УДК 532.517

Новая интегрируемая задача о движении точечных вихрей на сфере

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@rcd.ru, aka@rcd.ru, mamaev@rcd.ru

Получено 17 июня 2007 г.

Рассмотрена динамика антиподального вихря, представляющего собой систему вихрь+антипод на сфере, имеющих равные по величине, но противоположные по знаку интенсивности. Показано, что система n антиподальных вихрей допускает редукцию на две степени свободы. Рассмотрены случаи двух и трех антиподальных вихрей, проведен их численный анализ. Обсуждаются томсоновские, коллинеарные и равнобедренные конфигурации антиподальных вихрей, построены бифуркационные диаграммы для этих случаев.

Ключевые слова: гидродинамика, идеальная жидкость, вихревая динамика, точечный вихрь, редукция, бифуркационный анализ.

A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev
A New Integrable Problem of Motion of Point Vortices on the Sphere

The dynamics of an antipodal vortex on a sphere (a point vortex plus its antipode with opposite circulation) is considered. It is shown that the system of n antipodal vortices can be reduced by four dimensions (two degrees of freedom). The cases $n = 2, 3$ are explored in greater detail both analytically and numerically. We discuss Thomson, collinear and isosceles configurations of antipodal vortices and study their bifurcations.

Keywords: hydrodynamics, ideal fluid, vortex dynamics, point vortex, reduction, bifurcation analysis.
Mathematical Subject Classifications: 37N10, 76M23, 35Q35.

1. Введение

Хорошо известно, что общие уравнения движения N точечных вихрей на плоскости могут быть записаны в гамильтоновой форме. Впервые указал на это Кирхгоф в своих лекциях по математической физике [6], там же он получил для них все возможные первые интегралы движения. Постановка задачи о движении аналогичных вихревых структур на искривленных поверхностях также восходит к девятнадцатому столетию. В частности, потенциальные течения идеальной жидкости на искривленных поверхностях рассматривались Бельтрами, Хиллом и Умовым (работы последнего относятся к области классической электродинамики, их результаты могут быть перенесены в динамику вихрей вследствие существования хорошо известной аналогии).

В дальнейшем этой задачей занимался Э. Цермело. Остановимся подробней на его замечательной работе [13]. В первой части он доказывает ряд основных гидродинамических теорем о вихревом движении жидкости на произвольной поверхности, вычисляет функцию тока для системы N точечных вихрей на сфере, приводит соответствующие законы сохранения и исследует стационарные течения жидкости. Во второй части работы, которая, к сожалению, так и не была опубликована, Э. Цермело впервые записал общие уравнения движения точечных вихрей на сфере в гамильтоновой форме и привел интегралы движения. Там же он исследовал статические конфигурации произвольного числа одинаковых вихрей на сфере и записал соответствующие уравнения, позволяющие получить все симметричные статические конфигурации. Отдельно следует отметить, что в своей работе Э. Цермело доказал интегрируемость задачи трех вихрей при произвольных интенсивностях, а для случая равных интенсивностей явно проинтегрировал уравнения движения в эллиптических функциях. В дальнейшем результаты Э. Цермело, к сожалению, были забыты и переоткрыты последующими авторами только во второй половине двадцатого века.

В работе [5] известный русский механик И. С. Громека рассмотрел уравнения движения точечных вихрей на поверхностях сферы и цилиндра, а также даже более общую задачу о движении вихрей в области, ограниченной замкнутым неподвижным контуром на этих поверхностях. В [5] Громека пытался вывести уравнения движения точечных вихрей на сфере из основных принципов гидродинамики с использованием картографических преобразований. Однако он не смог найти в явном виде функцию тока, обобщающую плоскую ситуацию.

В современном виде общая гамильтонова форма уравнений движения N точечных вихрей на сфере и их первые интегралы были переоткрыты В. А. Богомоловым в работах [1, 2]. В работе [2] В. А. Богомолов также указал явное решение задачи трех вихрей на сфере для случая равных интенсивностей, однако, в отличие от Э. Цермело, не сделал заключения об ее интегрируемости при произвольных интенсивностях. В общем случае интегрируемость задачи трех вихрей на сфере была одновременно и независимо (1998 г.) отмечена П. Ньютоном и Р. Кидамби в [11, 10] а также А. В. Борисовым, В. Г. Лебедевым в [8]. В указанных работах помимо доказательства интегрируемости проводится бифуркационный анализ и классификации движений вихрей.

Для упрощения анализа систем вихрей, как правило, используются всевозможные процедуры редукции, позволяющие понизить число степеней свободы рассматриваемой системы. Для случая N произвольных вихрей в работе [7] приведена формально-алгебраическая схема понижения порядка на две степени свободы. Она основана на представлении уравнений движения системы точечных вихрей на плоскости во «взаимных» переменных, в качестве которых выбраны квадраты расстояний между парами вихрей и ориентированные площади треугольников. Однако построение канонических переменных приведенной системы в таком подходе достаточно проблематично. Более конструктивная процедура редукции, аналогичная редукции Якоби в небесной механике, приведена в работе [3].

Отметим, что во всех указанных выше работах рассматривается модель вихря на сфере, состоящая из собственно самого точечного вихря и общей равномерной завихренности сферы. Такая модель считается более «физичной», так как не приводит к появлению особенностей в точках противоположных положениям вихрей. Однако такой подход правомерен лишь в случае, когда на больших расстояниях (порядка радиуса сферы) вязкостью жидкости уже нельзя пренебречь и происходит постепенное затухание вращения жидкости по мере удаления от вихря. Равномерная завихренность сферы в классической модели как раз и обуславливает это затухание.

В случае когда на больших расстояниях вязкостью жидкости можно пренебречь, более верной становится модель вихря, в которой не вводится равномерная завихренность сферы. При этом функция тока обладает двумя особенностями в диаметрально противоположных точках сферы, и к каждому вихрю добавляется антиподальный вихрь с равной по величине и противоположной по знаку завихренностью. Такую систему вихрь+антипод в дальнейшем мы будем называть антиподальным вихрем.

Замечательным фактом является то, что модель антиподального вихря может быть описана с помощью двух классических вихрей, расположенных в противоположных точках сферы. При этом легко показать, что взаимное расположение вихря и его антипода остается неизменным независимо от числа и интенсивностей антиподальных вихрей. Таким образом, модель антиподальных вихрей, с одной стороны, описывает движение вихревых структур в строго идеальной жидкости на сфере, а с другой стороны, связана с исследованием движения классических вихревых пар на сфере. В данной статье мы выводим уравнения движения антиподальных вихрей, приводим первые интегралы движения и соответствующую процедуру редукции на две степени свободы. Также исследуются частные решения и проводится бифуркационный анализ задачи трех антиподальных вихрей.

2. Уравнения движения и первые интегралы

Динамика N классических точечных вихрей на сфере описывается системой уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{\theta}_k = -\frac{1}{4\pi R^2}\sum_{i\neq k}\Gamma_i\frac{\sin\theta_i\sin(\varphi_k-\varphi_i)}{1-\cos\gamma_{ik}},\\
\sin\theta_k\dot{\varphi}_k = -\frac{1}{4\pi R^2}\sum_{i\neq k}\Gamma_i\frac{\cos\theta_k\sin\theta_i\cos(\varphi_k-\varphi_i)-\sin\theta_k\cos\theta_i}{1-\cos\gamma_{ik}},\\
\cos\gamma_{ik} = \cos\theta_i\cos\theta_k+\sin\theta_i\sin\theta_k\cos(\varphi_i-\varphi_k), i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где R — радиус сферы, γ_{ik} — угол между радиус-векторами, соединяющими центр сферы с точечными вихрями i и k (рис. 1), а θ_i, φ_i — сферические координаты вихрей. Эти уравнения гамильтоновы со скобкой Пуассона

$$\{\varphi_i, \cos\theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2\Gamma_i} \tag{2.2}$$

и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<k}^{N}\Gamma_i\Gamma_k\ln\left(4R^2\sin^2\frac{\gamma_{ik}}{2}\right). \tag{2.3}$$

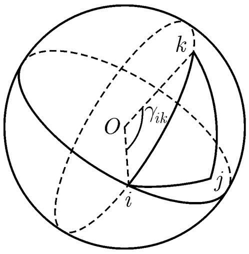

Рис. 1

Помимо гамильтониана, система допускает еще три интеграла движения

$$
\begin{gathered}
F_1 = R\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \sin\theta_i \cos\varphi_i = c_1,\\
F_2 = R\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \sin\theta_i \sin\varphi_i = c_2,\\
F_3 = R\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i \cos\theta_i = c_3,
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

которые образуют вектор $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, называемый *моментом завихренности* [12]. Интегралы F_1, F_2, F_3 неинволютивны и коммутируют аналогично компонентам вектора кинетического момента в классической механике:

$$
\{F_i, F_j\} = \frac{1}{R}\varepsilon_{ijk}F_k. \tag{2.5}
$$

Набор интегралов (2.5) неинволютивен, поэтому в общем случае возможна редукция лишь на две степени свободы, за исключением частного случая $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, когда допускается редукция на три степени свободы.

Рассмотрим теперь систему $2N$-точечных вихрей с интенсивностями $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$, $-\Gamma_1$, …, $-\Gamma_N$. Уравнения (2.1) в этом случае допускают следующее инвариантное многообразие:

$$
\theta_i + \theta_{N+i} = \pi, \qquad \varphi_{N+i} = \varphi_i + \pi \mod 2\pi. \tag{2.6}
$$

Таким образом, если в начальный момент времени вихри с противоположными интенсивностями находятся друг напротив друга, то и в дальнейшем они будут двигаться, сохраняя такое взаимное расположение. Такие вихревые пары можно рассматривать как единые объекты, которые в дальнейшем мы будем называть антиподальными вихрями. Подставив равенства (2.6) в уравнения движения (2.1), получим уравнения движения антиподальных вихрей

$$
\begin{gathered}
\dot\theta_k = -\frac{1}{2\pi R^2}\sum_{i\neq k}\Gamma_i\frac{\sin\theta_i\sin(\varphi_k-\varphi_i)}{\sin^2\gamma_{ik}},\\
\sin\theta_k\dot\varphi_k = -\frac{1}{2\pi R^2}\sum_{i\neq k}\Gamma_i\frac{\cos\theta_k\sin\theta_i\cos(\varphi_k-\varphi_i)-\sin\theta_k\cos\theta_i}{\sin^2\gamma_{ik}}.
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

Положение антиподального вихря и его интенсивность задаются положением и интенсивностью одного из составляющих его вихрей. В качестве такого вихря всегда можно выбрать вихрь с положительной интенсивностью, поэтому, не умаляя общности, можно считать, что все интенсивности Γ_i системы антиподальных вихрей положительны.

Замечание 1. Уравнения (2.7) также можно получить непосредственно из решения уравнения Лапласа для функции тока в тонком сферическом слое идеальной несжимаемой жидкости. Действительно, осесимметричное решение уравнения Лапласа на сфере имеет вид $A = C_1 \ln \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \mathrm{const}$. Оно описывает течение на сфере с парой особенностей в диаметрально противоположных точках. Возникновение дополнительной антиподальной особенности обуславливается потенциальностью сферы: если где-то возникает (точечный) источник завихренности, то для потенциального течения должен возникнуть также (точечный) сток.

В классической модели точечных вихрей на сфере от этой антиподальной особенности избавляются с помощью ввода постоянной завихренности жидкости на сфере. Благодаря этой завихренности скорость вращения жидкости постепенно уменьшается с удалением от вихря, и в точке, противоположной вихрю жидкость покоится. Таким образом, классическую модель точечного вихря состоящую собственно из самого вихря и равномерной завихренности сферы можно рассматривать как некоторую модель вихря в неидеальной жидкости, в которой вращение затухает по мере удаления от вихря.

С другой стороны, рассматриваемая нами модель антиподальных вихрей правомерна в случае, если мы будем рассматривать движение в *строго* идеальной жидкости. При этом затухания вращения не происходит, и в процессе образовании вихря, необходимо появится его антипод в противоположной точке сферы.

Полученные уравнения движения антиподальных вихрей (2.7) являются гамильтоновыми со скобкой Пуассона (2.2) и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i<k}^{N}\Gamma_i\Gamma_k \ln\left(\tan^2\frac{\gamma_{ik}}{2}\right). \tag{2.8}$$

И так же как в случае классических точечных вихрей на сфере, помимо гамильтониана, система (2.7) допускает интегралы движения (2.4).

Скобка Пуассона рассматриваемой задачи полностью совпадает со скобкой задачи о движении N классических точечных вихрей на сфере. Кроме того, гамильтониан системы также зависит только от взаимных расстояний между вихрями. Следовательно, на задачу о движении антиподальных вихрей можно перенести ряд результатов о редукции и интегрируемости из динамики точечных вихрей на сфере.

Справедливы следующие два предложения, описывающие явную редукцию системы на 2 (или 3) степени свободы [3].

Предложение 1. *Система N антиподальных вихрей на сфере в случае $\boldsymbol{F}_N = \sum\limits_{i=1}^{N}\Gamma_i\boldsymbol{r}_i \neq 0$ допускает редукцию на две степени свободы с помощью введения канонических переменных ρ_i, ψ_i, задаваемых соотношениями*

$$\rho_i = |\boldsymbol{F}_{i+1}|, \quad \operatorname{tg}\psi_i = \frac{\rho_i(\boldsymbol{F}_{i+1}, \boldsymbol{r}_{i+1}\times\boldsymbol{r}_{i+2})}{(\boldsymbol{r}_{i+1}\times\boldsymbol{F}_{i+1}, \boldsymbol{r}_{i+2}\times\boldsymbol{F}_{i+1})}, \quad i = 1, \ldots, N-2, \tag{2.9}$$

где $\boldsymbol{F}_i$ — моменты завихренностей подсистем i вихрей.

Предложение 2. *В случае $\boldsymbol{F}_N = \sum\limits_{i=1}^{N}\Gamma_i\boldsymbol{r}_i = 0$ система* (2.7) *допускает редукцию на три степени свободы. Канонические переменные приведенной системы определяются соотношением* (2.9) *при $i = 1, \ldots, N-3$.*

Очевидно, что так же, как и в случае классических вихрей, задачи о движении трех антиподальных вихрей и четырех антиподальных вихрей с нулевым суммарным моментом завихренности являются интегрируемыми. Кроме того, на рассматриваемый случай можно обобщить некоторые частные решения системы N точечных вихрей на сфере. В качестве примера приведем томсоновские конфигурации, когда N одинаковых вихрей располагаются в углах правильного N-угольника ($\theta_i = \theta$, $\varphi_i(0) = \frac{2\pi}{N}i$, $i = 1..N$) и вращаются вокруг его центра с постоянной скоростью. Угловая скорость вращения такой конфигурации имеет вид

$$\Omega = \frac{\Gamma\cos\theta}{4\pi R^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{1-\sin^2\theta\sin^2\frac{\pi k}{N}}. \tag{2.10}$$

Отметим, что вопрос об устойчивости томсоновских конфигураций для случая антиподальных вихрей является нетривиальной задачей и может послужить темой для отдельного исследования.

3. Два антиподальных вихря

Динамика двух антиподальных вихрей на сфере аналогична случаю классических вихрей. Здесь также общей ситуацией является вращение вокруг неподвижного вектора момента завихренности (2.4). Как и в классическом случае, расстояние между вихрями остается постоянным, а угловая скорость такого вращения принимает вид

$$\Omega = \frac{4R^2}{2\pi M(4R^2 - M)}\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - \Gamma_1\Gamma_2\frac{M}{R^2}}, \tag{3.1}$$

где M — квадрат расстояния (хорды) между вихрями. Отметим, что движению двух антиподальных вихрей соответствует такое частное решение задачи четырех классических вихрей на сфере, при котором все вихри лежат на одном меридиане, образуя прямоугольник, и равномерно вращаются вокруг вектора момента завихренности, лежащего в плоскости этого прямоугольника.

4. Три антиподальных вихря

Остановимся подробней на качественном анализе задачи трех антиподальных вихрей на сфере. Как уже было сказано выше, данная задача является интегрируемой, однако демонстрирует более сложное поведение по сравнению с тремя обычными вихрями на сфере [4].

4.1. Геометрическая интерпретация

Рассмотрим уравнения движения в относительных переменных (Δ, M_k), $k = 1\ldots 2$, где $M_k = M_{ij}$ — квадраты длин хорд между вихрями i и j, а $\Delta = \frac{1}{R}\boldsymbol{r}_1 i \wedge \boldsymbol{r}_2 \wedge \boldsymbol{r}_3$ — величина пропорциональная объему параллелепипеда, натянутому на радиус-векторы вихрей (см. рис. 1). Здесь и далее будем полагать, что индексы i, j, k принимают соответственно значения 1, 2, 3 и их циклические перестановки. Гамильтониан и скобка Пуассона в рассматриваем случае записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
H = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\Gamma_i}\ln\left(\frac{M_i}{4R^2 - M_i}\right), \quad \{M_i, M_j\} = -4a_k\Delta, \\
\{M_i, \Delta\} = (a_j - a_k)M_i + (a_j + a_k)(M_j - M_k) + \frac{M_i}{2R^2}(a_kM_k - a_jM_j).
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Уравнения движения в относительных переменных принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_i &= \{M_i, H\} = -\frac{4R^2\Gamma_i}{\pi}\frac{(M_j - M_k)(4R^2 - M_j - M_k)}{M_jM_k(4R^2 - M_j)(4R^2 - M_k)}\Delta, \\
\dot{\Delta} &= \{\Delta, H\} = \frac{1}{2}\sum_{\{i,j,k\}}\Gamma_k\frac{(M_i - M_j)(4R^2 - M_i - M_j)(M_iM_j - 2R^2(M_k - M_i - M_j))}{M_iM_j(4R^2 - M_i)(4R^2 - M_j)},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где сумма берется по циклическим перестановкам индексов. Следуя [8], введем новое регуляризующее «время» τ

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{4R^2\Delta}{\pi\prod\limits_i M_i(4R^2 - M_i)}, \tag{4.3}$$

после чего уравнения движения для M_i примут вид

$$\dot{M}_i = -\Gamma_i M_i(M_j - M_k)(4R^2 - M_j - M_k)(4R^2 - M_i) \tag{4.4}$$

Как известно, уравнения, аналогичные (4.4) в случае обычных вихрей как на плоскости, так и на сфере, кусочно-траекторно изоморфны системе Лотки–Вольтерра [4]. Уравнения (4.4) для трех антиподальных вихрей уже не обладают таким изоморфизмом. Это, в частности, приводит к наличию дополнительных стационарных конфигураций, которые будут более подробно описаны ниже.

Ранг пуассоновой структуры (4.1) равен двум, и имеются два независимых казимира

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{3}\frac{M_i}{\Gamma_i},\\ F &= (2\Delta)^2 + \sum_{i=1}^{3} M_i^2 - 2\sum_{i>j} M_i M_j + \frac{1}{R^2}M_1M_2M_3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Симплектический лист структуры, соответствующий фазовому пространству приведенной системы, определяется как поверхность уровня $D = \mathrm{const}$ и $F = 0$. Он — двумерный, и при ограничении на него системы (4.2) получим (интегрируемую) гамильтонову систему с одной степенью свободы. Как показано в [4], этот симплектический лист диффеоморфен двумерной сфере за исключением случаев

$$D = 0, \quad D = 4R^2(1/\Gamma_j + 1/\Gamma_j),\ i \neq j, \tag{4.6}$$

когда имеет место лишь гомеоморфизм. Построение канонических переменных приведенной системы достаточно проблематично, и для численных расчетов и качественного анализа явные выражения, как правило, не требуются. Мы воспользуемся для анализа следующей параметризацией симплектического листа:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_2^2+\Gamma_1^2}(M_2\Gamma_2 - M_1\Gamma_1),\\ y &= \frac{(M_3\Gamma_3(\Gamma_1^2+\Gamma_2^2) - \Gamma_1\Gamma_2(M_1\Gamma_2 + M_2\Gamma_1))\Gamma_3\Gamma_1^2\Gamma_2^2}{(\Gamma_2^2+\Gamma_1^2)(\Gamma_2^2\Gamma_3^2+\Gamma_1^2\Gamma_2^2+\Gamma_3^2\Gamma_1^2)}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где переменные x, y задают положение на плоскости $D = \mathrm{const}$ в пространстве $(M_1,\ M_2,\ M_3)$. Область возможных движений (ОВД) на плоскости $(x,\ y)$ задается неравенством

$$(2\Delta)^2 = 2\sum_{i>j} M_i M_j - \sum_{i=1}^{3} M_i^2 - \frac{1}{R^2}M_1M_2M_3 \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Граница ОВД является гладкой выпуклой кривой за исключением случаев (4.6) и касается плоскостей $M_i = 0,\ M_i = 4R^2$ (см. рис. 2). Отметим, что значительная часть динамических эффектов

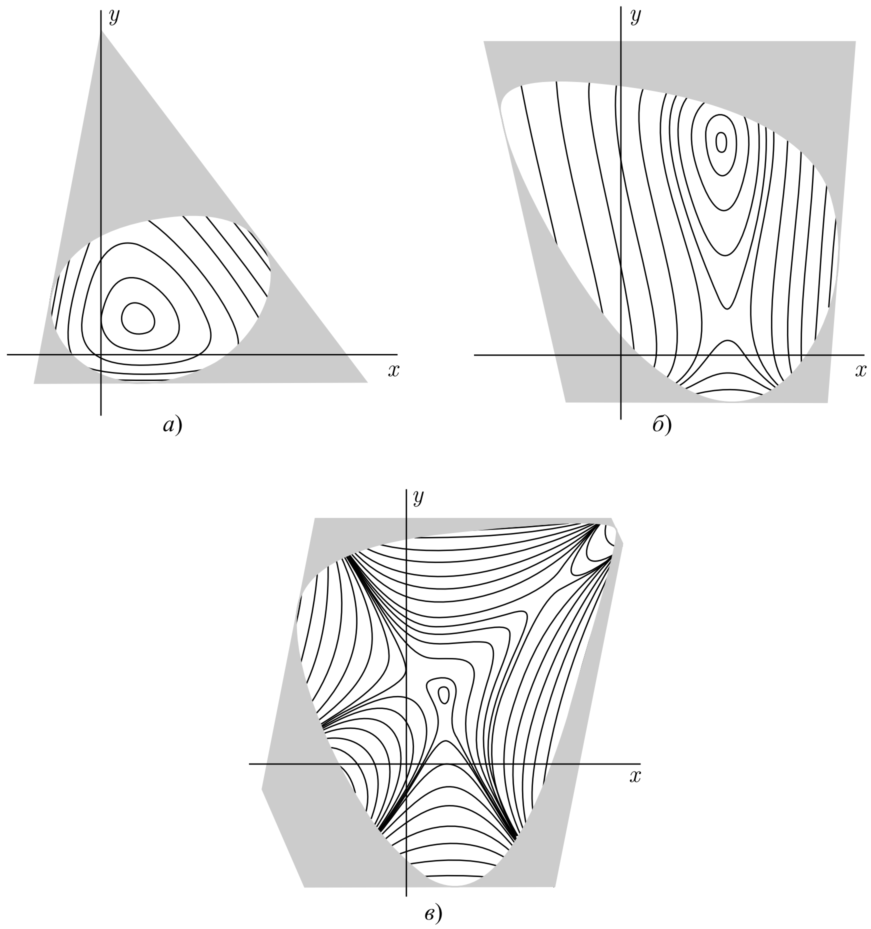

Рис. 2. Проекция фазового потока задачи трех антиподальных вихрей (4.4) на плоскость $D = \mathrm{const}$. Часть плоскости, ограниченная контуром, соответствует физической области задачи: a) $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 2$, $\Gamma_3 = 3$, $D = 1$; b) $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 1.7$, $\Gamma_3 = 7$, $D = 5$; c) $\Gamma_1 = 0.5$, $\Gamma_2 = 0.75$, $\Gamma_3 = 1$, $D = 9.0666$

(связанная с коллинеарными конфигурациями) определяются тем, какая часть фазовых траекторий попадет в ОВД. Проекции фазового потока системы трех антиподальных вихрей на плоскость $D = \mathrm{const}$ для различных значений Γ_i и D приведены на рис. 2.

Вид фазового портрета приведенной системы полностью определяется особенностями (сингулярностями) гамильтониана, соответствующими слиянию двух или трех вихрей, и (относительными) равновесиями системы (4.4). Приведем их последовательный анализ.

4.2. Томсоновские конфигурации

Томсоновские конфигурации вихрей на сфере определяются равенством $M_1 = M_2 = M_3 = M$. Для построения бифуркационных диаграмм традиционно выберем плоскость первых интегралов $(D,\ h)$

$$D = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3, \quad h = e^{-\frac{4\pi}{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}H} = \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{M_i}{4R^2 - M_i}\right)^{a_i}, \tag{4.9}$$

где $a_i = 1/\Gamma_i$ — обратные интенсивности вихрей. На этой плоскости томсоновским решениям соответствует бифуркационная кривая вида

$$h(D) = \left(\frac{D}{4R^2\sum a_i - D}\right)^{\sum a_i}. \tag{4.10}$$

Максимальная величина квадратов взаимных расстояний для томсоновских конфигураций на сфере ограничена значением $M_{\max} = 3R^2$. Следовательно, максимальное значение D, соответствующее томсоновской конфигурации, расположенной на экваторе, равно

$$d_t = \left(\sum a_i\right) M_{\max} = 3\left(\sum a_i\right) R^2. \tag{4.11}$$

При этом значении D томсоновская конфигурация совпадает с одной из коллинеарных конфигураций, а ось вращения (при переменных интенсивностях) располагается в плоскости конфигурации (см. ниже).

4.3. Равнобедренные конфигурации

В рассматриваемом случае антиподальных вихрей существует еще три семейства неподвижных точек, не имеющие аналогов в случае классических вихрей [8, 4]. Данные семейства определяются соотношениями

$$M_j = M_i, \quad M_k = 4R^2 - M_i, \tag{4.12}$$

где тройки индексов i, j, k принимают значения 1, 2, 3 и их циклические перестановки. Данные семейства решений соответствуют таким конфигурациям, когда вихри находятся в вершинах равнобедренного треугольника. Ось вращения конфигурации при этом наклонена под некоторым углом к плоскости треугольника. Подставив соотношения (4.12) в выражения для первых интегралов (4.9) и исключив из них взаимные расстояния между вихрями, получим выражение для соответствующих бифуркационных кривых:

$$h(D) = \left(\frac{\Gamma_i\Gamma_j(4R^2 - \Gamma_k D)}{\Gamma_k(4R^2(\Gamma_i+\Gamma_j) - \Gamma_i\Gamma_j D)}\right)^{a_i+a_j-a_k}. \tag{4.13}$$

Легко проверить, что для равнобедренного треугольника на сфере с основанием $\sqrt{M_k}$ и боковой стороной $\sqrt{M_i}$ справедливо следующее неравенство:

$$2R\left(R - \sqrt{R^2 - M_k/4}\right) \leqslant M_i \leqslant 2R\left(R + \sqrt{R^2 - M_k/4}\right). \tag{4.14}$$

Подставив в него соотношения (4.12), получим неравенство $R^2 < M_i < 4R^2$, из которого вычислим границы изменения D для бифуркационных кривых (4.13):

$$\begin{aligned} &R^2(a_i + a_j + 3a_k) \leqslant D \leqslant 4R^2(a_i+a_j), \quad \text{если} \quad a_k < a_i + a_j,\\ &4R^2(a_i+a_j) \leqslant D \leqslant R^2(a_i + a_j + 3a_k), \quad \text{если} \quad a_k > a_i + a_j. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Граничным значениям $D = 4R^2(a_i + a_j)$ соответствуют конфигурации, при которых все три антиподальных вихря сливаются друг с другом, причем сливаются вихри Γ_i, Γ_j и $-\Gamma_k$. Таким образом, в этой точке возникает задача о движении одного антиподального вихря с интенсивностью $\Gamma = \Gamma_i + \Gamma_j - \Gamma_k$. В геометрической интерпретации таким особенностям соответствуют случаи потери гладкости границы ОВД (4.6), происходящие на пересечении трех плоскостей $M_i = 4R^2$, $M_j = 4R^2$ и $M_k = 0$. Отметим, что, в отличие от классических вихрей на сфере, в рассматриваемом случае энергия h может обращаться в бесконечность. В частности, это происходит в граничных точках $D = 4R^2(a_i + a_j)$ при условии $a_k < a_i + a_j$.

Граничным значениям $D = R^2(a_i + a_j + 3a_k)$ соответствует конфигурация, когда все три вихря лежат на одном диаметре, образуя равнобедренный треугольник. Таким образом, в этих точках бифуркационные кривые (4.13) сливаются с кривыми, соответствующими коллинеарным конфигурациям (см. ниже), а ось вращения лежит в плоскости треугольника. В геометрической интерпретации этому случаю соответствует ситуация, когда неподвижная точка (4.12) фазового портрета лежит на границе ОВД, задаваемой неравенством (4.8).

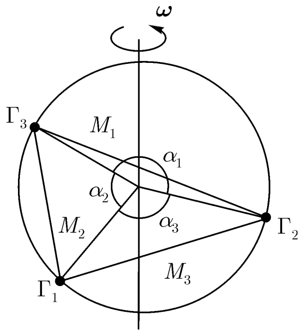

Рис. 3

4.4. Коллинеарные конфигурации

Коллинеарной конфигурацией на сфере называется конфигурация вихрей на большом круге сферы, вращающаяся с постоянной угловой скоростью вокруг оси, расположенной в плоскости этого круга, так что расстояния между вихрями постоянны (см. рис. 3).

Очевидно, что условия для коллинеарных конфигураций на сфере имеют вид

$$\Delta = 0, \quad \dot{\Delta} = 0. \tag{4.16}$$

В явном виде уравнения (4.16) для антиподальных вихрей можно записать следующим образом:

$$2(M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3) - (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) - \frac{M_1M_2M_3}{R^2} = 0,$$

$$\sum_{<i,j,k>} \Gamma_i(2R^2(M_i - M_j - M_k) + M_jM_k)\frac{(M_j - M_k)(4R^2 - M_j - M_k)}{M_jM_k(4R^2 - M_j)(4R^2 - M_k)} = 0, \tag{4.17}$$

где суммирование ведется по циклическим перестановкам индексов. Уравнения (4.16) необходимо дополнить интегралом момента (4.9) так, чтобы получилась замкнутая система для определения коллинеарных конфигураций (т. е. величин M_1, M_2, M_3) при фиксированном значении D.

Кривые, определяющие зависимость $h(D)$ для коллинеарных конфигураций, могут быть построены лишь численно. Они имеют достаточно сложную форму (см. далее рис. 4).

Кроме того, вследствие компактности сферы, возможные значения момента D ограничены $0 < D < \max(d_m, d'_k)$, где

$$d_m = R^2\frac{(\sum \Gamma_i)^2}{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} \quad \text{при} \prod_{<i,j,k>}(\Gamma_i + \Gamma_j - \Gamma_k) > 0,$$

$$d_k = 4R^2(a_i + a_j) = 4R^2\frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{\Gamma_i\Gamma_j}, \quad i,j,k = 1,2,3, \quad i,j \neq k. \tag{4.18}$$

Значения момента $D = d_k$ совпадают со значениями (4.6), в которых теряет гладкость приведенное фазовое пространство. Они играют важную роль в бифуркационном анализе, им отвечают особенности фазового портрета, при которых все три антиподальных вихря сливаются $M_k \to 0$, $M_i = M_j \to 4R^2$ $(i, j \neq k)$, образуя один антиподальный вихрь с интенсивностью $\Gamma = \Gamma_i + \Gamma_j - \Gamma_k$.

В случае классических вихрей при увеличении D из этих решений рождаются новые коллинеарные конфигурации, отсутствующие в плоской задаче трех вихрей [8, 4]. В рассматриваемом случае из этих решений рождаются не только коллинеарные, но и новые равнобедренные конфигурации (см. рис. 4).

Заключение об устойчивости коллинеарных конфигураций при конкретных интенсивностях можно сделать по виду траекторий в геометрической интерпретации (см. рис. 2), на которых коллинеарные конфигурации соответствуют точкам касания траекторий с границей $\Delta = 0$, при этом $M_i \neq 0,\ M_i \neq 4R^2$, $i = 1, 2, 3$.

4.5. Бифуркационный анализ

Построим бифуркационные кривые, соответствующие томсоновским, равнобедренным и коллинеарным стационарным решениям. Ввиду того что интеграл h в случае антиподальных вихрей может обращаться в бесконечность, в качестве плоскости диаграммы выберем плоскость $(e^h/(1+e^h),\ D)$. Результаты численного построения бифуркационных диаграмм для случаев различных соотношений интенсивностей представлены на рисунке 4.

Рассмотрим бифуркационную диаграмму при $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \neq \Gamma_3 \neq \Gamma_1$ в двух разных случаях.

1. Для всех индексов выполнено неравенство $a_k < a_i + a_j$**.** Данный случай характеризуется тем, что во всех критических точках $D = d_i$, соответствующих слиянию трех вихрей, интеграл энергии h обращается в бесконечность (см. рис. 4*a*).

Как видно на рисунке 4*a*, при малых D существует три коллинеарные и томсоновская конфигурации. При увеличении D в точках $D = d_k^* = R^2(a_i + a_j + 3a_k)$ от каждой коллинеарной конфигурации отщепляется равнобедренная конфигурация. Затем при минимальном из критических значений $D = d_1$ два коллинеарных решения сливаются с равнобедренной конфигурацией отщепившейся от третьего. При этом из них рождается новая коллинеарная конфигурация. Дальнейшее увеличение D приводит к слиянию третьей коллинеарной конфигурации с одним из равнобедренных решений в точке $D = d_2$. Затем в точке $D = d_t$ томсоновское решение сливается с новым коллинеарным решением. При бóльших значениях D остается всего две ветки бифуркационной диаграммы — новое коллинеарное решение и третья равнобедренная конфигурация. В случае существования максимального значения $D = d_m$ равнобедренная конфигурация доходит до критической точки $D = d_3$ и бифурцирует в коллинеарную конфигурацию. Затем две коллинеарные конфигурации, рожденные в критических точках d_1 и d_3, сливаются при максимальном значении D. Если же условия существования d_m не выполнено, то равнобедренная и коллинеарная конфигурации просто сливаются в точке d_3.

2. Для некоторого набора индексов выполнено $a_k > a_i + a_j$**.** Отличие этого случая заключается в том, что только для двух критических точек $D = d_{i,j}$, соответствующих слиянию трех вихрей, интеграл энергии h обращается в бесконечность. При этом в третьей критической точке ($D = d_k$) интеграл h обнуляется (см. рис. 4*b*).

Выберем для определенности $a_1 > a_2 + a_3$. При малых D так же, как и в предыдущем случае, существует три коллинеарные и томсоновская конфигурации. Так как в данном случае $d_1 < d_1^*$, то от коллинеарных конфигураций отщепляется только два равнобедренных решения. Третье рождается в точке $D = d_1$, причем одновременно с ним рождается еще три коллинеарные конфигурации. Две из них сливаются с другими коллинеарными конфигурациями (из которых родились равнобедренные решения), образуя при этом характерные для бифуркационных диаграмм точки возврата. Оставшиеся после этих бифуркаций две коллинеарные, две равнобедренные и томсоновская конфигурации эволюционируют так же, как и в предыдущем случае.

Интересной особенностью антиподальных вихрей является то, что рождение коллинеарных (и равнобедренных) конфигураций происходит не путем расщепления одного вихря на два в присутствии третьего, а путем расщепления одного антиподального вихря на три. Причем в одной точке при этом может родиться (или исчезнуть) до четырех разных решений.

В случае когда выполнено соотношение $\Gamma_2 = \Gamma_3 \neq \Gamma_1$ (см. рис. 4c), два критических значения, при которых происходит слияние вихрей становятся равны $d_2 = d_3$. Кроме того, две ветки, соответствующие равнобедренным конфигурациям, сливаются в одну. Еще четыре коллинеарные конфигурации также попарно сливаются. В остальном вид оставшихся веток бифуркационной диаграммы схож со случаем неравных интенсивностей (см. рис. 4c).

Наконец, для трех равных интенсивностей все равнобедренные конфигурации сливаются в одну, которая тем не менее отличается от томсоновской конфигурации (см. рис. 4d). Все критические значения d_i также становятся равны. В результате при малых значениях D существует

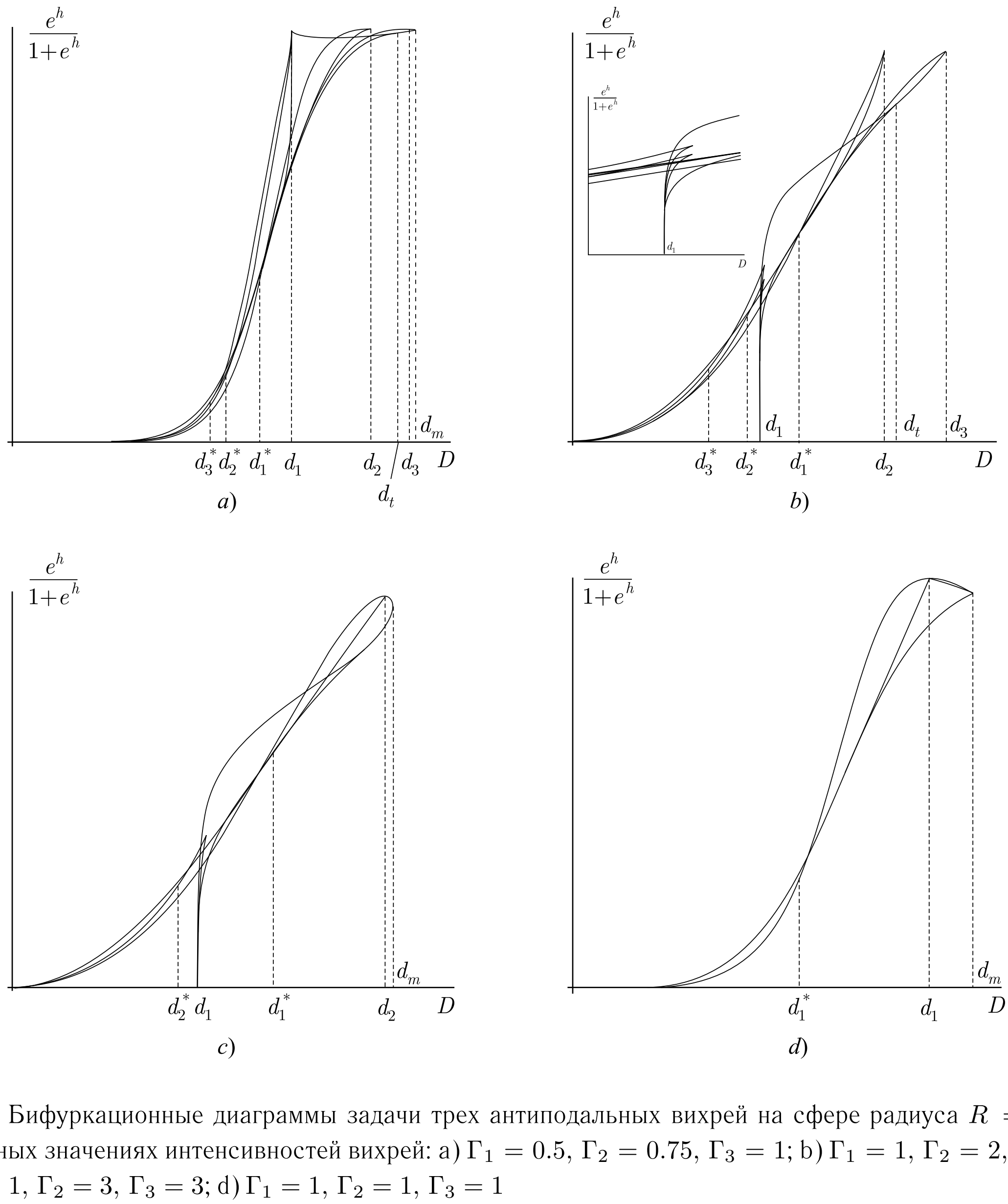

Рис. 4. Бифуркационные диаграммы задачи трех антиподальных вихрей на сфере радиуса $R = 1$ при различных значениях интенсивностей вихрей: a) $\Gamma_1 = 0.5$, $\Gamma_2 = 0.75$, $\Gamma_3 = 1$; b) $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 2$, $\Gamma_3 = 4$; c) $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 3$, $\Gamma_3 = 3$; d) $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 1$, $\Gamma_3 = 1$

томсоновская и одна коллинеарная конфигурации. При увеличении D от коллинеарной конфигурации отщепляется равнобедренная, которая потом с ней же и сливается при критическом значении $D = d_1$. В этой точке рождаются две коллинеарные конфигурации, которые затем сливаются с томсоновской при максимальном значении D.

Список литературы

[1] Богомолов, В. А., Динамика завихренности на сфере, *Изв. АН СССР Мех. жид. и газа*, 1977, № 6, сс. 57–65.

[2] Богомолов, В. А., О двумерной гидродинамике на сфере, *Физика атмосферы и океана*, 1979, т. 15, № 1, сс. 29–35.

[3] Борисов, А. В., Килин, А. А., Мамаев, И. С., Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере, *Нелинейная динамика*, 2005, т. 1, № 2, сс. 233–246.

[4] Борисов, А. В., Мамаев, И. С., *Математические методы динамики вихревых структур*, Москва–Ижевск: ИКИ, 2005, 368 с.

[5] Громека, И. С., О вихревых движениях жидкости на сфере, *Собрание протоколов заседания секции физ.-мат. общества естествоиспытателей при Казанском университете*, в кн. Громека, И. С., *Собр. соч.*, М.: АН СССР, 1952.

[6] Кирхгоф, Г., *Механика. Лекции по математической физике*, М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем. Kirchhoff, G., *Vorlesungen über mathematische Physik*, Leipzig: Mechanik, 1874.

[7] Bolsinov, A. V., Borisov, A. V., Mamaev, I. S., Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics — IV, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 1999, vol. 4, no. 1, pp. 23–50.

[8] a) Borisov, A. V., Pavlov, A. E., Dynamics and Statics of vortices on a Plane and a Sphere. I, *Reg. & Ch. Dynamics*, 1998, vol. 3, no. 1, pp. 28–39.
b) Borisov, A. V., Lebedev, V. G., Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere. II. General compact case, *Reg. & Ch. Dynamics*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 99–114.
c) Borisov, A. V., Lebedev, V. G., Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere. III. General compact case, *Reg. & Ch. Dynamics*, 1998, vol. 3, no. 4, pp. 76–90.

[9] Helmholtz, H., Über Integrale hydrodinamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen, *J. rein. angew. Math.*, 1858, vol. 55, S. 25–55, см. также русский перевод с комментариями С. А. Чаплыгина в кн. Гельмгольц, Г., *Основы вихревой теории*, М.—Иж.: ИКИ, 2002, 82 с.

[10] Kidambi, R., Newton, P. K., Collision of three vortices on a sphere, *Il Nuovo Cimento*, 1999, vol. 22, no. C(6), pp. 779–791.

[11] Kidambi, R., Newton, P. K., Motion of three point vortices on a sphere, *Physica D.*, 1998, vol. 116, pp. 143–175.

[12] Newton, P. K., *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*, Springer, 2001.

[13] Zermelo, E., Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegung in einer Kügelfläche, *Zeitschr. für Math. und Phys.*, 1902, Bd. 47.