
ВЕСТНИК 2010
УДМУРТСКОГО № 1
УНИВЕРСИТЕТА АСТРОНОМИЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

Научный журнал Основан в марте 1991 г.
Удмуртский государственный университет г. Ижевск

СОДЕРЖАНИЕ

От научного редактора

<i>Идельсон Н.И. Галилей и астрономия</i>	3
<i>Кондратьев Б.П., Антонов В.А. Метод метрической вариации в приложении к различным динамическим системам</i>	24
<i>Кондратьев Б.П. Об одной неточности Исаака Ньютона</i>	40
<i>Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г. Фигуры равновесия компактных газопылевых туманностей в Галактике</i>	52
<i>Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г. Приливное влияние колец на центральные фигуры равновесия</i>	68
<i>Трубицына Н.Г. Фигура равновесия внутри двух гравитирующих колец</i>	82
<i>Кондратьев Б.П., Антонов В.А. Необходимость нелинейной квантовой механики</i>	86
<i>Кондратьев Б.П., Антонов В.А. О перспективах развития нелинейной квантовой механики</i>	106
<i>Морозова Л.Е. Об асимптотике квазиуровней двухчастичного дискретного оператора Шредингера</i>	112

Редакционный совет

Н. И. Леонов (главный редактор),
О. Г. Баранова (отв. редактор),
Л. М. Клименко (отв. секретарь)
С. Г. Морозов (техн. редактор)

Редакционная коллегия серии «Астрономия и математическая физика»

Черепашук А. М. – доктор физико-математических наук,
академик РАН (Москва)
Гребеников Е. А. – доктор физико-математических наук,
академик АНН (Москва)
Рябов Ю. А. – доктор физико-математических наук, профессор (Москва)
Кондратьев Б. П. – доктор физико-математических наук, профессор,
научный редактор (Ижевск)
Антонов В. А. – доктор физико-математических наук,
профессор (С.-Петербург)
Холшевников К. В. – доктор физико-математических наук, профессор,
академик РАЕН (С.-Петербург)
Бисноватый-Коган Г. С. – доктор физико-математических наук,
профессор (Москва)
Осипков Л. П. – кандидат физико-математических наук,
доцент (С.-Петербург)
Емельяненко В. В. – доктор физико-математических наук,
профессор (Челябинск)
Чубурин Ю. П. – доктор физико-математических наук,
профессор (Ижевск)
Трубицына Н. Г. – старший преподаватель,
ответственный секретарь (Ижевск)

Редакционно-издательский отдел

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, ком. 336
телефон: 8 (3412) 916-015
<http://www.vestnik.udsu.ru>

УДК 530.145.61

*Б. П. Кондратьев, Н. Г. Трубицына***ПРИЛИВНОЕ ВЛИЯНИЕ КОЛЕЦ НА ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ**

Аналитическим методом в приливном приближении изучается воздействие гравитирующего кольца или тора на центральную фигуру равновесия вращающейся жидкой или газовой массы. Выведена формула, описывающая приращение квадрата угловой скорости центральной фигуры. Рассмотрены три модели широких колец и одна — кругового тора. Влияние колец на сжатие планеты Сатурн или на фигуру Солнца лежит за пределами точности современных наблюдений, однако для красного сверхгиганта WOH G64 из БМО воздействие гравитирующего тора сравнимо с эффектом вращения звезды. Для галактик метод модифицируется и описывает влияние колец как на звездную, так и отдельно на диффузную подсистему. Рассмотрен пример известной галактики NGC 4594 «Сомбреро». Метод может быть использован для оценки невидимой массы вокруг гигантских E-галактик.

Ключевые слова: кольца, тор, приливное влияние, фигуры равновесия, планеты, звезды, галактики.

Введение

Кольца — газовые, пылевые, плазменные или состоящие из звезд — часто встречаются во Вселенной. Многие планеты солнечной системы [1], звезды и галактики окружены кольцеобразными структурами [2]. В Солнечной системе изучаются вековые возмущения от кольца из астероидов на движение планет [3]. Стационарные и нестационарные газопылевые кольца есть вне и внутри галактик [4], причем масса колец в процессе расширения может быстро нарастать. Известно, что кольца планет имеют малую массу в сравнении с массой центрального тела [5]. Так, общая масса колец Сатурна примерно равна массе его небольшого спутника Мимаса. Но есть и примеры другого рода. Масса газового кольца в планетарной туманности может составлять уже до одной десятой от массы центральной звезды. Ещё большей может быть относительная масса колец у некоторых звезд-гигантов. Так, масса внешнего тора в красном сверхгиганте WOH G64 (спектральный класс M 7,5) из БМО равна примерно половине массы этой звезды [6;7]. Подобные массивные кольца могут оказывать заметное приливное влияние на фигуру равновесия центральной звезды или галак-

тики. Мощное пылевое кольцо есть, например, у известной галактики типа SO «Сомбреро».

Часто галактики содержат не только звезды, но много горячего газа, причем области рентгеновского свечения сравнимы с размерами галактик [8]. Масса звезд, как правило, значительно превышает массу газа, поэтому приливное воздействие внешнего кольца сильнее всего будет сказываться на форме фигуры газовой подсистемы. В рамках развитого в данной работе метода может быть поставлен вопрос и о влиянии колец не только на звездную составляющую галактик (которое может быть и ничтожно малым), но и отдельно – на диффузную компоненту.

Можно предположить, что кроме колец из барионной материи вокруг галактик существуют и кольцевые структуры из невидимой материи. А так как масса темной материи на порядок превышает массу барионной, нельзя сбрасывать со счетов то гравитационное влияние, которое могут оказывать невидимые в электромагнитном диапазоне кольца на фигуры галактик.

Следует отметить, что многие задачи о приливном возмущении ранее рассматривались с иной точки зрения — в рамках задачи двойных звезд или двойных галактик [9;10]. Однако влияние колец, и особенно тора, на центральное тело составляет особую задачу, весьма специфично и требует отдельного рассмотрения.

В связи с этим возникает актуальная задача об оценке влияния колец на фигуру равновесия вращающегося центрального тела. До сих пор оставалось не ясным, в каких конкретных случаях влиянием кольца на сжатие центральной фигуры можно пренебрегать. В данной работе задача о влиянии гравитирующего кругового тора на внутреннюю фигуру равновесия поставлена и полностью решена в приливном приближении, когда внутренний потенциал кольца или тора представлен квадратичной функцией от координат пробной точки. Для решения задачи применен оригинальный подход, основанный на современной теории потенциала [11], позволивший значительно сократить сложные расчеты. Рассматриваются однородные и неоднородные модели широких колец, а также кругового тора. Метод может быть применен для изучения фигур равновесия звезд в центре планетарных туманностей, а также к звездам-сверхгигантам и к галактикам с мощными кольцами. Тема эта весьма актуальна, так как в некоторых астрофизических системах влияние гравитирующего тора на фигуру центральной звезды или галактики оказывается сравнимым с эффектом вращения.

§ 1. Постановка задачи

Фигура равновесия однородной вращающейся гравитирующей жидкости однородной плотности ρ находится в центре кольцевого образования или тора и вращается вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью Ω . Внутренний потенциал самой фигуры обозначим через $\varphi_0(x_1, x_2, x_3)$; приливной потенциал кольца в данной задаче можно взять в приливном приближении

$$\varphi_r(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \quad (\alpha > 0), \quad (1.1)$$

когда зависимость от координат возмущающего тела представлена квадратичным полиномом. Здесь введена постоянная α , значение которой зависит от принятой модели распределения вещества в кольце или в торе. Ниже мы применяем оригинальный приём для нахождения этой постоянной, заметно облегчающий все расчеты.

С учетом центробежной силы и формулы (1.1) полный потенциал во внутренней точке центральной конфигурации будет равен

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_0(\mathbf{x}) + \alpha(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) + \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (1.2)$$

При изучении влияния кольца саму фигуру равновесия центрального тела достаточно представить в виде сжатого сфероида Маклорена с поверхностью

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad a_1 \geq a_3. \quad (1.3)$$

Тогда потенциал данной фигуры на внутреннюю точку ($R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) равен

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{x}) &= \pi G \rho (I - A_1 R^2 - A_3 x_3^2), \\ I &= a_1^2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2 + s) \sqrt{a_3^2 + s}}, \\ A_1 &= a_1^2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2 + s)^2 \sqrt{a_3^2 + s}} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2}, \\ A_3 &= a_1^2 a_3 \int_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2 + s) (a_3^2 + s)^{3/2}} = \frac{2}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $e = \sqrt{1 - \frac{a_3^2}{a_1^2}}$ — меридиональный эксцентриситет сфероида.

Полный потенциал (1.2) принимает вид:

$$\Phi(r, x_3) = R^2 \left[-\pi G\rho A_1 + \alpha + \frac{\Omega^2}{2} \right] + x_3^2 [-\pi G\rho A_3 - 2\alpha] + \text{const.} \quad (1.5)$$

Согласно теории, см. монографии [12; 13], искомая фигура будет находиться в состоянии относительного равновесия, если ее поверхность является уровенной, то есть в любой точке поверхности (1.3) сфероид полный потенциал (1.5) сохраняет своё постоянное значение.

§ 2. Формула для поправки к угловой скорости

Указанному выше условию постоянства полного потенциала на поверхности искомой фигуры мы удовлетворим, если из (1.3) и (1.5) потребуем выполнения пропорции

$$\frac{\frac{\Omega^2}{2} + \alpha - \pi G\rho A_1}{-2\alpha - \pi G\rho A_3} = \frac{a_3^2}{a_1^2}. \quad (2.1)$$

Из (2.1) находим теперь квадрат угловой скорости вращения центральной фигуры

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} = A_1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} A_3 - \left(\frac{\alpha}{\pi G\rho} \right) \left(1 + 2\frac{a_3^2}{a_1^2} \right). \quad (2.2)$$

Заметим, что при отсутствии внешнего кольца, то есть при $\alpha = 0$, мы возвращаемся в (2.2) к известному выражению для квадрата угловой скорости классического сфероида Маклорена.

Таким образом, искомая поправка для квадрата угловой скорости фигуры равновесия, возникающая за счёт гравитационного воздействия тора (кольца), оказывается равной

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} \right) = - \left(\frac{\alpha}{\pi G\rho} \right) \left(1 + 2\frac{a_3^2}{a_1^2} \right). \quad (2.3)$$

Знак минус в формуле (2.3) физически означает, что внешнее кольцо растягивает центральную конфигурацию в экваториальной плоскости, увеличивая тем самым ее сплюснутость при прежней угловой скорости.

§ 3. Нахождение α для широкого кольца и однородного кругового тора

3.1. *Кольцо А.* Дано однородное плоское кольцо с граничными радиусами R_1 , R_2 и поверхностной плотностью σ . Для нахождения постоянной α применим следующий прием: вначале найдем потенциал данного кольца

на оси симметрии Ox_3 , причем ограничимся предположением, что пробная точка расположена на малой высоте. Тем самым мы предполагаем, что размеры центральной фигуры равновесия малы в сравнении с размерами внешнего кольца. Тогда (индекс « r » означает «ring», то есть «кольцо»)

$$\begin{aligned} \varphi_r(x_3) &= 2\pi G\sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} = 2\pi G\sigma \sqrt{r^2 + x_3^2} \Big|_{R_1}^{R_2} = \\ &= 2\pi G\sigma r \left(1 + \frac{x_3^2}{2r^2} + \dots \right) \Big|_{R_1}^{R_2} = \\ &= 2\pi G\sigma \left\{ R_2 \left(1 + \frac{x_3^2}{2R_2^2} \right) - R_1 \left(1 + \frac{x_3^2}{2R_1^2} \right) \right\} = \\ &= 2\pi G\sigma \left\{ R_2 - R_1 - \frac{x_3^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сравнивая выражение (3.1) с потенциалом (1.1), взятым на оси симметрии при $x_1 = x_2 = 0$, находим величину коэффициента α для однородного широкого кольца в виде

$$\alpha_r = \frac{\pi G\sigma}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.2)$$

Далее это значение α подставим в (2.2). Получим формулу для поправки к квадрату угловой скорости

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} \right) \approx -\frac{\sigma(3-2e^2)}{2\rho} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (3.3)$$

Запишем теперь неизвестное отношение плотностей тел через отношение масс кольца и центрального тела

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{4 M_r}{3 M_0} \frac{a_1^3 \sqrt{1-e^2}}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (3.4)$$

Здесь a_1 — экваториальная полуось центрального сфероидального тела. Подставляя (3.4) в (3.3), получим искомую поправку в конечном виде

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} \right) \approx -\frac{2M_r}{3M_0} \frac{a_1^3 (3-2e^2) \sqrt{1-e^2}}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}. \quad (3.5)$$

3.2. Кольцо В. Наряду с однородным, для практических приложений важно рассмотреть и неоднородное широкое кольцо. Закон распределения

плотности в кольце возьмем тот, который обычно принимается для протопланетного кольца, из которого образовались все планеты и малые тела Солнечной системы. Однако часто в литературе форма этого закона берется слишком сложной. Далее мы упростим все расчеты и сохраним физическую суть модели, полагая, что характерным для протопланетных колец является обращение в нуль плотности на внутренней и внешней границе кольца. Этому условию можно удовлетворить, если взять распределение плотности в виде

$$\sigma(r) = C\sqrt{(R_2 - r)(r - R_1)}. \quad (3.6)$$

Масса такого кольца оказывается равной

$$M_r = 2\pi C \int_{R_1}^{R_2} r\sqrt{(R_2 - r)(r - R_1)}dr = \frac{1}{8}\pi^2 C (R_2 - R_1) (R_2^2 - R_1^2). \quad (3.7)$$

Формула (3.7) позволяет выразить постоянную C через массу кольца. Поступая, как и выше, находим потенциал данного кольца на оси Ox_3 при малых x_3 :

$$\begin{aligned} \varphi_r(x_3) &= 2\pi G \cdot C \int_{R_1}^{R_2} \frac{r\sqrt{(R_2 - r)(r - R_1)}}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} dr \approx \\ &\approx 2\pi G \cdot C \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{(R_2 - r)(r - R_1)} \left(1 - \frac{x_3^2}{2r^2}\right) dr. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следовательно,

$$\alpha_r = \frac{1}{4}\pi^2 G \cdot C \frac{(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})^2}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{2GM_r}{(R_2 - R_1)(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})^2}{\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (3.9)$$

В итоге, подставляя (3.9) в (2.3) и полагая сжатие тела малым, находим поправку:

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) \approx -8\frac{M_r}{M_0} \frac{(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1})^2}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{R_0^3}{(R_2 - R_1)(R_2^2 - R_1^2)}. \quad (3.10)$$

3.3. Кольцо C (модель кольца для галактик). Прилагая формулу (2.3) к кольцевым галактикам, распределение плотности в широком кольце представим сейчас законом

$$\sigma(r) = \frac{C}{r}, \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (3.11)$$

Масса такого кольца

$$M_r = 2\pi C (R_2 - R_1). \quad (3.12)$$

Потенциал кольца с распределением плотности (3.11) на оси симметрии

$$\varphi_r(x_3) = 2\pi G \cdot C \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + x_3^2}} \approx 2\pi G \cdot C \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \left(1 - \frac{x_3^2}{2r^2}\right). \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что постоянная α для такого кольца будет равна

$$\alpha_r = \frac{1}{4}\pi G \cdot C \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right). \quad (3.14)$$

Подставим (3.14) в (2.3) и заменим с помощью (3.12) постоянную C через массу кольца; в общем случае внутреннюю фигуру звездной системы опять считаем сфероидом с эксцентриситетом e , а внутренний радиус кольца положим равным экваториальному радиусу центральной фигуры. В итоге

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}}\right) \approx -\frac{1}{6} \frac{M_r}{M_0} (3 - 2e^2) \sqrt{1 - e^2} \frac{R_1 (R_1 + R_2)}{R_2^2}. \quad (3.15)$$

Здесь $\bar{\rho}$ — средняя плотность центральной фигуры.

3.4. Модификация метода для галактик. Приливное влияние кольца на газовую подсистему. Необходимо учитывать, что многие галактики содержат не только звезды, но также газ и пыль. Масса звезд в галактиках, как правило, значительно превышает массу газа, поэтому приливное воздействие внешнего кольца будет сильнее всего сказываться на фигуре газовой подсистемы. Возникает новая и весьма интересная задача: как учесть приливное влияние кольца не на всю галактику (оно может быть и ничтожно малым), а только на газовую составляющую. Полную плотность вещества ρ представим суммой

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \quad (3.16)$$

плотностей звезд (ρ_1) и газа (ρ_2), причем, в согласии с наблюдениями, считаем $\rho_1 \gg \rho_2$. Рассмотрим соотношение (2.2)

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho} = A_1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} A_3 - \left(\frac{\alpha}{\pi G \rho}\right) \left(1 + 2\frac{a_3^2}{a_1^2}\right) \quad (3.17)$$

и заметим, что в левой его части $\frac{1}{\rho}$ с достаточной точностью можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1 + \rho_2} \approx \frac{1}{\rho_1} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right). \quad (3.18)$$

В правой же части (3.17), где α мала в сравнении с Ω^2 , пренебрегая малой величиной второго порядка $\alpha \frac{\rho_2}{\rho_1}$, величину $\frac{1}{\rho}$ можно заменить просто на $\frac{1}{\rho_1}$. Имеем тогда

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_1} \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = A_1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} A_3 - \frac{\alpha}{\pi G \rho_1} (3 - 2e^2). \quad (3.19)$$

В нулевом приближении по возмущению плотности

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_1} = A_1 - \frac{a_3^2}{a_1^2} A_3, \quad (3.20)$$

так что из (3.19) получим формулу

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_1} \right) \approx - \frac{\alpha}{\pi G \rho_2} (3 - 2e^2). \quad (3.21)$$

Это и есть искомое приращение квадрата угловой скорости газовой подсистемы.

Подставляя в правую часть (3.21) α из (3.14) и выразив ρ_2 через массу газа $M_g = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \sqrt{1 - e^2} \rho_2$, получим поправку в виде

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_1} \right) \approx - \frac{1}{6} \frac{M_r}{M_g} (3 - 2e^2) \sqrt{1 - e^2} \frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right). \quad (3.22)$$

3.5. Модель однородного кругового тора. Дан тор с уравнением поверхности

$$(R - R_0)^2 + x_3^2 = r_0^2, \quad (3.23)$$

где R_0 и r_0 — радиусы осевой и вспомогательной окружности. Внутренний потенциал однородного кругового тора в приближении, достаточном для решения данной задачи, можно взять в виде [14]

$$\varphi_{tor}(r, \theta) = D_0 + D_2 r^2 P_2(\cos \theta), \quad (3.24)$$

(индекс «tor» от слова «torus» — тор) что дает

$$\alpha_{tor} = - \frac{D_2}{2} = \frac{2}{3} \frac{M_{tor} G}{\pi r_0} \cdot \frac{1}{2kR_0^2} [(1 - 2k^2) E(k) - (1 - k^2) K(k)]. \quad (3.25)$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра первого и второго рода, а модуль $k = \frac{r_0}{R_0} \leq 1$. Подставляя (3.25) в формулу (2.3), находим влияние гравитирующего тора на угловую скорость, а значит и на сплюснутость центральной конфигурации.

§ 4. Численные оценки

4.1. *Сатурн и кольца.* Вначале рассмотрим влияние колец Сатурна на сплюснутость планеты. Для этого применим формулу (3.5), где

$$e^2 = 0,19; a_1 = 60,24 \cdot 10^3 \text{ км}; \frac{M_r}{M_0} \approx 8,5 \cdot 10^{-8};$$

$$R_1 = 77 \cdot 10^3 \text{ км}; R_2 = 137 \cdot 10^3 \text{ км}.$$
(4.1)

Подстановка численных данных (4.1) в формулу (3.5) дает

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \right) \approx -2,5 \cdot 10^{-8}.$$
(4.2)

Поскольку для самого Сатурна $\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \approx 0,09$, то величина найденной поправки (4.2) от кольца оказывается незначительной в сравнении с эффектом вращения самой планеты:

$$\chi = -\frac{\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \right)}{\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}}} \approx 2,8 \cdot 10^{-7}.$$
(4.3)

Главная причина этого — в малости самого отношения масс кольца и планеты.

4.2 *Солнце внутри кольца.* Оценим теперь влияние на сплюснутость Солнца кольца из планет и других малых тел в Солнечной системе. Для этой цели достаточно применить формулу (3.10), где в данном примере, согласно наблюдениям,

$$e^2 \approx 0; \frac{M_r}{M_0} \approx \frac{1}{700}; R_0 = 6,96 \cdot 10^5 \text{ км}; R_1 = 58 \cdot 10^6 \text{ км}; R_2 = 59 \cdot 10^8 \text{ км}.$$
(4.4)

Расчеты дают:

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \right) \approx -1,8 \cdot 10^{-13}; \frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \approx 1,3 \cdot 10^{-5}.$$
(4.5)

Несмотря на малость найденной выше поправки, отношение величин

$$\chi = -\frac{\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \right)}{\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}}} \approx 1,4 \cdot 10^{-8}$$
(4.6)

оказывается лишь немногим меньше, чем для Сатурна (4.3).

4.3. *Красный сверхгигант WOH G64.* По данным [6;7], одна из самых крупных известных астрономам звезд — красный сверхгигант WOH G64, находящаяся в БМО, имеет массу примерно $M = 17 M_{\odot}$ и радиус $R = 1540 R_{\odot}$. Эта звезда окружена огромным по размерам тором с массой $M_{tor} = 8 M_{\odot}$, осевым радиусом $R_0 = 15060 a.e.$ и радиусом рукава $r_0 = 14940 a.e.$ Оценим вначале по формулам (2.3) и (3.25) поправку к нормированному квадрату угловой скорости центральной звезды:

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \right) \approx -\frac{3\alpha}{\pi G \bar{\rho}} = -\frac{4 M_{tor}}{3 M} \frac{R^3}{r_0^2 R_0} [(1 - 2k^2) E(k) - (1 - k^2) K(k)]. \tag{4.7}$$

Здесь зависимость выражения в квадратных скобках

$$\Phi(k) = (1 - 2k^2) E(k) - (1 - k^2) K(k) \tag{4.8}$$

от модуля k показана на графике (рис. 1).

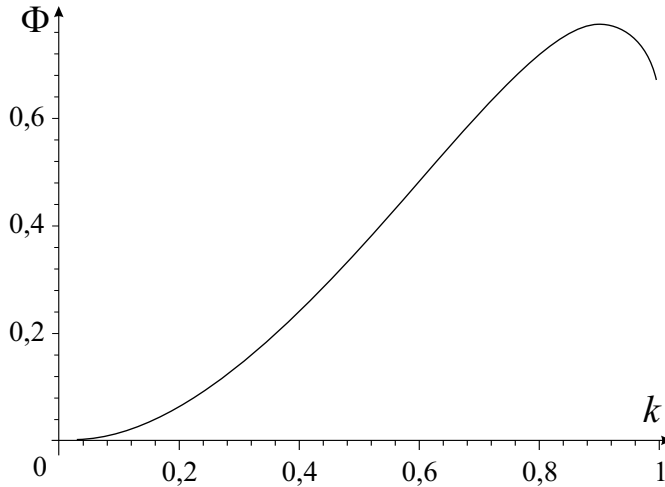


Рис. 1. Зависимость функции Φ от модуля k

При $k \approx 1$ функция Φ примерно равна 0,7. Тогда, с учетом известных данных для тора звезды WOH G64, получим вариацию

$$\delta \left(\frac{\Omega^2}{2\pi G \bar{\rho}} \right) \approx -8 \cdot 10^{-6}. \tag{4.9}$$

Сразу обратим внимание на то, что величина (4.9) на 3 (7) порядков больше, чем в случаях с Сатурном (Солнцем). Уже это говорит о том, что влияние тора на фигуру звезды WOH G64 является заметным. Действительно,

оценим для WOH G64 относительное приращение квадрата угловой скорости χ . К сожалению, в литературе отсутствуют данные наблюдений о периоде вращения этой звезды. Прибегнем поэтому к косвенным физическим оценкам и сравним WOH G64 с другим красным гигантом, звездой Бетельгейзе, сходной по массе ($15-20 M_{\odot}$) с рассматриваемой WOH G64. Радиус звезды Бетельгейзе $R_B = 800R_{\odot}$, ее период вращения $T_B = 18$ лет, угловая скорость вращения $\Omega_B \approx 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ c}^{-1}$. Если бы звезда Бетельгейзе расширилась до размеров WOH G64, то есть до $R \approx 1540R_{\odot}$, то, по закону сохранения углового момента, ее угловая скорость уменьшилась бы и стала равной

$$\Omega = \frac{\Omega_B}{\left(\frac{1540}{800}\right)^2} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-1}, \quad (4.10)$$

что отвечает линейной скорости на экваторе звезды $v_{rot} \approx 3,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. С учетом значения угловой скорости (4.10) для WOH G64 имеем

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\bar{\rho}} = \frac{2}{3} \frac{\Omega^2 R^3}{GM} \approx 4,4 \cdot 10^{-4}. \quad (4.11)$$

Согласно (4.9) и (4.11), для данной системы звезда-тор относительное приращение квадрата угловой скорости χ оказывается равным

$$\chi = -\frac{\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\bar{\rho}}\right)}{\frac{\Omega^2}{2\pi G\bar{\rho}}} \approx 0,18. \quad (4.12)$$

Такое большое значение величины $\chi \approx 0,18$ резко выделяет пример со звездой WOH G64 среди рассмотренных выше задач. Здесь влиянием тора на фигуру центральной звезды пренебрегать уже нельзя.

4.4. *Галактика NGC 4594.* Рассмотрим теперь известную галактику «Сомбреро», обладающую мощным пылевым кольцом.

Для оценки его влияния на газовую подсистему в этой галактике используем формулу (3.22), где для приближенных оценок можно взять [15]

$$e^2 \approx 0,75; \quad \frac{M_r}{M_g} \approx 1; \quad R_1 = 8 \text{ кпк}, \quad R_2 = 33 \text{ кпк}, \quad \frac{R_1}{R_2} \approx 0,24. \quad (4.13)$$

Расчеты по формуле (3.22) тогда дают

$$\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\bar{\rho}}\right) \approx -3,8 \cdot 10^{-2}. \quad (4.14)$$

Сравнивая (4.14) с (4.2) или (4.5), выясняем, что пылевое кольцо в галактике «Сомбреро» заметно влияет на форму газовой подсистемы в ней. Действительно, оценивая по теории фигур равновесия при $e \approx 0,868$ [13]

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_1} \approx 0,21, \quad (4.15)$$

находим относительное значение приливного влияния кольца на газ:

$$\chi = -\frac{\delta\left(\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_1}\right)}{\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho_1}} \approx 0,18. \quad (4.16)$$

Таким образом, влияние кольца на фигуру газовой подсистемы в галактике «Сомбреро» весьма заметно и составляет 18% от влияния вращения самого газового сфероида.

Заключение

Применяя и развивая методы современной теории потенциала и теории фигур равновесия, в этой работе получены общие формулы для оценки приливного влияния широкого круглого кольца или кругового тора на сплюснутость центральной вращающейся фигуры равновесия. Формулы конкретизированы для трёх моделей колец, а также для модели однородного кругового тора. Показано, что влияние колец на сжатие Сатурна и Солнца мало и лежит за пределами современной точности наблюдений. Однако для красного сверхгиганта WOH G64, окруженного мощным массивным тором, влияние такого тора на фигуру центральной звезды оказывается на 6-7 порядков больше, чем для Сатурна и Солнца и составляет 18% от влияния вращения самой звезды резко выделяет пример со звездой WOH G64 среди рассмотренных выше задач. Здесь влиянием тора на фигуру центральной звезды пренебрегать уже нельзя.

Выведена теоретическая формула, описывающая приливное влияние гравитирующего кольца на одну только газовую подсистему галактики. Применение модифицированного метода позволило выяснить, что влияние мощного пылевого кольца вокруг галактики NGC 4594 «Сомбреро» на сплюснутость газовой подсистемы составляет примерно 18% от эффекта вращения газового облака. Это влияние вполне ощутимо на уровне современной точности наблюдений и должно учитываться при изучении данной галактики.

В связи с этим заметим, что малое вращение у гигантских E-галактик [16] при заметной их сплюснутости может отражать не только анизотропию дисперсии скоростей в них, как это ранее считалось [17]. Наша работа наводит на мысль: не исключено, что в некоторых случаях видимая сплюснутость E-галактик может быть следствием влияния на фигуры галактик

и массивных внешних колец. В частности, это могут быть и кольца из невидимой темной материи. С этой точки зрения метод, разработанный в данной работе, может быть полезным и при оценке влияния на галактики окружающей их невидимой материи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Витязев А. В., Печерникова Г. В., Сафронов В. С. Планеты земной группы. М.: Наука, 1990.
2. Кондратьев Б. П. Динамика и устойчивость резонансных колец в галактиках // Астр. журн. 2000. Т. 77. С. 323-330.
3. Питьева Е. В. Высокоточные эфемериды планет - ЕРМ и определение некоторых астрономических постоянных // Астр. вестн. 2005. Т. 39. С. 202-213.
4. Антонов В. А., Железняк О. А. // Астрофизика. 1988. Т. 29. С. 178.
5. Маров М. Я. Малые тела солнечной системы и проблемы космогонии // УФН. 2005. Т. 175. С. 668-678.
6. Levesque E. M., Massey P., Plez B., Olsen K. A. G. The physical properties of the red supergiant WOH G64: the largest star known? // Astr. J. 2009. Vol. 137. P. 4744-4752.
7. Ohnaka K., Driebe T., Hofmann K.-H., Weigelt G., Wittkowski M. Spatially resolved dusty torus toward the red supergiant WOH G64 in the Large Magellanic Cloud // Astr. and Astrophys. 2008. Vol. 484. P. 371-379.
8. Волков Е. В. // Астрофизика. 1990. Т. 32. С. 133.
9. Бисноватый-Коган Г. С. Tidal corrections to the orbital velocity of paired galaxies // Pis'ma Astr. Zh. 1984. Vol. 10. P. 181-183.
10. Бисноватый-Коган Г. С. Elongated equilibrium stellar systems tidally distorted in pairs // Mon. Notis. Roy. Astron. Soc. 1976. Vol. 174. P. 203-211.
11. Кондратьев Б. П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.
12. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Л.; М.: ГИТТЛ, 1949. Т. 3. 280 с.
13. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 2007. 288 с.
14. Кондратьев Б. П., Трубицына Н. Г. Разложение внутреннего потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа // ЖТФ. 2010. Т. 81. С. 23-26.
15. Воронцов-Вельяминов Б. А. Внегалактическая астрономия. М.: Наука, 1978.
16. Binney J. J. On the rotation of elliptical galaxies // Mon. Notic. Roy. Astr. Soc. 1978. Vol. 183. P. 501-514.
17. Кондратьев Б. П. Анизотропия дисперсии скоростей в эллиптических галактиках // Письма в АЖ. 1981. Т. 7. С. 83-87.

Поступила в редакцию 01.09.09

B. P. Kondratyev, N. G. Trubitsina**The tidal influence of rings on central equilibrium figures**

Tidal influence of a gravitating ring or circular torus on a central figure of the relative equilibrium of the rotating liquid or gas mass is studied. The general formula of influence for the ring and the torus on a central figure is derived. Three models of wide rings and the one for circular torus are viewed. Influence of rings on oblateness of the Saturn or on the Sun lays outside of accuracy of modern observations, however for the red supergiant WOH G64 from BMC the torus action already is comparable with effect of rotation of the star. For galaxies the method is modified and ring action only on a diffuse subsystem of a galaxy is found. As an example widely known galaxy NGC 4594 "Sombreros" is given. The developed method can be useful and at an estimate of dark matter round large E-galaxies.

Keywords: rings, torus, tidal influence, equilibrium figures, planets, stars, galaxies.

Кондратьев Борис Петрович,
доктор физико-математических
наук, профессор,
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: kond@uni.udm.ru

Kondratyev Boris Petrovich,
doctor of physical-mathematical
science, professor
E-mail: kond@uni.udm.ru

Трубицына Наталья Геннадьевна
старший преподаватель
ГОУВПО «Удмуртский
государственный университет»
426034, Россия, г. Ижевск,
ул. Университетская, 1 (корп. 6)
E-mail: trnat@list.ru

Trubitsina Natalya Gennadyevna
E-mail: trnat@list.ru