ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"ЦЕНТР ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ МОЛОДЕЖИ"

Н.В. ЛАТЫПОВА

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Ижевск 2009

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.11р30
Л 278

Л 278 Латыпова Н. В. Производная функции и её применение: Учебно-методическое пособие. Изд. ГОУВПО "УдГУ". Ижевск. 2009. 30 с.

В данном учебно-методическом пособии рассмотрены основные понятия, формулы и задачи, связанные с применением производной. Разобранные задачи снабжены подробным решением и предложены разнообразные упражнения для самостоятельной работы, что поможет лучшему усвоению материала. Предназначена для учащихся 10-11 классов средней школы и подготовительных курсов.

УДК 517.2(07)
ББК 22.161.11р30

ПРЕДИСЛОВИЕ

Главная цель математического анализа — это исследование функций, достаточно "хороших" (такие гладкие элементарные функции как раз и используются в школьном курсе). Эти функции возникают при количественном исследовании задач классической физики, механики, техники. Для таких исследований функции требуется понятие производной.

В данном учебно-методическом пособии показывается как вычисляются производные функций, используя таблицу производных и правила дифференцирования. Решаются задачи, связанные с механическим и геометрическим смыслом производной, исследованием функций на монотонность (возрастание, убывание), на экстремум (максимум, минимум), на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Приводится разбор решений текстовых задач на экстремум и с использованием графика функции.

Пособие призвано помочь преодолеть возникающие трудности в понимании, усвоении и систематизации данного материала. В конце предложены задания для самостоятельного решения и тест, позволяющие закрепить полученные знания и развить соответствующие навыки. Ответы к задачам позволяют проверить свои знания.

Автор выражает признательность О.В. Коноваловой и Н.Д. Таныгиной за внимательное прочтение работы и ряд ценных предложений. Особая благодарность выражается О.Р. Пирожковой за помощь в издании.

Производная функции и её применение

Понятие функции и её свойства

Переменная y называется *однозначной функцией* f от переменной x в данной области изменения X, если каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное действительное значение $y = f(x)$, принадлежащее некоторому множеству Y. Множество X называют *областью определения* (или областью существования) функции $f(x)$ (ООФ); Y — *областью (или множеством) значений* этой функции (ОЗФ).

Функция $f(x)$ называется *четной,* если для любого $x \in [-a, a]$ (из симметричного промежутка) выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x),$$

и *нечетной,* если для любого $x \in [-a, a]$

$$f(-x) = -f(x).$$

Если функция не является ни четной, ни нечетной, то её называют *функцией общего вида.* Если функция является четной, то её график симметричен относительно оси ординат; если нечетной, то её график симметричен относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется *периодической,* если существует число $T \neq 0$ такое, что для всех x из ООФ выполняются равенства:

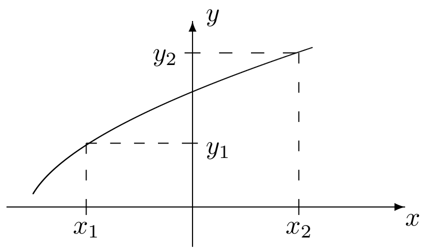
$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Графики периодических функций строят следующим образом: строят ветвь графика на одном из промежутков длины T, а затем осуществляют параллельный перенос этой ветви на всю числовую прямую.

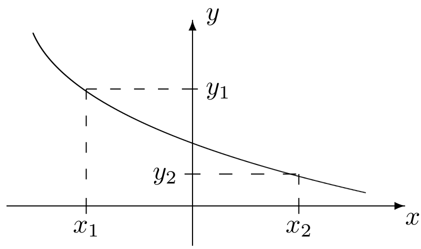
Дадим еще понятия возрастающей и убывающей функций.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если для любых x_1, $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ следует, что $y_1 < y_2$. Другими словами, большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

На рисунке представлен эскиз графика возрастающей функции.



Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ следует, что $y_1 > y_2$. Другими словами, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



Функция, являющаяся убывающей или возрастающей, называется *монотонной.*

Рассмотрим определенную на множестве X функцию $y = f(x)$. Пусть Y — множество ее значений. Если каждому элементу $y \in Y$ по определенному правилу g можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in X$, то получим функцию $x = g(y)$, заданную на множестве Y со значениями в множестве X. Эту функцию называют *обратной* к функции $y = f(x)$, а саму функцию $y = f(x)$ — *обратимой.*

Понятие непрерывности функции можно ввести исходя из наглядных представлений: функция называется *непрерывной*, если её график состоит из одной непрерывной линии. Если в школе давалось понятие предел функции, то более точное определение имеет вид: функция называется *непрерывной* в точке x_0, когда существует предел этой функции при x, стремящемся к x_0, и он равен $f(x_0)$, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Геометрически непрерывность функции в точке x_0 означает, что её график не разрывается в точке x_0. Функция называется непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Точка, в которой функция не является непрерывной, но определена в некоторой ее окрестности, носит название *точки разрыва.*

Функции, изучаемые в школьном курсе математики, относятся к элементарным.

Производные основных элементарных функций

$$\mathbf{1}.\ (C)'=0;\ \mathbf{2}.\ (kx+b)'=k;\ \mathbf{3}.\ (e^x)'=e^x;$$

4. $(x^n)'=nx^{n-1}$; **5**. $(a^x)'=a^x\ln a$;
6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$; **7**. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;
8. $(\sin x)'=\cos x$; **9**. $(\cos x)'=-\sin x$;
10. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; **11**. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; **13**. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$; **15**. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования

$$\mathbf{1}.\ (CU)'=CU';\ \mathbf{2}.\ (U+V)'=U'+V';\ \mathbf{3}.\ (UV)'=U'V+UV';$$

$$\mathbf{4}.\ \left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2};\ \mathbf{5}.\ [V(U(x))]'=V'(U(x))\,U'(x),$$

где C — постоянная, U и V — функции.

Пример 1. Найти производную функции: $y=5\ln\left(\arccos\sqrt{\pi x}\right)$.

Решение. Используя правила дифференцирования 1 и 5, и последовательно формулы 6, 13 и 4, имеем

$$y'=5\left(\ln\left(\arccos\sqrt{\pi x}\right)\right)'=5\frac{1}{\arccos\sqrt{\pi x}}\left(\arccos\sqrt{\pi x}\right)'=$$

$$=\frac{5}{\arccos\sqrt{\pi x}}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\pi x}\right)^2}}\right)\left(\sqrt{\pi x}\right)'=$$

$$= \frac{-5}{\arccos\sqrt{\pi x}\sqrt{1-\pi x}}\frac{1}{2\sqrt{\pi x}}(\pi x)' = \frac{-5}{2\arccos\sqrt{\pi x}\sqrt{1-\pi x}\sqrt{\pi x}}\pi.$$

Пример 2. Вычислить значение производной функции

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos\frac{\pi}{3} - \frac{3}{\pi}x^2 \quad \text{при} \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

Решение. Найдем производную:

$$f'(x) = \sqrt{3}\,(\sin x)' + \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)' - \frac{3}{\pi}\left(x^2\right)' = \sqrt{3}\cos x - \frac{6}{\pi}x.$$

Подставим точку $x = \frac{\pi}{6}$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Механический смысл производной

Производная $f'(x_0)$ для функции $y = f(x)$, меняющейся со временем x, есть скорость изменения функции в данный момент x_0.

Пример. Точка движется по координатной прямой согласно закону

$$x(t) = 10 + 8t - 0,5t^2,$$

где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. Найти её скорость при $t = 6$.

Решение. Скорость точки есть производная расстояния, которое она проходит:

$$v(t) = x'(t) = \left(10 + 8t - 0,5t^2\right)' = 8 - t.$$

Тогда при $t = 6$ скорость равна $v(6) = 2$.

Заметим, что ускорение точки есть производная функции скорости: $a(t) = v'(t)$.

Геометрический смысл производной

Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона α касательной к положительному направлению оси Ox, то есть $f'(x_0) = k = \operatorname{tg}\alpha$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в точке касания $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, имеет вид:

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

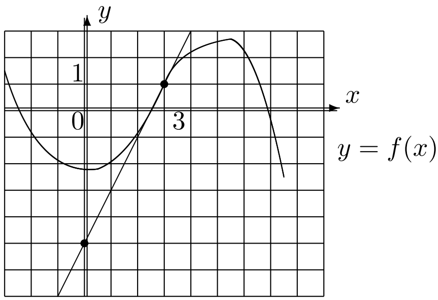
Пример 1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \sin 2x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Найдем производную функции: $f'(x) = 2\cos 2x$. Тогда $k = f'(0) = 2$.

Пример 2. Найти угол наклона касательной к графику функции $f(x) = 4x - x^3$ в точке $x_0 = -1$.

Решение. Найдем производную функции: $f'(x) = 4 - 3x^2$. Тогда $f'(-1) = 1$, то есть $\operatorname{tg}\alpha = 1$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Пример 3. На рисунке дан график функции: $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.



Решение. Заметим, что производная $f'(3) = k$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику данной функции. Касательная — это прямая. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$. Так как при $x = 0$ значение $y = -5$, то коэффициент $b = -5$. С другой стороны, касательная проходит через точку $(3, 1)$. А значит, подставляя в уравнение прямой, получим $1 = k \cdot 3 - 5$. Откуда $k = 2$.

Второй способ решения — это использование угла наклона касательной. Рассмотрим прямоугольный треугольник с вершинами в точках $(2,5; 0)$, $(3; 0)$ и $(3; 1)$. Тогда катет, противолежащий углу α, равен 1, а прилежащий катет равен 0,5. Тогда

$$f'(3) = k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{0,5} = 2.$$

Таким образом, имеем *ответ*: 2.

Пример 4. Составить уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{3x^2+2}{x-1}$$

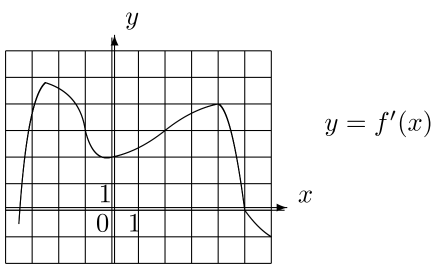
в точке её пересечения с осью ординат.

Решение. Найдем точку касания. Ось ординат дает $x_0 = 0$. Тогда $f(0) = -2$. Таким образом, точка касания $(0, -2)$. Найдем производную:

$$f'(x) = \frac{6x(x-1) - (3x^2+2)}{(x-1)^2} = \frac{3x^2-6x-2}{(x-1)^2}.$$

Тогда производная в точке касания $f'(0) = -2$. Подставляя в уравнение касательной, имеем $y - (-2) = -2(x - 0)$; $y = -2x - 2$.

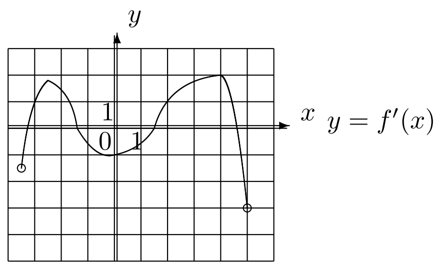
Пример 5. К графику функции $y = f(x)$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$ проведена касательная. Определите угловой коэффициент касательной, если на рисунке изображен график производной данной функции.



Решение. Заметим, что нам задан график производной. Так как угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке: $k = f'(2)$, то по графику значение производной в точке 2 равно 3.

Ответ: 3.

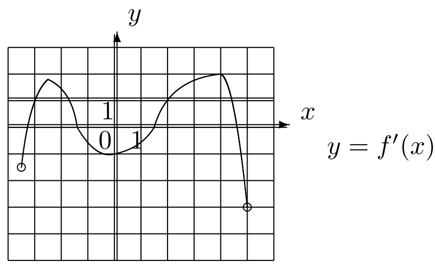
Пример 6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3,5;5)$. На рисунке изображен график производной данной функции. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы которых — целые числа. Укажите количество точек графика функции, в которых проведенные касательные имеют положительный угловой коэффициент.



Решение. Заметим, что нам задан график производной. Угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке: $k = f'(x_0)$. Для того, чтобы угловой коэффициент касательной был положителен, надо, чтобы производная функции была положительна в точках абсциссы которых целые числа: $f'(x_0) > 0$, где $x_0 \in \mathbb{Z}$. Такие точки на графике: $-3, -2, 2, 3, 4$. Всего 5 точек.

Ответ: 5.

Пример 7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3,5;5)$. На рисунке изображен график производной данной функции. Найдите число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом 45° к положительному направлению оси абсцисс.



Решение. Используем геометрический смысл производной: $f'(x_0) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Тогда по графику осталось найти число точек x_0, в которых значение функции на графике равно единице, то есть $y = 1$. Всего таких точек четыре: $-3; -1,6; 2; 4,4$.

Ответ: 4.

Пример 8. Найти угол между касательными к графику функции

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 3,$$

проведенными из начала координат.

Решение. Пусть x_0 — абсцисса точки касания. Тогда угловой коэффициент касательной равен $k = f'(x_0) = \frac{x_0}{2}$, а уравнение касательной имеет вид: $y = \frac{x_0}{2}x$ (с учетом того, что касательная проходит через начало координат). В точке касания графики самой функции и касательной пересекаются, то есть выполняется условие

$$\frac{x_0}{2}x_0 = \frac{1}{4}x_0^2 + 3,$$

откуда $x_0^2 = 12$, или $x_0 = \pm 2\sqrt{3}$, $k = \pm\sqrt{3}$. Тогда правая касательная наклонена к оси абсцисс под углом $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, а левая: $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, значит, угол между касательными равен

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Исследование функций с помощью производных

Напомним определения монотонных функций. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции (см. подробнее с. 4–5).

Для определения интервалов возрастания и убывания функций используются следующие утверждения:

1. Если производная функции положительна (неотрицательна) $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geqslant 0$) на интервале (a, b), то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

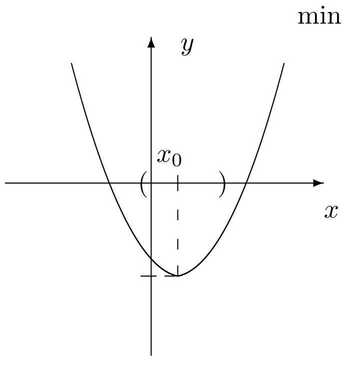
2. Если производная функции отрицательна (неположительна) $f'(x) < 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) на интервале (a, b), то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

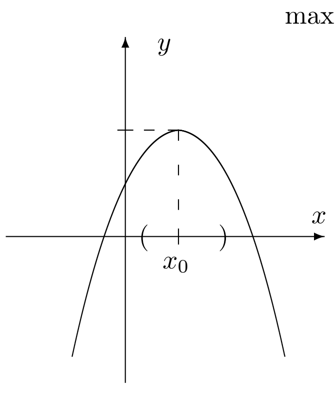
А теперь дадим определения точек максимума и минимума.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если найдется такая окрестность этой точки x_0 (то есть найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$), что при всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \geqslant f(x)$. Обратим внимание на то, что неравенство должно выполняться быть может только в маленькой окрестности. Поэтому говорят о *локальном максимуме.*

Аналогично точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если найдется такая окрестность этой точки (то есть интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$), что при всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant f(x)$. Так как неравенство должно выполняться быть может только в маленькой окрестности, то говорят о *локальном минимуме.*

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума.*





Алгоритм нахождения экстремума функции:

1. Найти критические точки функции (то есть точки, в которых производная функции равна нулю или не существует).

2. На числовой оси отметить область определения функции и критические точки.

3. На каждом интервале области определения выяснить знак производной и, соответственно, интервалы возрастания и убывания функции.

4. Если производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то данная точка есть точка максимума, если с минуса на плюс, то это точка минимума. Если знак производной не меняется при переходе через точку, то в данной точке нет ни максимума, ни минимума.

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции, и точки экстремума:

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3 - 10.$$

Решение. Заметим, что область определения функции — вся числовая прямая. Найдем производную функции:

$$f'(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$$

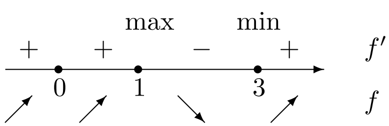
и приравняем её нулю:

$$x^2\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0,$$

откуда получаем следующие критические точки

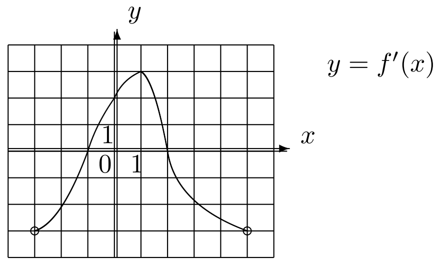
$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3,$$

которые являются точками, подозрительными на экстремум.



Из рисунка видно, что функция убывает на промежутке $x \in [1, 3]$ и возрастает при $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$, точка $x = 1$ является точкой максимума, а $x = 3$ — точкой минимума. Заметим, что в точке $x = 0$ нет ни максимума, ни минимума.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3, 5)$. На рисунке изображен график её производной.
А) Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на заданном промежутке $(-3, 5)$.
Б) Укажите точку максимума $y = f(x)$ на промежутке $(-3, 5)$.
В) Укажите длину промежутка возрастания функции $y = f(x)$.
Г) Укажите наименьшую длину промежутка убывания функции $y = f(x)$.



Решение. Точками, подозрительными на экстремум, являются точки, в которых производная функции обращается в нуль. По заданному графику видим, что таких точек две: $x = -1$ и $x = 2$.

А) Точка, при переходе через которую производная функции меняет знак с "плюса" на "минус," является точкой максимума, а с "минуса" на "плюс" — минимума. По графику видно, что слева от точки $x = -1$ производная функции отрицательна, а справа — положительна. Значит, это точка минимума.

Б) Аналогично, слева от точки $x = 2$ производная функции положительна, а справа — отрицательна. Значит, это точка максимума.

В) Функция $y = f(x)$ возрастает, если её производная положительна (неотрицательна), то есть график функции $y = f'(x)$ лежит выше (не ниже) оси абсцисс. В нашем случае это происходит при $x \in [-1; 2]$. Таким образом, длина промежутка возрастания равна 3.

В) Функция $y = f(x)$ убывает, если её производная отрицательна (неположительна), то есть график функции $y = f'(x)$ лежит ниже (не выше) оси абсцисс. В нашем случае это происходит при $x \in [-3; -1]$ и при $x \in [2; 5]$. Таким образом, длина наименьшего промежутка убывания равна 2.

Ответ: А) -1. Б) 2. В) 3. Г) 2.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$:

1. Найти значения функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$.

2. Найти значения функции в критических точках (то есть в точках, где производная равна нулю или не существует), принадлежащих интервалу (a, b).

3. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x + \frac{3}{2} \text{ на отрезке } [-1, 2].$$

Решение. Функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке либо в точках экстремума, либо на концах этого отрезка. Поэтому найдем производную функции и приравняем её нулю:

$$f'(x) = 2x^3 - 2 = 0.$$

Имеем единственную критическую точку $x = 1$, которая принадлежит заданному отрезку. $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $f(2) = 5,5$. Поэтому получаем, что функция имеет наибольшее значение, равное $f_{\text{наиб.}} = 5,5$ при $x = 2$, и наименьшее — $f_{\text{наим.}} = 0$ при $x = 1$.

Решение текстовых задач

Рассмотрим решение текстовых задач на наибольшее или наименьшее значение. **Алгоритм** решения текстовых задач:

1. Определить величину y, наибольшее или наименьшее значение которой требуется найти.

2. Выбрать одну из неизвестных величин в качестве независимой переменной x.

3. Установить границы изменения величины x : X.

4. Исходя из условий задачи выразить y через x и известные величины, то есть представить y в виде функции от переменной x : $y = f(x)$.

5. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ на промежутке X реального изменения переменной x.

6. Интерпретировать полученный результат, исходя из условий задачи.

Пример 1. На параболе $y = x^2$ найти точку, ближайшую к точке $(-3, 0)$.

Решение. В нашем случае, требуется, чтобы расстояние между точкой параболы (x, x^2) и заданной точкой $(-3, 0)$ было наименьшим. Вспомним формулу расстояния между двумя точками $A\ (x_1, y_1)$ и $B\ (x_2, y_2)$ на плоскости:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Заметим, что удобнее использовать квадрат расстояния, который мы и возьмем за искомую величину:

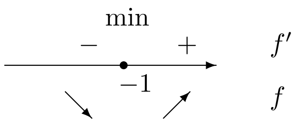
$$f(x) = AB^2 = (x+3)^2 + (x^2 - 0)^2 = (x+3)^2 + x^4,$$

где x — любое действительное число.

Найдем производную полученной функции:

$$f'(x) = 2(x+3) + 4x^3 = 2(x+1)(2x^2 - 2x + 3),$$

которая обращается в нуль только при $x = -1$.



Таким образом, точка $x = -1$ является искомой точкой минимума. Учитывая, что по условию задачи требуется найти точку на графике функции, имеем *ответ*: $(-1, 1)$.

Пример 2. Себестоимость изготовления n изделий равна

$$2n^2 + 25n + 62$$

рублей. При каком n себестоимость изготовления одного изделия минимальна?

Решение. Себестоимость изготовления одного изделия равна

$$2n + 25 + \frac{62}{n}$$

рублей. Чтобы найти ее минимум, рассмотрим функцию непрерывного аргумента

$$f(x) = 2x + 25 + \frac{62}{x}.$$

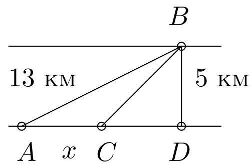
Производная функции

$$f'(x) = 2 - \frac{62}{x^2} = \frac{2(x^2-31)}{x^2} = 0$$

при $x = \pm\sqrt{31}$. Нас интересует только значение $\sqrt{31}$. Так как n — натуральное число, $5 < \sqrt{31} < 6$ и $f'(5) < 0$, $f'(6) > 0$, то $x = \sqrt{31}$ — точка минимума функции $f(x)$. Но количество изделий должно выражаться натуральным числом, поэтому рассмотрим ближайшие натуральные числа к $\sqrt{31}$ и выберем то, при котором функция себестоимости одного изделия достигает минимума. Себестоимость одного изделия при $n = 5$ равна $f(5) = 47\frac{2}{5}$ рублей, а при $n = 6$ равна $f(6) = 47\frac{1}{3}$ рублей. Так как $47\frac{2}{5} > 47\frac{1}{3}$, то минимальная себестоимость одного изделия получается при $n = 6$.

Пример 3. Пункты A и B, расстояние между которыми 13 км, находятся на противоположных берегах реки шириной 5 км. Почтальон может двигаться по суше со скоростью 5 км/ч и по воде со скоростью 3 км/ч. Какую часть пути почтальон должен двигаться по суше, чтобы доставить почту из A в B за наименьшее время?

Решение. Построим чертеж. Имеем $AB = 13$, $BD = 5$, $BD \perp AD$.



Тогда по теореме Пифагора $AD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Пусть почтальон двигается по берегу x км, то есть $AC = x$. Заметим, что $0 \leqslant x \leqslant 12$. Тогда по воде он проедет расстояние

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{5^2 + (12-x)^2}.$$

Суммарное время движения почтальона в часах равно

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{25 + (12-x)^2}}{3},$$

причем $T(0) = 4\frac{1}{3}$ и $T(12) = 4\frac{1}{15}$.

Рассмотрим производную

$$T'(x) = \frac{1}{5} + \frac{12-x}{3\sqrt{25+(12-x)^2}} = \frac{3\sqrt{25+(12-x)^2} - 5(12-x)}{15\sqrt{25+(12-x)^2}} = 0.$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля (что выполнено в нашем случае):

$$3\sqrt{25+(12-x)^2} - 5(12-x) = 0.$$

Решим данное иррациональное уравнение, перенося одно из слагаемых в правую часть и возводя обе части уравнения в квадрат (заметим, что обе части уравнения неотрицательны, поэтому посторонние корни не появляются):

$$9\left(25+(12-x)^2\right) = 25(12-x)^2.$$

Откуда

$$(12-x)^2 = \frac{225}{16} = \left(\frac{15}{4}\right)^2; \; x = 12 \mp \frac{15}{4}.$$

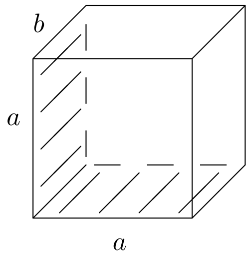
Так как $0 \leqslant x \leqslant 12$, то $x = 12 - \frac{15}{4} = \frac{33}{4}$ и $T\left(\frac{33}{4}\right) = \frac{56}{15} = 3\frac{11}{15}$. В силу неравенств $T\left(\frac{33}{4}\right) < T(0)$ и $T\left(\frac{33}{4}\right) < T(12)$ имеем минимум в точке $x = \frac{33}{4} = 8,25$.

Таким образом, почтальон должен пройти 8,25 км, чтобы доставить почту за наименьшее время.

Пример 4. В прямоугольном параллелепипеде две грани с общим ребром покрасили в фиолетовый цвет, а остальные грани — в белый. Площадь белых граней равна 1080. Белые грани, имеющие по два общих ребра с фиолетовыми гранями, являются квадратами. Найти наименьшее значение суммы длин всех ребер параллелепипеда, исключая общее ребро фиолетовых граней.

Решение. Построим чертеж, где штриховкой показаны фиолетовые грани. Сумма длин всех ребер параллелепипеда, исключая общее ребро фиолетовых граней равна

$$S = 3b + 8a, \quad \text{где} \quad a > 0, \; b > 0.$$



Нужно найти наименьшее значение этой функции при условии, что площадь белых граней равна 1080, то есть

$$2a^2 + 2ab = 1080.$$

Откуда выразим одну из переменных (здесь удобнее выразить b):

$$b = \frac{540}{a} - a$$

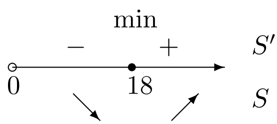
и подставим в функцию

$$S = \frac{1620}{a} + 5a.$$

Найдем производную и точки, подозрительные на экстремум:

$$S' = -\frac{1620}{a^2} + 5 = 0,\ a = \pm 18.$$

Нас интересует только положительное значение.



Так как по условию задачи требуется найти наименьшее значение суммы длин ребер, то получаем
ответ: $S(18) = 180$.

Построение графиков функций

Общая схема построения такова:

1. Найти область определения функции и, по возможности, нули функции.

2. Проверить функцию на четность–нечетность и периодичность.

3. Исследовать на монотонность (возрастание, убывание), найти точки экстремума (максимума, минимума) и значения функции в этих точках.

4. Используя полученные данные, построить график функции.

Пример. Построить график функции:

$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение. Будем действовать по схеме.

1. ООФ: $x \in \mathbb{R}$, нули функции: $x = 0$.

2. Функция является нечетной, так как

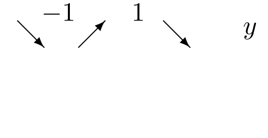
$$y(-x) = \frac{-2x}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -y(x),$$

а значит, график симметричен относительно начала координат.

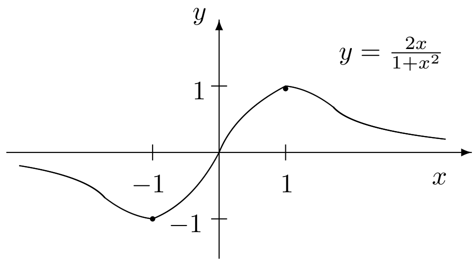
3. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

при $x = \pm 1$, причем $y(1) = 1,\ y(-1) = -1$.



4. Тогда график функции имеет вид:



Задачи с параметром

Используя построение графика, иногда удобно решать задачи с параметром.

Пример 1. При каком наибольшем натуральном значении p уравнение

$$x^2 - 15x + \frac{x^3}{3} - p = 0$$

имеет три корня?

Решение. Данное уравнение равносильно:

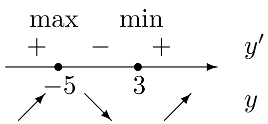
$$x^2 - 15x + \frac{x^3}{3} = p.$$

Построим эскиз графика функции, стоящей в левой части уравнения

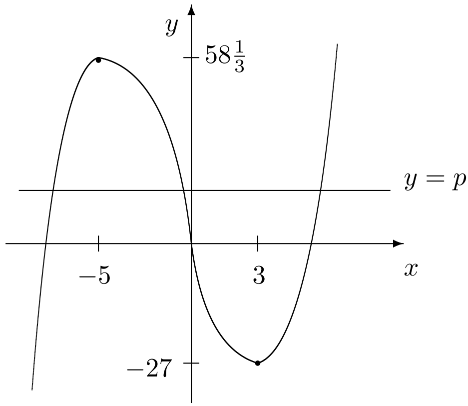
$$y = x^2 - 15x + \frac{x^3}{3}.$$

Заметим, что ООФ — вся числовая прямая, и функция общего вида, то есть не является ни четной, ни нечетной. Производная

$$y' = x^2 + 2x - 15 = 0 \ \text{ при } \ x = -5, \ x = 3.$$



Таким образом, $x = -5$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума, причем $y(-5) = 58\frac{1}{3}$, $y(3) = -27$ и график имеет вид:



$y = p$ — прямая, параллельная оси Ox. Перемещая эту прямую вдоль оси Oy, видим, что прямая будет пересекать график первой функции в трех точках только в случае, когда $-27 < p < 58\frac{1}{3}$. Выбирая из данного промежутка наибольшее натуральное значение, получаем *ответ*: $p = 58$.

Пример 2. Найти все значения p, при которых уравнение

$$4\sin^3 x = p - 3\cos 2x$$

не имеет корней.

Решение. Преобразуем уравнение

$$p = 4\sin^3 x + 3\left(1 - 2\sin^2 x\right);\ p = 4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 3.$$

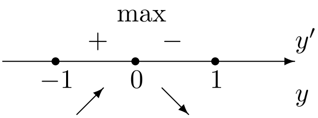
Заменим $t = \sin x,\ t \in [-1, 1]$ и исследуем функцию

$$y = 4t^3 - 6t^2 + 3 \text{ на промежутке } t \in [-1, 1].$$

Производная данной функции равна

$$y' = 12t^2 - 12t = 0 \text{ при } t = 0,\ t = 1.$$

Тогда на промежутке $t \in [-1, 1]$ имеем картинку:



Так как $t = 0$ — точка максимума,

$$y(0) = 3,\ y(-1) = -7,\ y(1) = 1,$$

то наименьшее значение функции на промежутке $t \in [-1, 1]$ равно -7, наибольшее — 3.

В силу непрерывности функции $y = 4t^3 - 6t^2 + 3$, она принимает все значения из промежутка $y \in [-7, 3]$. Тогда исходное уравнение не имеет корней при $p \notin [-7, 3]$, то есть имеем
ответ: $p \in (-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$.

Пример 3. Найти все значения p, при которых уравнение

$$5^{3x+1} + 8 = 3 \cdot 5^{x+1}\left(3 + 5^x\right) - p$$

имеет не более одного корня.

Решение. Преобразуем уравнение

$$5 \cdot \left(5^x\right)^3 + 8 = 15 \cdot 5^x\left(3 + 5^x\right) - p.$$

Заменим $t = 5^x,\ t > 0:$

$$5t^3 - 15t^2 - 45t = -8 - p;\ t^3 - 3t^2 - 9t = -\frac{8 + p}{5}.$$

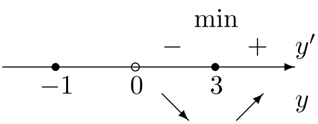
Исследуем функцию

$$y = t^3 - 3t^2 - 9t \ \text{ на промежутке } \ t \in (0, +\infty)$$

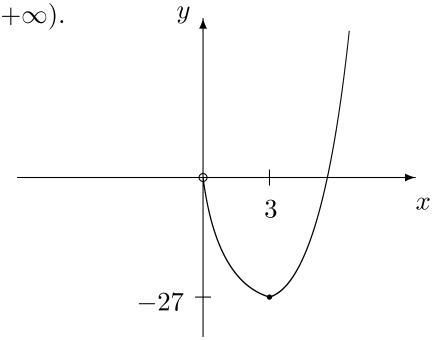
для нахождения её множества значений.

Производная данной функции равна

$$y' = 3t^2 - 6t - 9 = 0 \text{ при } t = 3,\ t = -1.$$



Тогда функция убывает при $t \in (0, 3]$, принимая в силу непрерывности все значения из промежутка $(y(0), y(3)] = [-27, 0)$, и возрастает при $t \in [3, +\infty)$, принимая все значения из промежутка $[y(3), +\infty) = [-27, +\infty)$.



Так как уравнение имеет не более одного корня тогда, и только тогда, когда правая часть уравнения

$$t^3 - 3t^2 - 9t = -\frac{8+p}{5}$$

принимает значения вне множества $[-27, +\infty)$ (не имеет корней), либо правая часть данного уравнения принимает значения из множества $[0, +\infty)$ (единственный корень, то искомые значения p удовлетворяют условию:

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{8+p}{5} \leqslant -27, \\ -\frac{8+p}{5} \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Откуда имеем *ответ*: $p \in (-\infty, -8] \cup [127, +\infty)$.

Задания для самостоятельной работы

Найти производную функции:

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^5 x}}$;

2. $f(x) = \frac{\sin 2x}{e^{x^2}}$;

3. $f(x) = \ln 2^{2x}$.

Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции:

4. $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 13$;

5. $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 1.$

Найти наибольшее и наименьшее значение функции
6. $y = \frac{4}{x^2} + x^2$ на отрезке $[1, 2]$;
7. $y = 2\sin 2x - 1$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;
8. $y = 4 + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$ на всей числовой оси.

9. Найти угол между касательными к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4},$$

проведенными из начала координат.

10. Найти число, куб которого превышает утроенный его квадрат на минимальное значение.

11. Найти наиболее удаленные от оси абсцисс точки графика функции

$$y = \frac{5x}{x^2 + 4}.$$

12. Вычислить $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} |m|$, где m — наименьшее значение функции

$$f(x) = (x-1)^2(x-4) \ \text{ на отрезке } \ [1, 4].$$

13. Три грани прямоугольного параллелепипеда с общим вершиной покрасили в три цвета: одну грань — в красный, другую — в синий и третью — в белый. Сумма площадей красной и синей граней равна 120, а периметр красной грани на 18 меньше периметра белой грани. Найти наибольшее значение объема такого параллелепипеда.

14. Вездеход, находящийся на пересеченной местности в 27 км от прямолинейного шоссе, должен доставить бригаду МЧС в населенный пункт, расположенный на шоссе. Расстояние от точки шоссе, ближайшей к вездеходу, до населенного пункта равно 45 км. По пересеченной местности вездеход едет со скоростью 44 км/ч, по шоссе со скоростью 55 км/ч. На каком расстоянии от населенного пункта вездеход должен выехать на шоссе, чтобы время движения было наименьшим?

15. Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через произвольную точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найти наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

Построить графики функции:

16. $y = (x-3)\sqrt{x}$;

17. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3$.

18. При каком наименьшем натуральном n уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 45x + n = 0$$

имеет ровно один корень?

19. При каком наибольшем целом c уравнение

$$48x - 4x^2 - 4x^3 + \frac{x^4}{2} + c = 0$$

имеет 4 корня?

20. Найти все значения p, при которых уравнение

$$4\sin 3x - 7 = p\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right)$$

имеет хотя бы один корень.

21. Найти все значения p, при которых уравнение

$$3^{3x+2} + p = 2 \cdot 9^{x+1} - 3^{x+2} + 1$$

имеет единственный корень.

Ответы

1. $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{\operatorname{ctg}^7 x}\sin^2 x}$.

2. $f'(x) = \frac{2\cos 2x - 2x\sin 2x}{e^{x^2}}$.

3. $2\ln 2$.

4. $x = -\frac{1}{2}$, $x = 3$ — точки минимума; $x = 0$ — точка максимума; $f(x)$ возрастает на $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [3, +\infty)$; $f(x)$ убывает на $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, 3]$.

5. $x = 1$ — точка минимума; $x = -1$ — точка максимума; $f(x)$ возрастает на $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; $f(x)$ убывает на $[-1, 1]$.

6. $y = 5$ — наибольшее, $y = 4$ — наименьшее значения функции.

7. $y = 1$ — наибольшее, $y = -1$ — наименьшее значения функции.

8. $y = 6$ — наибольшее, $y = 2$ — наименьшее значения функции.

9. $\frac{2\pi}{3}$.

10. 2.

11. $\left(2, \frac{5}{4}\right), \left(-2, -\frac{5}{4}\right)$.
12. -4.
13. 1100.
14. 9 км.
15. $\frac{22}{3}$.
18. $n = 82$.
19. $c = 71$.
20. $p \in [-11, 0)$.
21. $p \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \{1\}$.

Тест

B 1. Укажите абсциссу точки графика функции

$$f(x) = 5 + 4x - x^2,$$

в которой угловой коэффициент касательной равен нулю.

B 2. Найдите значение производной функции $y = (x-2)\ln(x+2)$ в точке $x_0 = -1$.

B 3. Найдите сумму координат точки пересечения касательной, проведенной к графику функции $f(x) = x^2 - 2x - 5$ в его точке с абсциссой $x_0 = -2$, с осью абсцисс.

B 4. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2,7 \cdot e^{3x^2 - x^3 - 4} \text{ на отрезке } [1; 3].$$

B 5. Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(-7; 14)$. Найдите $f'(-7)$.

B 6. Точка движется по координатной прямой согласно закону

$$x(t) = 10 + 8t - 0,5t^2,$$

где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. Найдите её скорость при $t = 6$.

B 7. Укажите наибольшее значение функции

$$y = \frac{52}{3x - 4 + 5^x} \text{ на отрезке } [1; 3].$$

B 8. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 10e^{2-0,4x}$ в его точке с абсциссой $x_0 = 5$.

B 9. При каком наименьшем целом значении a функция

$$f(x) = -\frac{1}{5}x^5 - x^4 - ax^3 + 102$$

убывает на всей числовой прямой?

B 10. При каком наибольшем целом значении a уравнение

$$x^4 - 2x^2 = a$$

не имеет корней?

C 1. Найдите значение функции

$$f(x) = 10^{\lg \frac{x^3-3x}{x+5} - \log_{0,1}(x+5)}$$

в точке максимума.

C 2. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 5(2x-6)^4 - (2x-6)^5 \quad \text{при} \quad |x-3| \leqslant 1.$$

C 3. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = 0,5x^4 - x^3 - \frac{16 - 8x^2 + x^4}{x^2 - 4}.$$

Ответы

B 1. 2. **B 2.** -3. **B 3.** $-1,5$. **B 4.** $2,7$. **B 5.** -2. **B 6.** 2. **B 7.** 13. **B 8.** -4. **B 9.** 2. **B 10.** -2. **C 1.** 2. **C 2.** 112. **C 3.** $-0,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 10 класс. Омск: НОУ НОК "Образование Плюс". 2003. 148 с.

2. Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 11 класс. Омск: НОУ НОК "Образование Плюс". 2003. 160 с.

3. Задачи по математике. Алгебра. / Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. М.: Наука. 1987. 432 с.

4. Нараленков М.И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра: как решать задачи: Учебно–практическое пособие. Москва: Издательство "Экзамен". 2003. 448 с.

5. Д.К. Фаддеев, М.С. Никулин, И.Ф. Соколовский. Элементы высшей математики для школьников. М.: Наука. 1987. 336 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Наталья Владимировна Латыпова

Производная функции и её применение
Учебно–методическое пособие

Напечатано с оригинал–макета заказчика
Компьютерный набор и верстка: Н. В. Латыпова,
Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Тираж 200 экз. Заказ № Печать офсетная.
Типография ГОУВПО "Удмуртский госуниверситет"
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.