

# Новые эффекты в динамике кельтских камней

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, Ижевск, ул. Университетская, 1

Тел./факс: (7-3412) 500295

E-mails: borisov@ics.org.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

## Аннотация

В работе рассматривается динамика кельтского камня, моделируемая тяжелым уравновешенным эллипсоидом вращения, катящимся без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. При этом центральный эллипсоид инерции тоже представляет собой эллипсоид вращения. При наличии углового смещения между двумя эллипсоидами (характеризующим динамическую несимметрию тела) наблюдаются новые динамические эффекты, которые родственны реверсу в движении кельтских камней. Однако, в отличие от традиционной модели кельтского камня, представляющего собой усеченный двухосный параболоид, в рассматриваемой постановке возможны движения, являющиеся суперпозицией реверса (смена на противоположное направление вращения) и переворота (смена на противоположные оси вращения). При этом указанные реверс и переворот, при надлежащих энергиях и распределениях масс, могут повторяться неоднократно. Возможны также движения, представляющие собой только многократный переворот или реверс.

## УДК 531.3

Работа выполнена в рамках программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (грант НШ 136.2003.1), при поддержке РФФИ (гранты 04-205-264367 и 05-01-01058), CRDF (грант RU-M1-2583-M0-04) и INTAS (грант 04-80-7297).

## 1. Уравнения движения

Уравнения, описывающие качение без проскальзывания тяжелого уравновешенного, но динамически несимметричного эллипсоида вращения (центральный эллипсоид инерции которого тоже обладает вращательной симметрией) по плоскости, имеют вид [3]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + mg\mathbf{r}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) введены следующие обозначения:  $\mathbf{M}$  — вектор кинетического момента относительно точки контакта,  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный орт вертикали,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, соединяющий центр эллипсоида с точкой контакта,  $g$  — ускорение свободного падения,  $m$  — масса тела. Все указанные векторы рассматриваются в системе координат жестко связанной с телом, оси которой совпадают с главными осями инерции тела. Известно, что  $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ , где  $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_1)$  — центральный тензор инерции. Уравнение поверхности эллипсоида в главных центральных осях имеет вид  $(\mathbf{r}, B^{-1}\mathbf{r}) = 1$ , где  $B = Q^T B_0 Q$ . При этом матрица  $B_0 = \text{diag}(b_1^2, b_2^2, b_1^2)$  образована из квадратов величин полуосей эллипсоида  $b_i$ , а матрица  $Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  задает поворот геометрических осей относительно осей инерции на угол  $\alpha$ . Легко показать, что  $\mathbf{r} = \frac{B\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, B\boldsymbol{\gamma})}}$ .

Уравнения (1) обладают интегралом энергии и геометрическим интегралом

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \\ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

## 2. Семейства перманентных вращений

Уравнения (1) допускают частные решения типа вертикальных перманентных вращений, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} = 0, \\ \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Из первого уравнения следует, что  $\boldsymbol{\omega} = \Omega\boldsymbol{\gamma}$ , где  $\Omega = \text{const}$ . Из второго уравнения при этом получим

$$\Omega\mathbf{M} \times \boldsymbol{\gamma} + mg\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (4)$$

Умножив скалярно (4) на  $\mathbf{r}$ , имеем

$$(\boldsymbol{\gamma} \times I\boldsymbol{\gamma}, B\boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (5)$$

Условие (5) можно записать в явном виде

$$\gamma_2 \gamma_3 (I_1 - I_2) (b_1^2 - b_2^2) \sin \alpha (\gamma_1 \sin \alpha - \gamma_2 \cos \alpha) = 0. \quad (6)$$

Различным решениям уравнения (6) соответствуют пять различных семейств перманентных вращений, которые можно разделить на три типа:

1. Ось вращения лежит вдоль одной из главных осей инерции  $\boldsymbol{\gamma} = (1, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (0, 1, 0)$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ . При этом угловая скорость  $\Omega$  вращения произвольна и является параметром семейства.
2. Ось вращения лежит в главной плоскости инерции  $\boldsymbol{\gamma} = (\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ . В данном случае параметром семейства является угол  $\varphi$ , а угловая скорость вращения выражается по формуле

$$\Omega^2 = \frac{mg(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r})^2}{(I\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}) + m(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r})(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r})^2}. \quad (7)$$

Условие неотрицательности правой части (7) определяет область существования перманентных вращений. Отметим, что перманентные вращения типа  $\boldsymbol{\gamma} = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi)$ , также удовлетворяют уравнению (6), однако для них  $\Omega^2 < 0$  при любых  $\varphi$ . Таким образом существует всего одно семейство перманентных вращений лежащих в главной плоскости инерции тела.

3. Ось вращения лежит в главной геометрической плоскости тела

$$\boldsymbol{\gamma} = (\sin \varphi \cos \alpha, \sin \varphi \sin \alpha, \cos \varphi).$$

В данном случае параметром семейства также является угол  $\varphi$ , а угловая скорость вращения выражается по формуле (7).

### 3. Устойчивость вертикальных вращений

Наибольшее количество интересных динамических эффектов наблюдается вблизи перманентного вращения вокруг главной оси эллипсоида инерции, совпадающей с вертикалью,  $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, \pm 1)$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \pm \Omega)$ . В связи с этим рассмотрим данное семейство более подробно. Характеристический многочлен для линеаризованной системы (1) вблизи этих вращений имеет вид

$$\lambda^2(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_1(I_1 + mb_1^2)(I_2 + mb_1^2) \\
a_1 &= -b_1m(b_2^2 - b_1^2)(I_1 - I_2)\Omega \sin \alpha \cos \alpha, \\
a_2 &= b_1((I_2 + mb_1^2)(I_1 + mb_1^2) + (I_1 - I_2)(b_2^2 - b_1^2)m \sin^2 \alpha)\Omega^2 + \\
&\quad + (mb_1^2 + I_1 \sin^2 \alpha + I_2 \cos^2 \alpha)(b_2^2 - b_1^2)mg, \\
a_3 &= -b_1m(b_2^2 - b_1^2)(I_1 - I_2)\Omega^3 \sin \alpha \cos \alpha, \\
a_4 &= (mg + mb_1\Omega^2)(b_2^2 - b_1^2)(I_1 - I_2)\Omega^2 \sin^2 \alpha.
\end{aligned} \tag{9}$$

Два нулевых характеристических корня (8) соответствуют существованию интегралов (2).

С помощью критерия Рауса–Гурвица несложно получить следующие условия линейной устойчивости рассматриваемых перманентных вращений

$$\begin{aligned}
b_2 &> b_1, \quad I_2 < I_1, \\
\Omega \sin^2 \alpha &< 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Первые два условия накладывают ограничения на геометрию и распределение масс тела. Третье условие приводит к выводу, что вращение в одну сторону устойчиво, а в противоположную — нет. Устойчивость вращений по Ляпунову можно доказать используя теорему Ляпунова–Малкина [5]. Динамические эффекты, описанные далее во многом связаны с устойчивостью описанных вертикальных вращений.

#### 4. Несуществование инвариантной меры

Следуя работе [2] из анализа характеристического полинома (8) укажем необходимые условия для существования инвариантной меры с аналитической плотностью вблизи указанных в п.3 вертикальных вращений. Как известно, для этого необходимо, чтобы  $tr \mathcal{L} = 0$  (где  $\mathcal{L}$  — матрица линеаризации). Вычисляя  $tr \mathcal{L}$  из (8) получим

$$tr \mathcal{L} = -\frac{a_1}{a_0} = \frac{(b_2^2 - b_1^2)(I_1 - I_2)}{(I_1 + mb_1^2)(I_2 + mb_1^2)} \Omega m \sin \alpha \cos \alpha. \tag{11}$$

Таким образом, инвариантная мера отсутствует, исключая случаи а) полной динамической симметрии ( $I_1 = I_2$ ), б) шаровой поверхности тела ( $b_1 = b_2$ ), в) перпендикулярности или параллельности динамической и геометрической осей симметрии ( $\alpha = 0, \pi/2$ ). Инвариантная мера неизвестна только в случае  $\alpha = \pi/2$ . Если она действительно существует, интересно было бы узнать ее явно.

При условиях несуществования инвариантной меры твердое тело может демонстрировать интересное асимптотическое поведение. Для модели параболоида при больших энергиях в работе [3] указаны динамические режимы, соответствующие наличию в фазовом пространстве *странных аттракторов* и приводящие к сложным хаотическим движениям твердого тела.

Отметим также, что модель кельтского камня, представляющая собой эллипсоид вращения, главные динамические оси которого повернуты относительно геометрических, рассматривалась в [4], в которой численно обнаружены обычные режимы реверса для этой модели. С помощью численных экспериментов нам пока не удалось обнаружить странных аттракторов в этой модели.

## 5. Различные типы динамических режимов

В зависимости от устойчивости и неустойчивости вращений  $\gamma = (0, 0, \pm 1)$ ,  $\omega = (0, 0, \pm \Omega)$  при малых энергиях можно наблюдать следующие типы движений кельтского камня:

- а) закрученное тело испытывает сначала реверс (то есть меняется направление вращения), затем переворот и эта последовательность повторяется неоднократно.
- б) тело испытывает однократный реверс и стремится к устойчивому перманентному вращению как в обычной модели параболоида [1].
- в) тело испытывает многократный переворот.

Ситуации а) и в) реализуются в случае, когда все рассматриваемые вращения неустойчивы, то есть когда нарушены первые два неравенства системы (10). Ситуация б) реализуется в случае, когда два из четырех рассматриваемых вращений являются устойчивыми. На рисунке 1 под буквами а), б) и в) приведены графики величин  $\gamma_z$ , и  $\omega_z = (\omega, \gamma)$  (проекция угловой скорости на вертикальную ось) характеризующие разные типы движений кельтского камня.

## 6. Трехмерное отображение Пуанкаре и стохастические свойства системы

Для построения трехмерного отображения Пуанкаре аналогично работе [3] перейдем от переменных  $(M, \gamma)$  к переменным Андуайе  $(L, G, H, l, g, h)$ . На общем уровне интегралов (2) мы имеем четырехмерный поток. Зададим трехмерное сечение Пуанкаре соотношением  $g = \pi/2 = \text{const}$ . За координаты на сечении примем  $(l, \frac{H}{G}, \frac{L}{G})$ . На рис. 2 показаны регулярные инвариантные кривые и хаотические зоны, соответствующие регулярным и хаотическим движениям кельтского камня. Наличие хаотических областей свидетельствует о неинтегрируемости уравнений (1). Интересно движение, аналогичное описываемому в п.5, но рассматриваемое при достаточно больших значениях энергии. Замечательно, что при этих энергиях также имеется реверс и переворот твердого тела, однако на эти явления накладываются высокочастотные хаотические колебания. (см. рис. 3)

## Список литературы

- [1] *Астапов И. С.* Об устойчивости вращения кельтского камня // Вестн. МГУ мат.мех., 1980, No. 2, С. 97-100.
- [2] *Козлов В. В.* К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, Т. 8, No. 5, С.85-107.
- [3] *Борисов А. В., Мамаев И. С.* Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН., Т. 173, No. 4, С. 407-418.
- [4] *Burdick J., Goodwine B., Ostrowski J.* The Rattleback Revisited, preprint, 1995.
- [5] *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966, 532 с.

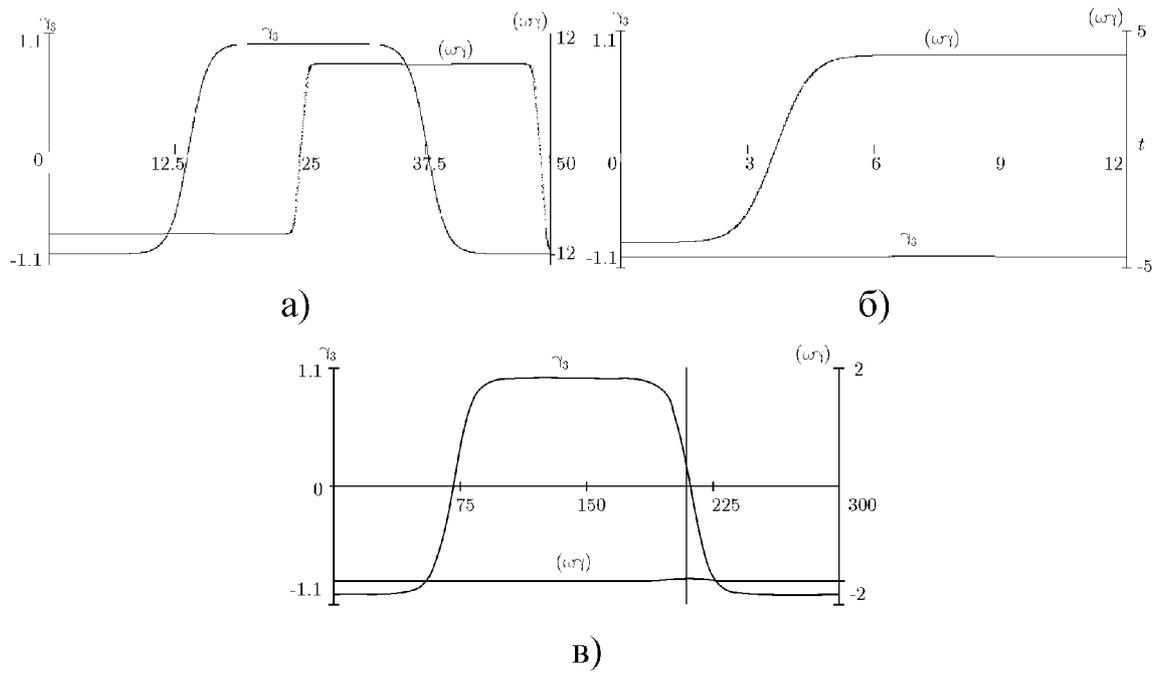


Рис. 1. Графики величин  $\gamma_3$  и  $\omega_z = (\omega, \gamma)$  для случаев а) реверса с переворотом ( $I = \text{diag}(0.5, 2.5, 0.5)$ ,  $B_0 = \text{diag}(1, 25, 1)$ ,  $m = 1$ ,  $g = 980$ ,  $\alpha = 0.08$  рад.,  $E = 1000$ ); б) однократного реверса ( $I = \text{diag}(2.5, 0.5, 2.5)$ ,  $B_0 = \text{diag}(1, 25, 1)$ ,  $m = 1$ ,  $g = 980$ ,  $\alpha = 0.08$  рад.,  $E = 1000$ ); в) многократного переворота ( $I = \text{diag}(15, 29, 15)$ ,  $B_0 = \text{diag}(1, 25, 1)$ ,  $m = 1$ ,  $g = 980$ ,  $\alpha = 0.08$  рад.,  $E = 1000$ ).

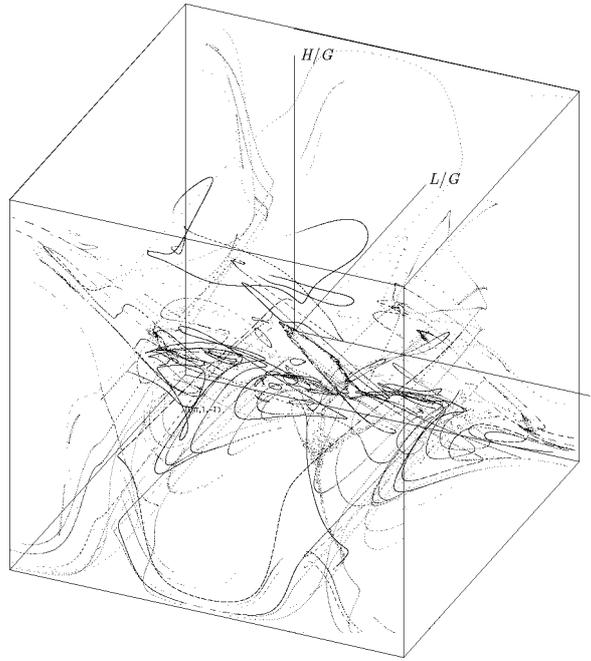


Рис. 2. Сечение Пуанкаре при следующих параметрах системы  $I = \text{diag}(2.5, 0.5, 2.5)$ ,  $B_0 = \text{diag}(1, 25, 1)$ ,  $m = 1$ ,  $g = 980$ ,  $\alpha = 0.08$  рад.,  $E = 3000$ .

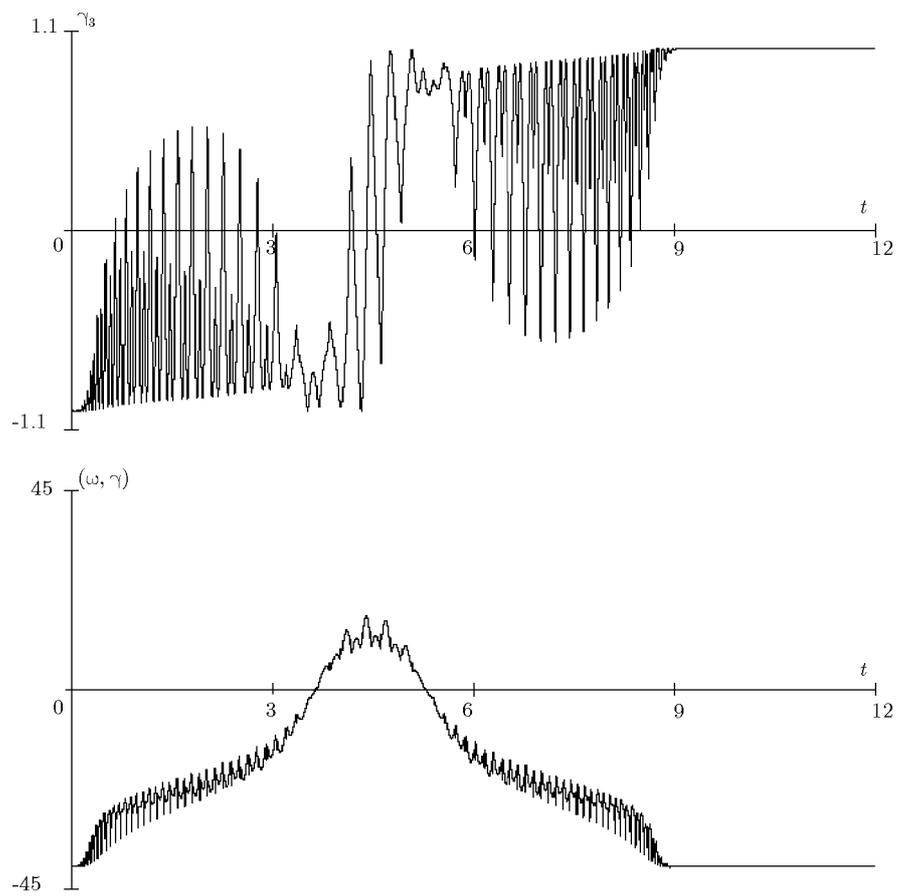


Рис. 3. Графики величин  $\gamma_3$  и  $\omega_z = (\omega, \gamma)$  для случая реверса с переворотом при следующих параметрах системы  $I = \text{diag}(2.5, 0.5, 2.5)$ ,  $B_0 = \text{diag}(1, 25, 1)$ ,  $m = 1$ ,  $g = 980$ ,  $\alpha = 0.08$  рад.,  $E = 3000$ .