

УДК 517.977+517.926

ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НАБЛЮДАТЕЛЕМ

© 2010 г. В. А. Зайцев

Для линейной нестационарной управляемой системы с наблюдателем в предположении локальной интегрируемости по Лебегу и интегральной ограниченности коэффициентов на $\mathbb{R}$ построена линейная обратная связь такая, что замкнутая система “объект плюс регулятор” приводима по Ляпунову к специальному треугольному виду, соответствующему независимому сдвигу диагональных коэффициентов исходной системы и системы асимптотической оценки состояния на любую наперед заданную величину. Для периодической системы показана периодичность построенных управлений и преобразования Ляпунова. Получены следствия о равномерной стабилизируемости и глобальной управляемости центральных и особых показателей системы.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$, $*$ означает операцию транспонирования; M_{mn} – пространство вещественных $m \times n$ -матриц с нормой $|A| = \max_{|x| \leq 1} |Ax|$. Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему с наблюдателем

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^k. \quad (2)$$

Будем предполагать, что матричные функции A , B , C по норме локально интегрируемы по Лебегу и интегрально ограничены [1, с. 252], причем B и C с квадратом нормы, т.е.

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |A(s)| ds < \infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |B(s)|^2 ds < \infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |C(s)|^2 ds < \infty. \quad (3)$$

Исследуется задача о построении обратной связи в системе (1), (2), стабилизирующей эту систему. Для стационарной системы (1), (2) эта задача решается с помощью построения системы асимптотической оценки состояния [2, теорема 7.7]. Здесь получен аналогичный результат для нестационарных систем. Построим по системе (1), (2) и по выходу y систему

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + V(t)(y(t) - C^*(t)\hat{x}) + B(t)u, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

Здесь $\hat{x}(t)$ – оценка состояния системы (1), (2). Пусть закон управления u имеет вид

$$u = U(t)\hat{x}. \quad (5)$$

Подставив управление (5) в систему (1), (2), (4), получим замкнутую $2n$ -мерную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)U(t) \\ V(t)C^*(t) & A(t) + B(t)U(t) - V(t)C^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Пусть $\tilde{x} = x - \hat{x}$. Невырожденной заменой переменных $\begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$, $I \in M_{nn}$ – единичная матрица, систему (6) приведем к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + B(t)U(t) & -B(t)U(t) \\ 0 & A(t) - V(t)C^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Если система (1), (2) стационарная и обладает свойством полной управляемости и полной наблюдаемости, то можно выбрать постоянные управления U и V так, чтобы характеристические многочлены $\chi(A + BU)$ и $\chi(A - VC^*)$ были устойчивыми [2, теорема 7.7]. Отсюда будет следовать стабилизируемость системы (7), а значит, и замкнутой системы (6).

В настоящей работе построено стабилизирующее управление для нестационарной системы (1), (2), в частности, для системы с периодическими коэффициентами. В системах (7) и (6) матрицы $U(\cdot)$ и $V(\cdot)$ играют роль управлений. Будем считать допустимым управлением всякую функцию $U(\cdot)$ (или $V(\cdot)$) со значениями в M_{mn} (соответственно в M_{nk}), такую, что квадрат ее нормы является локально интегрируемой по Лебегу и интегрально ограниченной на $\mathbb{R}$ функцией, т.е. $U(\cdot)$ – допустимое управление, если $|U| \in L_2^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} |U(s)|^2 ds < \infty$.

Пусть $X(t, s)$ – матрица Коши системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (8)$$

т.е. решение матричной задачи Коши $\dot{X} = A(t)X$, $X(s) = I$. Несложно показать (с помощью леммы Гронуолла–Беллмана и формулы Остроградского–Лиувилля), что из первого условия из (3) вытекает следующее свойство матрицы Коши: для любого $\varkappa > 0$ существуют числа $c_1, c_2 > 0$ такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и для любых $t, s \in [\tau, \tau + \varkappa]$ выполнены неравенства

$$|X(t, s)| \leq c_1, \quad \det X(t, s) \geq c_2 > 0. \quad (9)$$

Построим матрицу Калмана $W(t, \tau) = \int_{\tau}^t X(t, s)B(s)B^*(s)X^*(t, s) ds$ системы (1). Матрица $W(t, \tau)$ для любых $t \geq \tau$ является симметрической, неотрицательно-определенной, и для любого $t_1 \geq t$ выполняется неравенство $W(t_1, \tau) \geq W(t, \tau)$ в смысле квадратичных форм.

Напомним [3], что система (1) называется: а) *вполне управляемой* (ВУ) на отрезке $[t_0, t_0 + \vartheta]$, если матрица Калмана $W(t_0 + \vartheta, t_0)$ положительно определена; б) *ϑ -равномерно вполне управляемой* (ϑ -РВУ), если существует $\alpha > 0$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $W(t + \vartheta, t) \geq \alpha I$, понимаемое в смысле квадратичных форм; в) *равномерно вполне управляемой* (РВУ), если существует $\vartheta > 0$ такое, что система (1) ϑ -РВУ.

Из второго условия из (3) и свойства (9) следует, что если система (1) ϑ -РВУ, то существуют $\alpha, \delta > 0$ (зависящие от ϑ) такие, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$0 < \alpha I \leq W(t + \vartheta, t) \leq \delta I. \quad (10)$$

Далее, рассмотрим свойство *полной наблюдаемости* [4, с. 304] системы (1), (2) с нулевым входным сигналом, т.е. при $u = 0$:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad y = C^*(t)x. \quad (11)$$

В силу принципа двойственности [4, с. 304] система (11) ϑ -равномерно вполне наблюдаема (ϑ -РВН) тогда и только тогда, когда система

$$\dot{x} = -A^*(t)x + C(t)v, \quad (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad (12)$$

ϑ -РВУ, и система (11) равномерно вполне наблюдаема (РВН) тогда и только тогда, когда система (12) РВУ.

Если система (1) ϑ -РВУ, то она ϑ_1 -РВУ для любого $\vartheta_1 \geq \vartheta$. Поэтому если система (1) РВУ, а система (11) РВН, то без ограничения общности можно считать, что существует общее $\vartheta > 0$ такое, что система (1) ϑ -РВУ и система (11) ϑ -РВН.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad (13)$$

матрица которой является диагональным блоком матрицы системы (7). Обозначим через $X_U(t, s)$ матрицу Коши системы (13). Будем говорить, что к системе (1) применимо λ -преобразование, если существует такое $T > 0$, что для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется допустимое управление $U(\cdot)$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (13) равенство

$$X_U((k+1)T, kT) = e^{\lambda T} X((k+1)T, kT) \quad (14)$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$.

и $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|U\|_{L_2(\Delta_k)} < \infty$, т.е. $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — это допустимое управление, а $Y(\cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Y} = (A(t) + B(t)U(t))Y \quad (21)$$

и краевым условиям (18). Из соотношения (21) и первого краевого условия следует, что $Y(t) = X_U(t, kT)$, а из второго краевого условия вытекает равенство (14).

В силу свойства (9) существуют числа $\beta_3, \beta_4 > 0$ такие, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ и для любого $t \in \Delta_k$ выполнено неравенство $0 < \beta_3 \leq \det X(t, kT) \leq \beta_4$. Таким образом, наша задача сводится к нахождению такой матричной функции $U_1(\cdot)$, удовлетворяющей условиям $|U_1| \in L_2(\Delta_k)$ и $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|U_1\|_{L_2(\Delta_k)} < \infty$, что выполнено равенство (20) и условие

$$\det \left(I + \int_{kT}^t X(kT, s) B(s) U_1(s) ds \right) \geq \gamma$$

при всех $t \in \Delta_k$ и некотором не зависящем от $k \in \mathbb{Z}$ и от t числе $\gamma > 0$. Отсюда будет следовать неравенство $\det Y(t) \geq \beta_2$.

Будем искать $U_1(t)$ в виде $U_1(t) = B^*(t)X^*(kT, t)H$. Тогда из соотношения (20) следует, что $I + W((k+1)T, kT)H = e^{\lambda T}I$, где $W(t, \tau)$ — матрица Калмана. Система (1) ϑ -РВУ, следовательно, она T -РВУ. Поэтому матрица $W((k+1)T, kT)$ обратима и

$$H = (e^{\lambda T} - 1)W^{-1}((k+1)T, kT).$$

Покажем, что для всех $t \in \Delta_k$ матрица

$$R(t) = I + \int_{kT}^t X(kT, s) B(s) B^*(s) X^*(kT, s) ds (e^{\lambda T} - 1) W^{-1}((k+1)T, kT)$$

обратима и $\det R(t) \geq \gamma > 0$ для всех $t \in \Delta_k$, где γ не зависит от $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим матрицу $Q(t) := R(t)W((k+1)T, kT) = W((k+1)T, kT) + (e^{\lambda T} - 1)W(t, kT)$. В силу свойства (10) $0 < \gamma_1 \leq \det W((k+1)T, kT) \leq \gamma_2$, где γ_1, γ_2 не зависят от $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому достаточно показать, что $\det Q(t) \geq \gamma_3 > 0$ для всех $t \in \Delta_k$, где γ_3 не зависит от $k \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_{kT}^{(k+1)T} X(kT, s) B(s) B^*(s) X^*(kT, s) ds - \int_{kT}^t X(kT, s) B(s) B^*(s) X^*(kT, s) ds + \\ &\quad + e^{\lambda T} \int_{kT}^t X(kT, s) B(s) B^*(s) X^*(kT, s) ds = \\ &= \int_t^{(k+1)T} X(kT, s) B(s) B^*(s) X^*(kT, s) ds + e^{\lambda T} \int_{kT}^t X(kT, s) B(s) B^*(s) X^*(kT, s) ds = \\ &= X(kT, t) \int_t^{(k+1)T} X(t, s) B(s) B^*(s) X^*(t, s) ds X^*(kT, t) + e^{\lambda T} \int_{kT}^t X(kT, s) B(s) B^*(s) X^*(kT, s) ds = \\ &= X(kT, t) W((k+1)T, t) X^*(kT, t) + e^{\lambda T} W(t, kT). \end{aligned}$$

Для всех $t \in [kT, kT + \vartheta]$ в силу ϑ -равномерной вполне управляемости выполнено неравенство $W((k+1)T, t) \geq W(t + \vartheta, t) \geq \alpha I$. Отсюда и из свойства (9) следует существование

$\alpha_1 > 0$ (не зависящего от k) такого, что $X(kT, t)W((k+1)T, t)X^*(kT, t) \geq \alpha_1 I$. Матрица $e^{\lambda T}W(t, kT)$ неотрицательно определена, следовательно, $Q(t) \geq \alpha_1 I > 0$, $t \in [kT, kT + \vartheta]$.

Если $t \in [kT + \vartheta, (k+1)T]$, то $W(t, kT) \geq W(kT + \vartheta, kT) \geq \alpha I$. Отсюда следует, что $e^{\lambda T}W(t, kT) \geq \alpha_2 I > 0$, где $\alpha_2 = \alpha e^{\lambda T}$. Матрица $X(kT, t)W((k+1)T, t)X^*(kT, t)$ неотрицательно определена, следовательно, $Q(t) \geq \alpha_2 I > 0$, $t \in [kT + \vartheta, (k+1)T]$. Таким образом, для всех $t \in \Delta_k$ выполнено неравенство $Q(t) \geq \alpha_3 I > 0$, где $\alpha_3 = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\det Q(t) \geq \gamma_3 > 0$, $t \in \Delta_k$, где γ_3 не зависит от $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что построенное управление U_1 будет удовлетворять требуемым условиям. Имеем $U_1(t) = B^*(t)X^*(kT, t)W^{-1}((k+1)T, kT)(e^{\lambda T} - 1)$, $t \in \Delta_k$. Поскольку система (1) ϑ -РВУ, то $W^{-1}((k+1)T, kT)$, ограничена по норме равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$. В силу свойства (9) матрица $X^*(kT, t)$, $t \in \Delta_k$, ограничена по норме равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$. В силу второго условия из (3) функция $B^*(\cdot)$ также будет удовлетворять второму условию из (3). Поэтому $|U_1| \in L_2(\Delta_k)$ и $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|U_1\|_{L_2(\Delta_k)} < \infty$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если к системе (1) применимо λ -преобразование, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется допустимое управление $U(\cdot)$, обеспечивающее равенство (14) для всех $k \in \mathbb{Z}$. Тогда матрица Коши $X_U(t, s)$ системы (13) и матрица Коши $Z(t, s)$ системы (15) будут совпадать при всех $t, s \in \{kT, k \in \mathbb{Z}\}$. Отсюда (см. [6]) будет следовать асимптотическая эквивалентность систем (13) и (15).

Следствие 1. Пусть система (1) РВУ. Тогда для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ существует допустимое управление $U(\cdot)$, при котором система (13) приводима к системе (15).

Замечание 2. Теорема 1 сформулирована и доказана в работе [5] в предположении, что функция $A(\cdot)$ ограничена и непрерывна и $B(\cdot)$ ограничена и равномерно непрерывна; в качестве допустимых управлений выбирались ограниченные кусочно-непрерывные функции. Доказательство теоремы 1 в работе [5] легко переносится на случай, когда функция $A(\cdot)$ ограничена и кусочно-непрерывна и функция $B(\cdot)$ ограничена и кусочно-равномерно непрерывна. Здесь приведено более простое доказательство этой теоремы при более слабых условиях (3); класс допустимых управлений здесь шире. В случае ограниченной в существенном на $\mathbb{R}$ матрицы $B(\cdot)$ множество допустимых управлений можно сузить: управление $U(\cdot)$, обеспечивающее равенство (14), можно выбрать измеримым и ограниченным на $\mathbb{R}$. В работе [5] получен ряд следствий о глобальной управляемости центральных и особых показателей [1, с. 116], эти результаты дополняют полученные ранее результаты Е.Л. Тонкова [7] о стабилизации системы (13). Доказательства этих следствий основаны на следующем факте. Полный спектр показателей Ляпунова, а также центральные и особые показатели являются ляпуновскими инвариантами. Преобразование Ляпунова линейной системы не изменяет эти характеристики. При переходе от системы (8) к системе (15) эти характеристики сдвигаются на λ . Таким образом, если система (1) РВУ, то с помощью допустимых управлений ляпуновские инварианты системы (13) можно сделать совпадающими с ляпуновскими инвариантами системы (15). В частности, можно глобально управлять верхним или нижним центральным, или особым показателем системы (13), можно глобально сдвигать полный спектр показателей Ляпунова системы (13) и стабилизировать систему (13).

Замечание 3. В работе [8] в предположении, что функция $A(\cdot)$ ограничена и кусочно-непрерывна и функция $B(\cdot)$ ограничена и кусочно-равномерно непрерывна, доказано, что если система (1) РВУ, то система (13) глобально скаляризуема [8]. Отсюда были получены следствия о глобальной управляемости центральных, особых, экспоненциальных показателей и полного спектра показателей Ляпунова.

Теорема 2. Пусть $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ – ω -периодические функции и система (1) вполне управляема. Тогда существует такое $T > 0$, кратное ω , что для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ найдется T -периодическое допустимое управление $U(\cdot)$, обеспечивающее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ T -периодической системы (13) равенство (14) при всех $k \in \mathbb{Z}$. При этом существует T -периодическое преобразование Ляпунова $x = L(t)z$, приводящее T -периодическую систему (13) к T -периодической системе (15).

Доказательство. Если ω -периодическая система (1) вполне управляема, то она вполне управляема на любом отрезке длины $n\omega$ (однако нельзя утверждать [2, формула (2.26)], что

она вполне управляема на любом отрезке длиной в период [7]). Положим $\vartheta = n\omega$. Тогда система (1) ϑ -периодическая и ϑ -РВУ. Положим $T = 2\vartheta$ и построим управление $U_1(t)$ так же, как в теореме 2. Для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $t \in [0, T]$ выполняются равенства

$$X(t + kT, kT) = X(t, 0), \quad W(t + kT, kT) = W(t, 0).$$

Поэтому управление $U_1(t)$ является T -периодическим. Пусть функция $Y_k(t)$, $t \in \Delta_k$, определена равенством (19). Тогда $Y_{k+1}(t + T) = Y_k(t)$ для любых $k \in \mathbb{Z}$ и $t \in \Delta_k$.

Действительно, пусть $t \in \Delta_k$, тогда $t + T \in \Delta_{k+1}$. Имеем

$$\begin{aligned} Y_{k+1}(t + T) &= X(t + T, (k + 1)T) \left(I + \int_{(k+1)T}^{t+T} X((k + 1)T, s) B(s) U_1(s) ds \right) = |s = \tau + T| = \\ &= X(t + T, kT + T) \left(I + \int_{kT}^t X(kT + T, \tau + T) B(\tau + T) U_1(\tau + T) d\tau \right) = \\ &= X(t, kT) \left(I + \int_{kT}^t X(kT, \tau) B(\tau) U_1(\tau) d\tau \right) = Y_k(t). \end{aligned}$$

Следовательно, управление $U(t)$, определенное при $t \in [kT, (k + 1)T)$ равенством $U(t) = U_1(t)Y_k^{-1}(t)$, также является T -периодическим. Таким образом, система (13) T -периодическая и выполнено равенство (14). Преобразование $x = L(t)z$, где $L(t) = X_U(t, 0)Z(0, t)$, является ляпуновским. Оно приводит систему (13) к системе (15). В силу равенства (14) имеет место равенство $X_U(T, 0) = Z(T, 0)$, а в силу T -периодичности систем (13) и (15) выполняются равенства $X_U(t + T, T) = X_U(t, 0)$ и $Z(t + T, T) = Z(t, 0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} L(t + T) &= X_U(t + T, 0)Z(0, t + T) = X_U(t + T, T)X_U(T, 0)Z(0, T)Z(T, t + T) = \\ &= X_U(t + T, T)Z(T, t + T) = X_U(t, 0)Z(0, t) = L(t). \end{aligned}$$

Таким образом, ляпуновское преобразование является T -периодическим. Теорема доказана.

Любая T -периодическая система приводима посредством вещественного T_1 -периодического преобразования Ляпунова ($T_1 = 2T$) к системе с постоянной матрицей. При этом в условиях теоремы 2 можно глобально сдвигать спектр показателей Ляпунова системы (13). Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. Пусть $A(\cdot), B(\cdot)$ – ω -периодические функции и система (1) вполне управляема. Тогда существует $T_1 > 0$ (равное $4n\omega$) такое, что для любого $\kappa > 0$ найдется T_1 -периодическое допустимое управление $U(\cdot)$ и T_1 -периодическое преобразование Ляпунова $x = L_1(t)w$, приводящее T_1 -периодическую систему (13) к системе $\dot{w} = Qw$ с постоянной матрицей такой, что $\operatorname{Re} q_i \leq -\kappa < 0$ для всех собственных значений q_i матрицы Q .

Замечание 4. В случае, когда коэффициенты системы (1) ω -периодические ограниченные кусочно-непрерывные функции, справедливо более сильное по сравнению с теоремой 2 утверждение [9]: условие полной управляемости системы (1) является необходимым и достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости системы (13), т.е. приводимости к произвольной системе $\dot{z} = Q(t)z$ с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей, а не только к системе вида (15).

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{\tilde{x}} = (A(t) - V(t)C^*(t))\tilde{x}. \quad (22)$$

Обозначим через $\tilde{X}_V(t, s)$ матрицу Коши системы (22) с допустимым управлением $V(\cdot)$ и через $\tilde{X}(t, s)$ матрицу Коши системы $\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x}$ (она совпадает с $X(t, s)$). В силу принципа двойственности можно сформулировать утверждение, аналогичное теореме 1.

Следствие 3. Пусть система (11) РВН. Тогда существует $T > 0$ такое, что для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ найдется допустимое управление $V : \mathbb{R} \rightarrow M_{nk}$, обеспечивающее для матрицы Коши $\tilde{X}_V(t, s)$ системы (22) равенство

$$\tilde{X}_V((k+1)T, kT) = e^{\mu T} \tilde{X}((k+1)T, kT) \quad (23)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть система (11) ϑ -РВН. Тогда система (12) ϑ -РВУ. Положим $T = 2\vartheta$. Зафиксируем любое $\mu \in \mathbb{R}$. Обозначим через $P(t, s)$ матрицу Коши системы $\dot{x} = -A^*(t)x$ и через $P_V^*(t, s)$ матрицу Коши системы

$$\dot{x} = (-A^*(t) + C(t)V^*(t))x. \quad (24)$$

Тогда для всех $t, s \in \mathbb{R}$ справедливы равенства $P(t, s) = \tilde{X}^*(s, t)$, $P_V^*(t, s) = \tilde{X}_V^*(s, t)$. По теореме 2 найдется допустимое управление $V^* : \mathbb{R} \rightarrow M_{kn}$, обеспечивающее для матрицы Коши $P_V^*(t, s)$ системы (24) равенство $P_V^*((k+1)T, kT) = e^{-\mu T} P((k+1)T, kT)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, следовательно, $\tilde{X}_V^*(kT, (k+1)T) = e^{-\mu T} \tilde{X}^*(kT, (k+1)T)$. Транспонировав последнее равенство, затем взяв обратные матрицы для левой и правой частей, получим равенство (23). Следствие доказано.

Следствие 4. Пусть $A(\cdot), C(\cdot)$ – ω -периодические функции и система (11) вполне наблюдаема. Тогда существует такое T (равное $2\pi\omega$), что для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ найдется T -периодическое допустимое управление $V(\cdot)$, обеспечивающее для матрицы Коши $\tilde{X}_V(t, s)$ T -периодической системы (22) равенство (23) при всех $k \in \mathbb{Z}$. При этом существует T -периодическое преобразование Ляпунова $\tilde{x} = \tilde{L}(t)\tilde{z}$, приводящее T -периодическую систему (22) к T -периодической системе $\dot{\tilde{z}} = (A(t) + \mu I)\tilde{z}$.

Доказательство следствия 4 аналогично доказательству теоремы 2.

Перейдем к исследованию системы (7). Обозначим через $X_{U,V}(t, s)$ матрицу Коши системы (7), где $U(\cdot), V(\cdot)$ – допустимые управления. Введем в рассмотрение систему

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + \lambda I & S(t) \\ 0 & A(t) + \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Здесь $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ – некоторые числа, $S(t)$ – некоторая интегрально ограниченная по норме матричная функция. Обозначим через $Z(t, s)$ матрицу Коши системы (25).

Теорема 3. Пусть система (1) РВУ и система (11) РВН. Тогда существует $T > 0$ такое, что для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ найдутся допустимые управления $U(t), V(t)$ и кусочно-непрерывная ограниченная матрица $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что для матрицы Коши $X_{U,V}(t, s)$ системы (7) с этими управлениями выполнено равенство

$$X_{U,V}((k+1)T, kT) = Z((k+1)T, kT) \quad (26)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть система (1) ϑ -РВУ и система (11) ϑ -РВН. Положим $T = 2\vartheta$. Зафиксируем числа $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Построим по теореме 2 и 4 управления $U(t)$ и $V(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обеспечивающие равенства (14) и (23) для всех $k \in \mathbb{Z}$. Построим матрицу Коши системы (7) с такими $U(t)$ и $V(t)$:

$$X_{U,V}(t, s) = \begin{pmatrix} X_U(t, s) & \int_s^t X_U(t, \tau)(-B(\tau)U(\tau))\tilde{X}_V(\tau, s) d\tau \\ 0 & \tilde{X}_V(t, s) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Запишем матрицу Коши системы (25)

$$Z(t, s) = \begin{pmatrix} e^{\lambda(t-s)} X(t, s) & \int_s^t e^{\lambda(t-\tau)} X(t, \tau) S(\tau) \tilde{X}(\tau, s) e^{\mu(\tau-s)} d\tau \\ 0 & e^{\mu(t-s)} \tilde{X}(t, s) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Очевидно, для диагональных блоков матриц (27) и (28) равенство (26) выполнено в силу равенств (14) и (23). Запишем равенство (26) для правых верхних блоков матриц (27) и (28). Учитывая равенство (14), после несложных выкладок получаем равенство

$$\int_{kT}^{(k+1)T} X_U(kT, \tau) (-B(\tau)U(\tau)) \tilde{X}_V(\tau, kT) d\tau = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\lambda(kT-\tau)} X(kT, \tau) S(\tau) \tilde{X}(\tau, kT) e^{\mu(\tau-kT)} d\tau.$$

Обозначим левую часть последнего равенства через H_k ,

$$K_k(\tau) := e^{\lambda(kT-\tau)} X(kT, \tau), \quad N_k(\tau) := \tilde{X}(\tau, kT) e^{\mu(\tau-kT)}, \quad \tau \in \Delta_k.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$H_k = \int_{kT}^{(k+1)T} K_k(\tau) S(\tau) N_k(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Матрицы $X_U(kT, \tau)$, $\tilde{X}_V(\tau, kT)$, $K_k(\tau)$, $N_k(\tau)$, $\tau \in \Delta_k$, ограничены по норме равномерно для всех $k \in \mathbb{Z}$; матрица $B(\tau)U(\tau)$ интегрально ограничена на $\mathbb{R}$. Поэтому найдутся (не зависящие от k) числа $\rho_1, \rho_2 > 0$ такие, что для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $t \in \Delta_k$ выполнены неравенства $|H_k| \leq \rho_1$, $|K_k(t)| \leq \rho_1$, $|N_k(t)| \leq \rho_1$ и $\det K_k(t) \geq \rho_2 > 0$, $\det N_k(t) \geq \rho_2 > 0$. Определим матрицу $S_k(t)$ на промежутке $t \in [kT, (k+1)T)$ равенством $S_k(t) = T^{-1} K_k^{-1}(t) H_k N_k^{-1}(t)$, и пусть $S(t) = S_k(t)$ при $t \in [kT, (k+1)T)$. Тогда матрица $S(t)$ ограничена на $\mathbb{R}$, кусочно-непрерывна и для нее выполнено равенство (29). Теорема доказана.

Следствие 5. Пусть система (1) РВУ и система (11) РВН. Тогда для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ найдутся допустимые управления $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ такие, что система (7) (и система (6)) с этими управлениями приводима к системе (25) с некоторой кусочно-непрерывной ограниченной матрицей $S(t)$.

Доказательство. Построим управления $U(t)$, $V(t)$ и матрицу $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, по теореме 3. Тогда матрицы Коши систем (7) и (25) совпадают на множестве $\{kT, k \in \mathbb{Z}\}$. Отсюда будет следовать их асимптотическая эквивалентность.

Следствие 6. Пусть $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ – ω -периодические функции, система (1) вполне управляема и система (11) вполне наблюдаема. Тогда для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ найдутся $T = 2\pi\omega$ -периодические допустимые управления $U(t)$, $V(t)$ и T -периодическая кусочно-непрерывная ограниченная матрица $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такие, что для матрицы Коши $X_{U,V}(t, s)$ системы (7) с этими управлениями выполнено равенство (26) для всех $k \in \mathbb{Z}$. При этом существует T -периодическое преобразование Ляпунова, приводящее T -периодическую систему (7) к T -периодической системе (25).

Доказательство. Система (1) ϑ -РВУ и система (11) ϑ -РВН для $\vartheta = n\omega$. Полагаем $T = 2\vartheta$. Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ построим $U(t)$, $V(t)$ и $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$, по теореме 3. Функции $U(t)$ и $V(t)$ T -периодические в силу теоремы 2 и следствия 4. Поэтому системы (13) и (22) T -периодические. Следовательно, для любых $t \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства $X_U(t, 0) = X_U(t + kT, kT)$ и $\tilde{X}_V(t, 0) = \tilde{X}_V(t + kT, kT)$. Отсюда следует, что $H_k = H_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Легко также проверить равенства $K_k(t) = K_{k+1}(t + T)$, $N_k(t) = N_{k+1}(t + T)$, $t \in \Delta_k$. Отсюда следует, что $S(t)$ – периодическая функция. Таким образом, система (25) является T -периодической (так же, как и система (7)) и выполнены равенства $X_{U,V}(t + T, T) =$

$= X_{U,V}(t, 0)$ и $Z(t + T, T) = Z(t, 0)$. Тогда из равенства (26) можно легко получить (на-
пример, так же, как в теореме 2), что матрица Ляпунова $L(t) = X_{U,V}(t, 0)Z(0, t)$ является
 T -периодической.

Замечание 5. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + \lambda I & 0 \\ 0 & A(t) + \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Центральные показатели системы (25) и системы (30) совпадают. Действительно, пусть
 $x = T(t)\xi$ – преобразование Перрона [1, с. 263], приводящее систему $\dot{x} = A(t)x$ к треугольной
системе $\dot{\xi} = R(t)\xi$ с матрицей $R = T^{-1}AT - T^{-1}\dot{T}$. Тогда преобразование

$$\begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(t) & 0 \\ 0 & T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix}$$

является преобразованием Перрона, которое приводит систему (25) к треугольной системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t) + \lambda I & T^{-1}(t)S(t)T(t) \\ 0 & R(t) + \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

с интегрально ограниченной матрицей коэффициентов, а систему (30) – к треугольной системе

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t) + \lambda I & 0 \\ 0 & R(t) + \mu I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Преобразование Перрона является ляпуновским, следовательно, оно не изменяет показателей.
Таким образом, центральные показатели совпадают для систем (25) и (31) и совпадают для
систем (30) и (32). Известно [1, с. 120], что центральные показатели треугольной системы и
системы ее диагонального приближения совпадают. Следовательно, эти показатели совпадают
для систем (31) и (32), поскольку диагонали этих систем равны. Поэтому эти показатели равны
для систем (25) и (30). Аналогичное утверждение имеет место и для особых показателей.

Из этих рассуждений и теоремы 3 вытекают следствия о глобальной управляемости цен-
тральных и особых показателей. Их поведение характеризуется диагональными блоками, а
с помощью выбора λ (и μ) их можно перемещать как угодно. Сформулируем некоторые
следствия.

Следствие 7. Пусть система (1) РВУ, система (11) РВН. Тогда система (7) обладает
свойством глобальной управляемости верхнего центрального показателя, т.е. для любого
 $\alpha \in \mathbb{R}$ существуют допустимые управления U и V такие, что верхний центральный по-
казатель $\Omega_{U,V}$ системы (7) удовлетворяет равенству $\Omega_{U,V} = \alpha$.

Доказательство. Пусть $\Omega(A)$ – верхний центральный показатель системы $\dot{x} = A(t)x$.
Тогда верхний центральный показатель системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix}$$

также равен $\Omega(A)$. Для любого α выберем $\lambda = \mu = \alpha - \Omega(A)$ и построим для этих λ и μ
управления U и V по теореме 3. Тогда $\Omega_{U,V}$ для системы (7) совпадет с верхним центральным
показателем системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) + \lambda I & 0 \\ 0 & A(t) + \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{x} \end{pmatrix},$$

который равен α .

Аналогичные утверждения можно сформулировать для нижнего центрального ω , верхнего Ω^0 и нижнего ω_0 особых показателей. Далее, система (7) называется *равномерно стабилизируемой* [7], если для любого $\alpha > 0$ существуют допустимые управления U и V такие, что верхний особый показатель $\Omega_{U,V}^0$ системы (7) удовлетворяет неравенству $\Omega_{U,V}^0 < -\alpha$. Очевидно следующее утверждение.

Следствие 8. Пусть система (1) РВУ, система (11) РВН. Тогда система (7) равномерно стабилизируема.

В заключение сформулируем утверждения, которые вытекают из упомянутого в замечании 3 результата С.Н. Поповой о глобальной скаляризуемости и из полученных здесь результатов. Предположим, что функция $A(\cdot)$ ограничена и кусочно-непрерывна и $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ ограничены и кусочно-равномерно непрерывны.

Следствие 9. Пусть система (1) РВУ, система (11) РВН. Тогда для любых ограниченных кусочно-непрерывных функций $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ существуют кусочно-непрерывные ограниченные управления $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ и матрица $S(\cdot)$ такие, что система (7) с этими управлениями асимптотически эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t)I & S(t) \\ 0 & q(t)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Доказательство. Возьмем любые ограниченные кусочно-непрерывные функции $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и для произвольных $t, s \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\varphi(t, s) = \exp \int_s^t p(\tau) d\tau, \quad \psi(t, s) = \exp \int_s^t q(\tau) d\tau.$$

По теореме 1 из [8] построим управление $U(\cdot)$, обеспечивающее равенства

$$X_U(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = F_{k+1}Q_k F_k^{-1} \varphi(k\vartheta, (k-1)\vartheta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(обозначения F_k , Q_k см. в [8]). Перемножая эти матрицы, при каждом $k \in \mathbb{Z}$ получаем равенство $X_U(k\vartheta, 0) = F_{k+1}T_k F_1^{-1} \varphi(k\vartheta, 0)$. Здесь $T_k := Q_k Q_{k-1} \cdots Q_1$ (в теореме 1 из [8] эта матрица обозначена через $\tilde{Q}_k$). Далее построим матрицу $L(t) := X_U(t, 0)\varphi(0, t)$. В теореме 1 из [8] доказано, что $L(t)$ – матрица Ляпунова.

Далее, поскольку система (11) РВН, то система (12) РВУ. По теореме 1 из [8] построим управление $V^*(\cdot)$, которое обеспечивает для матрицы Коши $P_{V^*}(t, s)$ системы (24) равенства

$$P_{V^*}(k\vartheta, (k-1)\vartheta) = \tilde{F}_{k+1} \tilde{Q}_k \tilde{F}_k^{-1} \psi^{-1}(k\vartheta, (k-1)\vartheta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(определение матриц $\tilde{F}_k$, $\tilde{Q}_k$ вытекает из доказательства теоремы 1 работы [8]). Перемножая эти матрицы, для всех $k \in \mathbb{Z}$ получаем равенства $P_{V^*}(k\vartheta, 0) = \tilde{F}_{k+1} \tilde{T}_k \tilde{F}_1^{-1} \psi^{-1}(k\vartheta, 0)$; здесь $\tilde{T}_k := \tilde{Q}_k \tilde{Q}_{k-1} \cdots \tilde{Q}_1$. Транспонируем последнее равенство, затем возьмем обратные матрицы для левой и правой частей. Далее, учитывая, что $P_{V^*}(t, s) = \tilde{X}_V^*(s, t)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$, получаем равенство

$$\tilde{X}_V(k\vartheta, 0) = \tilde{F}_1^* (\tilde{T}_k^{-1})^* (\tilde{F}_{k+1}^{-1})^* \psi(k\vartheta, 0).$$

Полагаем $\tilde{L}(t) := \tilde{X}_V(t, 0)\psi(0, t)$. В этом случае $\tilde{L}(t)$ – матрица Ляпунова (доказывается аналогично). Пусть $\mathbf{L}(t) = \text{diag}\{L(t), \tilde{L}(t)\}$. Тогда ляпуновское преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{L}(t)\mathbf{z}$, где $\mathbf{x} = \text{col}(x, \tilde{x})$, $\mathbf{z} = \text{col}(z, \tilde{z})$, приводит систему (7) к системе (33). Матрица $S(t)$ находится из равенства вида (29), где $T = \vartheta$, $K_k(\tau) = \varphi(k\vartheta, \tau)I$, $N_k(\tau) = \psi(\tau, k\vartheta)I$. Она является кусочно-непрерывной и ограниченной, поскольку $\mathbf{L}(t)$ – ляпуновское преобразование и $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ кусочно-непрерывны и ограничены. Следствие доказано.

Из следствия 9 вытекает, что следствия 1–4 работы [8] можно переформулировать для системы (7). Несложно также перенести теорему 3 работы [8] о глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова на систему (7).

Следствие 10. Пусть $A(\cdot)$ ограничена и кусочно непрерывна и $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ ограничены и кусочно-равномерно непрерывны. Пусть система (1) РВУ, система (11) РВН. Тогда для любых чисел $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{2n}$ существуют кусочно-непрерывные ограниченные управления $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ такие, что система (7) с этими управлениями имеет полным спектром показателей Ляпунова набор $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-01-00258).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М., 2004.
3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Bol. Soc. mathem. mexic. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М., 1968.
5. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 60–67.
6. Макаров Е.К. О дискретности асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1322–1331.
7. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
8. Попова С.Н. Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 41–46.
9. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск

Поступила в редакцию
15.01.2008 г.