ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 № 1

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Научный журнал **Основан в марте 1991 г.**

Удмуртский государственный университет **г. Ижевск**

СОДЕРЖАНИЕ

Редакционно-издательский отдел

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916–015
http://www.vestnik.udsu.ru

УДК 530.145.61

Б. П. Кондратьев , В. А. Антонов

МЕТОД МЕТРИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ В ПРИЛОЖЕНИИ К РАЗЛИЧНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Предложен унифицированный вариационный подход к решению задач из различных областей механики, гидродинамики, математической и теоретической физики, а также динамики звездных систем. Суть метода метрической вариации в том, что виртуальные изменения параметров динамической системы рассматриваются не как независимые друг от друга, а как следствия деформации всего пространства, физического (конфигурационного) или фазового, увлекающей за собой и варьирование траекторий включенных в него частиц. При изучении колебаний жидкой фигуры методу придается более широкая сфера действия и охватываются не только виртуальные, но и реальные деформации фигуры. Подход продемонстрирован на примерах.

Ключевые слова: фазовые траектории, деформация фазового пространства, вариационные методы.

Введение

Вариационные методы широко распространены в различных областях механики и физики. Они применяются в механике твердых тел и точечных масс, в механике жидкостей и газов, пластичных и упругих тел, в электродинамике, в специальной и общей теории относительности и т.д. [1] . Однако в исследовательской практике до сих пор не существует единого вариационного подхода. Мы не имеем в виду терминологическую специфику каждой конкретной области. Сегодня существует множество вариационных методов, и каждый из них выглядит как самостоятельный и независимый от других. В результате этого в значительной мере теряется общность картины, что идет вразрез с магистральной линией развития точных наук, берущей начало от Фарадея и Максвелла, к объединению разных отраслей знания в более крупные комплексы.

Однако важно подчеркнуть, что в отношении вариационных приемов такой общий подход может быть установлен. В данной работе в качестве общего вариационного метода предложен подход, названный методом метрической вариации. Суть его состоит в том, что виртуальные изменения параметров динамической системы мы рассматриваем не как независимые друг от друга, а как следствие деформации всего пространства, физического (конфигурационного) или фазового, увлекающей за собой и траектории включенных в него частиц. Данный подход продемонстрирован на нескольких задачах. В этих примерах при выводе уравнений гидродинамики будут получены известные соотношения; аналогично обстоит дело и при выводе эволюционных уравнений в других классических областях знаний. Главное, однако, заключается в том, что в предлагаемом подходе удается достичь более глубокого понимания природы вариационных методов. Эта унифицированная точка зрения дает наглядную ориентировку при переходе от точных уравнений к приближенным, в частности, для слабо неоднородных систем, когда возникает опасность превышения точности. Наконец, наш новый подход обладает явным преимуществом в той ситуации, когда изучаемый объект объединяет в себе черты физических систем разной природы. Сразу подчеркнем, что здесь речь идет только об обратимых процессах.

§ 1. Гидродинамика идеальной жидкости

Введем следующие стандартные обозначения: радиус–вектор $\mathbf{r}\,(x, y, z)$, вектор скорости $v\,(u, v, w)$, давление $p\,(\mathbf{r}, t)$, плотность жидкости $\rho\,(\mathbf{r}, t)$, тепловая энергия на единицу массы $Q\,(\mathbf{r}, t)$, внешний гравитационный потенциал $\varphi_e\,(\mathbf{r}, t)$, гравитационная постоянная G.

При составлении лагранжиана кинетическую энергию следует брать с одним знаком, а тепловую и гравитационную, как разновидности потенциальной энергии, писать с обратным знаком. При этом расчет энергии первоначально ведется на жидкую частицу единичной массы, а затем производится интегрирование по элементу массы

$$dm = \rho \cdot dxdydz. \tag{1.1}$$

Исключение составляет та часть потенциальной (гравитационной) энергии, которая обусловлена самогравитацией и описывается двойным интегралом по массе. При обозначении второго элемента массы и соответствующего радиуса-вектора через m' и $\mathbf{r}'$ итоговый проинтегрированный лагранжиан, а точнее действие по Гамильтону, выглядит так:

$$\begin{gathered} S = \int \left\{ \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - Q\,(\rho) + \varphi \right] dm + \right. \\ \left. + \frac{G}{2} \iint \frac{dm dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} dt. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Проверим теперь, что варьирование интеграла (1.2) действительно приводит к известным уравнениям движения идеальной жидкости. При этом, как и следовало ожидать, будет фигурировать и внутренний гравитационный потенциал $\varphi_i = G\int \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, так что полный гравитационный потенциал будет равен

$$\Phi = \varphi_e + G\int \frac{dm'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{1.3}$$

а также используется термодинамическое соотношение

$$\frac{dQ}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2}. \tag{1.4}$$

Именно получаем

$$\delta S = \iint \left[\frac{dx}{dt}\left(\delta\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\left(\delta\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}\left(\delta\frac{dz}{dt}\right) - \frac{p}{\rho^2}\delta p - \delta\Phi\right] dmdt. \tag{1.5}$$

В линейном приближении, которое мы здесь используем при описании вириальных перемещений,вариация полного потенциала $\delta\Phi$, как легко видеть, возникает только за счет смещения частицы в уже заданном поле с полным потенциалом (1.3), то есть

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z. \tag{1.6}$$

Сложнее обстоит дело с вариациями скоростей. Если смещение координат $(\delta x, \delta y, \delta z)$ у нас задается как функция самих координат (x, y, z) и времени t, то приращение скорости по своему смыслу пропорционально векторной разности смещений одной и той же частицы, имеющей разные положения в моменты t и $t+dt$. Указанное различие находит свою аналогию в сопоставлении локальной и стоксовой производных. Такой подход и становится возможным в результате деформации всего пространства вместе с траекториями частиц и их скоростями. Получаем

$$\begin{aligned}
\delta\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}\delta x + u\frac{\partial}{\partial x}\delta x + v\frac{\partial}{\partial y}\delta x + w\frac{\partial}{\partial z}\delta x;\\
\delta\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}\delta y + u\frac{\partial}{\partial x}\delta y + v\frac{\partial}{\partial y}\delta y + w\frac{\partial}{\partial z}\delta y;\\
\delta\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}\delta z + u\frac{\partial}{\partial x}\delta z + v\frac{\partial}{\partial y}\delta z + w\frac{\partial}{\partial z}\delta z.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Наконец, возмущение плотности определяется из уравнения неразрывности, опять-таки с точки зрения подвижной частицы, которое при нашем метрическом подходе должно рассматриваться как одно из задаваемых условий:

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right). \tag{1.8}$$

В итоге, с учетом (1.1),

$$\begin{aligned}
\delta S = \iint\iint \Bigg[&\rho u\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta x + u\frac{\partial}{\partial x}\delta x + v\frac{\partial}{\partial y}\delta x + w\frac{\partial}{\partial z}\delta x\right) + \\
&+\rho v\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta y + u\frac{\partial}{\partial x}\delta y + v\frac{\partial}{\partial y}\delta y + w\frac{\partial}{\partial z}\delta y\right) + \\
&+\rho w\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta z + u\frac{\partial}{\partial x}\delta z + v\frac{\partial}{\partial y}\delta z + w\frac{\partial}{\partial z}\delta z\right) + \\
&+p\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\delta y + \frac{\partial}{\partial z}\delta z\right) - \\
&-\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z\right)\Bigg]\, dxdydzdt.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Для проверки условий обращения (1.9) в нуль мы обычным путем избавляемся интегрированием по частям от членов с производными по $x, y, z, t,$ игнорируя граничные члены, если жидкость заполняет все пространство. (В противном случае попутно получаются условия на стенках или свободных границах.) Получаем уравнения движения вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\, u^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\, uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\, uw) + \frac{\partial\, p}{\partial x} - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0. \tag{1.10}$$

При дифференцировании произведений в левой части мы последовательно выделяем сомножители $\rho, \quad \rho\, u, \quad \rho\, v, \quad \rho\, w$. Собрав члены с производными от них, видим, что совокупность этих членов обращается в нуль в силу уравнения неразрывности, которое сейчас, в отличие от (1.8), надлежит брать в эйлеровой форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\, u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\, v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\, w) = 0. \tag{1.11}$$

Остаются обычные уравнения гидродинамики:

$$\frac{\partial\, u}{\partial t} + u\frac{\partial\, u}{\partial x} + v\frac{\partial\, u}{\partial y} + w\frac{\partial\, u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\, p}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{1.12}$$

и аналогично для двух других компонент.

§ 2. Звездные системы

Весьма наглядно продемонстрировать метрический метод на бесстолкновительных звездных системах. Опять исходим из некоторого состояния как основного, характеризуемого сейчас фазовой плотностью

$$f\,(x, y, z, u, v, w, t)\,.$$

Смещение частицы $(\delta x, \delta y, \delta z)$ также зависит от семи только что фигурировавших аргументов. Аналогично (1.7) находим в линейном приближении изменение скорости при виртуальном смещении

$$\delta u = \frac{\partial \delta x}{\partial t} + u\frac{\partial \delta x}{\partial x} + v\frac{\partial \delta x}{\partial y} + w\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \delta x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \delta x}{\partial w} \tag{2.1}$$

и т. д. При составлении вариации лагранжиана в данном случае отпадает особая «тепловая» энергия (см. выше пример из гидродинамики), уже входящая в кинетическую энергию отдельных звезд, и тогда остается

$$\delta S = \iiint \left[\left(\frac{\partial \delta x}{\partial t} + u\frac{\partial \delta x}{\partial x} + v\frac{\partial \delta x}{\partial y} + w\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \delta x}{\partial u} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \delta x}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \delta x}{\partial w}\right) u + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z\right] dtdm,$$

где неуказанные явно члены отличаются от выписанных заменой δx на δy или на δz , а u на v или на w , элемент же массы раскрывается как

$$dm = f\,dx\,dy\,dz\,du\,dv\,dw. \tag{2.2}$$

Обычное варьирование по δx ведет тогда к

$$\frac{\partial}{\partial t}(fu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(fu^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(fuv) + \frac{\partial}{\partial z}(fuw) + \frac{\partial}{\partial u}\left(fu\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left(fu\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(fu\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) - f\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

что после сокращения на u сводится к известному уравнению Больцмана (связанному часто также с именами Лиувилля или Власова):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial w} = 0. \tag{2.3}$$

Интересно, что к такому же результату ведет и варьирование по δy или по δz .

В данной задаче разницу в подходе в сравнении с гидродинамикой можно пояснить следующим образом. В звездных системах практически нет столкновений, и траектории отдельных звезд можно мысленно смещать независимо одну от другой. В обычном же газе это привело бы к отрыву друг от друга траекторий сталкивающихся частиц; поэтому там допустим только более узкий класс смещений целостных гидродинамических элементов. По тому же образцу, что и в данном пункте, выводится эволюционное уравнение для бесстолкновительной плазмы с изменением только направления сил дальнодействия.

§ 3. Вспомогательные вириальные соотношения

Приближенные уравнения эволюции получатся, если δx, δy, δz считать не произвольными функциями, а выбранными из конкретного класса, который мы формируем из более или менее правдоподобных физических соображений. В частности, для жидких самогравитирующих конфигураций во многих случаях кажется приемлемым линейный закон

$$\begin{aligned} \delta x &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z; \\ \delta y &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z; \\ \delta z &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где коэффициенты α_{ij} зависят только от времени.

Тогда, согласно (1.7), имеем

$$\delta\frac{dx}{dt} = \dot{\alpha}_{11}x + \dot{\alpha}_{12}y + \dot{\alpha}_{13}z + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w$$

и т. д., точка означает дифференцирование по t. В (1.5) далее подставляем, согласно (1.8),

$$\delta\rho = -\left(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}\right)\rho, \tag{3.2}$$

а величиной изменения гравитационной энергии оказывается (см. (1.2))

$$\begin{aligned} \delta\frac{G}{2}\iint\frac{dm\,dm'}{|r-r'|} &= \frac{G}{2}\iint\frac{dmdm'}{\sqrt{\sum\limits_{x,y,z}\left(x+\delta x-x'-\delta x'\right)^2}} - \\ &-\frac{G}{2}\iint\frac{dm\,dm'}{\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}} \approx \\ \approx \frac{G}{2}\iint\frac{\sum\limits_{x,y,z}\left(x-x'\right)\left(\delta x-\delta x'\right)}{|r-r'|^3}dmdm' &= -\frac{G}{2}\iint\frac{K}{|r-r'|^3}dm\,dm', \end{aligned} \tag{3.3}$$

где введена квадратичная форма

$$K = \alpha_{11}\left(x - x'\right)^2 + \alpha_{22}\left(y - y'\right)^2 + \alpha_{33}\left(z - z'\right)^2 +$$
$$+ \left(\alpha_{12} + \alpha_{21}\right)\left(x' - x\right)\left(y' - y\right) + \left(\alpha_{13} + \alpha_{31}\right)\left(x' - x\right)\left(z' - z\right) +$$
$$\left(\alpha_{23} + \alpha_{32}\right)\left(y' - y\right)\left(z' - z\right).$$

Интегралы, входящие при расписывании K в правую часть (3.3), можно несколько упростить за счет использования симметрии обеих троек координат:

$$\frac{1}{2}\iint \frac{(x' - x)^2}{|r - r'|^3} dm\,dm' = \frac{1}{2}\iint \frac{x'(x' - x) + x(x - x')}{|r - r'|^3} dm\,dm' =$$
$$= \frac{1}{2}\iint \frac{x(x' - x)}{|r - r'|^3} dm\,dm' = -\frac{1}{G}\int x\frac{\partial \Phi}{\partial x} dm.$$

Далее, например,

$$\frac{1}{2}\iint \frac{(x' - x)(y' - y)}{|r - r'|^3} dm\,dm' = \frac{1}{2}\iint \frac{x'(y' - y) + x(y - y')}{|r - r'|^3} dm\,dm' =$$
$$= \frac{1}{2}\iint \frac{x(y - y')}{|r - r'|^3} dm\,dm' = -\frac{1}{G}\int x\frac{\partial \Phi}{\partial y} dm = -\frac{1}{G}\int y\frac{\partial \Phi}{\partial x} dm$$

(последнее равенство написано на основании первоначальной симметрии координат x и y).

Несложное выравнивание по функциям $\alpha_{ij}(t)$ дает систему 9 уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\int xu\,dm = \int u^2\,dm + \int p\,dx\,dy\,dz + \int x\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} dm, \\ \frac{d}{dt}\int yu\,dm = \int uv\,dm + \int y\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} dm, \end{gathered} \tag{3.4}$$

и т.д. К (3.4) при необходимости можно еще присоединить естественные кинематические условия

$$\frac{d}{dt}\int x^2\,dm = 2\int xu\,dm, \qquad \frac{d}{dt}\int xy\,dm = \int xu\,dm + \int yu\,dm. \tag{3.5}$$

С точностью до обозначений уравнения (3.4) и (3.5) совпадают с тензорными вириальными уравнениями Чандрасекхара. Аналогично для звездных систем берем смещение в виде

$$\begin{aligned} \delta x &= \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \beta_{11}u + \beta_{12}v + \beta_{13}w; \\ \delta y &= \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \beta_{21}u + \beta_{22}v + \beta_{23}w; \\ \delta z &= \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \beta_{31}u + \beta_{32}v + \beta_{33}w, \end{aligned}$$

тогда в силу (2.1)

$$\delta u = \dot{\alpha}_{11} x + \dot{\alpha}_{12} y + \dot{\alpha}_{13} z + \left(\dot{\beta}_{11} + \alpha_{11}\right) u + \left(\dot{\beta}_{12} + \alpha_{12}\right) v + \left(\dot{\beta}_{13} + \alpha_{13}\right) w +$$
$$+ \dot{\beta}_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \dot{\beta}_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \dot{\beta}_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

и т. д. Варьирование по всем 18 функциям $\alpha_{ij}(t)$ и $\beta_{ij}(t)$ приводит к уравнениям

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt} \int xu\, dm = \int u^2\, dm + \int x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dm, \\
\frac{d}{dt} \int yu\, dm = \int uv\, dm + \int y \frac{\partial \Phi}{\partial x} dm, \\
\frac{d}{dt} \int u^2\, dm = 2 \int u \frac{\partial \Phi}{\partial x} dm, \\
\frac{d}{dt} \int uv\, dm = \int u \frac{\partial \Phi}{\partial y} dm + \int v \frac{\partial \Phi}{\partial x} dm,
\end{gathered} \tag{3.6}$$

и т.д., среди которых, впрочем, есть три пары совпадающих. Итак, наш метод приводит к правильным результатам: соотношения (3.6), дополненные условиями (3.5), хорошо известны в литературе.

§ 4. Малые колебания жидкого гравитирующего эллипсоида

Эта задача относится к числу сложных. Пользуясь данным подходом, сейчас следует так представить выражения правых частей (3.4) и (3.6), чтобы в итоге получилась замкнутая система уравнений. И этого мы можем добиться, придавая метрической вариации более широкую сферу действия, охватывающую не только виртуальные, но и реальные деформации фигуры. В частности, ниже под такими деформациями понимаются определенного сорта колебания жидкого сфероида Маклорена с полуосями A, A, C. Точнее, колебательное состояние мыслится произошедшим из стационарного посредством замены координат

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + a x_0 + b y_0; \\
y &= y_0 + c x_0 - a y_0; \\
z &= z_0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где координаты x_0, y_0, z_0 относятся к стационарному состоянию, x, y, z — к возмущенному и заранее учтена несжимаемость (в линейном приближении) как продемонстрированная в (4.1) связь между диагональными коэффициентами. Невозмущенное поле скоростей

$$u = -\Omega y_0, \quad v = \Omega x_0, \quad w = 0$$

преобразуется для той же самой частицы, согласно (2.1), в

$$u = -\Omega y_0 + \dot{a}x_0 + \dot{b}y_0 + \Omega\left(-ay_0 + bx_0\right),$$
$$v = \Omega x_0 + \dot{c}x_0 - \dot{a}y_0 - \Omega\left(cy_0 + ax_0\right).$$

Подставляем эти выражения во все моменты второго порядка, причем вычисления, конечно, облегчатся симметрией. В том же самом линейном приближении получаем возмущения моментов

$$\delta\int ux\,dm = \frac{\dot{a}A^2}{5}M, \quad \delta\int uy\,dm = \frac{\dot{b}A^2}{5}M;$$
$$\delta\int vx\,dm = \frac{\dot{c}A^2}{5}M, \quad \delta\int vy\,dm = -\frac{\dot{a}A^2}{5}M$$

(M — масса сфероида). Возмущения гравитационных членов в (3.4) мы сопоставляем с набором коэффициентов в правых частях (4.1), представив те и другие в виде тензоров

$$\begin{pmatrix} \delta\int x\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}dm & \delta\int x\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}dm \\ \delta\int y\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}dm & \delta\int y\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}dm \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Первый тензор, как мы видим, симметричен. В сущности связь между обоими тензорами — та же, как между напряжением и деформацией в теории упругости при обычных условиях физической симметрии. Притом след тензора деформаций в данном случае равен нулю. Итак, остается допустить пропорциональность двух тензоров в (4.2), после симметризации второго из них, с некоторым скалярным коэффициентом E (аналог модуля Юнга).

Для определения этого модуля E обратимся к известному выражению потенциала однородного трехосного эллипсоида с полуосями A, B, C в виде

$$\Phi = \frac{3}{4}GM\int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{\left(a^2+s\right)\left(b^2+s\right)\left(c^2+s\right)}}.$$

Тогда, в частности,

$$\int x\frac{\partial\Phi}{\partial x}dm = \frac{3GM^2A^2}{10}\int\limits_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\left(A^2+s\right)^3\left(B^2+s\right)\left(C^2+s\right)}}. \tag{4.3}$$

В нашем случае деформация (4.1) превращает полуоси A B, C в $A\,(1+a)$, $A\,(1-a)$, C. После соответствующей линеаризации из (4.3) следует

$$\begin{gathered}\delta\int x\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dm=-\delta\int y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dm=Ea;\\ \delta\int x\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,dm=-\delta\int y\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,dm=\frac{E\,(b+c)}{2},\end{gathered}\tag{4.4}$$

где

$$E=-\frac{3GM^2A^2}{5}\int\limits_0^\infty\frac{s\,ds}{(A^2+s)^3\sqrt{c^2+s}}.\tag{4.5}$$

Теперь у нас есть все данные для линеаризации уравнений (3.4). После исключения p вычитанием друг из друга двух диагональных уравнений (3.4) получаем систему

$$\begin{gathered}\frac{A^2M}{5}\ddot a=-\frac{\Omega\left(\dot b+\dot c-2\Omega a\right)A^2M}{5}+Ea;\\ \frac{A^2M}{5}\ddot b=\frac{A^2M}{5}\ddot c=\frac{\Omega\left[2\dot a+\Omega\,(b+c)\right]A^2M}{5}+\frac{E\,(b+c)}{2}.\end{gathered}\tag{4.6}$$

Для комбинации

$$\xi=2a+i\,(b+c)\tag{4.7}$$

на основании (4.6) легко найти уравнение

$$\ddot\xi-2\,i\Omega\xi=\left(2\Omega^2+\frac{5E}{A^2M}\right)\xi.\tag{4.8}$$

Для определения частоты колебаний ω величину ξ в уравнении (4.8), как обычно, считаем пропорциональной $e^{-i\omega t}$. Тогда

$$\omega=-\Omega\pm\sqrt{\Omega^2+\frac{5E}{GM}}.\tag{4.9}$$

Легко проследить, что изменение знака при i в (4.7) влечет за собой изменение общего знака у ω, так что получаются две пары собственных частот. Для получения полной системы из 6 частот остается заметить, что система (4.6) удовлетворяется при $\omega=0$, $b+c=0$ для линейной по t функции $b\,(t)$; этот двойной корень для ω составляет лишь тривиальный поворот системы как целого.

Из (4.9) заключаем, что предел динамической устойчивости сфероида Маклорена достигается обращением подкоренного выражения в нуль, то есть при величине угловой скорости

$$\Omega^2 = 3GM \int\limits_0^\infty \frac{s\,ds}{\left(A^2+s\right)^3\sqrt{c^2+s}}. \tag{4.10}$$

С другой стороны, величина Ω связана известным образом с эксцентриситетом сфероида e по условию стационарности [2; 3]

$$\Omega^2 = 2\pi G\rho \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\left(3-2e^2\right)\arcsin e - \frac{3}{e^2}\left(1-e^2\right)\right]. \tag{4.11}$$

Сопоставление (4.11) с (4.10) дает критическое значение эксцентриситета меридионального сечения $e^* \approx 0,95289$; неустойчивость изучаемого типа проявляется у более сплюснутых сфероидов. Этот результат достаточно хорошо известен, но у нас он выводится как бы иным языком. В перспективе та же методика может применяться и к неоднородным фигурам, для которых собственные частоты не выражаются точным аналитическим образом. Преимущество мы видим и в том, что при нашем подходе уменьшается опасность фиктивной необратимости: вообще вариационные методы по своей природе приводят к обычным уравнениям.

§ 5. Мембранная неустойчивость звездного диска

Примером, уже выходящим за рамки применимости вириальных тензоров, является исследование мембранной неустойчивости звездных систем, возникающей, когда дисперсия скоростей в направлении наибольшего простирания системы существенно превышает дисперсию в поперечном направлении. При этом подразумевается, что поперечные размеры конечны — системе есть куда изгибаться.

Мы рассматриваем модель слоя, однородного в $x-$ и $y-$ направлениях. (Можно было бы исходить из цилиндрической модели — тогда аналогичную неустойчивость правильней было бы назвать не мембранной, а шланговой.) Точнее, рассматриваем модель слоя со звездной плотностью

$$\nu = \frac{\nu_0}{\mathrm{ch}^2\,\frac{z}{h}}, \tag{5.1}$$

где ν_0 — плотность в серединной плоскости $z = 0$, а параметр h имеет смысл полутолщины слоя. Данной плотности, согласно одномерному уравнению Пуассона

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = -4\pi mG\nu$$

(m — масса типичной звезды), соответствует потенциал

$$\Phi = -4\pi nGh^2\nu_0 \ln \operatorname{ch} \frac{z}{h} \tag{5.2}$$

с точностью, как всегда бывает в одномерном случае, до произвольной аддитивной постоянной. Полезно для дальнейшего также иметь в виду спроектированную плотность

$$\mu = m \int\limits_{-\infty}^{\infty} \nu\, dz = 2\nu_0 hm. \tag{5.3}$$

Для внутренней согласованности необходимо задать фазовую плотность

$$f = \varphi\left(E_2\right) \Gamma\left(u\right) \Gamma\left(v\right), \tag{5.4}$$

где введен интеграл энергии вертикальных колебаний

$$E_2 = \frac{\omega^2}{2} - \Phi\left(z\right) \tag{5.5}$$

и вспомогательная функция

$$\varphi\left(E\right) = \frac{\nu_0}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{E}{\sigma_z^2}}, \tag{5.6}$$

где

$$\sigma_z^2 = 2\pi mGh^2\nu_0. \tag{5.7}$$

Функция же $\Gamma\left(u\right)$ представляет собой нормированное максвелловское распределение

$$\Gamma\left(u\right) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{5.8}$$

Интегрирование по пространству скоростей, как легко видеть, приводит к выражению (5.1). В отличие от вертикальной дисперсии скоростей σ_z^2, которая фиксируется этой согласованностью, горизонтальная дисперсия скоростей σ_x^2 не зависит от остальных параметров системы. При интересующем нас изгибном возмущении можно без ограничения общности направить волновой вектор параллельно оси абсцисс, тогда движения в $y-$ направлении вообще не играют роли, а интегрирование по y в лагранжиане (см. ниже) становится также излишним. Мы сохраняем только наиболее важное смещение в $z-$ направлении, но надо принимать во внимание его зависимость, кроме x и t, также от скорости u. Напротив, зависимостью от z пренебрегаем; возмущение, таким образом, сводится к смещению вверх или вниз целых столбиков. Согласно (2.1) находим возмущение соответствующей скорости

$$\delta\omega = \frac{\partial\delta z}{\partial t} + u\frac{\partial\delta z}{\partial x}. \tag{5.9}$$

При разложении кинетической энергии на единицу массы

$$\frac{u^2+v^2+\left(w+\frac{\partial\delta z}{\partial t}+u\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)^2}{2}$$

становится ясно, что члены первого порядка по δz дадут после интегрирования нулевой вклад хотя бы из-за нечетности по w. Потенциальную энергию

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}Gm^2\iint \ln\left[\left(x-x'\right)^2+\left(z+\delta z-z'-\delta z'\right)^2\right]dm\,dm' \\ \left(dm=\varphi\left(E_2\right)\Gamma\left(u\right)dx\,dz\,du\,dw\right)\end{gathered} \tag{5.10}$$

мы сразу записываем с учетом двумерного (логарифмического) характера потенциала. Члены первого порядка по δz или $\delta z'$ после раскрытия дают нулевой вклад в (5.10) из-за нечетности по отношению к обращению $z, z' \to -z, -z'$. Итак, во всех случаях остается для варьирования только совокупность квадратичных членов

$$\begin{gathered}S=\tfrac{1}{2}\iint\iint\left(\tfrac{\partial\delta z}{\partial t}+u\tfrac{\partial\delta z}{\partial x}\right)^2 v\left(z\right)\Gamma\left(u\right)du\,dx\,dz\,dt+ \\ +\frac{Gm^2}{2}\iint\iint\int\iint v\left(z\right)v\left(z'\right)\Gamma\left(u\right)\Gamma\left(u'\right)\times \\ \times\frac{\left(x'-x\right)^2-\left(z-z'\right)^2}{\left[\left(x-x'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^2}\left(\delta z-\delta z'\right)^2du\,du'\,dx\,dx'\,dz\,dz'\,dt,\end{gathered} \tag{5.11}$$

причем в этом уравнении мы сразу провели интегрирование по «пассивной» компоненте w. Варьирование лагранжиана (5.11) по обычным правилам дает

$$\begin{gathered}\delta S=-\int v\left(z\right)\Gamma\left(u\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\delta z\,dz+ \\ +2Gm^2\iint\iint v\left(z\right)v\left(z'\right)\Gamma\left(u\right)\Gamma\left(u'\right)\times \\ \times\frac{\left(x-x'\right)^2-\left(z-z'\right)^2}{\left[\left(x-x'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right]^2}\left(\delta z-\delta z'\right)^2du'\,dx'\,dz\,dz'=0.\end{gathered} \tag{5.12}$$

Как функция от z и t в силу однородности ситуации, вариация δz должна содержать множитель $e^{\lambda t+ikx}$. Выполнив соответствующие подстановки и интегрирование, приводим уравнение (5.11) после сокращений к виду

$$-(\lambda+iku)^2\,\mu\delta z+\pi G m^2 k\theta\,(k)\,\widehat{\delta z}=0, \qquad (5.13)$$

где введены осредненное значение

$$\widehat{\delta z}=\int \Gamma\,(u)\,\delta z\,du \qquad (5.14)$$

и функция

$$\theta\,(k)=\iint v\,(z)\,v\left(z'\right)e^{-k|z-z'|}dz\,dz'. \qquad (5.15)$$

Двойной интеграл в правой части (5.15) записывается с учетом функций $\nu\,(z)$ и $\nu\,(z')$ из (5.1) в виде

$$\theta\,(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\nu_0^2}{\operatorname{ch}^2\frac{z}{h}\operatorname{ch}^2\frac{z'}{h}}\,e^{-k|z-z'|}dzdz'. \qquad (5.16)$$

В асимптотическом пределе малых k интеграл (5.16) легко вычисляется и равен

$$\theta\,(k)\approx 4\nu_0^2h^2. \qquad (5.17)$$

В противоположном случае, в асимптотическом пределе больших k, получим следующий результат:

$$\theta\,(k)\approx\frac{2}{k}\nu_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{\operatorname{ch}^4\frac{z}{h}}=\frac{8}{3k}\nu_0^2h\,. \qquad (5.18)$$

Но двойной интеграл (5.16) можно, оказывается, выразить и в конечном виде. Для этого, прежде всего, приводим его к следующему однократному интегралу:

$$\theta\,(k)=8\nu_0^2h^2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{y\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}y}{\operatorname{sh}^3y}\,e^{-hky}dy. \qquad (5.19)$$

Затем заменой

$$u=e^{-hky},\ dv=\frac{y\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}y}{\operatorname{sh}^3y} \qquad (5.20)$$

берем интеграл (5.19) по частям; выполняя такое интегрирование по частям еще два раза (причем каждый раз берем $u = e^{-hky}$), в итоге получим

$$\theta(k) = 4\nu_0^2 h^2 \left[1 - hk + \frac{1}{2}h^2k^2 \cdot \zeta\left(0, 2, 1 + \frac{hk}{2}\right)\right], \tag{5.21}$$

где

$$\zeta\left(0, 2, 1 + \frac{hk}{2}\right) \tag{5.22}$$

– известная ζ - функция Гурвица (или обобщенная дзета-функция). Дзета-функцию можно выразить через производную от пси-функции

$$\zeta\left(0, 2, 1 + \frac{hk}{2}\right) = \frac{d}{dz}\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad z = 1 + \frac{hk}{2}, \tag{5.23}$$

причем $\Gamma(z)$ — обычная гамма-функция. В частности, из (5.21) следуют и известные нам асимптотические выражения (5.17) и (5.18).

Далее, из (5.13) легко вывести одно интересное соотношение. Выразим δz как неизвестную:

$$\delta z = \frac{\pi G m^2 k \theta(k)}{(\lambda + iku)^2 \mu} \widehat{\delta z}, \tag{5.24}$$

тогда интегрирование, согласно (5.14), ведет к уравнению

$$2\pi G m^2 \theta(k) \int \frac{\Gamma(u)\, du}{(\lambda + iku)^2} = \mu, \tag{5.25}$$

которое примет более удобную форму после дополнительного интегрирования по частям:

$$2i\pi G m^2 \theta(k) \int \frac{\frac{d\Gamma}{du}}{\lambda + iku} du = -\mu. \tag{5.26}$$

В частности, в приближении малых k, когда $kh \ll 1$, имеем $\theta(k) \approx \mu^2$. Тогда критическое состояние с $\lambda = 0$ достигается при

$$k = k* \equiv \frac{2\pi G\mu}{\sigma^2 x}. \tag{5.27}$$

* * *

1. Полак Л. С. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960. 599 с.
2. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир,1973. 288 с.
3. Кондратьев Б. П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.:Наука, 1989. 272 с.

АСТРОНОМИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2010. №1

Поступила в редакцию 01.09.09

B. P. Kondratyev , M. A. Antonov
Method of metric variation.

The unified variational approach is developed to decision of the problems from different areas mechanics, hydrodynamics, mathematical and theoretical physics, as well as dynamics of stellar systems. Essence of the metric variation method is that the virtual change of parameter dynamical system are considered not as independent from each other, but as effects of deformation of whole phase space, leading for itself and variation of path particles of it. At study of the fluctuations of the fluid figure the method is added more broad sphere of the action and are covered not only virtual, but also real deformation of the figure. The approach is demonstrated on examples.

Keywords: phase trajectories, deformation of phase space, variational methods.

Кондратьев Борис Петрович,
доктор физико-математических
наук, профессор,
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»,
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kond@uni.udm.ru

Kondratyev Boris Petrovich,
doctor of physical-mathematical
science, professor
E-mail: kond@uni.udm.ru

Антонов Вадим Анатольевич,
доктор физико-математических
наук, ведущий научный
сотрудник,ГАО РАН
196140, Россия,
г. С.-Петербург

Antonov Vadim Anatolievich,
doctor of physical-mathematical
science, professor