ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"ЦЕНТР ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ МОЛОДЕЖИ"

**Н.В. ЛАТЫПОВА**

# ТРИГОНОМЕТРИЯ

ИЖЕВСК 2010

УДК 514(07)
ББК 22.151.05р30
Л 278

**Л 278 Латыпова Н. В.** Тригонометрия: Учебно-методическое пособие. Изд. ГОУВПО "УдГУ". Ижевск. 2010. 37 с.

В данном учебно-методическом пособии представлен справочный материал, рассмотрены преобразования тригонометрических выражений, способы и алгоритмы решения тригонометрических уравнений и неравенств. А также разобраны способы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, и решения систем тригонометрических уравнений. Разобранные задачи снабжены подробным решением и предложены разнообразные упражнения для самостоятельной работы, что должно помочь лучшему усвоению и закреплению материала. Предназначена для учащихся 10-11 классов средней школы и подготовительных курсов.

УДК 514(07)
ББК 22.151.05р30

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Наибольшие затруднения у учащихся, и в какой-то степени даже отторжение, в школьном курсе математики вызывает раздел "Тригонометрия". Пособие призвано помочь преодолеть возникающие трудности в понимании, усвоении и систематизации материала.

В качестве справочного материала в пособии даются основные понятия, формулы, графики и свойства, связанные с тригонометрическими и обратными тригонометрическими функциями. Рассматриваются различные преобразования тригонометрических выражений. Разбираются решения простейших тригонометрических уравнений и подробно рассматриваются основные методы решения тригонометрических уравнений (такие, как различные преобразования, разложение на множители, методы подстановки и дополнительного угла, однородные уравнения). Особое внимание уделяется отбору корней тригонометрического уравнения с помощью тригонометрического круга. Подробно разбираются решения как простейших, так и более сложных тригонометрических неравенств. Рассмотрен метод интервалов на тригонометрическом круге. Дается решение систем тригонометрических уравнений. Представленный теоретический материал снабжен большим количеством примеров.

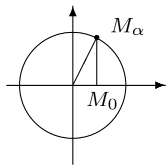
В конце каждого параграфа предложены задания для самостоятельного решения, позволяющие закрепить полученные знания и развить соответствующие навыки. Нумерация заданий в каждом параграфе своя. Приведенные ответы к задачам позволяют проверить свои знания. Вниманию читателя в конце пособия предлагается тест для проверки своих знаний, умений и навыков, позволяющий оценить свои силы.

Автор выражает признательность О.В. Коноваловой и Н.Д. Таныгиной за внимательное прочтение работы и ряд ценных предложений. Особая благодарность выражается О.Р. Пирожковой за помощь в издании.

# Тригонометрия

## Определения тригонометрических функций

Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат и отметим на ней точку $M_0(1,0)$.



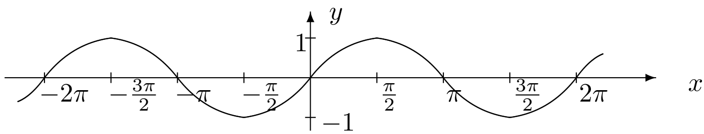

Пусть $\alpha$ — произвольный угол, выраженный в радианах. При повороте на угол $\alpha$ точка $M_0$ перейдет в некоторую точку $M_\alpha$ с координатами $(x_\alpha, y_\alpha)$.

*Синусом* угла $\alpha$ называется ордината $y_\alpha$ точки $M_\alpha : \sin\alpha = y_\alpha$. *Косинусом* угла $\alpha$ называется абсцисса $x_\alpha$ точки $M_\alpha : \cos\alpha = x_\alpha$. Тригонометрические функции *тангенс* и *котангенс* определяются через синус и косинус по формулам:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

## Графики и свойства тригонометрических функций

$y = \sin x$.



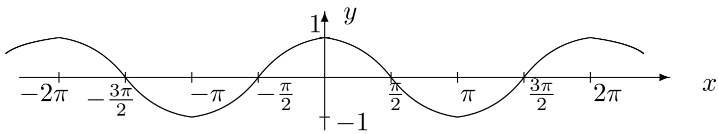

Свойства:

1. ООФ: $x \in \mathbb{R}$; ОЗФ: $y \in [-1, 1]$.
2. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$.

3. Нечетная функция.
4. Функция возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$;
убывает на $\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi, \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
5. График функции — синусоида.

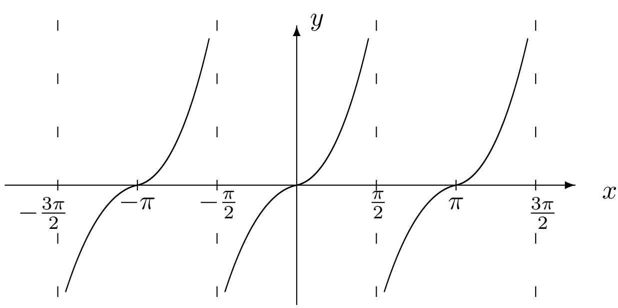
$y = \cos x$.

Свойства:
1. ООФ: $x \in \mathbb{R}$; ОЗФ: $y \in [-1, 1]$.
2. Функция периодическая с периодом $T = 2\pi$.
3. Четная функция.
4. Функция возрастает на $(-\pi + 2n\pi, 2n\pi)$;
убывает на $(2n\pi, \pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.
5. График функции — косинусоида.



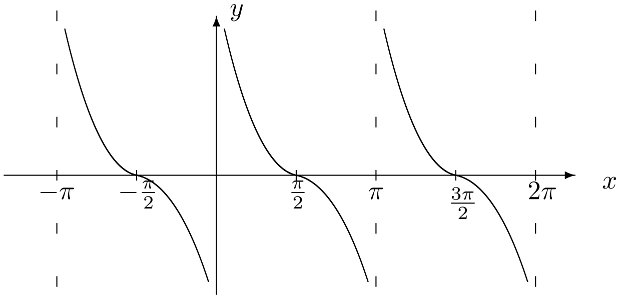

$y = \operatorname{tg} x$.

Свойства:
1. ООФ: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; ОЗФ: $y \in \mathbb{R}$.
2. Функция периодическая с периодом $T = \pi$.
3. Нечетная функция.
4. Функция возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

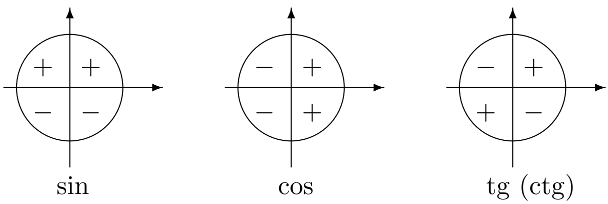


$y = \operatorname{ctg} x$.

Свойства:
1. ООФ: $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; ОЗФ: $y \in \mathbb{R}$.
2. Функция периодическая с периодом $T = \pi$.
3. Нечетная функция.
4. Функция убывает на $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.




## Тригонометрические круги




## Формулы приведения

*Формулами приведения* называют соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ выражаются через функции аргумента $\alpha$. Используется следующая **схема**:

1) при переходе от углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к углу $\alpha$ синус меняется на косинус, косинус — на синус, тангенс — на котангенс, а котангенс — на тангенс;

2) при переходе от углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к углу $\alpha$ названия функций не меняются;

3) перед новой функцией ставится тот знак, который имеет прежняя функция в соответствующей четверти (знак определяется с помощью единичной окружности, угол $\alpha$ при этом считается острым).

**Таблица некоторых значений тригонометрических функций**

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | – | $0$ | – |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | – | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | – | $0$ |

**Основные формулы тригонометрии**

**1.** Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1;$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

**2.** Формулы сложения:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

**3.** Формулы кратных аргументов:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

**4.** Формулы преобразования сумм или разностей в произведения:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

**5.** Преобразование произведений в суммы или разности:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right).$$

**6.** Формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha);\ \sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha).$$

**7.** Формулы половинного аргумента:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Знак "$+$" или "$-$" выбирается в зависимости от того, в какой четверти находится угол $\frac{\alpha}{2}$.

**8.** Универсальная подстановка:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Обратим внимание на то, что применение универсальной подстановки может привести к потере корней, так как стоящий в правой части выражения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не определен при $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. А значит, при использовании универсальной подстановки нужно проверить, не являются ли эти значения $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ корнями.

**9.** Обратные тригонометрические функции:
$\alpha=\arcsin a$, если $\sin\alpha=a$ и $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
$\alpha=\arccos a$, если $\cos\alpha=a$ и $\alpha\in[0,\pi]$.
$\alpha=\operatorname{arctg} a$, если $\operatorname{tg}\alpha=a$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
$\alpha=\operatorname{arcctg} a$, если $\operatorname{ctg}\alpha=a$ и $\alpha\in(0,\pi)$.

**10.** Обратные тригонометрические функции противоположного аргумента:

$$\arcsin(-a)=-\arcsin a;\ \arccos(-a)=\pi-\arccos a;$$

$$\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg} a;\ \operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a.$$

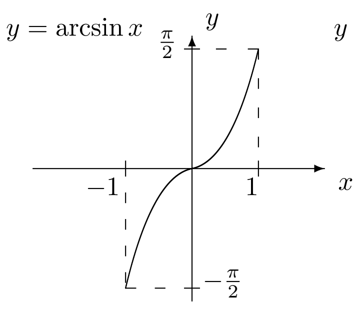
## Обратные тригонометрические функции

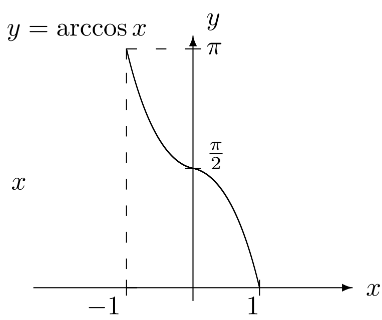
*Арксинус* числа $x\in[-1,1]$ — это такое число $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $x:\sin y=x$.

Свойства функции $y=\arcsin x$:
1. ООФ: $x\in[-1,1]$; ОЗФ: $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Нечетная функция.
3. Функция возрастает на $[-1,1]$.

*Арккосинус* числа $x\in[-1,1]$ — это такое число $y\in[0,\pi]$, косинус которого равен $x:\cos y=x$.

Свойства функции $y=\arccos x$:
1. ООФ: $x\in[-1,1]$; ОЗФ: $y\in[0,\pi]$.
2. Функция общего вида.
3. Функция убывает на $[-1,1]$.

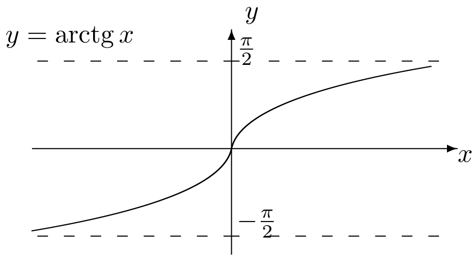


*Арктангенс* числа $x \in \mathbb{R}$ — это такое число $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $x$ : $\operatorname{tg} y = x$.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

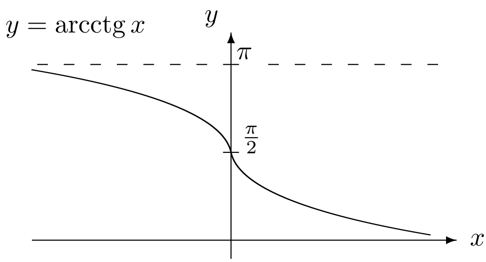
1. ООФ: $x \in \mathbb{R}$; ОЗФ: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Нечетная функция.
3. Функция возрастает на $\mathbb{R}$.




*Арккотангенс* числа $x \in \mathbb{R}$ — это такое число $y \in (0, \pi)$, котангенс которого равен $x$ : $\operatorname{ctg} y = x$.

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

1. ООФ: $x \in \mathbb{R}$; ОЗФ: $y \in (0, \pi)$.
2. Функция общего вида.
3. Функция убывает на $\mathbb{R}$.




## Преобразование тригонометрических выражений

Рассмотрим примеры на использование формул и выполнение преобразований тригонометрических выражений. Рекомендуется еще раз повторить справочный материал, обратив внимание на основные формулы тригонометрии и тригонометрические круги.

**Пример 1.** Вычислить $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

*Решение.* Используем соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (см. с. 7, п. **1**):
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$. Так как $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Подставляя значения синуса и косинуса, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}.$$

**Пример 2.** Вычислить:

$$A = \frac{12}{\pi}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right].$$

*Решение.* Используя формулы п. 10, имеем

$$A = \frac{12}{\pi}\left[\pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{12}{\pi}\left[\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right] = 2.$$

**Пример 3.** Вычислить $a = \cos 15^\circ - \sin 15^\circ$.

*Решение.* Рассмотрим $a^2 = (\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)^2$. Раскроем квадрат и применим основное тригонометрическое тождество и формулу для синуса двойного угла:

$$a^2 = \cos^2 15^\circ - 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ + \sin^2 15^\circ = 1 - \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Тогда, извлекая корень квадратный и учитывая, что

$$\cos 15^\circ > \sin 15^\circ, \text{ то есть } a > 0, \text{ получаем } a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Пример 4.** Вычислить: $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

*Решение.* Будем использовать формулу универсальной подстановки (см. с 8, п. **8**):

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \text{ то есть } \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{5}{13}.$$

Из полученного уравнения выразим $\operatorname{tg}\alpha$ учтем, что тангенс в третьей четверти принимает положительные значения:

$$13\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right) = -5\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right);\ \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{9}{4};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}.$$

**Пример 5.** Вычислить: $A = \frac{\sin\beta-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\beta}$, если $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$.

*Решение.* Так как определен $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$, то $\cos\beta \neq 0$. Поэтому разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos\beta$ :

$$A = \frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-1}{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+1} = \frac{\operatorname{tg}\beta-1}{\operatorname{tg}\beta+1} = -\frac{3}{7}.$$

**Пример 6.** Найти $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$.

*Решение.* Обозначим $\alpha = \arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)$. Тогда по определению арксинуса (см. с. 9, п. **9**) имеем $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Так как $\sin\alpha < 0$, то $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Таким образом, нам требуется найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ и $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Будем использовать формулу половинного аргумента (см. п. 7): $\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, причем знак "минус" берется в силу того, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, а значит, и $\frac{\alpha}{2} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, то есть $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$.

Зная $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ можно найти по основному тригонометрическому тождеству: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{5}{13}$. Тогда

$$\sin\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Это и есть *ответ*: $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right) = \frac{5}{13}$.

**Задания для самостоятельной работы.**

**1.** Вычислить: $\sin\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = 1,4$;
**2.** Вычислить: $18\cos\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3},\ \alpha \in (\pi, 2\pi)$.
**3.** Вычислить: $\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\beta$, если $\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta = 3$.
**4.** Найти $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.
**5.** Найти $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{5}\right)$.
**6.** Найти $\sin\left(5\operatorname{arctg}(-1) - \arcsin\frac{1}{5}\right)$.

**7.** Найти $\cos\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

**8.** Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Найти $\frac{\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha}{1 + 3\sin\alpha\cos\alpha}$.

**9.** Вычислить: $\frac{\sin 77^\circ + \sin 43^\circ}{\sqrt{3}\cos 13^\circ - \cos 103^\circ}$.

**10.** Упростить: $8\cos^4\alpha - 4\cos 2\alpha - \cos 4\alpha$.

**Ответы. 1.** $-0,96$. **2.** $1 + 4\sqrt{15}$. **3.** 11. **4.** $-\frac{\sqrt{15}}{8}$. **5.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **6.** $\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{2}}{10}$. **7.** $0,5$. **8.** $-\frac{19}{11}$. **9.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **10.** 3.

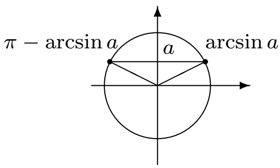
## Тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

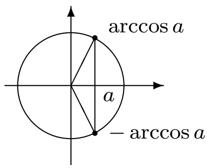
$$\sin x = a \ \ (|a| \leqslant 1)\,, \ \cos x = a \ \ (|a| \leqslant 1)\,,$$

$$\operatorname{tg} x = a \ \ (-\infty < a < +\infty)\,, \ \operatorname{ctg} x = a\,(-\infty < a < +\infty)\,.$$

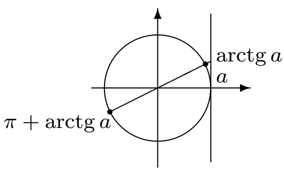
Подчеркнем, что уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ не имеют решений при $|a| > 1$. Решения этих уравнений имеют вид:



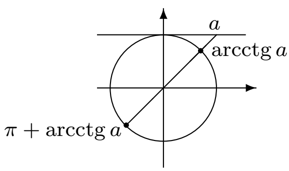

$\sin x = a$




$\cos x = a$




$\operatorname{tg} x = a$




$\operatorname{ctg} x = a$

$$\sin x = a \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = a \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Решения простейших уравнений при $a = 0$ и $a = \pm 1$ надо запомнить:

| | |
|---|---|
| $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ | $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$ |
| $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$ | $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ |
| $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$ | $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$ |
| $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$ | $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$ |

**Основные методы решения** тригонометрических уравнений:

1) преобразования, приводящие к простейшим уравнениям;

2) разложение на множители;

3) метод подстановки (в том числе, использование универсальной подстановки), приводящий к рациональным уравнениям;

4) метод дополнительного угла;

5) решение однородных уравнений.

Рассмотрим каждый из методов подробнее, проиллюстрировав примерами.

Как правило, первые два метода во многих примерах используются одновременно. С помощью тригонометрических формул уравнение преобразуют таким образом, чтобы получилось произведение простых сомножителей, которые приводят к решению простейших уравнений.

**Пример 1.** Решить уравнение:

$$1 - \sin 3x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2.$$

*Решение.* Раскроем квадрат в правой части уравнения:

$$1 - \sin 3x = \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Используем основное тригонометрическое тождество и формулу для синуса двойного угла (см. с. 7, п. **1** и **3**):

$$1 - \sin 3x = 1 - \sin x.$$

Перенося все в одну часть, получаем следующее уравнение

$$\sin x - \sin 3x = 0,$$

которое при помощи формулы разности синусов (см. с. 8, п. **4**) равносильно уравнению

$$-2\sin x \cos 2x = 0.$$

Учитывая, что произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, получаем совокупность двух простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Заметим, что в совокупности можно брать $k = n$, но если по ходу решения задачи преобразования привели к системе уравнений, то для того, чтобы правильно сделать отбор корней, нужно задавать разные значения $n$ и $k$.

**Пример 2.** Решить уравнение:

$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$$

*Решение.* Применим формулу суммы синусов в левой части уравнения (см. с. 7, п. **2**):

$$2\sin 2x \cos x = \sin 2x,$$

перенесем все в одну часть и вынесем общий множитель

$$\sin 2x\,(2\cos x - 1) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, то имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

В следующих двух примерах используется *метод подстановки.* При его использовании делается замена, которая приводит к алгебраическим или дробно-рациональным уравнениям.

**Пример 3.** Решить уравнение:

$$2\cos^2 x + 5\sin x = 4.$$

*Решение.* Так как в уравнении стоят функции одного и того же аргумента, то, используя основное тригонометрическое тождество, получим квадратное уравнение от функции $\sin x$ :

$$2\left(1-\sin^2 x\right) + 5\sin x - 4 = 0;\ 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Делая замену: $\sin x = t$, где $|t| \leqslant 1$, имеем $2t^2 - 5t + 2 = 0$, решая которое получаем два корня: $t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = 2$, причем последний корень является посторонним в силу условия $|t| \leqslant 1$. Таким образом, осталось, вернувшись к обратной замене, решить простейшее уравнение

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 4.** Решить уравнение: $2\cos 2x + 2\,\mathrm{tg}^2\, x = 5$.

*Решение.* Найдем О.Д.З.: $\cos x \neq 0;\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

В этом случае уравнение имеет и разные аргументы, и разные функции, поэтому надо искать формулу, связывающую их. Такой формулой является универсальная подстановка:

$$2\frac{1-\mathrm{tg}^2\, x}{1+\mathrm{tg}^2\, x} + 2\,\mathrm{tg}^2\, x = 5.$$

Сделаем замену $\mathrm{tg}^2\, x = t,\ t \geqslant 0$. Тогда получаем дробно–рациональное уравнение

$$2\frac{1-t}{1+t} + 2t - 5 = 0,$$

которое приводим к общему знаменателю

$$\frac{2-2t+2t+2t^2-5-5t}{1+t} = 0.$$

В силу условия $t \geqslant 0$ знаменатель дроби в нуль не обращается, поэтому дробно–рациональное уравнение равносильно квадратному

$$2t^2 - 5t - 3 = 0,$$

которое имеет корни $t_1 = 3,\ t_2 = -\frac{1}{2}$, причем последний является посторонним в силу условия $t \geqslant 0$. Возвращаясь к обратной замене, имеем

$$\operatorname{tg}^2 x = 3.$$

Откуда, извлекая корень квадратный из обеих частей уравнения, получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Объединяя решения, получаем окончательный
*ответ*: $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

*Однородное уравнение* $n$–й степени — это уравнение вида

$$a \sin^n x + b \sin^{n-1} x \cos x + c \sin^{n-2} x \cos^2 x + \cdots +$$

$$+ v \sin x \cos^{n-1} x + w \cos^n x = 0,$$

где $a, b, c, \ldots, v, w$ — некоторые числа. В частности, линейное однородное уравнение (то есть первой степени) имеет вид:

$$a \sin x + b \cos x = 0.$$

Решаются такие уравнения делением обеих частей на $\cos^n x$, в предположении, что $\cos x \neq 0$, и заменой $\operatorname{tg} x = t$, что приводит однородное уравнение к алгебраическому уравнению $n$–й степени:

$$at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \cdots + vt + w = 0,$$

или первой степени, в частном случае: $at + b = 0$.

**Пример 5.** Решить уравнение:

$$3 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1.$$

*Решение.* Если воспользоваться основным тригонометрическим тождеством

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

то уравнение после приведения подобных становится однородным:

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, причем $\cos x \neq 0$. Тогда

$$2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

в котором делаем замену $\operatorname{tg} x = y$ и решаем полученное квадратное уравнение

$$2y^2 - 3y + 1 = 0,$$

имеющего корни $y_1 = 1$ и $y_2 = \frac{1}{2}$. Возвращаясь к обратной замене, имеем простейшие тригонометрические уравнения

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

*Метод дополнительного угла* используется для решения уравнений вида:

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

где коэффициенты $a, b, c$ не равны нулю. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

и, вводя дополнительный угол $\varphi$, для которого $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, получаем

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

которое равносильно простейшему

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Рассмотрим использование метода дополнительного угла на следующем примере.

**Пример 6.** Решить уравнение: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$.

*Решение.* Поделим обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$ :

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1,$$

которое равносильно

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x+\sin\frac{\pi}{3}\cos x=1, \quad \text{или} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

Откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Если в уравнении имеются выражения, содержащие сумму (разность) и произведение синуса и косинуса одного аргумента, то можно использовать замену

$$\sin x\pm\cos x=t,$$

которая в конце приведет к применению метода дополнительного угла. Возводя обе части выражения в квадрат, получаем

$$\sin^2 x\pm 2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2.$$

Откуда

$$\sin x\cos x=\pm\frac{1}{2}(t^2-1).$$

**Пример 7.** Решить уравнение: $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x-1$.

*Решение.* Используя формулу синуса двойного угла, имеем

$$\sin x+\cos x=\sin x\cos x-1.$$

Заменяя

$$\sin x+\cos x=t,\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1),$$

получаем квадратное уравнение $t^2-2t-3=0$, которое имеет решение:

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-1, \\ t_2=3, \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x=-1, \\ \sin x+\cos x=3. \end{array}\right.$$

Видим, что исходное уравнение сводится к уравнениям, решаемым методом дополнительного угла.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{3}{\sqrt{2}}, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, так как правая часть больше 1. Решая первое, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \\ x=\pi+2k\pi, \end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

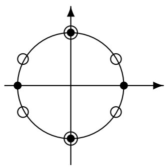
Иногда требуется провести *отбор полученных корней* тригонометрического уравнения. Удобнее это делать с помощью тригонометрического круга. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

**Пример 8.** Решить уравнение: $\sin^2 2x + 2\cos^2 3x = 0$.

*Решение.* Можно, конечно, попытаться воспользоваться формулами двойного и тройного угла для синуса и косинуса, чтобы преобразовать данное уравнение, но это не лучший вариант. Обратим внимание на то, что слева стоит сумма квадратов двух выражений, а справа нуль. Когда сумма двух неотрицательных выражений равна нулю? Тогда, и только тогда, когда оба выражения одновременно равны нулю, то есть

$$\begin{cases} \sin^2 2x = 0; \\ 2\cos^2 3x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0; \\ \cos 3x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Нам нужно выбрать общие решения. Отбор корней проведем с помощью тригонометрического круга, отмечая на нем решения первого уравнения черным кружком, а второго — прозрачным.

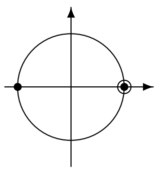


$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 9.** Решить уравнение:

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0.$$

*Решение.* Заметим, что дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, то есть



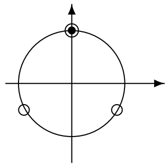
$$\begin{cases} \sin x = 0; \\ \cos x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \\ x \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 10.** Решить уравнение: $\sin x - \sin 3x = 2$.

*Решение.* Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \sin 3x \leqslant 1$, то разность этих двух функций лежит в пределах $-2 \leqslant \sin x - \sin 3x \leqslant 2$. Очевидно, максимальное значение 2 возможно только в случае, когда

$$\begin{cases} \sin x = 1; \\ \sin 3x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



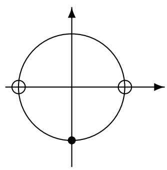
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$$

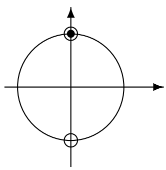
Второй способ решения данного уравнения — преобразование разности в левой части уравнения в произведение (см. п. 4):

$$2\sin(-x)\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \sin x \cos 2x = -1.$$

Произведение двух сомножителей, значение которых меняется в пределах от $-1$ до 1, может равняться $-1$, когда один из сомножителей равен 1, а другой — $-1$, то есть

$$\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = -1; \\ \cos 2x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin x = 1; \\ \cos 2x = -1; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi l, \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right.$$





$\Rightarrow x \in \emptyset$ $\qquad\qquad$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}.$

Рассмотрим еще пример, в котором важную роль играет множество значений тригонометрической функции.

**Пример 11.** Решить уравнение:

$$\sin\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right)=\frac{1}{2}.$$

*Решение.* Решаем уравнение относительно внешнего синуса

$$\frac{4}{3}\pi\sin x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sin x=(-1)^n\frac{1}{8}+\frac{3}{4}n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $|\sin x|\leqslant 1$, то правая часть удовлетворяет неравенству

$$\left|(-1)^n\frac{1}{8}+\frac{3}{4}n\right|\leqslant 1$$

при $n=-1,0,1$. Таким образом, последнее уравнение становится равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{7}{8};\\ \sin x=\frac{1}{8};\\ \sin x=\frac{5}{8};\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{7}{8}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z};\\ x=(-1)^l\arcsin\frac{1}{8}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z};\\ x=(-1)^k\arcsin\frac{5}{8}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Последняя совокупность и дает искомое множество решений, то есть ответ.

Наконец, рассмотрим еще решение *тригонометрического уравнения с параметром.*

**Пример 12.** Найти количество целых значений параметра $a$, при которых уравнение

$$a\sin x+9\cos x=2a$$

имеет решение.

*Решение.* Обратим внимание, что данное уравнение решается методом дополнительного угла. А именно, разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+9^2}$ :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+81}}\sin x+\frac{9}{\sqrt{a^2+81}}\cos x=\frac{2a}{\sqrt{a^2+81}}.$$

Пусть $\sin\varphi=\frac{9}{\sqrt{a^2+81}}$ и $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+81}}$. Тогда

$$\sin(x+\varphi)=\frac{2a}{\sqrt{a^2+81}}.$$

Очевидно, чтобы это простейшее уравнение имело решение, надо, чтобы правая часть удовлетворяла неравенству:

$$\left|\frac{2a}{\sqrt{a^2+81}}\right| \leqslant 1.$$

Решим полученное неравенство, возведением обеих его частей в квадрат (это равносильное преобразование в силу неотрицательности обеих частей неравенства):

$$\frac{4a^2}{a^2+81} \leqslant 1.$$

Перенесем все в одну часть и приведем к общему знаменателю

$$\frac{3a^2-81}{a^2+81} \leqslant 0.$$

Так как знаменатель дроби положительный при любых $a$, то дробь равносительна $3a^2-81 \leqslant 0$; откуда $|a| \leqslant 3\sqrt{3}$. Осталось из полученного неравенства выбрать все целые значения и посчитать их количество: $a = \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$, то есть всего 11 значений.

**Задания для самостоятельной работы.**

Решить уравнения:

**1.** $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$;
**2.** $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$;
**3.** $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 3\cos^2 x$;
**4.** $5(1+\cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$;
**5.** $\sin^2 2x + \cos^2 4x = 0$;
**6.** $\cos 2x - \cos 3x = -2$;
**7.** $0,6\cos 2x - 0,4\cos 3x = 1$;
**8.** $\sin\left(\frac{13}{9}\pi \sin x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
**9.** $\cos\left(\pi\sqrt{x-4}\right)\cos\left(\pi\sqrt{x}\right) = 1$;
**10.** $4\sin^4 x + 2\cos^3 x + 4\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$;
**11.** $12\sin^4 x + 5\sin^2 2x = 8\cos^4 x$.
**12.** $3(\sin x - \cos x - 1) = \sin x \cos x$.
**13.** При каких $a$ уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственное

решение?

**14.** Найти все пары чисел $(x, y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{4-x^2}\left(4y^2-4y\cos 2\pi x+1\right)=0.$$

**15.** Сколько решений на отрезке $[-1, 10]$ имеет уравнение

$$\cos^4 x+0,5\sqrt{3}=\sin^4 x?$$

**Ответы.**

**1.** $x=\frac{\pi n}{5};\ x=\frac{\pi n}{7},\ n\in\mathbb{Z}$.
**2.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n;\ x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7};\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.
**3.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ x=\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
**4.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
**5.** $x\in\emptyset$.
**6.** $x\in\emptyset$.
**7.** $x=\pi(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}$.
**8.** $x=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{6}{13}+\pi m;\ x=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{13}+\pi m;$
$x=(-1)^m\arcsin\frac{12}{13}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.
**9.** $x=4$.
**10.** $x=\pi(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}$.
**11.** $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
**12.** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
**13.** $a=\frac{n}{2k},\ n, k\in\mathbb{Z}$.
**14.** $(\pm2, y),\ y\in\mathbb{R};\ \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right),\ n=0, \pm2;\ \left(\frac{n}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ n=\pm1, \pm3$.
**15.** 6 решений.

## Тригонометрические неравенства

Простейшими тригонометрическими неравенствами являются неравенства вида: $\sin x\leqslant a$, $\cos x>a$, $\operatorname{tg}x\geqslant a$, $\operatorname{ctg}x<a$ и т.п. Решения этих неравенств проще всего находить с помощью тригонометрического круга, не забывая учитывать периодичность функции и то, что $|\sin x|\leqslant 1$ и $|\cos x|\leqslant 1$.

**Алгоритм** решения простейшего тригонометрического неравенства:

**1.** Выполнить чертеж: используя определения тригонометрических функций, на единичной окружности отметить точки, соответствующие решениям неравенств.

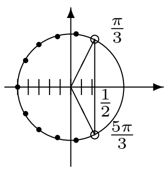
**2.** Найти "основной" интервал решений неравенства: записать множество решений неравенства в виде интервала, обходя отмеченные на чертеже точки против часовой стрелки.

**3.** Найти все решения неравенства: к концам "основного" интервала прибавить период функции неравенства.

Напомним, что для косинуса отмечаем соответствующую правую часть на оси абсцисс, для синуса — на оси ординат, а линия тангенса — это прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $(1,0)$, линия котангенса — прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку $(0,1)$.

**Пример 1.** Решить неравенство: $\cos x < \frac{1}{2}$.

*Решение.* Используем тригонометрический круг:

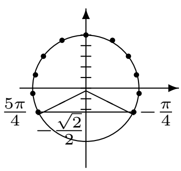



Отмечаем на оси абсцисс точку $\frac{1}{2}$ и проводим прямую, параллельную оси ординат, имея две точки пересечения с кругом $\frac{\pi}{3}$ и $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Так как неравенство строгое, то выкалываем данные точки. Учитывая знак неравенства, получаем следующий "основной" интервал решения: $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. В силу $2\pi$–периодичности функции косинуса, получаем *ответ*:

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 2.** Решить неравенство: $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

*Решение.* На тригонометрическом круге получаем

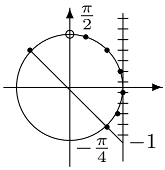


Отмечаем на оси ординат точку $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и проводим прямую, параллельную оси абсцисс, имея две точки пересечения с кругом $-\frac{\pi}{4}$ и $\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$. Учитывая знак неравенства, получаем следующий "основной" интервал решения: $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$. В силу $2\pi$–периодичности функции синуса, получаем:

$$-\frac{\pi}{4}+2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}+2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 3.** Решить неравенство: $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.

*Решение.*




Отмечаем на линии тангенса точку $-1$ и имеем две точки пересечения с кругом $-\frac{\pi}{4}$ и $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$. Учитывая знак неравенства, получаем следующий "основной" интервал решения: $-\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. В силу $\pi$–периодичности функции тангенса, получаем:

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 4.** Решить неравенство: $2\cos 2x+\sin 2x > \operatorname{tg} x$.

*Решение.* Заменим синусы и косинусы двойных углов через тангенсы (см. с. 8, п. **8**):

$$2\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} > \operatorname{tg} x.$$

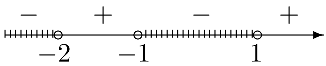
Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Тогда неравенство примет вид:

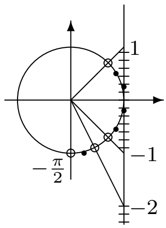
$$\frac{2-2t^2+2t-t\left(1+t^2\right)}{1+t^2} > 0,$$

которое в силу того, что знаменатель положителен, равносильно

$$2+t-2t^2-t^3 > 0;\ (t+2)(t-1)(t+1) < 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов:




$$\left[\begin{array}{l} t < -2; \\ -1 < t < 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x < -2; \\ -1 < \operatorname{tg} x < 1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < x < -\operatorname{arctg} 2; \\ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Учитывая период, получаем:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, -\operatorname{arctg} 2 + \pi k\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right), \; k \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 5.** Решить неравенство: $\sin x \sin 3x > \sin 5x \sin 7x$.

*Решение.* Преобразуем произведение синусов (см. с. 8, п. **5**):

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 4x\right) > \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 12x\right); \; \cos 12x - \cos 4x > 0.$$

И обратно, разность косинусов преобразуем в произведение:

$$-2 \sin 8x \sin 4x > 0; \; 4 \sin^2 4x \cos 4x < 0,$$

что равносильно

$$\left\{\begin{array}{l} \cos 4x < 0; \\ \sin 4x \neq 0; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 2\pi n < 4x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}; \\ 4x \neq \pi k, \; k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Откуда $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$.

**Пример 6.** Решить неравенство:

$$\sqrt{\pi x - x^2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

*Решение.* Найдем ОДЗ: $\pi x - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x \in [0, \pi]$. Так как неравенство строгое, то исключим точки, в которых обращается в нуль корень, т.е. $x \in (0, \pi)$. Тогда при этих $x$ : $\sqrt{\pi x - x^2} > 0$ и исходное неравенство равносильно простейшему $\cos x > \frac{1}{2}$, решение которого имеет вид $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая ОДЗ, имеем *ответ*: $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

Рассмотрим *метод интервалов на тригонометрическом круге* для решения тригонометрических неравенств. При использования метода интервалов для решения тригонометрических неравенств в силу периодичности функций числовую прямую заменяют тригонометрическим кругом. В остальном **алгоритм** такой же:

**1.** Находим нули функции, и точки, где функция не определена (нули знаменателя, ОДЗ).

**2.** Отметим полученные точки на тригонометрическом круге (если неравенство нестрогое, то нули функции заштриховываем, в противном случае — выкалываем).

**3.** Найдем знак функции в каждом полученном сегменте (интервале) круга.

**4.** В ответ запишем промежутки с требуемым знаком и добавляем в каждом период $2\pi$.

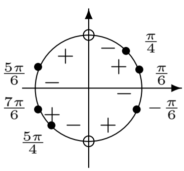
**Пример 7.** Решить неравенство:

$$\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)(\operatorname{tg} x - 1) \leqslant 0.$$

*Решение.* ОДЗ: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Найдем нули функции:

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \frac{1}{2}; \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n; \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отметим полученные точки на тригонометрическом круге с учетом ОДЗ.



Подставим в левую часть неравенства точку $x = 0$, получаем отрицательное значение. Остальные знаки чередуются. Таким образом, учитывая период тригонометрического круга, получаем:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup$$

$$\cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right], \ n \in \mathbb{Z}.$$

Заметив симметричность решения, его можно переписать в виде:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{6} + \pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in \mathbb{Z}.$$

**Задания для самостоятельной работы.**

Решить неравенства:
**1.** $\cos 2x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
**2.** $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 2$;
**3.** $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
**4.** $\sqrt{-\pi x - x^2}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) < 0$;
**5.** $\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0$;
**6.** $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$;
**7.** $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < \frac{3}{2}$.
**8.** $\sin 2x\,(1 - 2\cos x) > 0$.
**9.** $\cos 2x\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x\right) < 0$.
**10.** Найти наименьшее натуральное решение неравенства: $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$.

**Ответы.**
**1.** $x \in \left[-\frac{3\pi}{8} + \pi n, \frac{3\pi}{8} + \pi n\right], \ n \in \mathbb{Z}$.
**2.** $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi n, \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} + \pi n\right), \ n \in \mathbb{Z}$.
**3.** $x \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{11\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right], \ n \in \mathbb{Z}$.
**4.** $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right)$.
**5.** $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), \ n \in \mathbb{Z}$.
**6.** $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in \mathbb{Z}$.

**7.** $x \in \mathbb{R}$.
**8.** $x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
**9.** $x \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
**10.** 2.

## Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

**Алгоритм** решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции:

**1.** Найти ОДЗ.

**2.** Взять в качестве новой переменной обратную тригонометрическую функцию и применить определение обратной тригонометрической функции (см. с. 8, п. **9**).

**3.** Переформулировать задачу для обычных тригонометрических или алгебраических функций.

**4.** Решить полученное уравнение.

**5.** Сделать проверку.

**Пример 1.** Решить уравнение: $3 \arcsin x = \arcsin\left(-x^3\right)$.

*Решение.* ОДЗ: $x \in [-1, 1]$.

Обозначим через $\alpha = \arcsin x$. Тогда по определению арксинуса (см. с. 8, п. **9**):

$$\sin\alpha = x,\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$3\alpha = \arcsin\left(-x^3\right).$$

Откуда

$$\sin 3\alpha = -x^3,\ 3\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

Таким образом, получаем тригонометрическое уравнение

$$-\sin^3\alpha = \sin 3\alpha,$$

которое решим при условии, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$. Воспользуемся формулой синуса тройного угла (см. с. 7, п. **3**):

$$-\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;\ \sin\alpha\left(1 - \sin^2\alpha\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0;\\ \sin\alpha = \pm 1;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \pi n;\\ x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right. \quad \Rightarrow \alpha = 0.$$

Так как $\arcsin x = 0$, то $x = 0 \in$ ОДЗ.

Второй способ — после замены вместо тригонометрического уравнения получить алгебраическое. Так как

$$\sin 3\alpha = -x^3 \text{ и } \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3x - x^3,$$

то имеем

$$3x - 4x^3 = -x^3;\ 3x(1-x^2) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}x = 0;\\ x = 1;\\ x = -1.\end{array}\right.$$

Сделаем проверку. Это можно делать двумя способами: можно найденные значения $x$ подставить в исходное уравнение и проверить его истинность, или найти соответствующие значения $\alpha = \arcsin x$ и проверить входят ли они в найденный интервал:

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = 0;\\ \alpha = \frac{\pi}{2};\\ \alpha = -\frac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, имеем *ответ* $x = 0$.

**Пример 2.** Решить уравнение: $2\arcsin x = \arccos\left(2x^2\right)$.
*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \left[\begin{array}{l}x \in [-1,1],\\ 2x^2 \in [-1,1],\end{array}\right. \quad \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Обозначим через $\alpha = \arcsin x$. Тогда по определению арксинуса (см. с. 8, п. **9**):

$$\sin\alpha = x,\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$2\alpha = \arccos\left(2x^2\right).$$

Откуда

$$\cos 2\alpha = 2x^2,\ 2\alpha \in [0, \pi] \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

С другой стороны,

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2x^2.$$

Таким образом,

$$2x^2 = 1 - 2x^2;\ x^2 = \frac{1}{4};\ x = \pm\frac{1}{2}.$$

Сделаем проверку. При $x = \frac{1}{2}$ имеем $\alpha = \arcsin x = \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; при $x = -\frac{1}{2}$ имеем $\alpha = \arcsin x = -\frac{\pi}{6} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

*Ответ*: $x = \frac{1}{2}$.

**Задания для самостоятельной работы.**

Решить уравнения:

**1.** $\arccos x = \operatorname{arcctg} 2x$;
**2.** $2\arcsin^2 x + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$;
**3.** $2\arcsin 2x = \arccos 7x$;
**4.** $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$;
**5.** $\arccos x = \operatorname{arctg} x$;
**6.** $3\arccos x = \arccos\left(x^3\right)$;
**7.** $4\arccos x = \arccos\left(1 - 4x^2\right)$.

**Ответы.**

**1.** $0,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; **2.** $1$; **3.** $\frac{1}{8}$; **4.** $\frac{1}{2}$; **5.** $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; **6.** $1$; **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## Системы тригонометрических уравнений

При решении систем тригонометрических уравнений используются методы решения алгебраических систем и решения тригонометрических уравнений.

**Пример.** Решить систему:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 4; \\ \sin(x + y) = \left(\sqrt{3} - 1\right)\cos x \cos y. \end{cases}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ:} \begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \cos y \neq 0. \end{cases}$$

Тогда поделим обе части второго уравнения на $\cos x \cos y \neq 0$ :

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \sqrt{3} - 1, \text{ или } \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3} - 1.$$

Обозначая

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = u, \\ \operatorname{tg} y = v, \end{cases}$$

получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 4; \\ u + v = \sqrt{3} - 1. \end{cases}$$

Так как $u^2 + v^2 = (u+v)^2 - 2uv = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 - 2uv = 4$, то $uv = -\sqrt{3}$. Тогда

$$\begin{cases} uv = -\sqrt{3}; \\ u + v = \sqrt{3} - 1. \end{cases}$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = \sqrt{3}; \\ v = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} u = -1; \\ v = \sqrt{3}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3}; \\ \operatorname{tg} y = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1; \\ \operatorname{tg} y = \sqrt{3}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi n; \\ y = -\frac{\pi}{4} + \pi k; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; \\ y = \frac{\pi}{3} + \pi n; \end{cases} \end{array}\right. \quad n,\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Задания для самостоятельной работы.**

Решить систему уравнений:

**1.** $\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \cos y; \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \sin y. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} \sqrt{\cos 2x} \cos x = 0; \\ 2 \sin^2 x - \cos\left(2y - \frac{\pi}{3}\right) = 0. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \cos y = 0; \\ 2 \sin^2 - \cos 2y = 2. \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}; \\ 5\left(\sin 2x+\sin 2y\right)=2\left(1+\cos^2(x-y)\right). \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} x-y=-\frac{1}{3}; \\ \cos^2\pi x-\sin^2\pi x=\frac{1}{2}. \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} 2\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)=\sqrt{3}; \\ \cos^2 x+\cos^2 y=1. \end{cases}$

**Ответы.**

**1.** $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(n+k), \frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}+\pi(n+k), -\frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)$, $n,k\in\mathbb{Z}$.

**2.** $\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi k, \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k\right)$; $k\in\mathbb{Z}$.

**3.** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; $k,n\in\mathbb{Z}$.

**4.** $\left((-1)^k\frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; $k,n\in\mathbb{Z}$.

**5.** $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi k, -\frac{\pi}{4}-\pi k\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{5\pi}{12}-\pi k\right)$; $k\in\mathbb{Z}$.

**6.** $\left(\frac{1}{6}+k, \frac{1}{2}+k\right)$; $\left(-\frac{1}{6}+k, \frac{1}{6}+k\right)$; $k\in\mathbb{Z}$.

**7.** $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$; $\left(\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$; $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$; $\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$; $k,n\in\mathbb{Z}$.

## Тест

А теперь проверьте свои силы и знания с помощью теста.

**В 1.** Укажите наибольшее значение функции $y=1-\cos 3x$.

**В 2.** Укажите наименьшее значение функции $y=3\cos x+2$.

**В 3.** Упростите

$$\sin 40^\circ\cdot\cos 10^\circ-\cos 40^\circ\cdot\sin 10^\circ.$$

**В 4.** Найдите значение выражения $5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=0,5$.

**В 5.** Найдите значение выражения

$$\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{2\cos(\pi-\alpha)}, \quad \text{если} \quad \alpha=\frac{7\pi}{4}.$$

**В 6.** Найдите значение выражения $3\sin^2\alpha-7\cos^2\alpha$, если $\cos\alpha=-0,1$.

**В 7.** Вычислите значение выражения

$$\log_2\sin\frac{\pi}{12}+\log_2\sin\frac{\pi}{6}+\log_2\sin\frac{5\pi}{12}.$$

**B 8.** Найдите количество целочисленных решений неравенства $6 - 5x - x^2 \geqslant 0$, удовлетворяющих условию $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} > 0$.

**B 9.** Решите уравнение

$$25x^2 - 20x + 6 = \left(\sqrt{2} - \cos\frac{5\pi x}{4}\right)\left(\sqrt{2} + \cos\frac{5\pi x}{4}\right).$$

(Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней).

**B 10.** Найдите значение выражения $3\sin 255^\circ \sin 15^\circ$.

**B 11.** Найдите значение выражения

$$\frac{2\cos^2 59^\circ - 1}{8\operatorname{ctg} 14^\circ \cdot \sin^2 194^\circ}.$$

**B 12.** Вычислите значение выражения $7\sqrt{33}\sin\left(\arccos\frac{4}{7}\right)$.

**C 1.** Решите уравнение

$$\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x.$$

**C 2.** Найдите все значения $x$, при каждом из которых выражения

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} \text{ и } \frac{\sqrt{2}\sin^4\frac{x}{2} - \sqrt{2}\cos^4\frac{x}{2}}{\operatorname{tg} x}$$

принимают равные значения.

**C 3.** Решите уравнение

$$5\sin x \cdot \operatorname{tg} x + 5\operatorname{tg} x + 2\cos x = 0.$$

**C 4.** Решите уравнение

$$\log_{\sin x}\left(2\sin 2x + 4\sin^2 x + 1\right) = 0.$$

**Ответы. B 1.** 2. **B 2.** 1. **B 3.** 0,5. **B 4.** −3. **B 5.** −1,5. **B 6.** 2,9. **B 7.** −3. **B 8.** 6. **B 9.** 0,4. **B 10.** −0,75. **B 11.** −0,25. **B 12.** 33. **C 1.** $(-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **C 2.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **C 3.** $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **C 4.** $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

## ЛИТЕРАТУРА

**1.** Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 10 класс. Омск: НОУ НОК "Образование Плюс". 2003. 148 с.

**2.** Агалаков С.А. Система дополнительных занятий по математике. 11 класс. Омск: НОУ НОК "Образование Плюс". 2003. 160 с.

**3.** Задачи по математике. Алгебра. / Справочное пособие. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. М.: Наука. 1987. 432 с.

**4.** Нараленков М.И. Вступительный экзамен по математике. Алгебра: как решать задачи: Учебно–практическое пособие. Москва: Издательство "Экзамен". 2003. 448 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

**Наталья Владимировна Латыпова**

**Тригонометрия**
Учебно–методическое пособие

Напечатано с оригинал–макета заказчика
Компьютерный набор и верстка: Н. В. Латыпова,
Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Тираж 200 экз. Заказ № Печать офсетная.
Типография ГОУВПО "Удмуртский госуниверситет"
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.