
ВЕСТНИК 2009
УДМУРТСКОГО № 1
УНИВЕРСИТЕТА АСТРОНОМИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

Научный журнал Основан в марте 1991 г.
Удмуртский государственный университет г. Ижевск

СОДЕРЖАНИЕ

От научного редактора

<i>Кант И.</i> Всеобщая естественная история и теория неба	3
<i>Кондратьев Б. П.</i> Векторный подход к проблеме физической либрации Луны	19
<i>Кондратьев Б. П.</i> Как Земля «плавает» в небе Луны	53
<i>Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г.</i> Гравитационное и электростатическое поле однородного кругового конуса	62
<i>Антонов В. А., Кондратьев Б. П.</i> Астрономия и принципы квантовой механики	75
Требования к оформлению статей в журнал	95

Редакционный совет

Н. И. Леонов (главный редактор),
О. Г. Баранова (отв. редактор),
Л. М. Клименко (отв. секретарь)
С. Г. Морозов (тех. редактор)

Редакционная коллегия серии «Астрономия и математическая физика»

Черепашук А. М. – доктор физико–математических наук,
академик РАН (Москва)
Гребеников Е. А. – доктор физико–математических наук,
академик АНН (Москва)
Рябов Ю. А. – доктор физико–математических наук, профессор (Москва)
Кондратьев Б. П. – доктор физико–математических наук, профессор,
научный редактор (Ижевск)
Антонов В. А. – доктор физико–математических наук,
профессор (С.-Петербург)
Холшевников К. В. – доктор физико–математических наук, профессор,
академик РАЕН (С.-Петербург)
Бисноватый-Коган Г. С. – доктор физико–математических наук,
профессор (Москва)
Осипков Л. П. – кандидат физико–математических наук,
доцент (С.-Петербург)
Емельяненко В. В. – доктор физико–математических наук,
профессор (Челябинск)
Чубурин Ю. П. – доктор физико–математических наук,
профессор (Ижевск)
Трубицына Н. Г. – старший преподаватель,
ответственный секретарь (Ижевск)

Редакционно–издательский отдел

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916–015
<http://www.vestnik.udsu.ru>

УДК 521.1

*Б. П. Кондратьев, Н. Г. Трубицына***ГРАВИТАЦИОННОЕ И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ
ОДНОРОДНОГО КРУГОВОГО КОНУСА**

Поставлена и методом контурных интегралов решена задача о простейших элементах, представляющих внешнее поле гравитирующего (или заряженного статическим электричеством) однородного кругового конуса. Точка заострения имеет логарифмическую особенность и в эквиравитирующий каркас фигуры не входит. Для конуса существует один эквиравитирующий стержень с чисто мнимой плотностью, описываемой элементарными функциями. Этот стержень удовлетворяет всем необходимым требованиям: его масса и пространственный потенциал вещественны и эквивалентны аналогичным характеристикам конуса. Независимая проверка в асимптотическом пределе неоднородного круглого диска подтверждает результат. С помощью стержня пространственный потенциал конуса выражен вначале через однократный интеграл, а затем через полные эллиптические интегралы и через ряд по гармоническим функциям. Получено семейство эквипотенциалей.

Ключевые слова: однородный конус, потенциал, эквиравитирующие элементы, интеграл Коши, эллиптические интегралы.

Введение

Ньютоновские гравитационные и кулоновские электростатические силы зависят от расстояния по закону обратных квадратов, консервативны и обладают потенциалом. Как в небесной, так и в земной механике важно знать силовые поля, а значит и потенциалы для тел самой разной формы. Однако из-за математических трудностей список тел с известным потенциалом и доныне остается весьма кратким. Из трёхмерных тел классиками были всесторонне изучены шары и эллипсоиды (однородные или с гомотетичной структурой) (см., напр. [1;2]). Недавно были получены новые результаты для эллипсоидов с более сложной внутренней структурой слоев, однородных кубоидов, шаровых линз и для частных случаев тора [3;4]. Наметился прогресс и в нахождении потенциалов для двумерных тел, включая однородные и неоднородные круглые и эллиптические диски [4]. Эти и многие другие важные результаты были получены с помощью новых методов, развитых в монографиях [3;4]. В теории потенциала появилось новое направление со своими методами и задачами. Речь идёт о

доказательстве существования и разработке методов поиска эквигравитирующих элементов, с помощью которых внешние силовые поля осесимметричных тел можно представлять уже не в виде тройных интегралов, а в более простом виде: через однократные интегралы или даже в конечном виде. К таким элементам мы относим стержни и диски с реальной или комплексной на них плотностью, а также материальные точки. Продуктивным является и метод представления потенциалов тел с помощью софокусных оболочек, сплошных слоисто-неоднородных сфероидов и трехосных эллипсоидов [3;4].

В данной работе решена задача об одномерном стержне, с помощью которого удастся точно представить внешнее силовое поле однородного гравитирующего (или заряженного статическим электрическим зарядом) кругового конуса. С помощью стержня получено выражение пространственного потенциала конуса. Проведена всесторонняя проверка результатов.

§ 1 Постановка задачи и эквигравитирующий стержень

Дан однородный круговой конус (рис. 1а), начало системы отсчета в его вершине O . Ранее уже была найдена гравитационная (электростатическая) энергия этого тела [3;4]. Однако внешний потенциал конуса до сих пор не был неизвестен.

Для решения задачи воспользуемся методом §9.8 из [4]. В цилиндрических координатах замена $\zeta = x_3 + ir$ на комплексной плоскости приводит к повороту сечения фигуры конуса на 90° (рис.1b). Основная формула метода имеет вид

$$\mu(\zeta) = \frac{\varphi_I(\zeta) - \varphi_{II}(\zeta)}{2i\pi G} \quad (1.1)$$

и выражает плотность эквигравитирующего стержня через разность потенциалов на двух ветвях аналитического продолжения внешнего потенциала на внутренние точки фигуры.

Важно подчеркнуть, что потенциал на контуре получается из внешнего потенциала конуса на его оси симметрии ([3], формула (13.67)) путем замены координаты x_3 на указанную ζ . После замены $Arsh(\dots)$ через логарифм этот потенциал принимает форму

$$\varphi_{con}(\zeta) = \frac{3GM_{con}}{L} \left\{ \frac{(1 - \zeta \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} + \zeta^2 \cos \alpha - 2\zeta + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \zeta^2 \ln \frac{1 - \zeta \cos \alpha + \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{\zeta(1 - \cos \alpha)} \right\}, \quad (1.2)$$

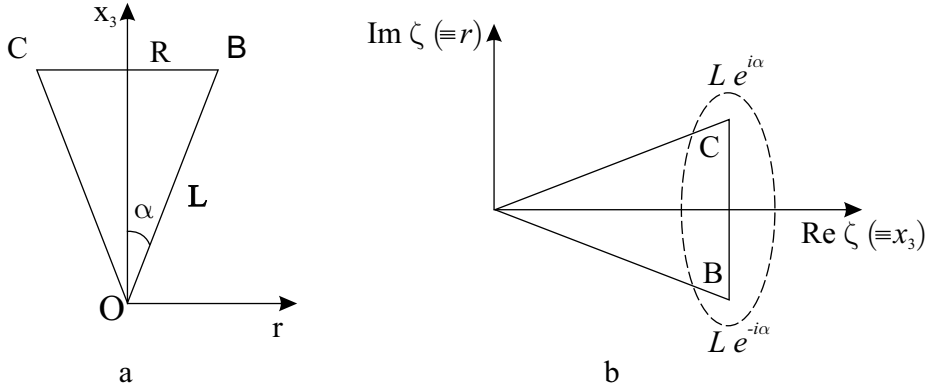


Рис. 1. Сечение конуса и его поворот на 90° в комплексной плоскости. B и C – особые точки для потенциала конуса, аналитического продолженного внутрь фигуры (штрихами показан контур интегрирования, натягиваемый на эти точки)

где сделана нормировка $\zeta \equiv \frac{\zeta}{L}$, а

$$M_{con} = \frac{1}{3}\pi L^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \quad (1.3)$$

– масса конуса.

Особые точки для аналитического продолжения потенциала (1.2) совпадают с углами B и C сечения основания конуса и даются выражениями $\zeta_{1,2} = e^{\mp i\alpha}$. Действительно, радикал в этих точках в силу очевидного равенства

$$\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} = \sqrt{(\zeta - e^{-i\alpha})(\zeta - e^{i\alpha})} \quad (1.4)$$

обращается в нуль. Важно заметить и то, что в точке заострения конуса O второй член в (1.2) имеет лишь логарифмическую особенность $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta^2 \ln \zeta = 0$, поэтому сама эта точка выпадает из эквигравитирующего каркаса конуса.

По нашему методу контур, накиннутый на фигуру конуса, натягивается лишь на две отмеченные особые точки B и C (которые являются точками ветвления второго порядка для радикала (1.4)). В пределе этот контур превращается в эквигравитирующий стержень, плотность на котором, со-

гласно (1.1), выражается через элементарные функции

$$\mu_{con}(\zeta) = -i \frac{3M_{con}}{\pi L} \left\{ \frac{(1 - \zeta \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} \zeta^2 \ln \frac{1 - \zeta \cos \alpha + \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{1 - \zeta \cos \alpha - \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}} \right\}. \quad (1.5)$$

§ 2 Проверка стержня (1.5) по массе

Массы эквигравитирующего стержня M_r и исходного конуса M_{con} должны быть одинаковы. Для удобства расчетов полную плотность (1.5) стержня разделим на две части:

$$\mu_1(\zeta) = -i \frac{3M_{con}}{\pi L} \frac{(1 - \zeta \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{\sin^2 \alpha}, \quad (2.1)$$

$$\mu_2(\zeta) = -i \frac{3M_{con}}{2\pi L} \zeta^2 \ln \frac{1 - \zeta \cos \alpha + \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{1 - \zeta \cos \alpha - \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}. \quad (2.2)$$

По определению масса стержня выражается интегралом

$$M_r = L \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} [\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta)] d\zeta. \quad (2.3)$$

Вначале находим в (2.3) вспомогательные интегралы:

$$I_1 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} (1 - \zeta \cos \alpha) \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1} d\zeta = \frac{i\pi}{2} \sin^4 \alpha; \quad (2.4)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^2 \ln \frac{1 - \zeta \cos \alpha + \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{1 - \zeta \cos \alpha - \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}} d\zeta = \frac{i\pi}{6} (3 \cos^2 \alpha - 1). \quad (2.5)$$

Складывая (2.4) и (2.5), получим

$$M_r = \frac{1}{3} \pi \rho L^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = M_{con}, \quad (2.6)$$

что и требовалось доказать.

§ 3 Проверка эквигравитирующего стержня по потенциалу

Основное свойство стержня с плотностью (1.5) – быть эквигравитирующим исходному конусу, то есть оба тела должны создавать одинаковые внешние гравитационные поля. Поскольку внешний потенциал – функция гармоническая, достаточно доказать эквивалентность потенциалов конуса и найденного стержня только на оси симметрии.

Потенциал во внешней точке x_3 на линии эквигравитирующего стержня выражается интегралом

$$\varphi_r(x_3) = G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta. \quad (3.1)$$

Подставляя сюда (2.1) и (2.2), последовательно находим:

$$\begin{aligned} I_3 &= G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu_1(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta = \\ &= \frac{GM_{con}}{L} \frac{3}{\sin^2 \alpha} \left\{ (1 - x_3 \cos \alpha) \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{9}{8} + x_3^2 \right) \cos \alpha - \frac{x_3}{2} (3 + \cos 2\alpha) - \frac{\cos 3\alpha}{8} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu_2(\zeta)}{x_3 - \zeta} d\zeta = \\ &= \frac{3GM_{con}}{L} \left\{ -x_3 - \frac{1}{2} \cos \alpha + x_3^2 \ln \frac{1 - x_3 \cos \alpha + \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1}}{x_3 (1 - \cos \alpha)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Объединяя теперь (3.2) и (3.3), для полного потенциала на оси $\varphi_r(x_3)$ из (3.1) в итоге получим выражение

$$\begin{aligned} \varphi_r(x_3) &= \\ &= \frac{3GM_{con}}{L} \left\{ \frac{(1 - x_3 \cos \alpha) \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1} + x_3^2 \cos \alpha - 2x_3 + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \right. \\ &\quad \left. + x_3^2 \ln \frac{1 - x_3 \cos \alpha + \sqrt{x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha + 1}}{x_3 (1 - \cos \alpha)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

которое действительно совпадает с потенциалом самого конуса (1.2) на оси симметрии при замене в нём $\zeta \rightarrow x_3$. Доказательство закончено.

§ 4 Асимптотический предел диска

Важной и независимой проверкой формулы (1.5) является асимптотический переход $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, когда конус с фиксированными параметрами L и M_{con} превращается в неоднородный круглый диск с поверхностной плотностью [4. С. 403]:

$$\sigma(r) = \frac{3M_{con}}{\pi L^2} \left(1 - \frac{r}{L}\right). \quad (4.1)$$

Легко убедиться в том, что массы стержня с плотностью (1.5) и диска с плотностью (4.1) действительно будут одинаковыми: $M_r = M_{con}$. Далее, диск с плотностью (4.1) имеет, согласно [4. С. 285], эквигравитирующий стержень

$$\mu_r(\zeta) = -i \frac{3M_{con}}{\pi L^2} \left(\sqrt{L^2 + \zeta^2} + \frac{\zeta^2}{2L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + \zeta^2}}{L - \sqrt{L^2 + \zeta^2}} \right), \quad (4.2)$$

$$-L \leq \frac{\zeta}{i} \leq L,$$

и, как следствие, потенциал на оси симметрии этого диска

$$\varphi_d(x_3) = \frac{3GM_{con}}{L^2} \left\{ \sqrt{L^2 + \zeta^2} - 2|x_3| + \frac{x_3^2}{L} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + \zeta^2}}{|x_3|} \right\}. \quad (4.3)$$

С другой стороны, прямой переход $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ в самой формуле (1.5) дает (далее опять используется нормировка $\zeta \equiv \frac{\zeta}{L}$) как раз то выражение плотности стержня

$$\mu_r(\zeta) = -\frac{3iM_{con}}{\pi L} \left\{ \sqrt{1 + \zeta^2} + \frac{\zeta^2}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \zeta^2}}{1 - \sqrt{1 + \zeta^2}} \right\}, \quad (4.4)$$

которое совпадает с (4.2). Поскольку выражение (4.2) было получено в работе [4] методом, совершенно независимым от применяемого здесь, то совпадение результатов (4.2) и (4.4) в дисковом пределе является важной проверкой правильности проводимых расчетов.

§ 5 Пространственный потенциал конуса через эквигравитирующий стержень

В пространственной точке (r, x_3) вместо (3.1) имеем теперь более сложный интеграл

$$\begin{aligned} \varphi_r(r, x_3) &= G \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\mu(\zeta)}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} d\zeta = \\ &= -iG\rho L^2 \cos \alpha \left\{ I_1 - \cos \alpha \cdot I_2 + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \cdot I_3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Задача сводится к нахождению трех сложных интегралов в комплексной плоскости:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\frac{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} d\zeta; \\ I_2 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta \sqrt{\frac{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} d\zeta; \\ I_3 &= \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\zeta^2}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} \ln \frac{1 - \zeta \cos \alpha + \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}}{1 - \zeta \cos \alpha - \sqrt{\zeta^2 - 2\zeta \cos \alpha + 1}} d\zeta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Анализ показал, что первые два интеграла в (5.2) можно выразить в конечном виде.

Вычисление интеграла I_1

Запишем его в виде

$$I_1 = \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \sqrt{\frac{(\zeta - e^{-i\alpha})(\zeta - e^{i\alpha})}{[x_3 + ir - \zeta] \cdot [x_3 - ir - \zeta]}} d\zeta \quad (5.3)$$

и сделаем нетривиальную дробно-линейную замену

$$\zeta = \kappa \frac{z + ia_1}{z + ia_2}, \quad (5.4)$$

где параметры a_1 и a_2 находим из условий

$$e^{-i\alpha} = \kappa \frac{-1 + ia_1}{-1 + ia_2}; \quad e^{i\alpha} = \kappa \frac{1 + ia_1}{1 + ia_2}, \quad (5.5)$$

так что новая переменная изменяется в пределах $-1 \leq z \leq 1$. Кроме того, для преобразования знаменателя в I_1 запишем комплексные координаты в виде

$$x_3 - ir = \kappa \frac{-\frac{1}{k} + ia_1}{-\frac{1}{k} + ia_2}; \quad x_3 + ir = \kappa \frac{\frac{1}{k} + ia_1}{\frac{1}{k} + ia_2}. \quad (5.6)$$

Решая систему двух линейных уравнений (5.5), находим параметры преобразования

$$a_1 = \frac{1 - \kappa \cos \alpha}{\kappa \sin \alpha}; \quad a_2 = \frac{\cos \alpha - \kappa}{\sin \alpha}. \quad (5.7)$$

С учетом вида a_1 и a_2 система двух нелинейных уравнений (5.6) в итоге дает

$$\kappa = \frac{-1 + r^2 + x_3^2 + \sin \alpha \sqrt{-4r^2 + \left[-2x_3 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{(1+r^2+x_3^2)}{\sin \alpha}\right]^2}}{2(x_3 - \cos \alpha)},$$

$$k = \frac{1 + r^2 + x_3^2 - 2x_3 \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{-4r^2 + \left[-2x_3 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{(1+r^2+x_3^2)}{\sin \alpha}\right]^2}}{2r \sin \alpha}. \quad (5.8)$$

Заметим, k из (5.8) является модулем используемых ниже полных эллиптических интегралов.

Указанной заменой (5.4) интеграл I_1 из (5.2) приводится к виду

$$I_1 = i\kappa(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}} \frac{dz}{(z + ia_2)^2} \quad (5.9)$$

или, после избавления от мнимости,

$$I_1 = 2i\kappa(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - z^2}{1 - k^2 z^2}} \frac{z^2 - a_2^2}{(z^2 + a_2^2)^2} dz. \quad (5.10)$$

В эквивалентной форме:

$$I_1 = 2i\kappa(a_2 - a_1) \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}} \left\{ -1 + \frac{1 + 3a_2^2}{z^2 + a_2^2} - \frac{2(1 + a_2^2)}{a_2^2 \left(1 + \frac{z^2}{a_2^2}\right)^2} \right\}. \quad (5.11)$$

В итоге I_1 удаётся выразить через стандартные полные эллиптические интегралы второго и третьего рода

$$I_1 = 2i\kappa(a_2 - a_1) \cdot \frac{(1 - k^2) \cdot \Pi \left[-\frac{1}{a_2^2}, k \right] - E(k)}{\sqrt{(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)}}. \quad (5.12)$$

Вычисление интеграла I_2

Та же замена (5.4) приводит интеграл I_2 из (5.2) к форме

$$I_2 = i\kappa^2(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \int_{-1}^1 \frac{(1 - z^2)(z + ia_1) dz}{(z + ia_2)^3 \sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad (5.13)$$

причем здесь часть подынтегрального выражения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{(1 - z^2)(z + ia_1)}{(z + ia_2)^3} &= -1 - i(a_2 - a_1) \frac{1 + a_2^2}{(z + ia_2)^3} + \\ &+ \frac{1 - 2a_1 a_2 + 3a_2^2}{(z + ia_2)^2} + i \frac{3a_2 - a_1}{z + ia_2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

С учетом (5.14) интеграл (5.13) после трудоемких преобразований удаётся взять и привести к виду

$$\begin{aligned} I_2 &= i\kappa^2(a_2 - a_1) \sqrt{\frac{1 + k^2 a_2^2}{1 + a_2^2}} \times \\ &\times \left\{ -\frac{2 - a_2 [a_1 - 3a_2 + (a_2 - a_1)(3 + 2a_2^2)] k^2}{(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)^2} \cdot E(k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_2(a_2 - a_1)(1 - k^2)}{(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)} \cdot K(k) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - k^2) [a_1 - 3a_2 - 2a_2^3 - a_2^2(-a_2^3 + a_1(2 + 3a_2^2))] k^2}{a_2(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2)^2} \cdot \Pi \left[-\frac{1}{a_2^2}, k \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Здесь появились стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра трёх родов.

Вычисление интеграла I_3

Третий интеграл I_3 из (5.2) в конечном виде выразить не удастся. Но его всё же можно представить в виде ряда по гармоническим функциям. Для доказательства множитель перед логарифмом в I_3 представим рядом:

$$\frac{\zeta^2}{\sqrt{r^2 + (x_3 - \zeta)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^2}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} P_n \left(\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right) \frac{\zeta^n}{(r^2 + x_3^2)^{\frac{n}{2}}}. \quad (5.16)$$

Тогда сам интеграл примет вид

$$I_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n \left(\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)}{(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \zeta^{n+2} \ln \frac{1 - \zeta \cos \alpha + \sqrt{(\zeta - e^{-i\alpha})(\zeta - e^{i\alpha})}}{1 - \zeta \cos \alpha - \sqrt{(\zeta - e^{-i\alpha})(\zeta - e^{i\alpha})}} d\zeta. \quad (5.17)$$

Появившийся в правой части (5.17) интеграл берем по частям, чтобы избавиться от логарифма. Проинтегрированный член исчезает, и остается

$$I_3 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n \left(\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)}{(n+3)(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{\zeta^{n+2} d\zeta}{\sqrt{(\zeta - e^{-i\alpha})(\zeta - e^{i\alpha})}}. \quad (5.18)$$

Известна формула [5]

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{e^{-i\alpha}}^{e^{i\alpha}} \frac{t^n dt}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}}, \quad (5.19)$$

поэтому (5.18) приводится в итоге к замечательному виду

$$I_3 = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{n+3} P_n \left(\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right) P_{n+2}(\cos \alpha). \quad (5.20)$$

Это и есть представление интеграла I_3 в виде ряда по гармоническим функциям F_n :

$$I_3 = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \text{ где } F_n = \frac{P_{n+2}(\cos \alpha)}{n+3} \cdot \frac{P_n \left(\frac{x_3}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \right)}{(r^2 + x_3^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad (5.21)$$

Подставляя теперь интегралы I_1 из (5.12), I_2 из (5.15) и I_3 из (5.21) в формулу (5.1), получим внешний пространственный потенциал однородного конуса в точке (r, x_3) :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{con}(r, x_3)}{G\rho L^2 \cos \alpha} = & \frac{\kappa(a_1 - a_2)}{(1 + a_2^2)^{3/2} (1 + a_2^2 k^2)^{3/2}} \times \\ & \left\{ -\kappa \cos \alpha \cdot a_2 (a_1 - a_2) (1 - k^2) (1 + a_2^2 k^2) \cdot K(k) + \right. \\ & \quad + [2(1 + a_2^2)(1 + a_2^2 k^2) - \kappa \cos \alpha \cdot a_2 \times \\ & \quad \times \left. \left(\frac{2}{a_2} - a_1 + 3a_2 - k^2(a_2 - 3a_1 - 2a_1 a_2^2) \right) \right] \cdot E(k) - \\ & \quad - (1 - k^2) [2(1 + a_2^2)(1 + k^2 a_2^2) + \kappa \cos \alpha \times \\ & \quad \times \left. \left(\frac{a_1}{a_2} - 3 - 2a_2^2 - a_2(-a_2^3 + 2a_1 + 3a_1 a_2^2) k^2 \right) \right] \cdot \Pi\left(-\frac{1}{a_2}, k\right) \right\} + \\ & \quad + \pi \sin^2 \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где все параметры даны выше, а гармонические функции F_n определены в (5.21).

Результаты расчетов эквипотенциалей по формуле (5.22) показаны на рис. 2.

Заключение

Установлено, что однородный круговой конус имеет заменяющий стержень с мнимой плотностью, которая выражается через элементарные функции. Проведена всесторонняя проверка этого эквигравитирующего стержня по массе и по потенциалу, в том числе и независимым способом, через асимптотический переход от конуса к неоднородному круглому диску. Стержень позволяет выразить пространственный потенциал конуса в виде однократного интеграла. В итоге оказывается, что большую часть выражения для пространственного потенциала конуса можно представить в конечном виде через стандартные полные эллиптические интегралы. Остаточный член в потенциале удается представить в виде ряда по гармоническим функциям, что удобно при проведении численных расчетов.

Авторы признательны А.С. Дубровскому за помощь в проведении численных расчетов.

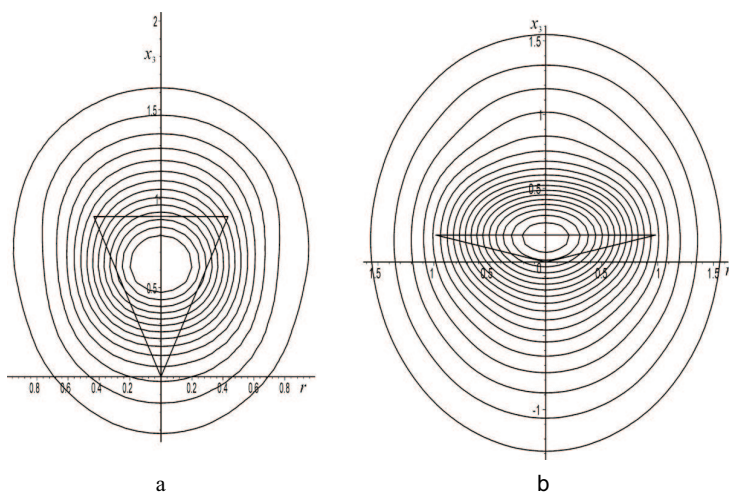


Рис. 2. Кривые равного потенциала однородного гравитирующего кругового конуса (сечение которого выделено треугольником) с углом полураствора $\alpha = \frac{\pi}{7}$ для случая (а) и $\alpha = \frac{15}{34}\pi$ для (b) (эквипотенциали расположены по мере убывания от центра к периферии значений нормированного потенциала)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М.: Наука, 1961. 800 с.
2. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Наука, 1973. 288 с.
3. Кондратьев Б. П. Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва-Ижевск: РХД, 2003. 624 с.
4. Кондратьев Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: МИР, 2007. 512 с.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: ГИТТЛ, 1953. 379 с.

Поступила в редакцию 01.09.08

B. P. Kondratyev, N. G. Trubitsina

Gravitating and electrostatic field for uniform circular cone

By original method of contour integral is set up and solved the problem about simple elements, presenting external gravitating (or charged by static electric charges) field of the uniform circular cone. Equigravitating frame of the cone consists of one rod with purely imaginary density, presented through elementary functions. The rod satisfies all requirements: its mass and spatial potential are real and equivalent similar characteristics of the cone. Transition in asymptotic limit to nonuniform round disk validates the main result. Spatial potential of the cone is found, which is expressed by full elliptical integrals and through the series on harmonic functions. Equipotentials of the field is received.

Keywords: uniform cone, potential, equigravitating elements, Cauchy integral, elliptical integrals.

Кондратьев Борис Петрович,
доктор физико-математических
наук, профессор,
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kond@uni.udm.ru

Kondratyev Boris Petrovich,
doctor of physical-mathematical
science, professor
E-mail: kond@uni.udm.ru

Трубицына Наталья Геннадьевна,
старший преподаватель
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)

Trubitsina Natalya Gennadyevna
E-mail: kond@uni.udm.ru