ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009
№ 1

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Научный журнал | Основан в марте 1991 г.

Удмуртский государственный университет | г. Ижевск

СОДЕРЖАНИЕ

Редакционно–издательский отдел

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916–015
http://www.vestnik.udsu.ru

УДК 530.145.61

В. А. Антонов, Б. П. Кондратьев

АСТРОНОМИЯ И ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Поставлена и изучается проблема смыкания микромира с макромиром. Для расщепления волновых пакетов в мезомире и уменьшения корреляции между вначале «зацепленными» состояниями квантовой системы разработана нелинейная модель уравнения Шредингера. Это уравнение описывает необратимый процесс и поэтому не является лоренц–инвариантным. Уточняется трактовка принципа дополнительности Бора. Теория допускает передачу сигнала со сверхсветовой скоростью, однако принцип причинности при этом не нарушается. Необходимым является существование во Вселенной фона из неизвестных пока элементарных частиц (гаттонов), которые являются центрами расщепления волновых пакетов. Тем самым постулируется: во Вселенной нет единого центра для расщепления волновых пакетов, причем роль такого центра не может играть и сознание индивидуального наблюдателя. При не вполне согласованной работе разных центров–гаттонов следует ожидать фиксации макроскопической реальности только в асимптотическом смысле, причем тогда кошка Шредингера может казаться некоторое время то живой, то мертвой.

Ключевые слова: микромир, мезомир, макромир, нелинейные уравнения Шредингера, эволюция волновой функции, астрономия и квантовая механика.

Введение

Астрономам и физикам хорошо известно, что Космос представляет собой грандиозный полигон для изучения свойств материи в необычных состояниях, трудно или вовсе пока не достижимых в земных условиях. (Впрочем, это мнение землян, а с вселенской точки зрения как раз земные условия редки и нетипичны.) При этом надо понимать, что распространение знаний о каком-то физическом процессе или явлении с ограниченных земных условий на более общие, космические, никогда не бывает легким делом, а, напротив, проходит через недоразумения, ошибки и разочарования, пока в данной области не устанавливается правильный способ рассуждений. В самом деле, если бы действия и помыслы человечества были ограничены привычным земным мирком, закон тяготения так и остался бы законом постоянного ускорения падающих тел, как его сформулировал Галилей, разве только с небольшими поправками применительно к переносу часов с маятником с севера на юг и обратно. Однако же понадобилось прозрение Ньютона, чтобы заявить и обосновать общий закон тяготения, господствующий во Вселенной, и это дало начало целой большой науке — небесной механике, задачи и методы которой значительно шире и глубже, чем можно себе представить, глядя на одни лишь земные предметы. Так и в девятнадцатом веке, необоснованное распространение законов термодинамики на космические масштабы привело к тупику в естествознании, известному как «тепловая смерть Вселенной». Актуален круг вопросов, связанных с плазмой: ее космические проявления по разнообразию встречающихся волновых и турбулентных движений, равно как и по диапазону значений фигурирующих параметров, определенно оставляют позади то, что удается создать и наблюдать в лабораторных условиях [1]. Обратим еще внимание на теорию переноса излучения в рассеивающих средах, которая развивалась именно как обслуживающая астрофизические приложения [2].

Есть основания полагать, что и в квантовой механике не может пройти гладко переход от экспериментов в лаборатории к той картине ближнего и дальнего космоса, которая открывается астроному–исследователю. С принципиальной точки зрения наиболее загадочной в квантово-механической картине Вселенной является зона между микромиром и макромиром, зона, являющаяся ареной для процессов нелинейной эволюции волновых функций. Исторически сложилось так, что эту среднюю зону (или мезомир) полностью игнорировали в эпоху возникновения квантовой механики. Как, например, на нее смотрел Бор? В [3], в конце гл. 2 говорится: «...Бор не пытался перебросить мост через пропасть между классической и квантовой физикой, а с самого начала свой деятельности искал такую схему квантовых концепций, которая по эту сторону пропасти могла бы образовать систему, столь же целостную, как и система классических понятий по ту сторону пропасти». Сказано четко и ясно! И нобелевский лауреат С. Вайнберг [4. С. 61] в словах «Суть копенгагеновской интерпретации состоит в резком отделении самой квантовой системы от тех приборов, которые используются для измерения ее конфигурации» также подчеркивает отсутствие последовательного применения линейной квантовой механики к теории измерений. Общеизвестно также, что на этот общий изъян в квантовой теории в 1935 г. обратил внимание и сам Шредингер, сформулировав свой известный парадокс живой и мертвой кошки.

Итак, ключевое слово здесь — «пропасть». Так или иначе, физиков в эпоху становления квантовой механики подобная разобщенность между микро- и макромиром не тревожила. Но вряд ли такое положение может удовлетворить исследователей сейчас, когда широко развилась макрофизика квантовых явлений (см., например, [5]) и само представление об опыте со времен Бора сильно изменилось. Вместо однократного эксперимента, когда прибор устанавливается, запускается и результат фиксируется только однажды, все более распространяется непрерывное наблюдение за квантовым объектом, подчас за одной единственной частицей [6].

Подчеркнем, что с астрономической точки зрения вообще нет разделения на объект–субъект в том смысле, как это понимали Бор, Гейзенберг и другие основатели квантовой механики. Вселенная прекрасно может обойтись и без человека–наблюдателя, да и наблюдение зачастую отделено миллионами и миллиардами лет от самого физического процесса, как это имеет место в случае приема излучения отдаленных галактик. К тому же в астрономии не проходит обычная ссылка физиков-позитивистов на неконтролируемое воздействие макроприбора на объект наблюдения: до звезд далековато и не исключено, что наблюдаемая сейчас конкретная звезда или галактика на самом деле давно уже не существуют. Тем более это верно в отношении Вселенной, которую в целом никто не наблюдает и которая существовала задолго до появления жизни на Земле.

Тем самым выясняется, что между микромиром и макромиром нет ни пропасти, ни стены. В настоящее время в физике назрела, см. [7], насущная необходимость «перебросить мост» между макро- и микромиром, представив закономерности по обе стороны как единое целое. Но уловить и понять закономерности в промежуточной зоне между макромиром и микромиром — чрезвычайно сложная задача. С одной стороны, внутри самой квантовой механики очень высока точность согласования *расчетов* с измерениями на уровне атомов и молекул (однако только для сравнительно простых систем; для сложных же молекул точность расчетов в квантовой химии сравнительно невысока [8]). С другой стороны, для процессов в макромире, особенно чисто механической природы, благодаря усилиям выдающихся ученых прошлого давно выявлены ведущие уравнения, которые с хорошей точностью, с привлечением феноменологических констант, описывают реальность *макромира.* Посередине же, между микромиром и макромиром, простирается область, пока почти не поддающаяся изучению. Хотя, конечно, и на нее обращают внимание в последние десятилетия, но лишь с точки зрения примитивного эмпиризма (создание кластеров, наноструктур), но точность и надежность расчетов здесь очень часто весьма далеки от практических потребностей, а единой теоретической концепции пока не существует.

По нашему мнению, ключ к созданию теории мезомира — в описании нелинейности протекающих там процессов. Первый вариант нелинейной квантовой механики был создан в [7]. В этой работе мы излагаем краткие соображения, основанные на предложенной нами ранее точке зрения.

§ 1 Независимость взаимно изолированных процессов

Относительно того, как ведет себя волновая функция квантовой системы, разделенной на две или более взаимно изолированные подсистемы, сомнений, видимо, не возникает: полная волновая функция ψ системы в целом должна представляться произведением волновых функций $\psi_1 ... \psi_n$ отдельных подсистем. В противном случае, так или иначе, обнаружится какое-то взаимовлияние даже в отсутствие объединяющих сил в обычном смысле слова. Мы отвлекаемся от необходимой симметризации по параметрам тождественных частиц, вряд ли меняющей суть дела.

С точки зрения формального удобства выкладок упомянутая мультипликативная структура (ψ_j – функции разных координат X_j)

$$\psi = \psi_1 ... \psi_n \tag{1.1}$$

представляет очевидное преимущество в виде разделения переменных. Но возникает другой вопрос, уже натурфилософского порядка. Если, как мы подчеркивали во введении, рассматривать эволюцию Вселенной как непрерывную последовательность состояний, без искусственного деления на пары опыт-наблюдение, то мы вправе спросить, как условие (1.1) *достигается*. Иначе говоря, как стираются следы взаимодействия, если таковое было в прошлом? Вопрос вызывает в памяти проблему соотношения между, с одной стороны, взаимосвязью и взаимообусловленностью всего в мире и, с другой стороны, существованием в мире относительно самостоятельных вещей. С подобным диалектическим противоречием столкнулся в свое время Кант и ранее, по-видимому, еще Эмпедокл.

На этот вопрос *линейная* квантовая механика не в состоянии дать удовлетворительный ответ. Действительно, если мы выключим взаимодействие, точнее, отбросим соответствующий член в гамильтониане, то произведение типа (1.1) никак не может при эволюции согласно *линейному уравнению Шредингера* превратиться, например, в суперпозицию двух не пропорциональных друг другу произведений, равно как и обратно.

Именно здесь необходима нелинейность. Простейшее, казалось бы, решение – это искусственно заставить стремиться волновую функцию к мультипликативной форме, что, в несколько упрощенном варианте выглядит как задание уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c(\psi - \psi_1 \psi_2 ... \psi_n), \; c > 0. \tag{1.2}$$

Примерно такая идея действительно встречается время от времени [9]. Но ее простота иллюзорна. Заметим, что уравнение (1.2) и ему аналогичные «псевдолинейны»: нелинейность в них проникает через определение подходящих множителей $\psi_1, \psi_2 ... \psi_n$ по заданной полной ψ посредством, например, соотношений

$$\psi_j = \frac{\int ... \int \psi \prod\limits_{v \neq j} \psi_v^* \left(dX_v \right)}{\prod\limits_{v \neq j} \int \left| \psi_v \right|^2 dX_v}, \tag{1.3}$$

где, как и далее, звездочка означает комплексное сопряжение, а интегрирование проводится по всем значениям X_ν. Определение n функций ψ_j согласно (1.3), однако, выглядит сложным, неявным, и его корректность в общем случае сомнительна. Физически это легко было предвидеть. Например, если в начальный момент

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_1 ... \psi_n + \widetilde{\psi}_1 ... \widetilde{\psi}_n \right), \tag{1.4}$$

где функции ψ_j и $\widetilde{\psi}_j$ различны, ортогональны друг другу, притом одинаково нормированы, то брать ли в качестве первого приближения для представления (1.1) набор ψ_j или $\widetilde{\psi}_j$? Или, может быть, аппроксимировать правую часть (1.4) произведением с осредненным множителем $\dfrac{\psi_j + \widetilde{\psi}_j}{\sqrt{2}}$, по крайней мере, для вещественных функций? Таким образом, можно надеяться в лучшем случае на использование (1.2) применительно к избранным конкретным ситуациям, заранее, в сущности, предполагая из эмпирических соображений то, что требовалось бы вывести из общих принципов. *В точном естествознании, и астрофизических проблемах в частности, подобный метод ad hoc решения задач совершенно неприемлем.*

Предметом более тонкого вопроса является именно *необратимость*. Мы уже упоминали, что она необходима для эволюции от функций ψ общего вида к функциям подкласса мультипликативных. Но в (1.2) она подана слишком грубо, и не мешало бы задуматься, почему по отношению к ряду параметров эксперимент не обнаруживает систематического дрейфа, который напрашивается при взгляде на уравнение (1.2).

Выраженные более точным языком, эти «эстетические» соображения означают, что надо предусмотреть а) отсутствие, по возможности, побочных эффектов; б) автоматическое установление функций $\psi_1, \psi_2 ... \psi_n$, не известных заранее.

§ 2 Постановка задачи и лагранжиан

Довольно естественно эти условия наводят на мысль использовать какие-то подобия коэффициентов корреляции, но в терминах волновых функций [7], а не вероятностей, и ввести специальные управляющие параметры, обнаруживающие себя именно в связи с этими корреляциями. Кроме того, основа уравнений, хотя и нелинейных, должна оставаться *обратимой*; необратимости мы отведем достаточно узкую «точку приложения». Для получения же обратимых уравнений эволюции существует испытанный прием задания варьируемого функционала, что, как известно [10], связано с выделением пар канонических переменных. У нас ниже таковыми служат ψ и ψ^* (звездочка – знак комплексного сопряжения). Подчеркнем, кстати, их вторичный характер, то есть отсутствие прямой связи с классическими q и p. Кроме того, вводится пара управляющих переменных λ и λ^*.

Ограничимся простейшим вариантом с разделением системы на две подсистемы, каждая из которых может находиться только в двух независимых состояниях, причем предполагается, что энергетическая связь между подсистемами уже исчезла. Тогда ψ представляется набором четырех комплексных величин $\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{21}, \psi_{22},$ зависящих только от t. Два индекса нужны, чтобы отмечать состояния с номером 1 или 2 сначала первой, затем второй подсистемы.

Вышеприведенные соображения в совокупности подсказывают и вид лагранжиана. Именно, варьируется следующий интеграл:

$$\begin{gathered}
L = i\hbar \int \left(\psi_{11} \frac{\partial \psi_{11}^*}{\partial t} + \psi_{12} \frac{\partial \psi_{12}^*}{\partial t} + \psi_{21} \frac{\partial \psi_{21}^*}{\partial t} + \psi_{22} \frac{\partial \psi_{22}^*}{\partial t} \right) dt + \\
+ \int \left[(\varepsilon_1 + \mu_1) |\psi_{11}|^2 + (\varepsilon_1 + \mu_2) |\psi_{12}|^2 + (\varepsilon_2 + \mu_1) |\psi_{21}|^2 + (\varepsilon_2 + \mu_2) |\psi_{22}|^2 \right] dt \\
+ \int \left[\lambda^* (\psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21}) + \lambda (\psi_{11}^*\psi_{22}^* - \psi_{12}^*\psi_{21}^*) \right] dt + \\
+ \frac{i\rho}{2} \int \left(\lambda \frac{d\lambda^*}{dt} - \lambda^* \frac{d\lambda}{dt} \right) \left(|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 + |\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 \right) dt,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Кинетический член в лагранжиане (2.1) отсутствует, что согласуется с аппаратом квантовой механики (см. [11]). Кроме того, в (2.1) вещественные параметры ε_1, ε_2 отмечают уровни энергии первого и второго состояния первой подсистемы, а μ_1, μ_2 – то же для второй подсистемы. Кроме того, введено управляющее воздействие $\lambda(t)$, которое и создает *нелинейность*. Последний член в (2.1) построен как аналог кинетической энергии для управления $\lambda(t)$, причем второй сомножитель под знаком интеграла нужен для соблюдения однородности получаемых уравнений по совокупности ψ_{jk} и ψ_{jk}^*, иначе возникнут осложнения с поддержанием нормировки волновой функции. При этом ρ – положительная постоянная. Для

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. №1

выкладок вводим следующие сокращения: суммарная энергия

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \mu_1 + \mu_2, \tag{2.2}$$

нормировочная сумма

$$\Phi = |\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2 + |\psi_{21}|^2 + |\psi_{22}|^2 , \tag{2.3}$$

и мера зацепленности (корреляции) состояний

$$\tau = \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21}. \tag{2.4}$$

§ 3 Нелинейное уравнение эволюции

Используем обычные правила вариационного исчисления, считая основными переменными λ, λ^* и компоненты ψ_{jk}, ψ^*_{jk}. Отделяя затем друг от друга соотношения для производных от всех этих переменных, после некоторых выкладок с использованием сокращений (2.2)-(2.4), получаем уравнения эволюции для компонент волновой функции

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d\psi_{11}}{dt} &= (\varepsilon_1 + \mu_1)\,\psi_{11} + \lambda\psi^*_{22} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{11};\\
i\hbar\frac{d\psi_{12}}{dt} &= (\varepsilon_1 + \mu_2)\,\psi_{12} - \lambda\psi^*_{21} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{12};\\
i\hbar\frac{d\psi_{21}}{dt} &= (\varepsilon_2 + \mu_1)\,\psi_{21} - \lambda\psi^*_{21} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{21};\\
i\hbar\frac{d\psi_{22}}{dt} &= (\varepsilon_2 + \mu_2)\,\psi_{22} + \lambda\psi^*_{11} - \frac{\lambda^*\tau + \lambda\tau^*}{2\Phi}\psi_{22},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

причем попутно оказывается

$$i\hbar\frac{d\Phi}{dt} = 2\left(\lambda\tau^* - \lambda^*\tau\right), \tag{3.2}$$

а для эволюции λ находим уравнение

$$i\rho\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\Phi}\left[\tau + \frac{\rho\lambda}{\hbar}\left(\lambda^*\tau - \lambda\tau^*\right)\right]. \tag{3.3}$$

Следствием (3.1) также является

$$i\hbar\frac{d\tau}{dt} = \theta\tau + \left(\Phi - \frac{|\tau|^2}{\Phi}\right)\lambda - \frac{\lambda^*\tau^2}{\Phi}. \tag{3.4}$$

§ 4 Введение необратимости

Анализировать поведение решений системы (3.1)-(3.4) или укороченной системы (3.4) на всей вещественной оси t нет даже особой надобности – заранее ясно, что у такой системы в силу ее происхождения решения обладают свойством обратимости во времени. Для получения желаемой *необратимости* нужны какие-то искусственные задержки или сбои, разрывающие ось t на относительно самостоятельные интервалы. Одним из простейших приемов такого рассечения является *зануление* величины $\lambda(t)$ (без изменения остальных переменных) в случайно заданные моменты времени $t = t_1, t_2 ...$, после которых процесс продолжается заново с $\lambda(t_\nu) = 0,\, \nu = 1, 2$. Зануление управляющего параметра $\lambda(t)$ в моменты t_1, t_2 ... происходит в результате взаимодействия квантового объекта с внешним миром, причем это взаимодействие может быть как дискретным, так и непрерывным. Механизм такого взаимодействия аналогичен известному явлению в молекулярной физике газов, где внешним элементом для пробной молекулы становится любая встречная молекула. В рассматриваемом случае, как и в теории газов, указанные случайные взаимодействия приводят в итоге к уничтожению корреляции τ между характеристиками квантового объекта (или между исходным и итоговым состоянием молекулы).

Рассмотрим случай достаточно частых актов зануления, между которыми величина λ не успевает существенно вырасти. Точнее, ниже предполагаем достаточно хорошую представимость основных переменных разложениями до $\sim (t - t_0)^2$ включительно. Очевидно, пока достаточно отождествить очередное t_ν с 0. Значения переменных в этой точке будем отмечать индексом « 0 » внизу. Из (3.3) следует, прежде всего,

$$\lambda(t) = -\frac{i\tau_0}{\rho\Phi_0} t + o\left(t^2\right),\ (t \geqslant 0). \tag{4.1}$$

Подстановка (4.1) в (3.2) дает

$$\Phi(t) = \Phi_0 - \frac{2\left|\tau_0\right|^2}{\rho\hbar\Phi_0} t^2 + o\left(t^3\right). \tag{4.2}$$

В (3.4)удобней вначале перейти к видоизмененной функции

$$\hat{\tau}(t) = \tau(t)\, e^{\frac{i\,\theta\, t}{\hbar}}$$

для которой

$$i\hbar\frac{d\hat{\tau}}{dt} = e^{\frac{i\theta t}{\hbar}} \left[\left(\Phi - \frac{|\tau|^2}{\Phi}\right)\lambda - \frac{\tau^2}{\Phi}\lambda^*\right] = -\frac{i\tau_0}{\rho} t + o\left(t^2\right),$$

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. №1

так что

$$i\hbar\hat{\tau} = i\hbar\tau_0 - \frac{i\tau_0}{2\rho}t^2 + o\left(t^3\right). \tag{4.3}$$

Перейдя в (4.3) к модулям, находим

$$|\tau(t)| = |\tilde{\tau}(t)| = |\tau_0|\left(1 - \frac{t^2}{2\hbar\rho} + o\left(t^3\right)\right). \tag{4.4}$$

Поскольку в силу (3.2) или (4.2) нормировка в процессе эволюции меняется, следует пользоваться относительной мерой зацепленности

$$\xi = \frac{\tau}{\Phi}, \tag{4.5}$$

принадлежащей, как показано ниже, отрезку $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$. Для нее из (4.2) и (4.4) получаем с точностью до отбрасываемых членов порядка t^3

$$|\xi(t)| = |\xi(0)|\left[1 + \left(\frac{4\,|\tau_0|^2}{\Phi_0^2} - 1\right)\frac{t^2}{2\hbar\rho}\right] + \ldots \tag{4.6}$$

Оценим, в какую сторону выражение в квадратных скобках в (4.6) отклоняется от 1. Элементарно сравниваем средние геометрические и средние арифметические:

$$|\psi_{11}|\cdot|\psi_{22}| \leqslant \frac{1}{2}\left(|\psi_{11}|^2 + |\psi_{22}|^2\right),$$
$$|\psi_{12}|\cdot|\psi_{21}| \leqslant \left(|\psi_{12}|^2 + |\psi_{21}|^2\right).$$

В результате

$$|\tau| \leqslant |\psi_{11}\psi_{22}| + |\psi_{12}\psi_{21}| \leqslant \frac{1}{2}\Phi,$$

то есть

$$|\xi| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) сразу следует

$$|\xi(t)| \leqslant |\xi(0)|,\ (\mathrm{t} \geqslant 0), \tag{4.8}$$

и зацепленность в нашей схеме стремится исчезнуть. Точнее, она стремится шаг за шагом к нулю, кроме, по-видимому, малоинтересного случая, когда (4.8) превращается в точное равенство, что имеет место в случае матричного тождества

$$\begin{pmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix}.$$

§ 5 Эволюция всей системы

Постараемся рассмотреть теперь эволюцию системы в целом. Сначала ограничиваемся случаем, когда зануление λ происходит регулярно через равные малые промежутки времени l. Предварительно удобней перейти к переменным

$$\varphi_{jk} = e^{i\chi - \frac{i\left(\varepsilon_j + \mu_k\right)t}{\hbar}} \psi_{jk}, \Lambda = \lambda e^{i\chi - \frac{i\,\theta\,t}{\hbar}}, \hat{\tau} = \tau e^{i\chi - \frac{i\,\theta\,t}{\hbar}} \tag{5.1}$$

(постоянную χ подберем позже). Для них, как легко проверить, система (3.1) упрощается за счет исчезновения первых членов правых частей:

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{d\varphi_{11}}{dt} = \Lambda\varphi_{22}^* - q\varphi_{11}, \quad i\hbar\frac{d\varphi_{12}}{dt} = -\Lambda\varphi_{21}^* - q\varphi_{12}, \\ i\hbar\frac{d\varphi_{21}}{dt} = -\Lambda\varphi_{12}^* - q\varphi_{21}, \quad i\hbar\frac{d\varphi_{22}}{dt} = \Lambda\varphi_{11}^* - q\varphi_{22}, \\ q = \frac{\Lambda^*\hat{\tau} + \Lambda\hat{\tau}^*}{2\Phi}, \end{gathered} \tag{5.2}$$

причем формально сохраняется определение меры корреляции состояний, см. также (2.4),

$$\hat{\tau} = \varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}, \tag{5.3}$$

и нормировочной суммы

$$\Phi = |\varphi_{11}|^2 + |\varphi_{12}|^2 + |\varphi_{21}|^2 + |\varphi_{22}|^2\,. \tag{5.4}$$

Для $\Lambda(t)$ и $\hat{\tau}(t)$ в том же приближении сохраняют силу формулы (4.1) и (4.3), именно,

$$\Lambda(t) = -\frac{i\hat{\tau}_0}{\rho\Phi_0}t + \ldots \tag{5.5}$$

Формулу (4.3) записываем через приращение:

$$\Delta\hat{\tau} = -\frac{\hat{\tau}_0}{2\hbar\rho}t^2 \tag{5.6}$$

с точностью до $o(t^3)$. Из (5.2) аналогично получаем после интегрирования с учетом $q = 0$ в нашем приближении:

$$\begin{gathered} \Delta\varphi_{11} = -\frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{22}^* t^2,\ \Delta\varphi_{12} = \frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{21}^* t^2, \\ \Delta\varphi_{21} = \frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{12}^* t^2,\ \Delta\varphi_{22} = -\frac{\hat{\tau}_0}{2\rho\hbar\Phi_0}\varphi_{11}^* t^2 \end{gathered} \tag{5.7}$$

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. №1

и как следствие

$$\Delta\Phi = -\frac{2\left|\hat{\tau}_0\right|^2}{\rho\hbar\Phi_0}t^2. \tag{5.8}$$

Но при большом числе следующих друг за другом малых приращений на интервалах $(0,l),(l,2l),(l,3l)\ \ldots$ мы имеем право сгладить процесс, заменив сложение приращений интегральной операцией. Такой переход *от дискретного к непрерывному* и обратно типичен для многих задач математической физики [12]. Из (5.6)–(5.8) выводим дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_{11}}{dt} &= -\frac{\hat{\tau}\,l}{2\rho h\Phi}\varphi_{22}^*, \frac{d\varphi_{12}}{dt} = \frac{\hat{\tau}l}{2\rho h\Phi}\varphi_{21}^*,\\ \frac{d\varphi_{21}}{dt} &= \frac{\hat{\tau}\,l}{2\rho h\Phi}\varphi_{12}^*, \frac{d\varphi_{22}}{dt} = -\frac{\hat{\tau}l}{2\rho h\Phi}\varphi_{11}^*,\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = -\frac{\hat{\tau}\,l}{2\rho\hbar}, \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2\left|\hat{\tau}\right|^2 l}{\rho\hbar\Phi}, \tag{5.10}$$

причем сохранение условий связи (5.3) и (5.4) легко проверяется.

На данном этапе мы выбираем в (5.1) параметр χ так, чтобы величина $\hat{\tau}_0$ оказалась вещественной и положительной. Тогда в силу первого уравнения (5.10) положительность $\hat{\tau}(t)$ сохраняется и при $t>0$ (и величина будет меняться по убывающей экспоненте).

Введем теперь вспомогательный аргумент

$$z = \frac{l}{2\rho\hbar}\int\limits_0^t \frac{\hat{\tau}}{\Phi}dt, \tag{5.11}$$

с которым система уравнений (5.9) становится линейной:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_{11}}{dz} &= -\varphi_{22}^*, \frac{d\varphi_{12}}{dz} = \varphi_{21}^*, \frac{d\varphi_{21}}{dz} = \varphi_{12}^*, \frac{d\varphi_{22}}{dz} = -\varphi_{11}^*,\\ \frac{d\varphi_{11}^*}{dz} &= -\varphi_{22}, \frac{d\varphi_{12}^*}{dz} = \varphi_{21}, \frac{d\varphi_{21}^*}{dz} = \varphi_{12}, \frac{d\varphi_{22}^*}{dz} = -\varphi_{11}.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Общим решением системы (5.12) является

$$\begin{aligned}&\varphi_{11} = Ae^z + ae^{-z}, \varphi_{12} = Be^z + be^{-z},\\ &\varphi_{21} = B^*e^z - b^*e^{-z}, \varphi_{22} = -A^*e^z + a^*e^{-z}\end{aligned} \tag{5.13}$$

с произвольными комплексными постоянными A, B, a, b. Соответственно, из (5.3) и (5.4) следует

$$\hat{\tau} = -\left(|A|^2 + |B|^2\right) e^{2z} + \left(|a|^2 + |b|^2\right) e^{-2z} + Aa^* - aA^* + Bb^* - bB^*, \quad (5.14)$$

и

$$\Phi = 2\left(|A|^2 + |B|^2\right) e^{2z} + 2\left(|a|^2 + |b|^2\right) e^{-2z}. \quad (5.15)$$

Наконец, t выражается через общий аргумент z, если представить (5.11) в дифференциальной форме:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{2\rho\hbar}{l}\frac{\Phi}{\tau}. \quad (5.16)$$

Интегрирование (5.16) по z ведет к

$$t = \sigma - \frac{2\rho\hbar}{l}\ln\hat{\tau}, \ \ (\sigma = \text{const}), \quad (5.17)$$

что, для проверки, легко согласовать с первым уравнением (5.10).

Предельное значение $\hat{\tau}$, как мы уже видели, равно 0. Приравнивание правой части (5.14) нулю приводит к квадратному уравнению относительно $\eta = e^{2z}$ (кроме возможности $A = B = 0$, приводящей к уже упоминавшемуся исключительному случаю). У этого уравнения всегда два вещественных корня разных знаков; нам, ввиду $\hat{\tau} > 0$ в (5.11), подходит только положительный корень. После его подстановки в (5.15) элементарные выкладки дают финальное значение, отмечаемое индексом e.

$$\Phi_e = 2\sqrt{(Aa^* - aA^* + Bb^* - bB^*)^2 + 4\left(|A|^2 + |B|^2\right)\left(|a|^2 + |b|^2\right)}. \quad (5.18)$$

Для физических целей представляет интерес значение суммы квадратов только двух модулей, также отнесенное к финальному состоянию. Именно, согласно (5.13),

$$\left\{|\psi_{11}|^2 + |\psi_{12}|^2\right\}_e = Aa^* + A^*a + Bb^* + B^*b + \frac{1}{2}\Phi_e. \quad (5.19)$$

Здесь левая часть (5.19), после деления на Φ_e, обычно трактуется как «вероятность» пребывания первой подсистемы в состоянии 1.

Параметры A, B, a, b не совсем удобны, и разумно перейти от них согласно (5.13) в случае $z = 0, t = 0$ к исходным φ_{jk}, а дальше к ψ_{jk}. Тогда

$$A = \frac{\varphi_{11} - \varphi_{22}^*}{2}, B = \frac{\varphi_{12} + \varphi_{21}^*}{2}, a = \frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}^*}{2}, b = \frac{\varphi_{12} - \varphi_{21}^*}{2}, \quad (5.20)$$

после чего выражение в левой части (5.19), обозначаемое нами далее как L_1, и аналогично определенные другие суммы квадратов модулей, раскрываются в виде

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv \left\{|\psi_{11}|^2+|\psi_{12}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e+\frac{1}{2}\left(|\psi_{11}|^2+|\psi_{12}|^2-|\psi_{21}|^2-|\psi_{22}|^2\right)\right\}_0, \\ L_2 &\equiv \left\{|\psi_{21}|^2+|\psi_{22}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e+\frac{1}{2}\left(|\psi_{21}|^2+|\psi_{22}|^2-|\psi_{11}|^2-|\psi_{12}|^2\right)\right\}_0, \\ N_1 &\equiv \left\{|\psi_{11}|^2+|\psi_{21}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e+\frac{1}{2}\left(|\psi_{11}|^2+|\psi_{21}|^2-|\psi_{12}|^2-|\psi_{22}|^2\right)\right\}_0, \\ N_2 &\equiv \left\{|\psi_{12}|^2+|\psi_{22}|^2\right\}_e = \left\{\frac{1}{2}\Phi_e+\frac{1}{2}\left(|\psi_{12}|^2+|\psi_{22}|^2-|\psi_{11}|^2-|\psi_{21}|^2\right)\right\}_0, \end{aligned} \tag{5.21}$$

причем

$$\Phi_e = \sqrt{\Phi_0^2 - 4\,|\tau_0|^2}. \tag{5.22}$$

Предположение о положительности τ_0 в (5.22) уже отброшено: в общем случае изменение χ меняет только фазу у τ и совсем не меняет $|\psi_{jk}|$. По отдельности квадраты модулей легко представить через выражение (5.21), если помнить, что в финальном состоянии $\psi_{11}\psi_{22}=\psi_{12}\psi_{21}$. Именно,

$$|\psi_{11}|_e^2 = \frac{L_1N_1}{\Phi_e}, |\psi_{12}|_e^2 = \frac{L_1N_2}{\Phi_e}, |\psi_{21}|_e^2 = \frac{L_2N_1}{\Phi_e}, |\psi_{22}|_e^2 = \frac{N_1N_2}{\Phi_e}. \tag{5.23}$$

Заметим, что при слабой зацепленности величины (5.23) оказываются пропорциональными их значениям при $t=0$ с точностью до малых поправок порядка $\left(\frac{L_0}{\Phi_0}\right)^2$.

Предположение об одинаковости интервалов «работы» функции $\lambda(t)$ и их плотном прилегании друг к другу вообще несущественно, так как в промежутках, согласно (5.9), значения φ_{jk} «замерзают», а далее промежуточные интервалы выбрасываются, величина же l, если она меняется, остается под знаком интеграла. До формулы (5.23) все остается неизменным.

Эволюция самих величин ψ_{jk} также получается из наших формул, но она несколько сложнее, а зависимость от t, вообще говоря, сохраняется и после выхода на финальный режим. Изучение нелинейного процесса эволюции волновой функции при наличии многих подсистем и большего числа состояний в них, по-видимому, может быть проведено аналогичным образом, но более громоздко.

§ 6 Почему уравнения нелинейной квантовой механики не являются лоренц-инвариантными?

При обсуждении уравнений нелинейной квантовой механики (5.9) возникает вопрос о том, в каком отношении развиваемая теория находится с теорией относительности. Само линейное уравнение Шредингера не является релятивистски инвариантным, так как производная по времени $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ у него первого порядка, но частные производные по координатам типа $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}$ имеют второй порядок. Это неравноправие временной и пространственной координат нарушает, естественно, основное требование теории относительности, описывающей события в четырехмерном квазиевклидовом пространстве-времени. Как известно, выход из этого нашел Дирак: вместо одного уравнения второго порядка он получил четыре лоренц–инвариантных дифференциальных уравнения, которые содержат первые производные и по времени, и по координатам.

Однако наши нелинейные уравнения не допускают записи в лоренц-инвариантной форме. Дело, прежде всего в том, что описываемый здесь процесс расщепления волновых пакетов необратим во времени, и выделение временной координаты на особую роль нарушает одно из главных положений теории относительности. Напомним, что уравнение Дирака во времени обратимо.

Заслуживает внимание еще один фактор. Коллапс волновых функций происходит со сверхсветовой скоростью, и это также нарушает принципы теории относительности, если признать что волновая функция имеет физическую реальность. Наличие сверхсветовых скоростей при коллапсе давно признается (см., например, [13]), однако с той оговоркой, что это не нарушает принцип причинности и не допускает передачи сигнала со скоростью, превышающей c. Однако все это верно только в том случае, когда не существует привилегированной системы координат. Именно это и утверждается теорией относительности, в ней все системы отсчета переводятся одна в другую преобразованиями Лоренца. Так вот: неприменимость преобразований Лоренца в нашей теории связана еще и с тем, что у нас неявно подразумевается наличие привилегированной системы отсчета. Это физически допустимо, так как одна привилегированная система отсчета в астрономии заведомо существует и связана она с фоном реликтового излучения. Мы допускаем, поэтому, передачу сигнала со сверхсветовой скоростью. Но нельзя смешивать существование привилегированной системы отсчета с нарушением принципа причинности. А именно, принцип причинности у нас обязательно выполняется, и передача сверхсветового сигнала возможна только из прошлого в будущее. Это можно пояснить наличием

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2009. №1

определенной зоны «настоящее» между прошлым и будущим на световом конусе.

§ 7 Астрономический смысл возможных результатов

Из проведенного выше анализа следует, что область действия *принципа дополнительности* Бора, имевшего всеобъемлющее значение в умах физиков при переходе от классической механики к квантовой, сужается. Действительно, в эпоху становления квантовой механики казалось неудобным сразу отрешиться от привычных понятий координат и импульса. Сейчас, видимо, необходимо признать, что, строго говоря, в природе и нет точных аналогов этих понятий. Физическую реальность отражает лишь волновая функция. Для макроскопических тел это ни к каким противоречиям не ведет, поскольку при малой длине волны де Бройля движение волнового пакета неотличимо от движения точечной частицы. Затруднение возникает только при суперпозиции качественно различных волновых функций, как в известном парадоксе с кошкой Шредингера, а также при наступающем рано или поздно расплывании волнового пакета. Но в таких случаях необходимо постулировать существование обратного процесса в природе: *редукции или коллапса* волнового пакета. Наблюдения в астрономии показывают: этот процесс *концентрации* волнового пакета реально существует и его механизм никак не связан с воздействием на волновую функцию прибора или наблюдателя.

Следствия получаются более или менее по догадке ввиду неразвитости теории для случая многих подсистем и состояний. Пусть одной подсистемой является источник электромагнитного излучения, а остальными – приемники (возможно и без разумного наблюдателя). Наш нелинейный процесс через некоторое время приводит к *самостоятельности* всех подсистем. Но так как у них и распад суперпозиции состояний должен происходить самостоятельно, то результатом будет восприятие одного и того же объекта даже при одинаковых условиях распространения излучения. Правда, это относится к единому лазерному импульсу, потому что при тепловом механизме излучения эффект многих мелких импульсов осреднится и останутся только небольшие флуктуации.

§ 8 Обсуждение

Мы предлагаем теорию, описывающую сложные нелинейные процессы расцепления со временем первоначально «зацепленных» квантовых подсистем и для сравнительно простой модели нашли их окончательное поведение после расцепления. В настоящее время такой механизм перехода от линейной квантовой механики к классической вызовет, возможно, возражения, и предугадывая некоторые из них, мы попытаемся дать наш ответ.

Прежде всего, классический предел в квантовой механике, предполагающий как квазиклассическое приближение, так и теорему Эренфеста, никак не снимает сам парадокс кошки Шредингера. В классическом пределе волновая функция продолжает действовать, и вопрос о ее расщеплении остается открытым. Что касается теорем выдающегося физика Эренфеста, то они парадокса кошки Шредингера не затрагивают. Например, интегрирование квадрата амплитуды волновой функции по физическому пространству дает лишь условие ее нормировки, переходящее в стандартное условие нормировки вероятностей, но никак не предопределяет, в какой точке пространства окажется частица.

В последние годы стала известной теория декогеренции Зурека [14]. Она представляет, конечно, самостоятельный интерес для физиков. Однако мы склоняемся к тому, что данная теория все же не решает окончательно проблему кошки Шредингера и не перекрывает нашу теорию. «Запутывание» волновой функции в теории декогеренции Зурека никак не устраняет самой проблемы перехода волновых пакетов из микромира в макромир.

Есть и другие принципиальные моменты. Процесс, аналогичный рассмотренному нами, известен и в классической физике, где его обычно называют потерей информации между двумя пространственно разобщенными явлениями под действием случайного шума [15,16]. Но между тем и другим процессом есть одно существенное различие: в классической физике результат вмещается в установившиеся представления, а в квантовой требуется переход к нелинейному уравнению Шредингера (речь идет о нелинейности самого уравнения Шредингера, что, конечно, надо отличать от нелинейности операторов). *Но не всякая нелинейность подходит, а только та, которая создает необратимость, так как необратимым должен быть сам результат расцепления волнового пакета.* Поэтому попытки усовершенствовать уравнение Шредингера добавкой, например, ангармонических сил, хорошо зарекомендовавших себя в нелинейной оптике и в нелинейной теории упругости, здесь обречены на неудачу (насколько нам известно, и соответствующие выводы о результативности попыток введения такой нелинейности опровергаются экспериментом [5]). В вакууме интерференция фотонов не нарушается и на космических длинах пробега [17]. Далее, у нас нелинейность носит *внешний* характер, как по форме воздействия, так и в смысле привлечения некоего дополнительного фона, чем-то похожего на фон из нейтрино или реликтового электромагнитного излучения, которые пронизывают Вселенную.

Для реализации разработанного механизма расщепления пакетов необходимым является существование во Вселенной фона из неизвестных пока элементарных частиц (гаттонов), которые являются центрами расщепления волновых пакетов. Существуют ли в действительности предполагаемый здесь специфический фон частиц-гаттонов, все пронизывающий и обуславливающий нелинейность уравнения Шредингера? Такой «внешний» мир уже был предположен нами в [7] в связи с задачей о кошке Шредингера. Следствием является то важное утверждение, что во Вселенной нет единого центра для расщепления волновых пакетов и, в частности, роль такого центра не может, вопреки предположениям некоторых теоретиков, играть сознание индивидуального наблюдателя.

Признавая, что разрушение волновых пакетов есть процесс физический, следует допустить и возможность не вполне согласованной работы удаленных друг от друга разных центров-гаттонов: следствием этой несогласованности может быть уже не полная на данный момент времени фиксация макроскопической реальности, а фиксация ее только в асимптотическом пределе, до достижения которого кошка Шредингера может казаться наблюдателю некоторое время то живой, то мертвой.

В каком отношении для нас важно упоминание о реликтовом излучении? В том, что теория относительности задает световой конус по отношению к заданной точке пространства-времени, различающий для нее прошлое, настоящее и будущее. А реликтовое излучение задает нечто иное и несколько более точное: гиперплоскость в четырехмерном пространстве-времени. «Бо́льшую точность» здесь надо понимать как неинвариантность нашего нелинейного уравнения по отношению к преобразованиям Лоренца.

Представленный здесь математический аппарат, как и в [7], формально не включает в себя понятий теории относительности. Но анализ этого вопроса подсказывает нечто большее: этот аппарат и несовместим с релятивистской инвариантностью. Ключевым пунктом является зануление λ, которое должно происходить в какие-то критические моменты времени. Если включить сюда зависимость от пространственных координат, получается гиперповерхность в 4-мерном пространстве Минковского. Подчеркнем, что никаких противоречий с теорией относительности (и с линейной квантовой механикой!) в областях их применения у нас нет. Но учитывая закономерности поведения волновых пакетов в промежуточной зоне, в пространстве Минковского следует допустить существование изоповерхности равного времени, связанного с разложением волновых функций. Вряд ли при этом речь идет об исконно заданных поверхностях; скорее, их положение определяется распределением материи, хотя бы и в неизвестных пока ее формах. Кстати, такие изоповерхности, играя роль материальных препятствий, могли бы вносить свой вклад и в обнаруженную недавно анизотропию реликтового излучения.

Имеется и другая сторона вопроса. Построение упомянутых гиперповерхностей одновременно означает и указание «стрел времени» как 4-мерных векторов, ортогональных в смысле Минковского этим поверхностям. Такая стрела времени, меняющаяся в зависимости от космической обстановки, влияет хотя бы на некоторые *необратимые* процессы. Тем самым намечается связь с идеями Н. А. Козырева [18].

Правда, с современной точки зрения, вряд ли можно говорить о какой-то сложившейся концепции Козырева – построение согласованной модели его ученикам явно не удалось. Правильней выделять, по-видимому, стержневую идею неравномерного хода времени, которая проявляет себя в необратимых процессах [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М.: Физматлит, 1966. 408 с.
2. Иванов В. В. Физика переноса излучения // Астрономия: Традиции, настоящее, будущее / под ред. В. В. Орлова, В. П. Решетникова, Н. Я. Сотниковой. СПб., 2007.
3. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. М.: Наука, 1985. 381 с.
4. Вайнберг С. Мечты об окончательной теории/ пер.с англ. М.: УРСС, 2004. 253 с.
5. Ципенюк Ю. М. Квантовая микро- и макрофизика. М.: Физматкнига, 2006. 638 с.
6. Экстром Ф. , Вайнлэнд Д. Изолированный электрон // УФН. 1981. Т. 134, №8. С. 711-730.
7. Кондратьев Б. П. , Антонов В. В. Решение парадокса кошки Шредингера. Опыт создания нелинейной квантовой механики. Ижевск, 1994. 169 с.
8. Современная квантовая химия/ пер. с англ. М.: Мир, 1968. Т. 1, 2.
9. Егоров В. В. // Хим. физика. 1988. №7. С. 1466.
10. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
11. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: ГИФМЛ, 1963. Т. 3. 704 с.
12. Власов А. А. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966. 356 с.
13. Кадомцев Б. Б. Динамика и информация// УФН. 1994. Т. 164, №5. С. 449.
14. Зурек В. Декогеренция и переход от квантового мира к классическому. // Los Alamos Sciensce. 2002. №27.

15. Бендат Дж. , Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. М.:Мир, 1983. 312 с.

16. Петрович Н. Т. , Камков Е. Ф. Вопросы космической радиосвязи. М., 1965.

17. Мартынов Д. Я. Курс практической астрофизики. М.: Наука, 1971. 616 с.

18. Козырев Н. А. Избранные труды. Л., 1991. 447 с.

19. Чернин А. Д. Физика времени. М.: Наука, 1987. 222 с.

Поступила в редакцию 01.09.08

V. A. Antonov, B. P. Kondratyev
Astronomy and principles of quantum mechanics

General theoretical problems of closure of microcosm with macrocosm and new interpretation of quantum mechanics have been considered. The great attention has been paid to astronomical applications. The nonlinear model of the Schrodinger equation, which provides in due time decomposition of originally grapping wave packages, is developed. A special example of the necessary nonlinear effects, imposing on the wave function evolution according to the Schrodinger equation, has been analyzed. The theory predicts narrowing of region action for the Bor's complementarity principle, as well as existence in Cosmos of background from unknown elementary particles, which gives nonlinearity for the Schrodinger equation. Existence in the Universe of a background from unknown elementary particles (gattons) which are the centers of splitting of wave packages is necessary. By that it is postulated: in the Universe there is no uniform center for splitting wave packages and is emphasized, that the role of such center cannot play consciousness of the observer. At not quite coordinated work of the different centers–gattons it is necessary to expect only asymptotic to fixing of a macroscopical reality, when the Shredinger's cat can seem some time that alive, or dead.

Keywords: microcosm, mesocosm, macrocosm, nonlinear model of the Schrodinger equation, wave function, evolution, astronomy and quantum mechanics.

Антонов Вадим Анатольевич,
доктор физико-математических
наук, ведущий научный
сотрудник,ГАО РАН,
196140, Россия,
г. С.-Петербург

Antonov Vadim Anatolievich,
doctor of physical-mathematical
science, professor,

Кондратьев Борис Петрович,
доктор физико-математических

Kondratyev Boris Petrovich,
doctor of physical-mathematical

наук, профессор,
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kond@uni.udm.ru

science, professor
E-mail: kond@uni.udm.ru