), если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), и в этом случае A и B имеют одно и то же кардинальное число.

Определение 2. Множество называется счетным, если $A \sim N$, при этом мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$ (алеф-ноль). (Другими словами: $m(A) = \aleph_0$.)

Упражнение. Покажите, что объединение конечного или счетного числа счетных множеств есть счетное множество.

Определение 3. Множество A называется конечным, если существует натуральное число n такое, что число элементов A равно n : ($m(A) = n$). В противном случае множество называется бесконечным.

Определение 4. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным.

Определение 5. Множество, эквивалентное множеству всех действительных чисел отрезка $[0,1]$, называется множеством мощности континуум, и его мощность обозначается символом c (или символом $\aleph$).

Теорема Кантора. Множество всех действительных чисел отрезка $[0,1]$ несчетно.

Для мощностей конечных множеств имеется понятие «больше» и «меньше». Приведем основную формулу для нахождения числа элементов объединения двух конечных множеств A и B :

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \quad (1)$$

Заметим, что формулу (1) можно распространить для числа элементов объединения любого числа множеств.

Пример 1. Доказать эквивалентность множеств $[0,1]$ и $[0,1)$.

Решение. Отображение

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq \frac{1}{n}, \text{ где } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n+1}, & \text{если } x = \frac{1}{n}, \text{ где } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $[0,1]$ и $[0,1)$.

Пример 2. Из 62 выпускников школы сдавали ЕГЭ по физике 35 человек, по информатике 30, по обоим предметам 16 человек. Сколько выпускников выбрали другие предметы? Сколько сдавали ЕГЭ только по одному из перечисленных предметов?

Решение. Обозначим множество выпускников школы U (универсальное множество), множество «физиков» – A ; «информатиков» – B , тогда $m(U) = 62$, $m(A) = 35$, $m(B) = 30$. Ученики, сдававшие оба ЕГЭ, составляют множество $A \cap B$; те, кто сдавал, по крайней мере, один из двух экзаменов – множество $A \cup B$. Учитывая, что $m(A \cap B) = 16$, по формуле (1) находим: $m(A \cup B) = 35 + 30 - 16 = 49$.

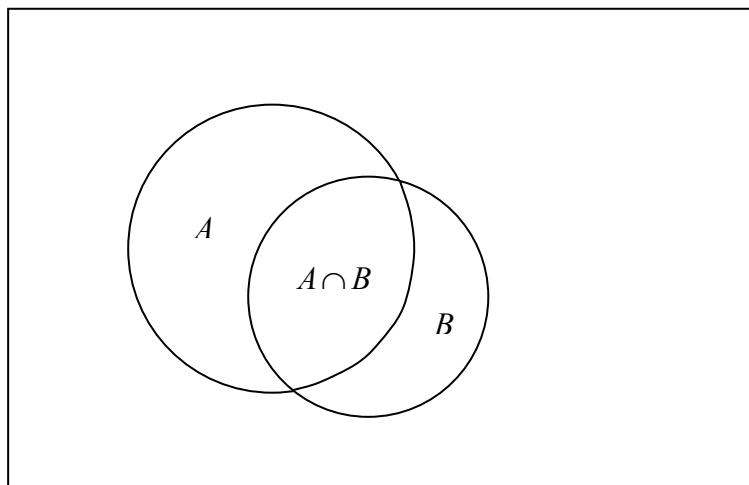
Выпускники, выбравшие другие предметы, образуют множество $U \setminus (A \cup B)$, их количество равно:

$$m(U \setminus (A \cup B)) = 62 - 49 = 13.$$

«Физики», не сдававшие информатику, составляют множество $A \setminus B$, $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B) = 35 - 16 = 19$.

«Информатики», не сдававшие физику – элементы множества $B \setminus A$, $m(B \setminus A) = m(B) - m(A \cap B) = 30 - 16 = 14$.

Задачу можно проиллюстрировать с помощью диаграммы Эйлера–Венна:



ЗАДАНИЕ 7

Установить взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y .

1. $X = [1; 3]$, $Y = [1; 5]$.
2. $X = [-1; 1]$, $Y = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
3. $X = [0; 1]$, $Y = [0; +\infty)$.
4. $X = [0; 1]$, $Y = [-5; 5]$.
5. $X = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $Y = (0; 1)$.
6. $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = (-1; 1)$.
7. $X = [2; 5]$, $Y = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

8. $X = (-\infty; 0]$, $Y = [1; 2)$.
9. $X = [-2\pi; \pi]$, $Y = (\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$.
10. $X = [0; 1]$, $Y = [a; b]$.
11. $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z}$.
12. $X = (0; \frac{1}{2})$, $Y = (-\infty; 0)$.
13. $X = [-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $Y = [-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$.
14. $X = (-1; +\infty)$, $Y = (-\infty; +\infty)$.
15. $X = (-\frac{\pi}{2}; \pi)$, $Y = (-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$.
16. $X = (1; 4)$, $Y = (\frac{1}{e}; e^2)$.
17. $X = [\frac{1}{8}; \sqrt{2}]$, $Y = [0; 1]$.
18. $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = (0; +\infty)$.
19. $X = (-\infty; 0]$, $Y = [0; +\infty)$.
20. $X = (-\pi; \pi]$, $Y = (0; 2]$.
21. $X = [a; b]$, $Y = [c; d]$.
22. $X = [0; +\infty)$, $Y = [2; +\infty)$.
23. $X = [-\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, $Y = [-\pi; \frac{\pi}{2}]$.
24. $X = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4})$, $Y = (-1; +\infty)$.
25. $X = [\frac{1}{3}; 9]$, $Y = [2; 5]$.

ГЛАВА V

ГРУППИРОВКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

Пусть имеется некоторое конечное множество X . Нужно составить из элементов этого множества некоторые группы, удовлетворяющие определенным свойствам, и выяснить, сколько таких групп можно получить.

Определение 1. Размещение с повторением из n элементов по m элементам – это конечная последовательность $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$ элементов множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Если все элементы размещения различны, то имеем размещение без повторений. Обозначим:

A_n^m – число размещений из n элементов по m ;

$\bar{A}_n^m = n^m$ – число размещений с повторениями;

$A_n^m = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$ – число размещений без повторений.

Определение 2. Перестановка из n элементов – это размещение без повторений из n элементов по n . Число перестановок равно $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (эн факториал).

Замечание. Для удобства полагают $P_0 = 0! = 1$.

Определение 3. Сочетаниями из n элементов по m называются группы элементов, состоящие из m элементов и отличающиеся друг от друга, по крайней мере, одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Бином Ньютона

Натуральную степень суммы двух слагаемых (бинома) можно вычислить по формуле, называемой биномом Ньютона:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + n \cdot a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \dots + b^n. \end{aligned}$$

Частными случаями бинома Ньютона при $n=2$ и $n=3$ являются формулы для квадрата суммы и куба суммы:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Число всех слагаемых бинома Ньютона равно $n+1$, общий член разложения обозначают $T_k = C_n^k a^{n-k} b^k$, $k=0, 1, \dots, n$.

Коэффициенты $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ называются биномиальными

коэффициентами. Отметим некоторые их свойства:

- крайние коэффициенты равны единице;
- коэффициенты членов, равностоящих от концов разложения, совпадают (т. к. $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k=0, 1, \dots, n$);
- сумма всех коэффициентов: $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Еще одно важное свойство позволяет получить путем сложения биномиальные коэффициенты для любого $n \in \mathbb{N}$: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, что наглядно отражает треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

В этой числовой таблице $(n+1)$ -я строка дает коэффициенты для разложения n -ой степени бинома $(a+b)^n$.

Пример 1 (Размещения с повторениями). Четверо студентов сдают экзамены. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительную оценку?

Решение. В данном примере рассматривается кортеж длиной 4, т.к. количество студентов 4. Любой элемент кортежа может быть выбран тремя способами, поскольку каждому студенту может быть поставлена оценка 5, 4 или 3. Следовательно, имеем дело с размещением с повторениями, и количество способов определяется по формуле: $\bar{A}_n^m = n^m$. Здесь $n = 3$, $m = 4$. Таким образом, число способов, которыми могут быть поставлены отметки, равно 3^4 .

Пример 2 (Размещения без повторений). Сколькими способами можно составить трехцветный флаг (три горизонтальные полосы равной ширины), если имеется материал пяти различных цветов?

Решение. Первую полосу флага мы можем выбрать из 5 цветов, т.е. существует 5 способов выбора цвета. Вторую полосу флага выбираем уже из 4 цветов, т.е. 4 способами. Третью полосу выбираем 3 способами. Здесь имеем размещение без повторений. Количество способов равно

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120.$$

Пример 3 (Перестановки). В турнире участвуют 6 человек. Сколькими способами могут быть распределены между ними места?

Решение. В данном примере имеют место перестановки без повторений. Соответственно, количество способов равно $P_6 = 6!$.

Пример 4 (Сочетания без повторений). Из 20 сотрудников лаборатории необходимо выбрать 5 человек для поездки в командировку. Сколько можно сформировать различных составов отъезжающих групп?

Решение. Всего составов

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15! \cdot 5!} = \frac{15! \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{15! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504.$$

Здесь имеет место сочетание без повторений.

ЗАДАНИЕ 8

Вычислить следующие величины.

1. $P_2 \cdot C_{50}^{48}$.
2. $P_3 \cdot A_{15}^{12}$.
3. $C_9^7 - 4A_7^3$.
4. $C_4^2 C_2^0 + C_6^5$.
5. $A_{10}^5 \cdot P_4$.
6. $\frac{5! A_8^3}{C_6^3}$.
7. $\frac{1}{4} C_{10}^7 - \frac{A_{12}^4}{P_6}$.
8. $\frac{C_6^4 + C_6^5 + C_6^6}{C_6^2 + C_6^1 + C_6^0}$.

ЗАДАНИЕ 9

9. $\frac{C_{200}^{198} + C_{20}^{18}}{C_{20}^2 + C_{200}^2}$.
10. $\frac{A_{12}^3 - A_{11}^3}{P_3}$.
11. $P_5 - A_6^2 \cdot P_2$.
12. $\frac{C_8^3 + C_8^1}{C_8^7 + C_8^5}$.
13. $\frac{(P_4 - P_3)}{C_{36}^{34}}$.
14. $\frac{C_{15}^{10} + 2 - C_7^3}{2 + C_{15}^5 - C_7^4}$.
15. $\frac{A_{11}^2}{A_5^2 + A_6^3}$.
16. $\frac{1 + C_{12}^9 + C_{15}^7}{C_{15}^8 + C_{19}^0 + C_{12}^3}$.

Найти все натуральные n , удовлетворяющие условию.

17. $C_n^4 = C_n^2$.
18. $2C_{n+7}^{n+4} = 21(n+6)$.
19. $A_{n+1}^2 = 3C_n^{n-3}$.
20. $C_n^{n-2} = 6P_3$.
21. $C_{n+1}^{n-3} \geq C_{n+1}^{n-1}$.
22. $C_{n-2}^{n-4} + 11 > 2C_n^{n-2}$.
23. $2C_{2n}^{2(n-1)} + A_{2n+1}^2 \leq 5!$.
24. $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.
25. $2C_{n-1}^{n-3} + A_{3n}^1 \leq 11$.

Сочетания и размещения.

1. Дано трехэлементное множество $B = \{2; 3; 6\}$. Используя цифры 2, 3, 6, составить все трехзначные числа, в запись каждого из которых каждая из данных цифр входит только один раз. Найти количество таких чисел.
2. Дано четырехэлементное множество $M = \{2; 7; 5; 3\}$. Используя цифры 2, 3, 5, 7 составить все четырехзначные числа, в запись каждого из которых каждая из данных цифр входит только один раз. Найти количество таких чисел.
3. Дано множество $K = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. При помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5 составить (без повторения цифр в числе) трехзначные числа. Найти количество таких чисел.
4. Сколькими способами Дима сможет покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски у него не ограничено, а каждую елку он красит только в один цвет?
5. Имеются 5 различных стульев и 7 рулонов обивочной ткани различных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку стульев?
6. Семеро студентов сдают экзамены. Сколькими способами им могут быть поставлены оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительную оценку?
7. Сколькими способами 12 человек могут быть распределены за круглым столом?

8. У Димы есть пять шариков: красный, зеленый, желтый, синий и золотой. Сколькими способами он сможет украсить ими пять елок, если на каждую требуется надеть ровно один шарик?
9. Сколькими способами он сможет украсить ими пять елок, если можно надевать несколько шариков на одну елку (и все шарики должны быть использованы)?
11. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?
12. Сколькими способами может формироваться тройка призеров Олимпиады из 20 бегунов?
13. Сколькими способами можно выбрать команду из пяти школьников в классе, в котором учатся 30 человек?
14. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных цветов?
15. На плоскости дано n точек. Сколько имеется отрезков с концами в этих точках?
16. Сколько диагоналей имеет выпуклый 10-угольник?
17. Сколько диагоналей имеет выпуклый k -угольник ($k > 3$)?
18. Сколько существует 6-значных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?
19. Сколькими способами 12 пятаков можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не оказался пустым?
20. На полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг, чтобы никакие две книги не стояли рядом?

Перестановки и сочетания.

21. Найдите сумму всех чисел, которые получаются перестановками цифр из числа 12345.
- Подсказка: Каждая цифра появляется на каждом месте одинаковое число раз.*
22. . В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?
23. В городе X имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живёт по одному человеку. В один прекрасный день каждый человек переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живёт один жилец). Доказать, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зелёной и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.
24. Из класса, в котором учатся 28 человек, на дежурство в столовую назначаются 4 человека. Сколькими способами это можно сделать? Сколько существует способов набрать команду дежурных, в которую попадет ученик этого класса Коля Васин?
25. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один математик?

ЗАДАНИЕ 10

Написать разложение по формуле бинома Ньютона и упростить выражение.

1. $(a+b)^5$.
2. $(2a+b)^4$.
3. $(a-b)^6$.
4. $(1-i)^7$, где $i^2 = -1$.
5. $(a+\sqrt{2})^6$.
6. $\left(2z - \frac{1}{2}\right)^5$.
7. $(x-y)^4$.
8. $(\sqrt{3} + \sqrt{6})^6$.
9. $\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{10}$, где $i^2 = -1$.
10. $\left(a + \frac{1}{2a}\right)^8$.
11. $(\sqrt{2}-1)^5$.
12. $(3+2t)^4$.
13. $\left(x - \frac{2}{y}\right)^6$.
14. $(2i-3)^5$, где $i^2 = -1$.
15. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^9$.

16. Найти номер члена разложения $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{15}$, не содержащего x .

17. Найти девятый член разложения $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^{13}$.

18. Найти седьмой член разложения $\left(\sqrt{z} + \frac{1}{z}\right)^{19}$.

19. Найти член разложения $\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x^2}\right)^6$, который содержит x^3 .

20. Найти пятый член разложения $\left(i - \frac{1}{2}\right)^{14}$, где $i^2 = -1$.

21. Найти два средних члена разложения $(a+b)^{13}$.

22. Найти два средних члена разложения $(2-i)^{11}$, где $i^2 = -1$.

23. В разложении бинома $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^5$ найти слагаемые, не содержащие иррациональности.

24. Найти m , если третье слагаемое разложения $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^m$

не содержит x . Выписать это слагаемое.

25. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна

1024. Найти восьмой член разложения $(1+i)^n$, где $i^2 = -1$.

ГЛАВА VI

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Определение 1. Дедукция – это умозаключение от общего к частному.

Определение 2. Индукция – это умозаключение от частного к общему.

Различают полную и неполную индукцию. Полная индукция заключается в том, что всё утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев. Например, неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$ можно доказать методом полной индукции. К сожалению, полная индукция имеет ограниченные применения в математике, т.к. многие математические утверждения охватывают бесконечное число частных случаев. В этом случае часто применяется метод рассуждений, который называется методом математической индукции. Принцип математической индукции заключается в следующем: если предложение $P(n)$, зависящее от натурального числа n , истинно для $n = 1$ ($n = n_0$), и из того, что $P(n)$ истинно при $n = k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для $n = k + 1$ ($P(k) \Rightarrow P(k + 1)$), то $P(n)$ истинно для любого (для $n \geq n_0$) натурального числа n . Доказательство методом математической индукции проводится следующим образом.

1°. Доказываемое утверждение $P(n)$ проверяется при $n = 1$ ($n = n_0$) – базис (база) индукции.

2°. Предполагается справедливость $P(n)$ при $n = k$ – индуктивное предположение.

3°. Доказывается справедливость утверждения при $n = k + 1$.

Пункты 2° и 3° можно записать в виде: $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, и эта процедура называется индуктивным шагом.

Пример 1. Доказать, что число $n^2 - n$ четное при любом натуральном n .

Решение. При $n = 1$ наше утверждение истинно: $1^2 - 1 = 0$ – четное число. Предположим, что $k^2 - k$ – четное число. Так как $(k + 1)^2 - (k + 1) - (k^2 - k) = 2k$, а $2k$ – четное число, то и $(k + 1)^2 - (k + 1)$ четное. Итак, четность выражения $n^2 - n$ доказана при $n = 1$, из четности $k^2 - k$ выведена четность $(k + 1)^2 - (k + 1)$. Значит, $n^2 - n$ четно при всех натуральных значениях n .

Пример 2. Доказать, что сумма квадратов n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Решение: Обозначим $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Очевидно, $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

$$\begin{aligned} \text{Предположим, что } S_2(k) &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \text{ Тогда} \\ S_2(k+1) &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, представление $S_2(n)$ верно для любого натурального n .

Пример 3. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Решение. Обозначим левую часть неравенства через S_n , тогда $S_2 = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$, следовательно, при $n = 2$ неравенство верно. Предположим, что $S_k > \frac{13}{24}$ при некотором k . Докажем, что тогда и $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. Имеем

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k},$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Сравнивая S_k и S_{k+1} , получаем

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.$$

При любом натуральном k правая часть последнего равенства положительна. Поэтому $S_{k+1} > S_k$. Но $S_k > \frac{13}{24}$, значит, и $S_{k+1} > \frac{13}{24}$.

ЗАДАНИЕ 11

Доказать справедливость утверждений при каждом натуральном n .

1. $n^3 + 11n$ делится на 6, т. е. $n^3 + 11n : 6$.

2. $7^n - 1 : 6$.
3. $4^n + 15n - 1 : 9$.
4. $10^n - 4^n + 3n : 9$.
5. $5^{n+3} 2^n - 125 : 45$.
6. $n^3 + 5n : 6$.
7. $2n^3 + 3n^2 + 7n : 6$.
8. $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} : 59$.
9. $n^2(n^4 - 1) : 60$.
10. $9^{n+1} - 18n - 9 : 18$.
11. $n^5 - n : 30$.
12. $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n : 19$.
13. $2^{2n} - 1 : 3$.
14. $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1} : 19$.
15. $11^{6n+3} + 1 : 148$.
16. $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n : 11$.
17. $7^{2n} - 1 : 48$.
18. $10^n + 18n - 28 : 27$.
19. $11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133$.
20. $2^{2n+1} + 1 : 3$.
21. $5^{n+3} + 11^{3n+1} : 17$.
22. $7^{2n} - 4^{2n} : 33$.
23. $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} : 17$.
24. $n^7 - n : 7$.
25. $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1} : 19$.

ЗАДАНИЕ 12

Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство.

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$
2. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$
3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$
4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$
5. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right).$
6. $2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1) = \frac{n(2n^2 + 9n + 1)}{6}.$
7. $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}.$
8. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$
9. $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \dots + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1).$
10. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$
11. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$
12. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

13. $\frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + \frac{7}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} = 1 - \frac{1}{7n+1}.$
14. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$
15. $(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$
16. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$
17. $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$
18. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$
19. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$
20. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$ (при $n \geq 2$).
21. $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$
22. $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$
 $= \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$
23. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ (при $n \geq 2$).
24. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{(2n+1)}.$
25. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}.$

ЗАДАНИЕ 13

Доказать методом математической индукции.

1. Доказать, что число $n^2 + n$ четное при любом $n \in \mathbb{N}$.
2. Доказать, что число $6^n + 20n + 24$ кратно 25, $n \in \mathbb{N}$.
3. Доказать формулу

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$
4. Доказать формулу $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$.
5. Доказать, что сумма n первых чисел натурального ряда равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

6. Доказать, что сумма кубов n первых нечетных чисел натурального ряда равна $n^2(2n^2 - 1)$.

7. Доказать, что

$$2^2 + 6^2 + \dots + (4n-2)^2 = \frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

8. Доказать, что сумма n первых нечетных чисел натурального ряда равна n^2 .

9. Доказать, что

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

10. Доказать неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha n$, $\alpha > -1$, $n > 1$, причем знак равенства имеет место только при $\alpha = 0$.

11. Докажите формулу бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

используя метод математической индукции.

12. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

13. Верно ли утверждение: при любом натуральном n справедливо неравенство $2^n > 2n + 1$.

14. Доказать, что если $n \geq 2$ и $x > 0$, то $(1+x)^n > 1+x^n$.

15. Доказать равенство:

$$5 + 9 \cdot 5 + 13 \cdot 5^2 + \dots + (4n+1) \cdot 5^{n-1} = n \cdot 5^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

16. Доказать, что $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, где $a+b > 0$, $a \neq b$, n – натуральное число, большее 1.

17. Доказать, что при всех допустимых значениях x имеет место тождество:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \\ = \frac{1}{x^2 - 1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

18. Доказать неравенство: $7^n > 5n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

19. Доказать неравенство: $4^n > 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

20. Доказать неравенство: $3^{2n} > 3n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

21. Доказать неравенство: $5^{3n} > 4n - 2$, $n \in \mathbb{N}$.

22. Вычислить сторону a_{2^n} правильного 2^n -угольника, вписанного в круг радиуса R .

23. На сколько треугольников (не обязательно выпуклых) может быть разбит n -угольник своими непересекающимися диагоналями?

24. Указать правило вычисления числа $P(n)$ способов, которыми выпуклый n -угольник может быть разбит на треугольники непересекающимися диагоналями.

25. На плоскости дано n окружностей. Доказать, что при любом расположении этих окружностей образуемую ими карту можно правильно раскрасить двумя красками.

ГЛАВА VII

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Высказывание является первоначальным понятием в математической логике.

Из всех свойств высказывания будем выделять его истинность или ложность. Высказывание будем обозначать заглавными буквами: $P, Q, \dots$. Если высказывание P истинно, то будем писать $И$ и сопоставлять число 1 ($f(P) = 1$). Если высказывание P ложно, то будем писать $Л$ и сопоставлять число 0 ($f(P) = 0$). Обычно задают некоторую начальную совокупность высказываний, называемых элементарными (исходными). Введем логические операции, исходя из элементарных высказываний, таким образом, получим новые (сложные) высказывания.

Операции над высказываниями

Отрицание. Отрицанием высказывания P называется новое высказывание, обозначаемое $\bar{P}$ ($\neg P$) (читается: «неверно, что P »; «не P »), которое считается истинным, если P ложно, и ложным, если P истинно.

Сказанное можно представить в виде таблицы (таблицы истинности):

Таблица 1

P	$\bar{P}$	или	$f(P)$	$f(\bar{P})$
$И$	$Л$		1	0
$Л$	$И$		0	1

Конъюнкция. Конъюнкцией высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ ($P \& Q$) (читается « P и Q »), которое считается истинным, если истинны оба высказывания P и Q , и ложным во всех остальных случаях.

Таблица 2

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \wedge Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таблица истинности для конъюнкции.

Дизъюнкция. Дизъюнкцией высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$ (читается « P или Q »), которое ложно, если ложны оба высказывания P и Q , и истинно во всех остальных случаях.

Таблица 3

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \vee Q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица истинности для дизъюнкции.

Импликация. Импликацией высказываний P и Q называется высказывание, обозначаемое $P \Rightarrow Q$ (читается: «если P , то Q », « P влечет Q », «из P следует Q »), которое ложно только в том случае, если P истинно, а Q — ложно.

Таблица 4

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Таблица истинности для импликации.

Замечание. Высказывание P называется посылкой (условием) импликации, а Q – ее заключением (следствием).

Эквивалентность. Эквивалентностью высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \Leftrightarrow Q$ (читается: « P эквивалентно Q », или « P тогда и только тогда, когда Q »), которое считается истинным, если P и Q одновременно истинны или ложны, и ложным в остальных случаях.

Таблица 5

$f(P)$	$f(Q)$	$f(P \Leftrightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таблица истинности для эквивалентности.

Формулы алгебры высказываний

Определение 1. Высказывательными переменными называются такие переменные, которые в качестве своих значений принимают конкретные высказывания. Такие переменные будем обозначать заглавными буквами.

Введем две специфические переменные: I – любое истинное высказывание; L – любое ложное высказывание.

Под формулой будем понимать следующее:

1. Каждая высказывательная переменная есть формула.
2. Если F и G – две формулы, то выражения $\bar{F}$, $\bar{G}$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$ являются формулами.
3. Не существует других формул, кроме тех, которые могут быть получены в результате применения конечного числа раз пунктов 1 и 2.

Например, выражение $((X \Leftrightarrow Y) \wedge Z)$ – это формула, а выражение $(X \Leftrightarrow)$ формулой не является.

Договорились записать внешних скобок у формул считать необязательным, т.е. $X \wedge Y$ будет тоже формулой. Для каждой формулы $F(X_1, \dots, X_n)$ алгебры высказываний можно составить таблицу истинности, которая имеет 2^n строчек.

Формула называется по последней операции.

Определение 2. Формула $F(X_1, \dots, X_n)$ называется тождественно истинной (или тавтологией), если значение формулы равно 1 при любых значениях $X_1, \dots, X_n$.

Например, формула $X \vee \bar{X}$ – тавтология.

Определение 3. Формулы $F_1(X_1, \dots, X_n)$ и $F_2(X_1, \dots, X_n)$ называются равносильными, если при всех возможных значениях переменных $X_1, \dots, X_n$ значения F_1 и F_2 совпадают.

Равносильность формулы F_1 и F_2 записывается следующим образом: $F_1 \equiv F_2$.

Укажем некоторые особо важные равносильные формулы.

1°. Законы коммутативности конъюнкции и дизъюнкции:

$$X \wedge Y \equiv Y \wedge X, \quad X \vee Y \equiv Y \vee X.$$

2°. Законы ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции:

$$(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z),$$

$$(X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee (Y \vee Z).$$

3°. Законы дистрибутивности:

$$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z),$$

$$X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z).$$

4°. Законы де Моргана:

$$\overline{X \wedge Y} \equiv \bar{X} \vee \bar{Y},$$

$$\overline{X \vee Y} \equiv \bar{X} \wedge \bar{Y}.$$

5°. Закон исключенного третьего:

$$X \vee \bar{X} \equiv \text{И.}$$

6°. Закон противоречия:

$$X \wedge \bar{X} \equiv \Lambda.$$

7°. Закон двойного отрицания:

$$\bar{\bar{X}} \equiv X.$$

8°. Закон контрапозиции:

$$X \Rightarrow Y \equiv \bar{Y} \Rightarrow \bar{X}.$$

9°. Закон силлогизма (правило цепного заключения):

$$((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (X \Rightarrow Z).$$

10°. Схема «от противного»:

$$(\bar{X} \Rightarrow Y) \wedge (\bar{X} \Rightarrow \bar{Y}) \Rightarrow X.$$

11°. Правило «модус поненс»:

$$(\bar{X} \wedge (X \wedge Y)) \Rightarrow Y.$$

Виды математических теорем

Математические теоремы могут быть представлены в виде следующей схемы:

$$X \Rightarrow Y. \quad (1)$$

Здесь X называется условием теоремы (посылкой), а Y – заключением.

Если верна теорема (1), то истинность высказывания Y называется необходимым условием для истинности X , а истинность X – достаточным для истинности Y .

Теорему (1) назовем прямой теоремой, и с ней можно связать еще три теоремы.

1. Противоположная теорема:

$$\bar{X} \Rightarrow \bar{Y}.$$

2. Обратная теорема:

$$Y \Rightarrow X.$$

3. Обратнo–противоположная теорема:

$$\bar{Y} \Rightarrow \bar{X}.$$

Замечание. Согласно закону контрапозиции прямая теорема и обратнo–противоположная теоремы равносильны.

ЗАДАНИЕ 14

Составить таблицы истинности для следующих формул.

1. $(\bar{X} \wedge Y) \vee (\bar{X} \vee \bar{Y} \vee X).$

2. $((A \Rightarrow \bar{B}) \vee (B \Leftrightarrow C)) \wedge A.$

3. $(A \wedge B) \Rightarrow ((\bar{A} \Leftrightarrow B) \vee C).$

4. $((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \bar{A}) \wedge (C \vee B).$

5. $((A \vee B) \wedge C) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow C).$

6. $((A \Rightarrow ((B \wedge C)) \Leftrightarrow \bar{A})) \vee B.$

7. $((A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C)) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C).$

8. $((A \vee \bar{B}) \Rightarrow B) \wedge (\bar{A} \vee B).$

9. $((A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee C)) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C).$

10. $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow (\bar{A} \Leftrightarrow C).$

11. $(A \Leftrightarrow B) \wedge (\bar{B} \Rightarrow C).$

12. $\overline{X \vee Y} \wedge (X \wedge \overline{Y})$.
13. $\overline{X \vee \overline{Y} \vee (\overline{X} \wedge Z)}$.
14. $(A \wedge C) \Rightarrow (\overline{A} \vee B)$.
15. $\overline{((\overline{X} \Rightarrow Y) \Rightarrow Z) \vee \overline{Z}} \wedge X$.
16. $\overline{A \vee B \Rightarrow (\overline{B \vee C})}$.
17. $(A \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow \overline{A}$.
18. $(A \wedge (B \vee \overline{C})) \Rightarrow (C \wedge B)$.
19. $(B \wedge (\overline{A} \wedge C \vee A)) \Rightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
20. Доказать эквивалентность высказываний
 $A \vee \overline{B \vee C}$ и $(A \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B)$.
21. Доказать равносильность $X \vee (\overline{X} \wedge Y) \equiv X$.
22. Доказать равносильность $\overline{X \wedge Y \vee \overline{Z}} \equiv (\overline{X} \vee \overline{Y}) \wedge Z$.
23. Определить участника преступления, исходя из двух посылок:
 – Если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал в преступлении.
 – Если Иванов не участвовал в преступлении, то Сидоров не участвовал.
24. Формализовать и для полученного высказывания изобразить таблицу истинности:
 – Если мальчик топает ногой или плачет, то я не усну, и у меня будет мигрень.
25. Формализовать и для полученного высказывания составить таблицу истинности:
 – Администрация завода выплатит заработную плату и проведет общее собрание тогда и только тогда, когда депутаты подпишут Постановление или откажутся от нового законопроекта.

Дано высказывание, записать отрицание данного высказывания.

1. $\exists a \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon$.
2. $\forall a \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| > \varepsilon$.
3. $\exists a \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N(\varepsilon) \quad \exists n > N(\varepsilon) : |x_n - a| > \varepsilon$.
4. $\exists a \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall N(\varepsilon) \quad \exists n > N(\varepsilon) : |x_n - a| \geq \varepsilon$.
5. $\exists a \in R \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| \leq \varepsilon$.
6. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$
 $\forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.
7. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$
 $\forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$.
8. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$
 $\exists x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.
9. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$
 $\exists x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$.
10. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$
 $\forall x_1, x_2 \in X \quad |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.
11. $\exists T > 0 \quad \forall x \in X : f(x+T) = f(x)$.
12. $\forall T > 0 \quad \forall x \in X : f(x+T) = f(x)$.
13. $\exists T > 0 \quad \exists x \in X : f(x+T) = f(x)$.
14. $\exists T > 0 \quad \exists x \in X : f(x+T) \neq f(x)$.
15. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n, m > N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$.
16. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in N : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.
17. $\forall E > 0 \quad \exists N(E) > 0 \quad \forall n > N(E) : x_n < E$.
18. $\forall E > 0 \quad \exists N(E) > 0 \quad \forall n > N(E) : x_n < -E$.

19. $\exists M \in R \quad \forall x \in X : x \leq M.$
20. $\exists m \in R \quad \forall x \in X : x \geq m.$
21. $\exists M > 0 \quad \forall x \in X : |x| \leq M.$
22. $\exists a, b > 0 \quad \forall c \in X : a^2 + b^2 \leq c^2.$
23. $\exists a, b > 0 \quad \forall c \in X : a^2 + b^2 \neq c^2.$
24. $\exists a, b > 0 \quad \forall c \in X : a^2 + b^2 \geq c^2.$
25. $\exists a, b > 0 \quad \forall c \in X : a^2 + b^2 = c^2.$

ГЛАВА VIII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Определение 1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число, то функция f , осуществляющая это соответствие, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, называется последовательностью. При этом $f(n) \doteq x_n$ называется n -ым членом последовательности. Часто последовательность обозначается следующим образом: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $x_n, n = 1, 2, \dots$.

Для последовательности важны следующие два способа задания:

1. Аналитический, т. е. с помощью формулы n -го члена:

$$x_n = f(n).$$

2. Рекуррентный способ, когда любой член последовательности, начиная с некоторого, выражается через предшествующий (один или несколько).

Точная верхняя и нижняя грани последовательности

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число $M \in R$ ($m \in R$), что $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) для всех $n \in \mathbb{N}$.

На языке кванторов: $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу)

$$\Leftrightarrow \exists M \in R \quad (\exists m \in R), \forall n \in \mathbb{N} : (x_n \leq M) (x_n \geq m).$$

Число M (m) называется верхней (нижней) гранью (границей) последовательности.

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, т. е.

$$\exists M, m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: m \leq x_n \leq M.$$

Определение 4. Наименьшая из верхних граней последовательности $\{x_n\}$ называется ее точной верхней гранью и обозначается через $\sup\{x_n\}$ (происходит от латинского слова *supremum* – наибольший).

Определение 5. Наибольшая из нижних граней последовательности $\{x_n\}$ называется ее точной нижней гранью и обозначается через $\inf\{x_n\}$ (от латинского *infimum* – наименьший).

Упражнение. Покажите, что имеют место равенства:

$$\sup\{-x_n\} = -\inf\{x_n\}; \quad \inf\{-x_n\} = \sup\{x_n\}.$$

Замечание. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то $\sup\{x_n\} = +\infty$, если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена снизу, то $\inf\{x_n\} = -\infty$.

Определение 6. Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (неубывающей), если $x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n \leq x_{n+1}$) для любого $n \in \mathbb{N}$.

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей (невозрастающей), если $x_n > x_{n+1}$ (соответственно $x_n \geq x_{n+1}$) для любого $n \in \mathbb{N}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными последовательностями.

Замечание. Иногда последовательность $\{x_n\}$ является монотонной, начиная с некоторого номера $n \in \mathbb{N}$.

Предел последовательности

Пусть точка $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ назовем ε -окрестностью точки a и обозначим $U(a, \varepsilon)$. Очевидно, $U(a, \varepsilon) \doteq \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

Определение 1. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

С помощью логических символов это определение записывается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Замечание. Вместо записи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ пишут $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ и говорят, что члены последовательности $\{x_n\}$ стремятся к a . Очевидно, что неравенство (1) равносильно неравенствам $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, что, в свою очередь, равносильно включению $x_n \in U(a, \varepsilon)$.

Замечание. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $x_n > a$ ($x_n < a$) для всех $n \in \mathbb{N}$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a справа (слева) и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a + 0 \quad (\text{соответственно } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a - 0).$$

При $a = 0$ пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +0$ (соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -0$).

Определение 2. Если последовательность имеет конечный предел, то она называется сходящейся.

Определение 3. Последовательность, пределом которой является бесконечность, называется бесконечно большой.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon): |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon): x_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon): x_n < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Определение 4. Последовательность, предел которой равен нулю, называется бесконечно малой.

Из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить бесконечным числом способов новую последовательность $\{x_{n_k}\}$, где $n_1 < n_2 < \dots$, которая называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Определение 5. Предел, конечный или определенного знака бесконечный, подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ данной последовательности $\{x_n\}$ называется ее частичным пределом.

Определение 6. Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним пределом и обозначается $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, а наименьший частичный предел — нижним пределом и обозначается $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Теорема. Всегда $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ и равенство в этом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда существует предел последовательности $\{x_n\}$ (конечный, $+\infty$ или $-\infty$) и в этом случае $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Определение 7. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной (сходящейся в себе), если она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой

номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n, m > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

На языке кванторов имеем запись:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n, m > N(\varepsilon): |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Заметим, что условие Коши можно сформулировать в следующей форме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N}: |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Приведем без доказательства следующие равенства:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281\dots$$

Замечание. Число e также называется неперовым числом по имени шотландского математика Д. Непера.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0).$$

Основные теоремы

Теорема 1. (Необходимое условие существования предела.) Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена.

Теорема 2. (Теорема о единственности предела.) Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный.

Теорема 3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in \mathbb{R}$ и $x_n \leq z_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Теорема 4. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и $x_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $a \leq b$.

Теорема 5. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

Теорема 6. Для того чтобы число a являлось пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление $x_n = a + \alpha_n$ ($n=1, 2, \dots$), где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

Теорема 7. (Теорема Вейерштрасса.) Всякая возрастающая (убывающая) числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, конечный, если она ограничена сверху (снизу), и бесконечный, если она не ограничена сверху (снизу).

Теорема 8. (Теорема Больцано-Вейерштрасса.) Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 9. (Критерий Коши.) Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Теорема 10. (Арифметические действия с пределами.) Предположим, что существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (y_n \neq 0, n \in \mathbb{N}; \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0).$$

Прогрессии

Определение 8. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d , называемым разностью прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Общий член прогрессии задается формулой $a_n = a_1 + d(n-1)$. Сумма первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Определение 9. Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$, называемое знаменателем прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n q, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Формула общего члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$. Сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad \text{где } q \neq 1.$$

Определение 10. Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называется бесконечно геометрическая прогрессия со знаменателем q , где $|q| < 1$.

Определение 11. Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется предел суммы ее n членов:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Пример 1. Показать, что предел последовательности $x_n = \frac{\cos n!}{n+2}$ равен нулю, определив для каждого $\varepsilon > 0$ номер $N \doteq N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left| \frac{\cos n!}{n+2} \right| < \varepsilon$.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n!}{n+2} = 0$ равносильно следующему:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon): \left| \frac{\cos n!}{n+2} \right| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и рассмотрим выражение $\left| \frac{\cos n!}{n+2} \right|$. Легко ви-

деть, что $\left| \frac{\cos n!}{n+2} \right| = \frac{|\cos n!|}{|n+2|} \leq \frac{1}{n+2}$. Далее имеем цепочку эквивалентных неравенств:

$$\left| \frac{\cos n!}{n+2} \right| \leq \frac{1}{n+2} < \varepsilon; \quad \frac{1}{n+2} < \varepsilon; \quad n+2 > \frac{1}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Положим $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 2 \right] + 3 = 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$. Таким образом, для

каждого $\varepsilon > 0$, положив $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$, для всех $n > N(\varepsilon)$

получим неравенство $\left| \frac{\cos n!}{n+2} \right| < \varepsilon$. С помощью кванторов

это запишется следующим образом:

$$\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \doteq \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \forall n > N(\varepsilon): \left| \frac{\cos n!}{n+2} \right| < \varepsilon.$$

Если $\varepsilon = 1$, то $N(\varepsilon) = 2$. Если $\varepsilon = 0,1$, то $N(\varepsilon) = 11$. Если $\varepsilon = 0,01$, то $N(\varepsilon) = 101$ и т. д.

Пример 2. Докажем равенство: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3^n} = 0$.

Решение. Покажем, что последовательность $x_n = \frac{n+2}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, т. е. имеет конечный предел. Проверим

выполнение достаточных условий существования предела.

Выписывая отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, получим

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+3) \cdot 3^n}{3^{n+1}(n+2)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+3)}{(n+2)}. \quad (2)$$

Проверьте, что $\frac{1}{3} \cdot \frac{(n+3)}{(n+2)} < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Таким образом, последовательность монотонно убывает, кроме того, $x_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. последовательность ограничена снизу. Следовательно, последовательность сходится. Обозначим $a \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3^n}$. Осталось найти этот предел. Перепишем соотношение (2) в виде

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+3)}{(n+2)}. \quad (3)$$

Переходя к пределу в (3), получим равенство: $a = \frac{a}{3}$, из ко-

торого получаем, что $a = 0$. Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3^n} = 0$.

Пример 3. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующей последовательности

$$x_n = \frac{\sin 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin n!}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & |x_{n+p} - x_n| = \\ & = \left| \frac{\sin(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\sin(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{\sin(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|\sin(n+1)!|}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{|\sin(n+p)!|}{(n+p)(n+p+1)} \leq \\
&\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Решая неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, имеем $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Полагаем

$$N(\varepsilon) \doteq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1. \text{ Таким образом, } \forall \varepsilon > 0, \text{ положив } N(\varepsilon) \doteq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1,$$

$\forall n > N(\varepsilon) \quad \forall p \in \mathbb{N}$ имеем: $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Итак, последовательность фундаментальна, а, следовательно, согласно критерию Коши, сходится.

Пример 4. Для последовательности $x_n = (-1)^{n-1} \left(3 + \frac{2}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, найти $\inf \{x_n\}$, $\sup \{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Решение. Все элементы рассматриваемой последовательности содержатся в последовательностях

$$x_{2n-1} = 3 + \frac{2}{2n-1}, \quad x_{2n} = -3 - \frac{2}{2n} = -3 - \frac{1}{n},$$

причем $x_{2n} < x_{2n-1}$. Исследуем на монотонность последовательности $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n-1}\}$. Имеем

$$x_{2n+2} - x_{2n} = -3 - \frac{1}{n+1} + 3 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому $\{x_{2n}\}$ монотонно возрастает.

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} - x_{2n-1} &= 3 + \frac{2}{2n+1} - 3 - \frac{2}{2n-1} = \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1} = \\
&= \frac{-4}{(2n+1)(2n-1)} < 0
\end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\{x_{2n-1}\}$ монотонно убывает: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = -3$; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = 3$, поэтому

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = 3, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = -3.$$

$$\sup \{x_n\} = \sup \{x_{2n-1}\} = 5 = x_1, \quad \inf \{x_n\} = \inf \{x_{2n}\} = -4 = x_2.$$

ЗАДАНИЕ 16

Написать общий член последовательности.

1. $\frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\sqrt{1}}, \quad \frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sqrt{3}}, \quad \dots$
2. $\sin \frac{3}{1 \cdot 4}, \quad \sin \frac{5}{4 \cdot 9}, \quad \sin \frac{7}{9 \cdot 16}, \quad \dots$
3. $\frac{2 \cdot 1}{1}, \quad \frac{4 \cdot 1 \cdot 2}{4}, \quad \frac{8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{27}, \quad \dots$
4. $\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \quad \dots$
5. $\frac{-1}{1 \cdot \ln 2}, \quad \frac{1}{2 \ln 3}, \quad \frac{-1}{3 \ln 4}, \quad \dots$
6. $\frac{\sin 1}{1}, \quad \frac{\sin 2}{1 \cdot 2}, \quad \frac{\sin 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \dots$
7. $-\arctg 1, \quad \arctg \frac{1}{2}, \quad -\arctg \frac{1}{3}, \quad \dots$

$$8. -\sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{4}, -\sin \frac{\pi}{8}, \dots$$

$$9. \frac{\cos 1}{4}, \frac{\cos 2}{8}, \frac{\cos 3}{16}, \dots$$

$$10. \frac{2}{1}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \dots$$

$$11. \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{27}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$$

$$12. \frac{1}{4 \cdot 1}, \frac{1}{16 \cdot 3}, \frac{1}{64 \cdot 5}, \dots$$

$$13. \frac{\ln 2}{5}, \frac{\ln 3}{25}, \frac{\ln 4}{125}, \dots$$

$$14. \frac{4}{1 \cdot 3}, \frac{8}{3 \cdot 5}, \frac{16}{5 \cdot 7}, \dots$$

$$15. \frac{1}{11}, \frac{1 \cdot 2}{22}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{33}, \dots$$

$$16. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{11}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{22}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{33}, \dots$$

$$17. \frac{2}{2}, \frac{5}{2 \cdot 4}, \frac{8}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots$$

$$18. \frac{\cos \pi}{2}, \frac{\cos 2\pi}{9}, \frac{\cos 3\pi}{28}, \dots$$

$$19. -\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} \frac{1}{2}, -\operatorname{tg} \frac{1}{3}, \dots$$

$$20. -\frac{4}{\ln 5}, \frac{5}{\ln 6}, -\frac{6}{\ln 7}, \dots$$

$$21. -\frac{\sin 3}{3}, \frac{\sin 9}{9}, -\frac{\sin 27}{27}, \dots$$

$$22. \frac{3}{1 \cdot 2}, \frac{5}{8 \cdot 3}, \frac{7}{27 \cdot 4}, \dots$$

$$23. -\frac{1}{3 \cdot 1}, \frac{1}{9 \cdot 1 \cdot 2}, -\frac{1}{27 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$$

$$24. -\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, -\frac{5}{9}, \dots$$

$$25. 1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{3}, 8 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{9}, 27 \cdot \operatorname{arctg} \frac{\pi}{27}, \dots$$

ЗАДАНИЕ 17

Доказать равенства на основании определения предела последовательности (указать зависимость $N(\varepsilon)$).

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2} = 0.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n} = 0.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 2^n}{n^3} = 0.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n(n+1)} = 0.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{3}{n}}{n^2 + 1} = 0.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{3n^2 + 2n} = 0.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos \pi n}{\sqrt{n^7}} = 0.$$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{5n^3 + 3n} = 0.$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \sqrt{n^2 + 2}}{5^n} = 0.$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + n^3}{2n^3 + 3} = \frac{1}{2}.$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^4 + \sqrt{n}} = 0.$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{n!}\right)}{3n + 2n^3} = 0.$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cos n^3}{\sqrt{n^4 + n}} = 0.$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n+2)}{n+2} = 0.$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2} = 0.$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n!}{n!} = 0.$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot (n+1)}{n^2 + 3} = 0.$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3} = 1.$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} n!}{(n+2)!} = 0.$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 7^{2n}}{3^n + 2} = 0.$

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{(n+1)!} = 0.$
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n + 1}{2^{3n} + \sqrt{\frac{1}{n}}} = 0.$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n}{n^5 + 4} = 2.$
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin((-1)^n n)}{4n^4 + 1} = 0.$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{n^3 + n + 1} = 0.$

ЗАДАНИЕ 18

Найти точную верхнюю и нижнюю грани, верхний и нижний пределы последовательности x_n ($n = 1, 2, \dots$).

1. $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}.$
2. $x_n = (-1)^n \operatorname{arctg} n.$
3. $x_n = \frac{(-1)^{n+3}}{n!}.$
4. $x_n = \frac{n}{n+2} \sin \frac{n\pi}{2}.$
5. $x_n = \frac{n}{n+2} \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$
6. $x_n = \frac{n^2 + 2}{n^2 + 3} \sin n\pi.$

7. $x_n = \frac{n^2 + 2}{n^2 + 3} \cos n\pi$.
8. $x_n = \frac{n}{n+3} \cos \frac{n\pi}{2}$.
9. $x_n = \frac{n}{n+3} \cos^2 \frac{n\pi}{2}$.
10. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin \frac{n\pi}{3}$.
11. $x_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$.
12. $x_n = \frac{n^3}{n^3 + 1} \sin \frac{n\pi}{3}$.
13. $x_n = \frac{n^3}{n^3 + 1} \cos \frac{n\pi}{3}$.
14. $x_n = \sin \frac{n\pi}{4}$.
15. $x_n = \cos \frac{n\pi}{4}$.
16. $x_n = (-1)^n \sin \frac{n\pi}{4}$.
17. $x_n = (-1)^n \cos \frac{n\pi}{4}$.
18. $x_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4}$.
19. $x_n = \cos^2 \frac{n\pi}{4}$.
20. $x_n = \frac{n}{n+2} + \frac{\sin n\pi}{2}$.

21. $x_n = \frac{n+2}{n+3} + \frac{\sin n\pi}{4}$.
22. $x_n = \frac{(-1)^4}{n} + \sin \frac{n\pi}{4}$.
23. $x_n = 2 + (-1)^n \cdot n$.
24. $x_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$.
25. $x_n = \frac{n}{n+2} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

ЗАДАНИЕ 19

Исследовать на монотонность последовательности, заданные формулой общего члена, и указать $\inf x_n$ и $\sup x_n$, если таковые существуют.

1. $x_n = \frac{3n+4}{n+2}$.
2. $x_n = n^2 - 9n - 22$.
3. $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.
4. $x_n = n^2 + 2n - 3$.
5. $x_n = \frac{2 + (-1)^4}{n}$.
6. $x_n = 3 \cdot 2^n - 1$.
7. $x_n = \frac{n+8}{2n+1}$.
8. $x_n = 0,1n^2 - n$.

9. $x_n = n^2 + n - 2$.
10. $x_n = \frac{5n-1}{n+2}$.
11. $x_n = 4^n - 3^n$.
12. $x_n = \frac{n+3}{n^2+4}$.
13. $x_n = 0,5n^2 + 1,5$.
14. $x_n = \frac{9^n + 2}{3^{2n}}$.
15. $x_n = \frac{2n+9}{n+3}$.
16. $x_n = -9n^2 + 10n + 25$.
17. $x_n = \frac{n+2}{n^2+5}$.
18. $x_n = -3n^2 - 5n - 2$.
19. $x_n = \sqrt{n+1} - 2$.
20. $x_n = n + \sqrt{n}$.
21. $x_n = 1 + \frac{1}{5^n}$.
22. $x_n = \ln(n+2) - \ln n$.
23. $x_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$.
24. $x_n = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{n+2}$.
25. $x_n = \sin \frac{n}{n+1}$.

Найти пределы.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+9+\dots+(4n-3)}{5n^2-3n}$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^2+\dots+n^2}{(2n+7)^3}$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2+4^2+\dots+(2n)^2}{\sqrt[3]{27n^3+3}}$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{\sqrt{4n^4+9}}$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^{n+2} \right)$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right)$.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} + \dots + (-1)^n \left(\frac{1}{7} \right)^n \right)$.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \left(\frac{1}{5} \right)^n \right)}{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots + \left(\frac{1}{9} \right)^n \right)}$.
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^2}{n^3} + \frac{4^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n)^2}{n^3} \right)$.
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n]{3} \right)$.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} \right).$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+49+\dots+7^n}{5+25+\dots+5^n}.$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+9+\dots+3^n}{7+49+\dots+7^n}.$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+6+10+\dots+(4n-2)}{(3n-1)^2}.$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n-1}n^2}{(n+3)^3+(2-n)^3}.$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{3^{\frac{n+1}{2}}} \right).$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{(2+n)^4 - (n-3)^3}.$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^4 - (n+1)^4}{\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^3 + \left(n + \frac{1}{3}\right)^3}.$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5} + 1 + 5 + \dots + 5^{n-2}}{1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1}}.$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right).$
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}+1)^3 - \sqrt{n}(\sqrt{n}+2)^2}{(\sqrt[4]{n^2-1}+1)^4}.$

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(9 - 6 + 4 - \frac{8}{3} + \dots + 9 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right).$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{3} + 3 + \dots + \sqrt{3^{n-1}}}{1 + \sqrt{2} + 2 + \dots + \sqrt{2^{n-1}}}.$
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+8+11+\dots+(3n+2)}{\left(3n-\frac{1}{3}\right)^3 - (n+2)^3}.$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2} \right)$

ЗАДАНИЕ 21

Найти пределы.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100+3n^2}{0,1n^3+15}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1}-n).$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{n}.$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 2^n}{2^{n+1}-3}.$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!+(2n)!}{(n+1)(2n-1)!}.$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^4+2n+1}}{1+3+5+\dots+(2n-1)}.$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}-2 \cdot 3^n}{3 \cdot 5^n + 3^{n+1}}.$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+5}{7+3n} \right)^{2n-1}.$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)\sin n}{n^3+2}.$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3+1}-n).$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+3}{7n+2} \right)^{3n}.$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \operatorname{arctg} n}{(2n+3)^4}.$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \operatorname{arctg} \frac{1}{n!}}{(3n+7)^5}.$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^7+2}} \right).$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^3+2}{n^3+n+2} \right).$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^4+\sin 3^n}.$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)!+(3n)!}{(3n)!(n+3)^2}.$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)!+(n+1)!}{(3n+1)^3 \cdot (n+1)!}.$

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+2n}-n)}{(7n-1)^3}.$
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+2}{3+4n^2} \right)^{1-2n}.$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin n^2}{3n^3+5}.$
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cos n}{\ln(n^2+1)}.$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+1}-10\sqrt{n}}{2n\sqrt{n}+n\sqrt[3]{n}}.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. М.: Наука, 1987. 432 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Ч. 1. М.: Высш. шк., 1996. 304 с.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990. 624 с.
4. Ицков А.Г. Основы дискретной математики. Ижевск: Изд-во ИЖГТУ, 2002. 40 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: Т. 1. М.: Высш. шк., 1988. 712 с.
6. Математический энциклопедический словарь. Главный редактор Прохоров Ю.В. М.: «Советская энциклопедия», 1988. 847 с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.
8. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ. М.: Высш. шк., 1990. 416 с.
9. Непейвода Н.Н. Прикладная логика. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1997. 385 с.
10. Никольский С.М. Курс математического анализа: Т. 1. М.: Наука, 1975. 431 с.
11. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. М.: Наука, 1987. 576 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Множества и операции над ними	4
Глава 2. Бинарное отношение. Отношение эквивалентности	11
Глава 3. Отображение. Функция	16
Глава 4. Эквивалентность множеств	25
Глава 5. Группировки элементов конечного множества	29
Глава 6. Метод математической индукции	39
Глава 7. Элементы математической логики	47
Глава 8. Последовательность	56
Список рекомендуемой литературы	79

**Новикова Елена Вениаминовна
Родионова Алла Григорьевна
Родионова Надежда Витальевна**

Начала математического анализа

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор Л.К. Воронцова
Верстка В.И. Родионов

Пописано в печать 23.12.09. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,67. Уч.-изд. л. 3,1.

Тираж 100 экз. Заказ № .

Редакционно-издательский отдел УдГУ
Типография ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4